# فهرست مطالب


| | | |
|---|---|---|
| ۱ | **فصل اول: دایره** | |
| | درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره | ۸ |
| | درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره | ۳۵ |
| | درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی | ۵۶ |
| ۲ | **فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها** | |
| | درس اول: تبدیل‌های هندسی | ۷۴ |
| | درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها | ۹۳ |
| ۳ | **فصل سوم: روابط طولی در مثلث** | |
| | درس اول: قضیهٔ سینوس‌ها | ۱۰۰ |
| | درس دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها | ۱۰۶ |
| | درس سوم: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و ... | ۱۱۷ |
| | درس چهارم: قضیهٔ هرون | ۱۲۴ |
| | **پاسخ‌های تشریحی** | ۱۳۱ |

. کتاب‌های **آی‌کیو** .

IQ Books

Geometric

# هندسه یازدهم

هندسه یازدهم

. فصل اول .

# دایره

Chapter One

# Circle

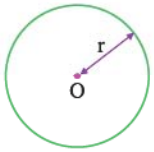
John Forbes **Nash**

فصل اول

# ۱ درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

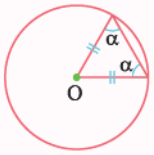
هندسهٔ **یازدهم**

## مفاهیم اولیه در دایره




**دایره:** مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت، مقدار ثابتی است دایره گفته می‌شود. نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

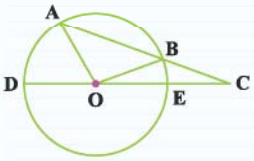
**نکته** اگر در دایره مثلثی دیده شود که دو ضلع از آن، دو شعاع دایره باشد، حتماً آن مثلث، متساوی‌الساقین است. برابر قرار دادن زاویه‌های زیر دو ساق، کلید حل مسئله است.




**؟** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $A\hat{O}D = 3B\hat{O}E = 60^\circ$ باشند، زاویهٔ BCE چند درجه است؟

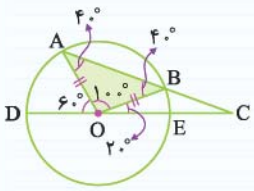
۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۰




**گزینهٔ ۲** مثلث AOB متساوی‌الساقین است، زیرا $OA = OB = r$ می‌باشد. زاویهٔ AOB برابر است با:

$$60^\circ + A\hat{O}B + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 100^\circ$$




بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین AOB زاویه‌های زیر دو ساق، هر کدام $40^\circ$ هستند. زاویهٔ B در مثلث رنگی، زاویهٔ خارجی مثلث OBC است، پس:

$$40^\circ = 20^\circ + B\hat{C}E \Rightarrow B\hat{C}E = 20^\circ$$

**نکته** گاهی اوقات لازم است خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم تا مثلثی ایجاد شود و بتوانیم به خواستهٔ سؤال برسیم.

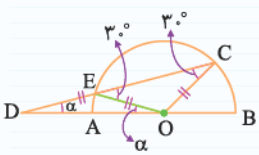
**؟** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و DE برابر شعاع آن است. اگر $O\hat{C}D = 30^\circ$ باشد، زاویهٔ BDC چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

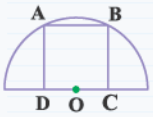
۳) ۲۵ ۴) ۳۰

**گزینهٔ ۱** از O به E وصل می‌کنیم. مثلث COE متساوی‌الساقین است؛ زیرا $OC = OE = r$، پس زاویهٔ E در این مثلث نیز $30^\circ$ است. از طرفی با توجه به این‌که DE برابر شعاع نیم‌دایره است، پس مثلث OED نیز متساوی‌الساقین بوده و چون زاویهٔ $C\hat{E}O = 30^\circ$، زاویهٔ خارجی این مثلث است، داریم:

$$30^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

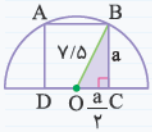


**در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۷/۵ است. مساحت مربع ABCD کدام است؟**




۱) ۵۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

**گزینهٔ ۴** فرض می‌کنیم طول ضلع مربع a باشد. از O به B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCO به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



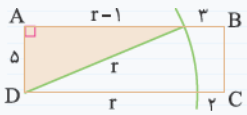

$$(\frac{a}{2})^2 + a^2 = (7/5)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} + a^2 = (7/5)^2 \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 = (7/5)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{5}(7/5)^2 = \frac{4}{5} \times 7/5 \times 7/5 = \frac{15 \times 15}{5} = 45 \Rightarrow S = a^2 = 45$$

**عرض مستطیل ABCD برابر ۵ است. دایره‌ای به مرکز یکی از رأس‌ها، طول مستطیل را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر طول قطعات کوچک‌تر ایجاد شده بر روی طول‌های مستطیل ۲ و ۳ باشد، شعاع دایره کدام است؟**

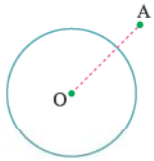
۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

**گزینهٔ ۴** با توجه به توضیحات صورت تست، شکل مسئله به‌صورت مقابل است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:

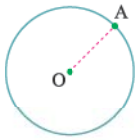



$$5^2 + (r-1)^2 = r^2 \Rightarrow 25 + r^2 - 2r + 1 = r^2 \Rightarrow 2r = 26 \Rightarrow r = 13$$

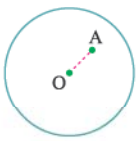
**اوضاع نسبی نقطهٔ A و دایرهٔ C(O,r) :** اگر نقطهٔ A بیرون دایره باشد، $OA > r$ است، اگر نقطهٔ A روی دایره باشد، $OA = r$ خواهد بود و اگر نقطهٔ A درون دایره باشد، $OA < r$ می‌باشد.




A بیرون دایره است. $\Leftrightarrow OA > r$




A روی دایره است. $\Leftrightarrow OA = r$




A درون دایره است. $\Leftrightarrow OA < r$

**فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ C(O,۴) برابر x − ۶ است. به ازای چه مقدار صحیح x، نقطهٔ A درون دایرهٔ C است؟**

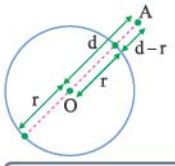
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

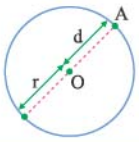
**گزینهٔ ۴** چون $OA = 6 - x$ فاصلهٔ دو نقطه است، پس $OA \geq 0$ می‌باشد. (فاصله منفی نمی‌شود.) از طرفی چون A درون دایرهٔ C است، پس $OA < r$ می‌باشد؛ بنابراین داریم:

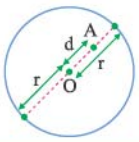
$$0 \leq OA < r \Rightarrow 0 \leq 6 - x < 4 \Rightarrow -6 \leq -x < -2 \Rightarrow 2 < x \leq 6 \xrightarrow{x \in Z} x = 3,4,5,6$$

**نتیجه** اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ C(O,r) را برابر d فرض کنیم، آن‌گاه بیش‌ترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از نقاط محیط دایرهٔ C، از روابط زیر به‌دست می‌آید.

توجه کنید که این روابط به وضعیت نقطهٔ A و دایرهٔ C بستگی ندارد. در ضمن برای تعیین این دو نقطه کافی است خط گذرا از نقطهٔ A و مرکز دایره را رسم کنیم.




بیشترین فاصله = $d + r$

کم‌ترین فاصله = $|d - r|$

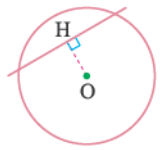
**فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره C(O,۴) برابر ۶ است. مجموع فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

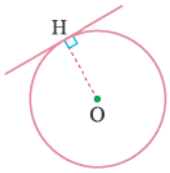
**گزینهٔ ۲** با توجه به داده‌های سؤال $d = 6$ و $r = 4$ است پس:

$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ دورترین نقاط دایره تا A} = d + r = 6 + 4 = 10 \\ \text{فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا A} = d - r = 6 - 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع فاصله‌ها} = 10 + 2 = 12$$

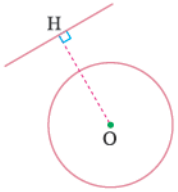
**اوضاع نسبی خط و دایره:** برای بررسی وضعیت خط d و دایرهٔ $C(O,r)$، کافی است فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d یعنی OH را با شعاع دایره مقایسه کنیم:




خط و دایره متقاطع‌اند. $\Leftrightarrow OH < r$




خط بر دایره مماس است. $\Leftrightarrow OH = r$




خط، دایره را قطع نمی‌کند. $\Leftrightarrow OH > r$

**نتیجه** شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است.

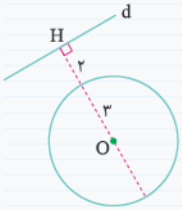
**خط d به فاصلهٔ $x-10$ از مرکز دایره $C(O,3)$ قرار دارد و دایرهٔ C را در دو نقطه قطع می‌کند. چند مقدار طبیعی برای x وجود دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**گزینهٔ ۳** باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d یعنی OH از شعاع دایره کم‌تر باشد. از طرفی واضح است که $OH \geq 0$ می‌باشد. پس:

$$0 \leq OH < r \Rightarrow 0 \leq 10-x < 3 \Rightarrow -10 \leq -x < -7 \Rightarrow 7 < x \leq 10 \Rightarrow x = 8,9,10$$

**فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,3)$ از خط d برابر ۵ است. مجموع فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d کدام است؟**



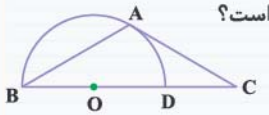

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

**گزینهٔ ۲** چون فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره بزرگ‌تر است، پس خط d دایره را قطع نمی‌کند.

$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ دورترین نقاط دایره تا d} = OH + r = 5+3 = 8 \\ \text{فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا d} = OH - r = 5-3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع فاصله‌ها} = 8+2 = 10$$

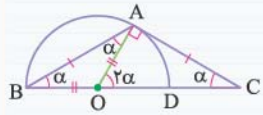
توجه کنید که اگر $OH > r$ باشد، مجموع فواصل برابر $2OH$ و مستقل از r است.

**در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۲ است. اگر A نقطهٔ تماس و $AB = AC$ باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟**




۱) $\sqrt{7}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

**گزینهٔ ۳** از O به A وصل می‌کنیم. شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس OA بر AC عمود می‌باشد. از طرفی مثلث OAB و BAC متساوی‌الساقین هستند و زاویهٔ AOD، زاویهٔ خارجی مثلث OAB است، پس زاویه‌ها به‌صورت مقابل هستند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC داریم:




$$90^\circ + \alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

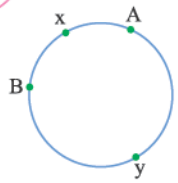
در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $30^\circ$ نصف وتر است، پس:

$$OA = \frac{OC}{2} \Rightarrow 2 = \frac{OC}{2} \Rightarrow OC = 4 \Rightarrow CD = OC - OD = 4-2 = 2$$

## چند تعریف در دایره:

**وتر و قطر دایره:** به پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره می‌گویند و وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر دایره نامیده می‌شود. قطر دایره، بزرگ‌ترین وتر دایره است و طول آن دو برابر شعاع دایره می‌باشد.

**کمان:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ بنابراین هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان AB را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آن‌ها از یکدیگر می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد. مثلاً در شکل مقابل کمان های AxB و AyB، کمان‌های ایجادشده توسط نقاط A و B هستند. معمولاً منظور از کمان AB، کمان کوچک‌تر ایجادشده توسط نقاط A و B است، مثلاً در شکل مقابل $\overset{\frown}{AB}$ همان $\overset{\frown}{AxB}$ است.

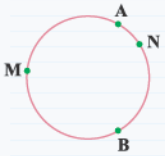


**اندازه و طول کمان:** هر کمان دارای یک اندازه است که برحسب درجه بیان می‌شود و طول کمان نیز برحسب واحد طول معرفی می‌شود. دو کمان می‌توانند دارای اندازه‌های برابر و طول‌های متفاوت و یا طول‌های برابر ولی اندازه‌های متفاوت باشند، مثلاً در شکل مقابل، اندازهٔ هر دو کمان $90^\circ$ ولی طول‌های آن‌ها متفاوت است.

نکته در یک دایره، مجموع طول کمان‌ها برابر محیط دایره و مجموع اندازهٔ کمان‌ها برابر $360^\circ$ است.

**در شکل مقابل، $\overset{\frown}{AMB}=4\overset{\frown}{ANB}$ و $\overset{\frown}{BN}=3\overset{\frown}{AN}$ است. کمان BN چند درجه است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۵۴ ۳) ۱۸ ۴) ۶۰




گزینهٔ ۲ در دایره، مجموع اندازهٔ کمان‌ها برابر $360^\circ$ است. پس:

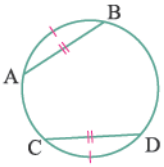
$$\overset{\frown}{AMB}+\overset{\frown}{ANB}=360^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{AMB}=4\overset{\frown}{ANB}} 4\overset{\frown}{ANB}+\overset{\frown}{ANB}=360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ANB}=72^\circ$$

در صورت سؤال گفته شده $\overset{\frown}{BN}=3\overset{\frown}{AN}$ است، پس:

$$\overset{\frown}{ANB}=72^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AN}+\overset{\frown}{BN}=72^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AN}+3\overset{\frown}{AN}=72^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AN}=18^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BN}=54^\circ$$

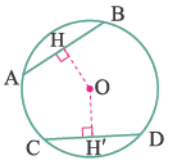
## وترهای مساوی، نامساوی، موازی و عمود:

۱ اگر دو وتر از یک دایره با هم مساوی باشند، کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم مساوی است و برعکس.



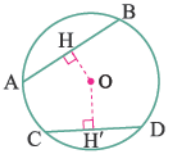

$$AB=CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

۲ در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



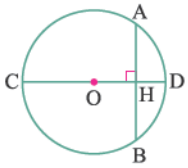

$$AB=CD \Leftrightarrow OH=OH'$$

۳ در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

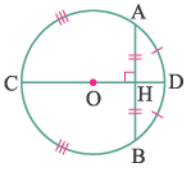



$$AB>CD \Leftrightarrow OH<OH'$$

۴ در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های مقابلش را نصف می‌کند و برعکس. یعنی در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر یا وسط کمان نظیر آن وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



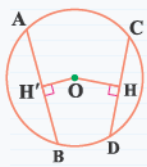

$$AB\perp CD \Leftrightarrow AH=HB, \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$$



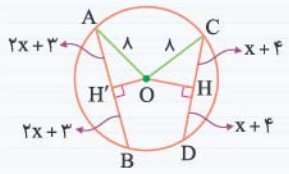

$$AH=HB \Rightarrow AB\perp CD$$
$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB} \Rightarrow AB\perp CD$$

**در دایرهٔ $C(O,8)$ مطابق شکل مقابل، وترهای AB و CD به‌ترتیب با اندازه‌های $4x+6$ و $2x+8$ مفروض است. اگر x یک عدد طبیعی و $OH>OH'$ باشد، طول پاره‌خط OH کدام است؟**

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{26}$ ۴) $\sqrt{29}$



**گزینهٔ ۱** چون $OH > OH'$ است، داریم:




$$OH > OH' \Rightarrow CD < AB \Rightarrow 2x+8 < 4x+6 \Rightarrow 2 < 2x \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

از طرفی چون $OH \perp CD$ و $OH' \perp AB$ هستند، پس $OH$ و $OH'$ وترهای $AB$ و $CD$ را نصف می‌کنند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OH'A$، طول ضلع قائم $H'A$ از وتر $OA$ کوچک‌تر است. پس:

$$2x+3 < 8 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2} \quad (2)$$

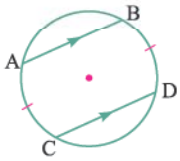
توجه کنید که $CH$ هم از $OC$ کوچک‌تر است، اما محدودیت مثلث $OH'A$ برای $x$ بیش‌تر است. حال با توجه به روابط (۱) و (۲) و این‌که $x$ عددی طبیعی است، داریم:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{2} \xrightarrow{x \in N} x = 2$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OHC$ داریم:

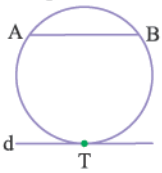
$$OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow 64 = OH^2 + (x+4)^2 \xrightarrow{x=2} OH^2 = 28 \Rightarrow OH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

۵ در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند، اما عکس این مطلب برقرار نیست.



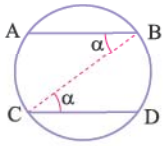

$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

**نتیجه** ۱ کمان های محصور بین خط مماس بر دایره و وتری موازی با آن، با یکدیگر برابرند.



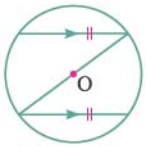

$$AB \parallel d \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{BT}$$

۲ در شکل مقابل، اگر $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ باشد، داریم:




$$AB \parallel CD, A\hat{B}C = D\hat{C}B$$

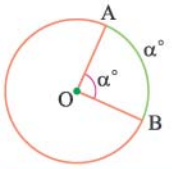
۶ هر دو وتر موازی که بر انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، مساوی‌اند و هر دو وتر مساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، در دو طرف آن قرار دارند و موازی‌اند.




*معمولاً از مطالب فوق، در ترکیب با زاویه‌ها در دایره سؤال مطرح میشه.*

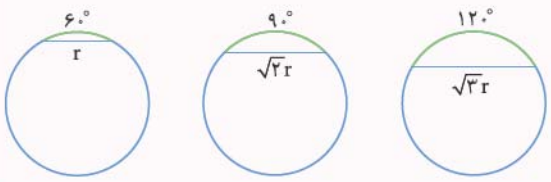
## زاویه در دایره

**۱. زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌ای‌است که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن، دو شعاع از دایره می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن برابر است.

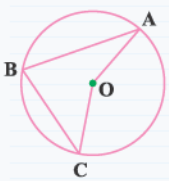



$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \alpha^\circ$$

**نکته** گاهی به جای این‌که اندازهٔ کمانی را بدهند، طول وتر متناظر با آن را می‌دهند. برای به‌دست آوردن اندازهٔ کمان، کافی است اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر با آن را به‌دست آوریم. برای این کار از مرکز دایره به دو سر آن وتر وصل می‌کنیم و از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ایجادشده استفاده می‌کنیم، اما موارد روبه‌رو را می‌توان بدون استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها هم به‌دست آورد و بهتر است این مقادیر را حفظ باشیم. در دایرهٔ به شعاع $r$ داریم:




**در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB = \sqrt{3}OA$ و $BC = \sqrt{2}OC$ است. زاویهٔ AOC چند درجه است؟**



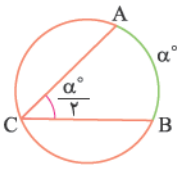

۱) ۱۲۰
۲) ۱۳۰
۳) ۱۴۰
۴) ۱۵۰

گزینهٔ ۴ چون وتر AB، $\sqrt{۳}$ برابر شعاع دایره است، پس $\overset{\frown}{AB}=۱۲۰^\circ$ می‌باشد. هم‌چنین چون وتر BC، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره می‌باشد، پس $\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ$ است، بنابراین داریم:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ+۹۰^\circ+\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۱۵۰^\circ$$

زاویهٔ AOC زاویهٔ مرکزی رو به کمان AC است، پس $A\hat{O}C=۱۵۰^\circ$ می‌باشد.

**۲. زاویهٔ محاطی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن، دو وتر از دایره می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان مقابل آن است.

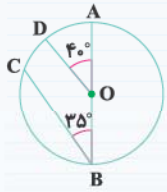



$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\alpha^\circ}{۲}$$

**؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ کمان CD چند درجه است؟**

۱) ۲۵ ۲) ۳۰

۳) ۳۵ ۴) ۴۰



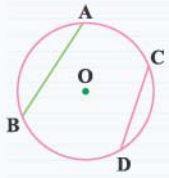

گزینهٔ ۲ زاویهٔ AOD زاویهٔ مرکزی است، پس $\overset{\frown}{AD}=۴۰^\circ$ می‌باشد. از طرفی زاویهٔ ABC زاویهٔ محاطی رو به کمان ADC است، پس $\overset{\frown}{ADC}=۲\times۳۵^\circ=۷۰^\circ$ می‌باشد، پس:

$$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{ADC}-\overset{\frown}{AD}=۷۰^\circ-۴۰^\circ=۳۰^\circ$$

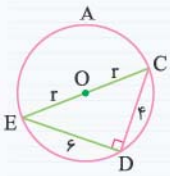
**؟ در شکل مقابل، طول وترهای AB و CD به‌ترتیب برابر ۶ و ۴ است. اگر $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ$ باشد، طول شعاع دایره کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۵}$

۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

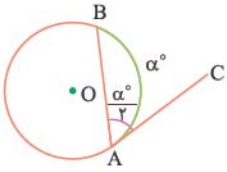



گزینهٔ ۴ از نقطهٔ D وتر DE را به اندازهٔ AB رسم می‌کنیم. چون DE = AB است، پس کمان DE نیز با کمان AB برابر است. چون $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ$، پس $\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}$ نیز برابر $۱۸۰^\circ$ می‌باشد. از طرفی چون کمان CDE برابر $۱۸۰^\circ$ است. پس وتر CE قطر دایره بوده و زاویهٔ CDE، زاویهٔ محاطی رو به نیم‌دایره است و برابر $۹۰^\circ$ می‌باشد. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE داریم:




$$CE^۲=CD^۲+DE^۲ \Rightarrow (۲r)^۲=۱۶+۳۶ \Rightarrow ۴r^۲=۱۶+۳۶ \Rightarrow r^۲=۴+۹=۱۳ \Rightarrow r=\sqrt{۱۳}$$

**۳. زاویهٔ ظلی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان مقابل آن است.

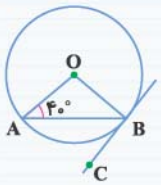



$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\alpha^\circ}{۲}$$

**؟ در شکل مقابل CB بر دایرهٔ به مرکز O مماس است. اگر $O\hat{A}B=۴۰^\circ$ باشد، زاویهٔ ABC چند درجه است؟**

۱) ۴۰ ۲) ۴۵

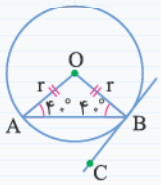
۳) ۵۰ ۴) ۵۵




گزینهٔ ۳ مثلث AOB متساوی‌الساقین است، زیرا OA = OB = r می‌باشد. بنابراین زاویهٔ AOB برابر $۱۰۰^\circ$ است، زیرا:

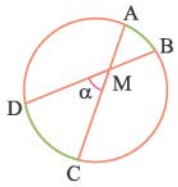
$$۴۰^\circ+A\hat{O}B+O\hat{B}A=۱۸۰^\circ \xrightarrow{O\hat{B}A=۴۰^\circ} A\hat{O}B=۱۰۰^\circ$$

زاویهٔ AOB زاویهٔ مرکزی رو به کمان AB است، پس $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ$ می‌باشد. از طرفی زاویهٔ ABC زاویهٔ ظلی رو به کمان AB است، پس:



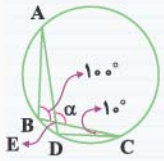

$$A\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$$

**۴. زاویهٔ بین دو وتر:** زاویهٔ بین دو وتر که درون دایره همدیگر را قطع کنند برابر با نصف مجموع کمان‌های مقابل به آن زاویه است.




$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

**؟ در شکل مقابل، زاویهٔ AEC چند درجه است؟**




۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۰

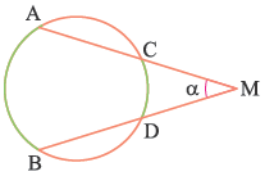
**گزینهٔ ۲** زوایای BCD و ABC زوایای محاطی رو به کمان‌های BD و AC هستند، پس داریم:

$$B\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۱۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۲۰^\circ \qquad A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow ۱۰۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۲۰۰^\circ$$

از طرفی $A\hat{E}C$، زاویهٔ بین دو وتر AC و BD است، پس:

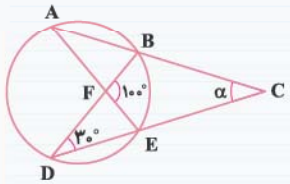
$$A\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۲۰۰^\circ + ۲۰^\circ}{۲} = ۱۱۰^\circ$$

**۵. زاویهٔ بین امتداد دو وتر:** زاویهٔ بین امتداد دو وتر که در نقطه‌ای خارج از دایره متقاطع‌اند، برابر نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه است.




$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

**؟ در شکل مقابل $B\hat{D}C = ۳۰^\circ$ و $B\hat{F}E = ۱۰۰^\circ$ می‌باشند. زاویهٔ ACD چند درجه است؟**




۱) ۲۵ ۲) ۳۰

۳) ۳۵ ۴) ۴۰

**گزینهٔ ۴** زاویهٔ BDE زاویهٔ محاطی رو به کمان BE است، پس:

$$B\hat{D}E = \frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = ۶۰^\circ$$

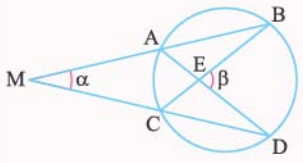
از طرفی زاویهٔ BFE زاویهٔ بین دو وتر است که کمان‌های BE و AD کمان‌های مقابل آن است، پس:

$$B\hat{F}E = \frac{\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow ۱۰۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۱۴۰^\circ$$

زاویهٔ ACD، زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، پس:

$$A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BE}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۱۴۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

**نکته** در شکل مقابل داریم:



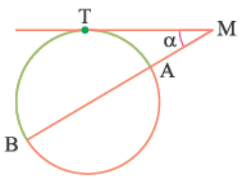

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \beta = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \overset{\frown}{BD}$$

مثلاً در تمرین بالا بعد از این‌که $\overset{\frown}{AD} = ۱۴۰^\circ$ به‌دست آمد، می‌توان گفت:

$$\alpha + ۱۰۰^\circ = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

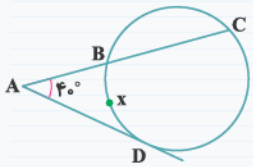
**۶. زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس:**

زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس بر دایره، برابر نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه است:




$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{TB} - \overset{\frown}{TA}}{۲}$$

**؟ در شکل مقابل AD بر دایره مماس است. اگر $\hat{CAD}=40^\circ$ و $\overset{\frown}{BDC}=140^\circ$ باشند، اندازهٔ کمان BxD چند درجه است؟**




۱) ۳۰ ۲) ۴۰

۳) ۵۰ ۴) ۶۰

**گزینهٔ ۱** زاویهٔ CAD زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس است، پس:

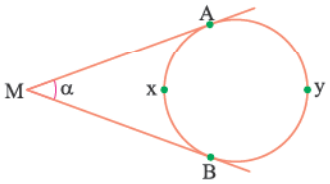
$$\hat{CAD}=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BxD}}{2}\Rightarrow 40^\circ=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BxD}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BxD}=80^\circ$$

از طرفی $\overset{\frown}{BDC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BxD}$ می‌باشد، پس $\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BxD}=140^\circ$ است.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BxD}=80^\circ\\ \overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BxD}=140^\circ\end{cases}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=110^\circ,\ \overset{\frown}{BxD}=30^\circ$$

**۷. زاویهٔ بین دو مماس:** اگر دو ضلع زاویه‌ای بر دایره مماس باشند، اندازهٔ زاویه بین دو مماس برابر نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه است:

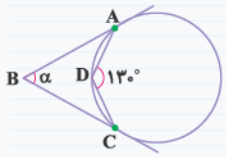



$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AyB}-\overset{\frown}{AxB}}{2}$$

**نکته** رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت سادهٔ زیر نیز نوشت:

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AyB}-\overset{\frown}{AxB}}{2}\xrightarrow{\overset{\frown}{AyB}=360^\circ-\overset{\frown}{AxB}}\alpha=\frac{360^\circ-\overset{\frown}{AxB}-\overset{\frown}{AxB}}{2}\Rightarrow\alpha=180^\circ-\overset{\frown}{AxB}\Rightarrow\boxed{\alpha+\overset{\frown}{AxB}=180^\circ}$$

**؟ در شکل مقابل، BA و BC بر دایره مماس‌اند. اگر $\hat{ADC}=130^\circ$ باشد، زاویهٔ ABC چند درجه است؟**




۱) ۷۰ ۲) ۷۵

۳) ۸۰ ۴) ۸۵

**گزینهٔ ۳** **روش اول** زاویهٔ ADC زاویهٔ محاطی رو به کمان AC است، پس:

$$\hat{ADC}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=130^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=260^\circ$$

ازطرفی $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{ADC}=360^\circ$ است، پس:

$$260^\circ+\overset{\frown}{ADC}=360^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{ADC}=100^\circ$$

زاویهٔ ABC زاویهٔ بین دو مماس است، بنابراین داریم:

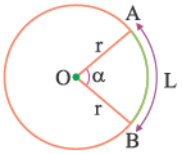
$$\hat{ABC}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{ADC}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{260^\circ-100^\circ}{2}=80^\circ$$

**روش دوم** زاویهٔ ADC زاویهٔ محاطی رو به کمان AC است، پس $\overset{\frown}{AC}=260^\circ$ و این یعنی $\overset{\frown}{ADC}=100^\circ$ می‌باشد. حال داریم:

$$\alpha+100^\circ=180^\circ\Rightarrow\alpha=80^\circ$$

## کمان و قطاع

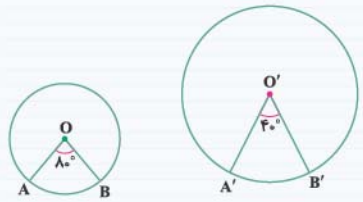
**طول کمان:** چون محیط یک دایره، کمانی به اندازهٔ $360^\circ$ و به طول $2\pi R$ است، هم‌چنین اندازهٔ کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی، با اندازهٔ آن زاویه برابر است، می‌توان طول کمان AB را با یک تناسب ساده به‌دست آورد:




| اندازه | طول |
|---|---|
| $\alpha^\circ$ | $L$ |
| $360^\circ$ | $2\pi r$ |

$$\Rightarrow\boxed{L=2\pi r\times\frac{\alpha}{360^\circ}}$$

**در شکل مقابل، طول کمان‌های AB و A′B′ با هم برابر است. شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟**

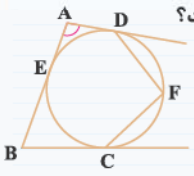



۱) ۱/۵ ۲) ۲
۳) ۲/۵ ۴) ۳

**گزینهٔ ۲** فرض می‌کنیم طول هر دو کمان برابر L و شعاع دایرهٔ کوچک r و شعاع دایرهٔ بزرگ $r'$ باشد، پس:

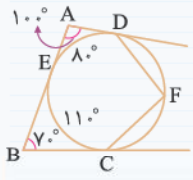
$$\begin{cases} L = 2\pi r \times \frac{80^\circ}{360^\circ} \\ L = 2\pi r' \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \end{cases} \Rightarrow 2\pi r \times \frac{80^\circ}{360^\circ} = 2\pi r' \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow r \times 80^\circ = r' \times 40^\circ \Rightarrow \frac{r'}{r} = 2$$

**در شکل مقابل، نقاط C ، D و E نقاط تماس هستند. اگر $B\hat{A}D = 100^\circ$ و $A\hat{B}C = 70^\circ$ باشند، زاویهٔ DFC چند درجه است؟**




۱) ۱۰۵ ۲) ۱۱۰
۳) ۹۵ ۴) ۹۰

**گزینهٔ ۳** با توجه به زاویه‌های داده‌شده، اندازهٔ کمان‌های روبه‌روی آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:



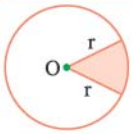

$$B\hat{A}D = 100^\circ \xrightarrow{\hat{A}+\overset{\frown}{ED}=180^\circ} \overset{\frown}{ED} = 80^\circ$$

$$A\hat{B}C = 70^\circ \xrightarrow{\hat{B}+\overset{\frown}{BC}=180^\circ} \overset{\frown}{EC} = 110^\circ$$

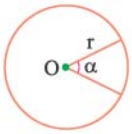
زاویهٔ DFC زاویهٔ محاطی رو به کمان DEC است، پس:

$$\overset{\frown}{DFC} = \frac{80^\circ + 110^\circ}{2} = \frac{190^\circ}{2} = 95^\circ$$

**قطاع:** سطح محصور بین دو شعاع یک دایره را قطاع دایره می‌نامند.




**مساحت قطاع:** مساحت قطاع با زاویهٔ مرکزی $\alpha$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:




| زاویه | مساحت |
|---|---|
| $\alpha$ | S |
| $360^\circ$ | $\pi r^2$ |

$$\Rightarrow \boxed{S = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ}}$$

**اندازهٔ زاویهٔ مرکزی یک قطاع از دایره، $40^\circ$ است. اگر مساحت این قطاع $4\pi$ باشد، شعاع دایره کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

**گزینهٔ ۱** کافی است مقادیر داده‌شده را در رابطهٔ $S = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ}$ جای‌گذاری کنیم:

$$4\pi = \pi r^2 \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow 4 = \frac{r^2}{9} \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

**نکته** اگر به جای زاویهٔ مرکزی قطاع، طول کمان را داشته باشیم، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} L = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360^\circ} \\ S = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{L}{S} = \frac{2}{r} \Rightarrow \boxed{S = \frac{rL}{2}}$$

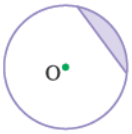
**مساحت قطاعی از دایره $6\pi$ است. اگر طول کمان قطاع $2\pi$ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

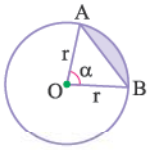
**گزینهٔ ۳** با توجه به رابطهٔ $S = \frac{rL}{2}$ که در آن S مساحت قطاع، r اندازهٔ شعاع دایره و L طول کمان متناظر قطاع است، داریم:

$$6\pi = \frac{r \times 2\pi}{2} \Rightarrow r = 6$$

**قطعهٔ یک دایره:** در یک دایره، ناحیهٔ محصور به یک وتر و کمان متناظرش را قطعه می‌نامیم.

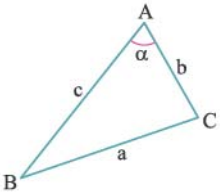



**مساحت قطعه:** برای محاسبهٔ مساحت قطعه، کافی است مساحت مثلث متساوی‌الساقین OAB را از مساحت قطاع کم کنیم؛ بنابراین داریم:



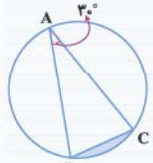

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{AOB} \Rightarrow \boxed{S_{\text{قطعه}} = \pi r^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha}$$

**یادآوری** در ریاضی دهم دیدید که مساحت مثلث برابر با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع است.




$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha}$$

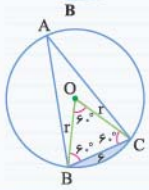
**در شکل مقابل، طول وتر BC برابر ۶ است. اگر $B\hat{A}C = 30^\circ$ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟**




۱) $6\pi - 9\sqrt{3}$ ۲) $4\pi - 3\sqrt{3}$

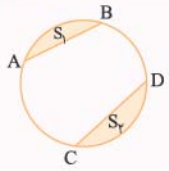
۳) $12\sqrt{3} - 9\pi$ ۴) $8\pi - 9\sqrt{3}$

**گزینهٔ ۱** از مرکز دایره به B و C وصل می‌کنیم. زاویهٔ مرکزی BOC برابر $60^\circ$ است. از طرفی مثلث BOC متساوی‌الساقین است. با توجه به این‌که زاویهٔ رأس آن $60^\circ$ است، پس متساوی‌الاضلاع نیز هست. حال داریم:



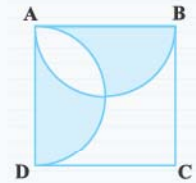

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta BOC} = \pi \times 6^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{4}(6)^2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

**نکته** اگر AB و CD دو وتر با طول‌های برابر از دایره باشند، آن‌گاه مساحت قطعه‌های متناظر با آن‌ها با هم برابر است.




$$AB = CD \Leftrightarrow S_1 = S_2$$

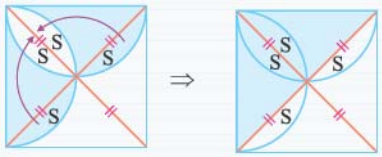
**در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربع است. اضلاع AB و AD قطرهای دو نیم‌دایره می‌باشند. اگر مساحت مربع ۱۶ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟**




۱) $4\pi$ ۲) ۸

۳) ۴ ۴) $3\pi$

**گزینهٔ ۲** ابتدا قطرهای مربع را رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطرهای مربع با هم برابرند و همدیگر را نصف می‌کنند؛ بنابراین مطابق شکل‌های مقابل داریم:



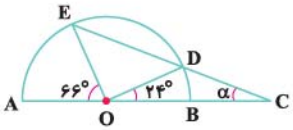

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} S_{\text{مربع}} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

درس ۱

# پرسش‌های چهارگزینه‌ای

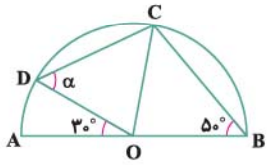
## مقدمات

۱. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره است. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ چند درجه است؟



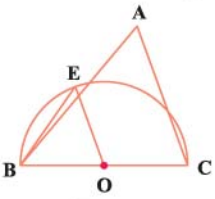

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۴

۲. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ODC چند درجه است؟



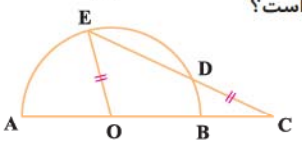

۱) ۶۵
۲) ۶۰
۳) ۵۵
۴) ۵۰

۳. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و AC موازی EO است. اگر $A\hat{C}B = 70^\circ$ و $A\hat{B}E = 5^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟



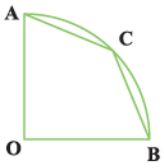

۱) ۴۰
۲) ۵۰
۳) ۶۰
۴) ۷۰

۴. در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره است. اگر OE = DC و $A\hat{O}E = 75^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OEC چند درجه است؟



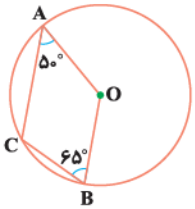

۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۵۵

۵. در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره است. اگر $O\hat{A}C = 70^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OBC چند درجه است؟



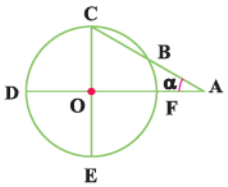

۱) ۵۵
۲) ۶۰
۳) ۶۵
۴) ۷۰

۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ AOB چند درجه است؟



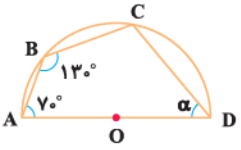

۱) ۱۲۰
۲) ۱۳۰
۳) ۱۴۰
۴) ۱۵۰

۷. در شکل مقابل، قطرهای دایره برهم عمودند. اگر OD = AB باشد، اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ چند درجه است؟



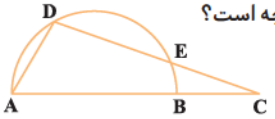

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۸. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ چند درجه است؟



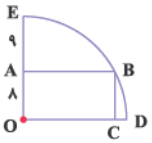

۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۵۵
۴) ۶۰

۹. در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره است. اگر AB = ۲EC و $A\hat{C}D = 20^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ ADC چند درجه است؟



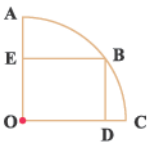

۱) ۱۲۰
۲) ۱۱۰
۳) ۱۰۰
۴) ۹۵

**۱۰.** در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره است. مساحت مستطیل ABCO کدام است؟



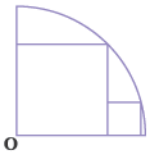

۱) ۸۰ ۲) ۹۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۸

**۱۱.** در شکل مقابل، مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. حاصل $CD + AE$ کدام است؟



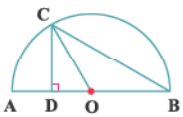

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

**۱۲.** در شکل مقابل، O مرکز ربع دایره و هر دو چهارضلعی مربع هستند. اگر طول ضلع مربع کوچک برابر ۲ باشد، طول ضلع مربع بزرگ کدام است؟



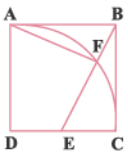

۱) ۵ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲+۲\sqrt{۳}$

**۱۳.** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و CO نیمساز زاویهٔ DCB است. اگر $DO = ۴$ باشد، طول پاره خط AD کدام است؟




۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۵

**۱۴.** در شکل زیر، ABCD مربع به ضلع ۴ و دایره به مرکز D و شعاع ۴ رسم شده است. اگر E وسط ضلع مربع باشد، اندازهٔ زاویهٔ AFE چند درجه است؟




۱) ۹۵ ۲) ۸۵ ۳) ۹۰ ۴) ۸۰

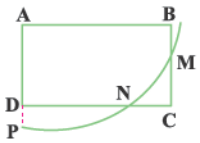
**۱۵.** در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

**۱۶.** در مستطیل به ابعاد ۴ و ۸، دایره به مرکز یک رأس مستطیل و شعاع ۵، اضلاع آن را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از هم کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۵}$

**۱۷.** در شکل زیر، ABCD مستطیل است. دایره به مرکز A ضلع‌های مستطیل و امتداد آن‌ها را در نقاط M، N و P قطع کرده است. اگر $BM = ۷$، $MC = ۸$ و $DP = ۱۰$ باشد، طول پاره‌خط NC کدام است؟

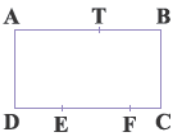



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

**۱۸.** عرض مستطیل ABCD برابر ۵ است. دایره‌ای به مرکز یکی از رأس‌ها، طول مستطیل را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر طول قطعات کوچک‌تر ایجاد شده بر روی طول‌های مستطیل ۲ و ۳ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۸

**۱۹.** در مستطیل شکل زیر، نقاط T و E روی دایره‌ای به رأس C و نقاط T و F روی دایره‌ای به رأس D قرار دارند. اگر $DE = EF = ۴$ و $FC = ۲$ باشند، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

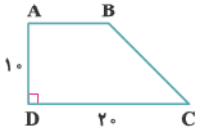



۱) ۳۶ ۲) ۴۴ ۳) ۵۲ ۴) ۴۸

**۲۰.** مربع ABCD به ضلع $۳\sqrt{۲}$ مفروض است. به مرکز رأس D و شعاع ۶ دایره‌ای رسم می‌کنیم. ضلع DC را از طرف C امتداد می‌دهیم تا دایره را در E قطع کند. اندازهٔ زاویهٔ CBE چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

**۲۱.** در ذوزنقهٔ شکل مقابل، دایره به رأس A از رئوس B و D می‌گذرد. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟




۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

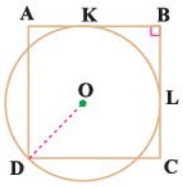
**۲۲.** مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۲۳. مربع ABCD مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا از دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD برابر ۵ است. مساحت مربع کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵ ۳) ۳۶ ۴) ۴۹

۲۴. در شکل مقابل، ABCD و نقاط K و L نقاط تماس هستند. اگر O مرکز دایره، OD = ۵ و AK = ۳ باشند، مساحت مستطیل کدام است؟




۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۸ ۴) ۸۰

۲۵. نقطهٔ A بیرون دایرهٔ C(O,۳) قرار دارد. اگر OA = ۸ − x باشد، برای x چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

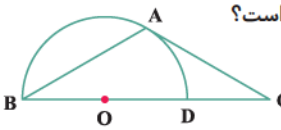
۲۶. نزدیک‌ترین و دورترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره‌ای به ترتیب ۷ و ۱۳ است. شعاع دایره کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۷. خط d و دایرهٔ C(O,۴) مفروض است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر ۱۰ باشد، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d کدام است؟

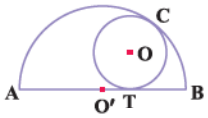
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۸. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۲ است. اگر A نقطهٔ تماس و AB = AC باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟



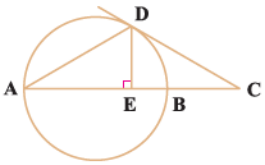

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۹. در شکل زیر، O مرکز دایره، O′ مرکز نیم‌دایره و نقاط C و T نقاط تماس هستند. اگر AT = ۸ و TB = ۴ باشند، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



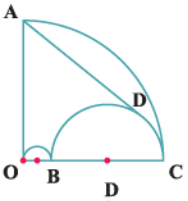

۱) ۴ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۳۰. در شکل زیر، AB قطر دایره و CD بر دایره مماس است. اگر BC = ۲BE = ۴ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



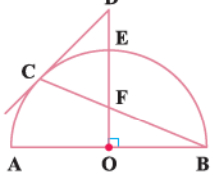

۱) ۵ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۳

۳۱. در شکل مقابل، دو نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ درون ربع دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر AD بر نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر مماس باشد، طول AD کدام است؟



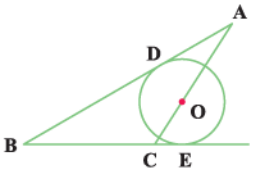

۱) $۳\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۳۰}$ ۳) $۳\sqrt{۲۰}$ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۳۲. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و C نقطهٔ تماس است. اگر DC = ۸ باشد، طول پاره‌خط DF کدام است؟




۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۸

۳۳. در شکل زیر، O مرکز دایره، نقاط D و E نقاط تماس، $A\hat{B}C = ۳۰^\circ$ و BC = ۶ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟

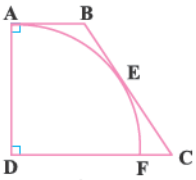



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲۴}{۱۱}$

۳۴. در مثلث قائم‌الزاویه، دایره به مرکز رأس قائمه بر وتر مثلث مماس است. اگر طول قطعات ایجادشده روی وتر توسط نقطهٔ تماس ۵ و ۸ باشد، فاصلهٔ نقاط تلاقی دایره با اضلاع قائم مثلث کدام است؟

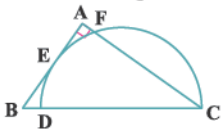
۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

**۳۵.** در شکل زیر، ABCD ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه و D مرکز نیم‌دایره است. اگر A و E نقاط تماس، $EC = ۸$ و $FC = ۲$ باشد، طول پاره‌خط BE کدام است؟



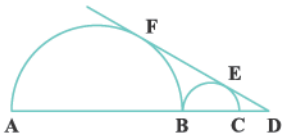

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۹
۴) ۷

**۳۶.** در شکل مقابل، E نقطهٔ تماس است. اگر $AB = ۲۷$ و $AC = ۳۶$ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟




۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۱۵
۴) ۲۲

**۳۷.** در شکل زیر، نقاط E و F نقاط تماس هستند. اگر شعاع نیم‌دایرهٔ کوچک برابر ۱ و $CD = ۱$ باشد، شعاع نیم‌دایرهٔ بزرگ کدام است؟

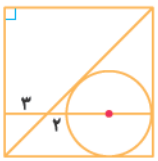



۱) ۶
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۴

**۳۸.** در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $A\hat{D}B = ۳۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OAD چند درجه است؟ (ریاضی ۹۲)

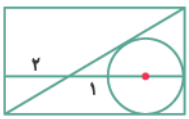
۱) ۶۸
۲) ۷۳
۳) ۱۰۲
۴) ۱۴۶

**۳۹.** در شکل زیر، محیط بزرگ‌ترین چهارضلعی کدام است؟



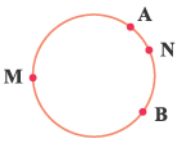

۱) ۲۲/۵
۲) ۲۱/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۱/۲۵

**۴۰.** مساحت مستطیل زیر کدام است؟



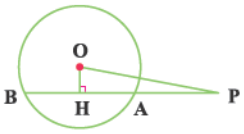

۱) ۳۹
۲) ۳۳
۳) ۲۷
۴) ۲۱

**۴۱.** در شکل مقابل، $\overset{\frown}{AMB} = ۴\overset{\frown}{ANB}$ و $\overset{\frown}{BN} = ۳\overset{\frown}{AN}$ است. اندازهٔ کمان BN چند درجه است؟



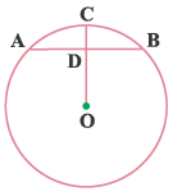

۱) ۳۶
۲) ۵۴
۳) ۱۸
۴) ۶۰

**۴۲.** در شکل زیر $AB = ۶$، $OH = ۱$ و $O\hat{H}A = ۹۰^\circ$. اندازهٔ شعاع دایره چه‌قدر است؟



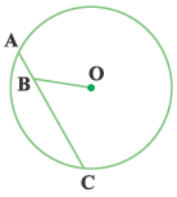

۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $\sqrt{۱۲}$
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $\sqrt{۱۱}$

**۴۳.** در دایره شکل مقابل، O مرکز دایره و C وسط کمان AB است. اگر $AB = ۶$ و $CD = ۱$ باشند، طول شعاع دایره کدام است؟



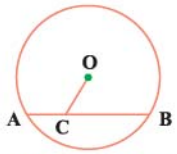

۱) ۴
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) ۵

**۴۴.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $AB = ۷$، $OB = ۵\sqrt{۲}$ و $BC = ۱۷$ باشد، طول شعاع دایره کدام است؟




۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۴۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $OC = \sqrt{۵}$ و $BC = ۲AC = ۴$ باشند، طول شعاع دایره کدام است؟




۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$
۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

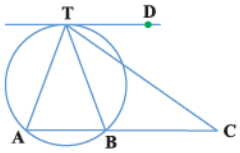
۴۶. دو دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند. طول وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که به دایرهٔ کوچک‌تر مماس است برابر ۱۰ می‌باشد. مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره کدام است؟

۱) $۲۰\pi$ ۲) $۲۴\pi$ ۳) $۲۵\pi$ ۴) $۲۸\pi$

۴۷. در دایره‌ای، فاصلهٔ مرکز تا دو وتر AB و CD برابر ۳ و $\sqrt{۲۱}$ است. اگر طول وتر بزرگ‌تر ۸ باشد، طول وتر کوچک‌تر کدام است؟

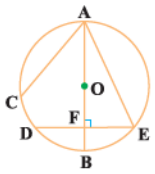
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۸. در شکل مقابل TD در نقطهٔ T بر دایره مماس است. اگر $TD \parallel AC$ ، $TA = BC$ و $\hat{TAC} = ۷۰^\circ$ باشند، زاویهٔ DTC چند درجه است؟



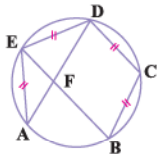

۱) ۳۵ ۲) ۴۵
۳) ۴۰ ۴) ۲۵

۴۹. در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AC = DE$ است. اگر $\hat{AED} = ۶۵^\circ$ باشد، کمان CD چند درجه است؟




۱) ۳۵ ۲) ۳۰
۳) ۲۵ ۴) ۲۰

۵۰. در شکل زیر وترهای مساوی مشخص شده‌اند. اگر $\hat{ADC} = ۷۵^\circ$ باشد، زاویه AEB چند درجه است؟




۱) ۴۰ ۲) ۳۵
۳) ۳۰ ۴) ۲۵

۵۱. در دایره‌ای به شعاع ۵، طول وتر AB برابر ۸ است. فاصلهٔ مرکز دایره از این وتر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

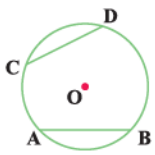
۵۲. در دایره‌ای وتر AB برابر ۱۶ و وتر CD برابر ۱۰ است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۲\overset{\frown}{CD}$ باشد، طول شعاع دایره کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۳}$ ۴) ۱۰

۵۳. در دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳۵}$ ، طول وتر AB دو برابر طول وتر CD است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر CD سه برابر فاصلهٔ آن تا وتر AB باشد، طول وتر CD کدام است؟

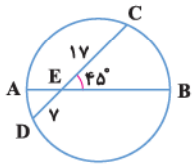
۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

۵۴. در شکل زیر، O مرکز دایره و $۲AB = ۳CD$ است. اگر فاصلهٔ O تا AB و CD به ترتیب برابر ۴ و ۹ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



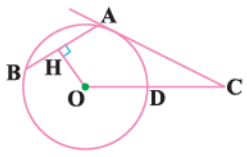

۱) $\sqrt{۱۰۳}$ ۲) $\sqrt{۱۱۳}$
۳) $\sqrt{۱۲۳}$ ۴) $\sqrt{۱۳۳}$

۵۵. در شکل مقابل، AB قطر دایره است. طول شعاع دایره کدام است؟




۱) ۱۵
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۴

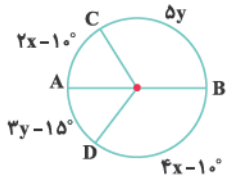
۵۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره و A نقطهٔ تماس است. اگر $AB = ۴\sqrt{۵}$ ، $OH = ۴$ و $AC = ۸$ باشد، طول پاره‌خط CD کدام است؟




۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۴/۵

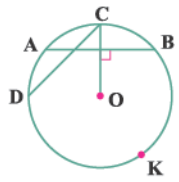
## زاویهٔ مرکزی، محاطی و ظلی

**۵۷.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ DOC چند درجه است؟



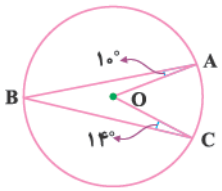

۱) ۹۰
۲) ۹۵
۳) ۱۱۵
۴) ۱۲۵

**۵۸.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $\overset{\frown}{AB}=120^\circ$ و $\overset{\frown}{BKD}=160^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ OCD چند درجه است؟



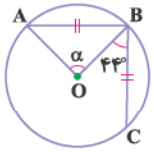

۱) ۳۰
۲) ۲۵
۳) ۲۰
۴) ۱۵

**۵۹.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ AOC چند درجه است؟



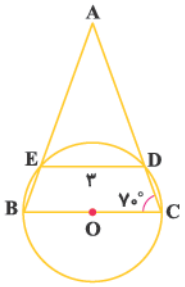

۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۴۸
۴) ۳۶

**۶۰.** در دایرهٔ شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB=BC$ است. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ چند درجه است؟



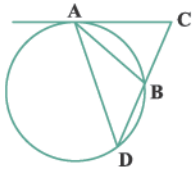

۱) ۸۸
۲) ۹۰
۳) ۹۲
۴) ۹۴

**۶۱.** در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EDC}$ به درجه کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)



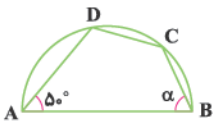

۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

**۶۲.** در شکل زیر، اندازهٔ قطعهٔ مماس AC برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟ (ریاضی ۹۹)




۱) $BC=BA$
۲) $BD=AC$
۳) $BC=BD$
۴) $DA=DC$

**۶۳.** در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره است. اگر $CD=CB$ و $\hat{DAB}=50^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟

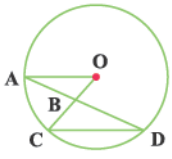



۱) ۵۰
۲) ۵۵
۳) ۶۰
۴) ۶۵

**۶۴.** در دایره‌ای به قطر AB، وتر CD موازی قطر AB رسم شده است. اندازهٔ $\hat{ACD}-\hat{ADC}$ کدام است؟

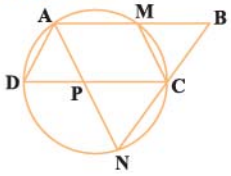
۱) $30^\circ$
۲) $45^\circ$
۳) $60^\circ$
۴) $90^\circ$

**۶۵.** در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع OA با وتر CD موازی است. اگر $\hat{ABC}=36^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ AOC چند درجه است؟



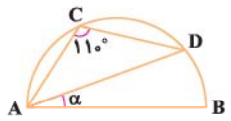

۱) ۳۶
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۳۰

۶۶. در شکل زیر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)



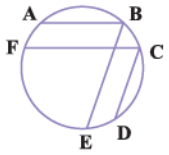

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۷. در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره است. اگر $A\hat{C}D = 110^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAD چند درجه است؟



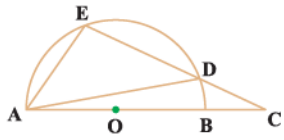

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۶۸. در شکل مقابل، اگر $FC \parallel AB$ ، $BE \parallel CD$ ، $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ ، $\overset{\frown}{CD} = 40^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = 110^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ FCD چند درجه است؟



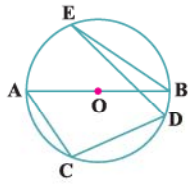

۱) ۹۰
۲) ۵۵
۳) ۷۰
۴) ۸۰

۶۹. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اگر $A\hat{C}E = 25^\circ$ و $C\hat{A}D = 10^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ DAE چند درجه است؟



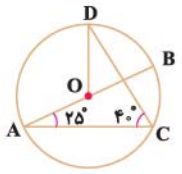

۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۵۵
۴) ۳۵

۷۰. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $A\hat{C}D = 100^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ DEB چند درجه است؟



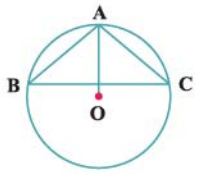

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

۷۱. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ODC چند درجه است؟



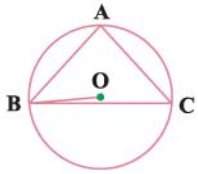

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۱۵

۷۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $O\hat{A}C = 50^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ B در مثلث ABC چند درجه است؟



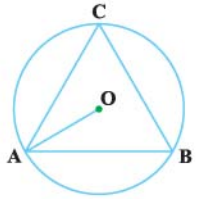

۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۴۵

۷۳. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $C\hat{B}O = 5^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟



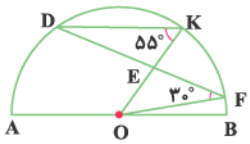

۱) ۸۵
۲) ۸۰
۳) ۷۵
۴) ۷۰

۷۴. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $A\hat{B}C = 50^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ CAO چند درجه است؟



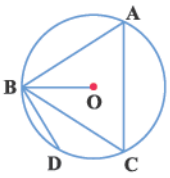

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

**۷۵.** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اندازهٔ زاویهٔ KDF چند درجه است؟



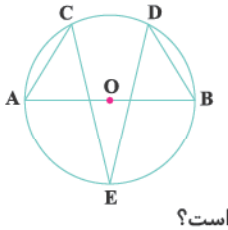

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

**۷۶.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $OB = BD$ و $C\hat{B}D = 35^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟



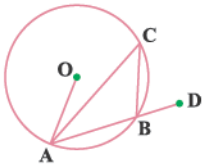

۱) ۵۰
۲) ۵۵
۳) ۶۰
۴) ۶۵

**۷۷.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $C\hat{A}B = 65^\circ$ و $A\hat{B}D = 50^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ CED چند درجه است؟



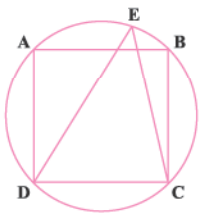

۱) ۲۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۳۵

**۷۸.** در شکل زیر نقاط A، B و D در یک راستا قرار دارند. اگر O مرکز دایره و $C\hat{B}D = 70^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OAC چند درجه است؟



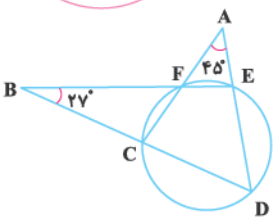

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

**۷۹.** در شکل مقابل، ABCD مربع است. اگر $A\hat{D}E = 30^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BCE چند درجه است؟



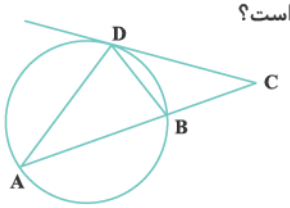

۱) ۳۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۱۰

**۸۰.** در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ ADB چند درجه است؟



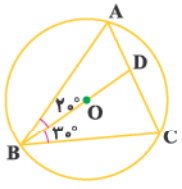

۱) ۴۸
۲) ۵۴
۳) ۶۰
۴) ۷۴

**۸۱.** در شکل مقابل، D نقطهٔ تماس است. اگر $BC = BD$ و $A\hat{D}B = 75^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ DAC چند درجه است؟



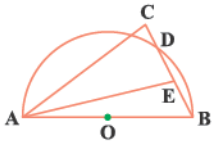

۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۳۵
۴) ۳۰

**۸۲.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ BDC چند درجه است؟



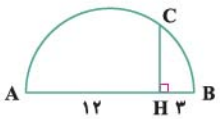

۱) ۷۰
۲) ۷۵
۳) ۸۰
۴) ۸۵

**۸۳.** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. اگر $CD = DE$ و $A\hat{C}B = 80^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ CAE چند درجه است؟



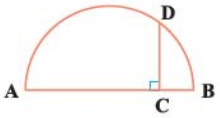

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

**۸۴.** در شکل زیر، AB قطر نیم‌دایره است. طول پاره‌خط CH کدام است؟



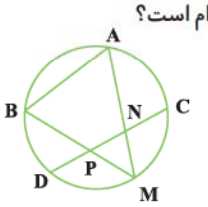

۱) $۹\sqrt{۲}$
۲) ۶
۳) ۷
۴) $۴\sqrt{۲}$

**۸۵.** در شکل زیر، DC بر قطر نیم‌دایره عمود است. اگر $DB = ۲\sqrt{۵}$ و $AC = ۸$ باشند، طول پاره‌خط DC کدام است؟



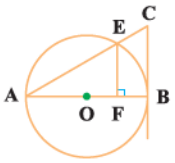

۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۳\sqrt{۲}$

**۸۶.** در شکل زیر، M دورترین نقطهٔ کمان CD از وتر CD است. اگر $MA = ۴$، $MB = ۵$ و $MN = ۳$ باشد، اندازهٔ MP کدام است؟



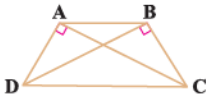

۱) ۳
۲) ۲/۶
۳) ۲/۴
۴) ۳/۲

**۸۷.** در شکل زیر، AB قطر دایره است. اگر $CB = ۶$ و $EF = ۴$ باشند، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



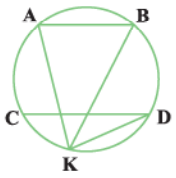

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) $۲\sqrt{۳}$

**۸۸.** در شکل زیر، ABCD ذوزنقه است. اگر $C\hat{A}B = ۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BDC چند درجه است؟



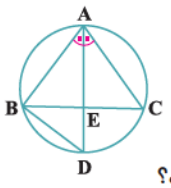

۱) ۶۰
۲) ۴۵
۳) ۳۰
۴) ۱۵

**۸۹.** در شکل زیر، $AB \parallel CD$ است. اگر $A\hat{K}B = B\hat{K}D$ و $\overset{\frown}{DK} = ۲\overset{\frown}{KC}$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ ABK چند درجه است؟



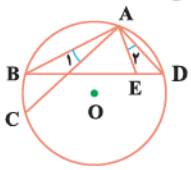

۱) ۷۵
۲) ۶۵
۳) ۷۰
۴) ۶۰

**۹۰.** در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A است. اگر $AE = ۵$ و $BD = ۶$ باشد، طول پاره‌خط ED کدام است؟



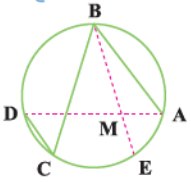

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۳/۵

**۹۱.** در شکل زیر، O مرکز دایره و زوایای $A_۱$ و $A_۲$ برابرند. اگر $AD = ۶$، $AE = ۴$ و $AC = ۱۵$ باشد، طول وتر AB کدام است؟



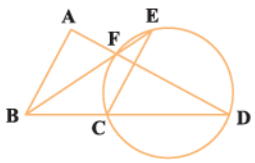

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

**۹۲.** در شکل زیر $AB = ۶$، $BC = ۸$، $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$. اندازهٔ AM کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)



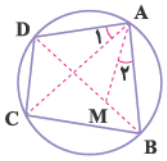

۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

**۹۳.** در شکل مقابل $AB \parallel CE$ است. اگر $AF = ۴$ و $FD = ۱۲$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟



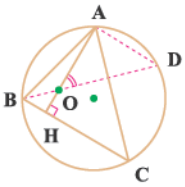

۱) ۸
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

**۹۴.** در شکل مقابل، $\hat{A}_۲ = \hat{A}_۱$، حاصل $AD.BC$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۳)



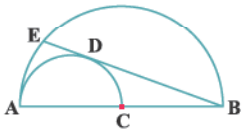

۱) $DM.AC$
۲) $BM.AC$
۳) $AB.CD$
۴) $BD.BM$

**۹۵.** در شکل زیر، $O$ محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث $ABC$ است. اندازهٔ زاویهٔ $AOD$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



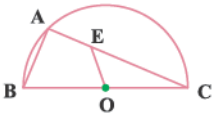

۱) $O\hat{B}C$
۲) $C\hat{A}D$
۳) $O\hat{A}C$
۴) $A\hat{D}O$

**۹۶.** در شکل مقابل، وتر $BE$ بر نیم‌دایرهٔ کوچک مماس است. اگر $AC = ۱۰$ و $BC = ۸$ باشد، طول پاره‌خط $DE$ کدام است؟



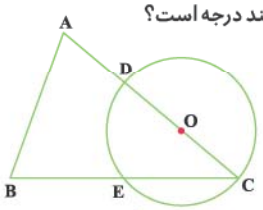

۱) ۵
۲) $\frac{۶۰}{۱۳}$
۳) $\frac{۳۰}{۷}$
۴) $\frac{۶۱}{۱۲}$

**۹۷.** در شکل زیر، $O$ مرکز نیم‌دایره به شعاع ۶/۵ است. اگر $AB = ۵$ و $AE = ۳$ باشد، طول پاره‌خط $OE$ کدام است؟



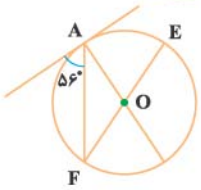

۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۶۱}}{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

**۹۸.** در شکل مقابل، $O$ مرکز دایره و $E$ وسط ضلع $BC$ است. اگر $AB = CD$ و $A\hat{C}B = ۴۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $ABC$ چند درجه است؟



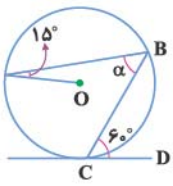

۱) ۴۰
۲) ۵۰
۳) ۶۰
۴) ۷۰

**۹۹.** در شکل مقابل، $O$ مرکز، $FE$ قطر دایره و زاویهٔ $A$ برابر $۵۶^\circ$ است. کمان $AE$ چند درجه است؟



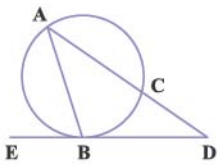

۱) ۶۸
۲) ۶۶
۳) ۶۴
۴) ۶۲

**۱۰۰.** در شکل مقابل، $O$ مرکز دایره و $CD$ بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ کدام است؟



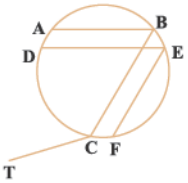

۱) $۳۰^\circ$
۲) $۴۰^\circ$
۳) $۴۵^\circ$
۴) $۵۵^\circ$

**۱۰۱.** در شکل مقابل، $B$ نقطهٔ تماس است. اگر $AB = AC$ و $A\hat{B}E = ۶۹^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ $BAC$ چند درجه است؟



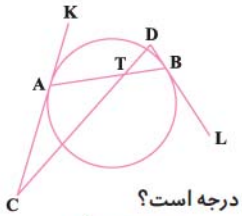

۱) ۳۹
۲) ۴۳
۳) ۴۲
۴) ۴۰

**۱۰۲.** در شکل زیر، $AB \parallel DE$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = ۱۰۰^\circ$ و $EF = ۸۰^\circ$ باشد، اندازهٔ $B\hat{C}T$ چند درجه است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)



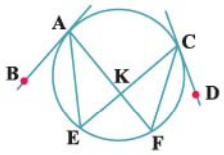

۱) ۹۰
۲) ۹۵
۳) ۱۰۰
۴) ۱۱۰

**۱۰۳.** در شکل مقابل، نقاط A و B نقاط تماس هستند. اگر $B\hat{T}C = ۱۴۰^\circ$ و $K\hat{C}D = ۲۵^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ CDL چند درجه است؟



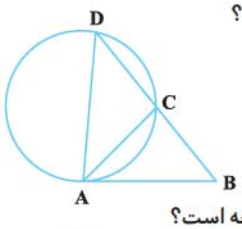

۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۷۰
۴) ۷۵

**۱۰۴.** در شکل مقابل، نقاط A و C نقاط تماس هستند. اگر $B\hat{A}E = ۳۸^\circ$ و $D\hat{C}F = ۴۲^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویه EKF چند درجه است؟



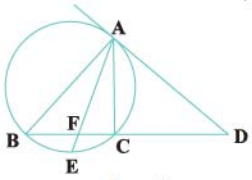

۱) ۹۰
۲) ۹۵
۳) ۱۰۰
۴) ۱۰۵

**۱۰۵.** در شکل مقابل، A نقطهٔ تماس است. اگر $A\hat{B}D = ۵۰^\circ$ و $D\hat{A}C = ۴۰^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ CAB چند درجه است؟



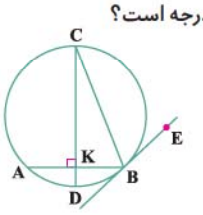

۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۳۰

**۱۰۶.** در شکل مقابل، نقطهٔ A نقطهٔ تماس است. اگر $B\hat{A}E = E\hat{A}C$ و $A\hat{F}D = ۷۰^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ ADB چند درجه است؟



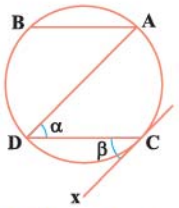

۱) ۳۵
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۵۰

**۱۰۷.** در شکل مقابل، $CD \perp ABC$ و $AK = KB$ است. اگر B نقطهٔ تماس و $C\hat{B}E = ۷۰^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ BCD چند درجه است؟




۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

**۱۰۸.** در شکل مقابل، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$، زاویهٔ $\beta = ۲\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان BD چند درجه است؟ (ریاضی ۹۸)

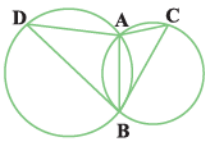



۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

**۱۰۹.** دو دایرهٔ متقاطع در نقطهٔ A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایرهٔ مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطهٔ M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟ (ریاضی خارج ۹۴)

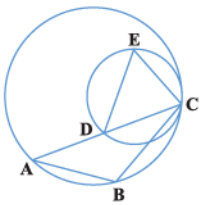
۱) MA
۲) محیط
۳) مساحت
۴) زاویهٔ BMC

**۱۱۰.** در شکل مقابل DB و CB بر دایره‌ها مماس‌اند. اگر $AC = ۴$ و $AD = ۱۶$ باشد، طول وتر مشترک AB کدام است؟



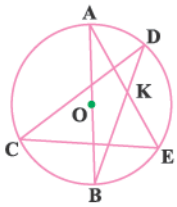

۱) $۶\sqrt{۲}$
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۸

**۱۱۱.** در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ C بر هم مماس‌اند. اگر $D\hat{E}C = ۵۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟



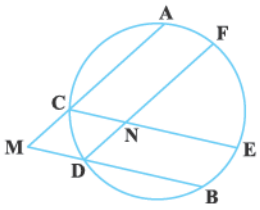

۱) ۱۱۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۳۰
۴) ۱۴۰

**۱۱۲.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $B\hat{K}E = 54^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ DCE چند درجه است؟



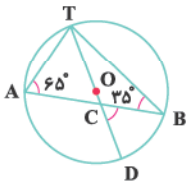

۱) ۳۲
۲) ۳۴
۳) ۳۶
۴) ۴۲

**۱۱۳.** در شکل زیر $AC \parallel DF$ ، $BD \parallel CE$ ، $\overset{\frown}{AC} = 85^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = 75^\circ$ است. اگر $C\hat{N}F = 135^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان EF چند درجه است؟ (ریاضی آزمون مجدد ۱۴۰۱)



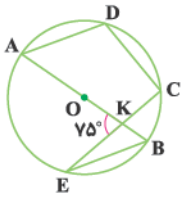

۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۳۵
۴) ۳۰

**۱۱۴.** در شکل زیر، O مرکز دایره، $\hat{A} = 65^\circ$ و $\hat{B} = 35^\circ$ می‌باشند. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟



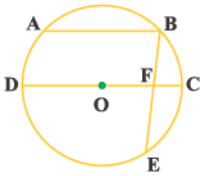

۱) ۶۰
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۳

**۱۱۵.** در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AD = DC = EB$ است. اگر $A\hat{K}E = 75^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ ADC چند درجه است؟



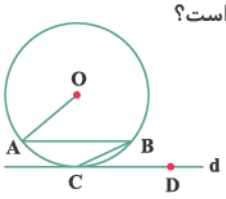

۱) ۹۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۱۰
۴) ۱۲۰

**۱۱۶.** در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB \parallel CD$ است. اگر $AB = BE$ و $\overset{\frown}{CE} = 60^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ OFE چند درجه است؟



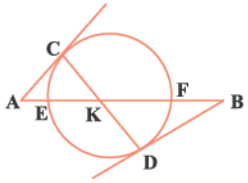

۱) ۶۵
۲) ۷۰
۳) ۷۵
۴) ۸۰

**۱۱۷.** در شکل زیر، O مرکز دایره و وتر AB با مماس d موازی است. اگر $O\hat{A}B = 40^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BCD چند درجه است؟



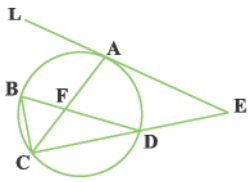

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

**۱۱۸.** در شکل مقابل، نقاط C و D نقاط تماس هستند. اگر $C\hat{A}B = 48^\circ$ و $D\hat{B}A = 32^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ CKB چند درجه است؟




۱) ۱۲۰
۲) ۱۲۵
۳) ۱۳۰
۴) ۱۳۵

**۱۱۹.** در شکل زیر EL در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اگر $C\hat{A}L = 80^\circ$ ، $C\hat{F}D = 110^\circ$ و $B\hat{C}A = 50^\circ$ باشند، اندازهٔ زاویهٔ CEL چند درجه است؟

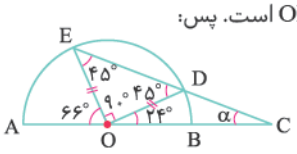



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

## پایهٔ ۱۱ فصل اول: دایره

**۱ ۳**

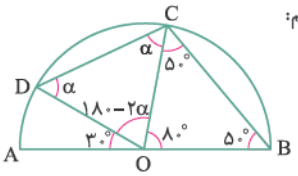
چون OD و OE شعاع نیم‌دایره هستند و اندازهٔ زاویهٔ EOD برابر $۱۸۰^\circ-(۶۶^\circ+۲۴^\circ)=۹۰^\circ$ است، پس مثلث EOD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و زاویه‌ها به صورت شکل زیر هستند. زاویهٔ $D=۴۵^\circ$، زاویهٔ خارجی مثلث ODC است. پس:




$$۴۵^\circ=\alpha+۲۴^\circ\Rightarrow\alpha=۲۱^\circ$$

**۲ ۳**

مثلث‌های DOC و COB متساوی‌الساقین هستند. پس اندازهٔ زاویه‌ها به صورت مقابل است. در نقطهٔ O داریم:

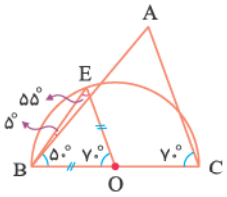



$$۳۰^\circ+۱۸۰^\circ-۲\alpha+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\alpha=۱۱۰^\circ\Rightarrow\alpha=۵۵^\circ$$

**۳ ۳**

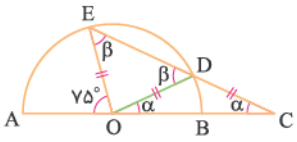
چون $AC\parallel EO$ و $\hat{ACB}=۷۰^\circ$، پس $\hat{EOB}=۷۰^\circ$ می‌باشد. مثلث BOE متساوی‌الساقین است، پس $\hat{E}=\hat{B}=۵۵^\circ$. حال در مثلث ABC داریم:




$$\hat{A}+۵۰^\circ+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ\Rightarrow\hat{BAC}=۶۰^\circ$$

**۴ ۳**

از O به D وصل می‌کنیم. دو مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود که زاویه‌ها به صورت شکل زیر می‌باشند. زاویهٔ EDO زاویهٔ خارجی مثلث ODC است، پس $\beta=۲\alpha$ می‌باشد. از طرفی زاویهٔ AOE زاویهٔ خارجی مثلث EOC است. پس $\alpha+\beta=۷۵^\circ$ است. بنابراین داریم:

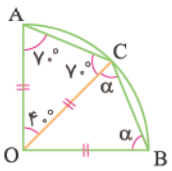



$$\begin{cases}\beta=۲\alpha\\ \alpha+\beta=۷۵^\circ\end{cases}\Rightarrow\alpha+۲\alpha=۷۵^\circ\Rightarrow\alpha=۲۵^\circ$$

$$\Rightarrow\beta=۲\times۲۵^\circ=۵۰^\circ\Rightarrow\hat{OEC}=۵۰^\circ$$

**۵ ۳**

از O به C وصل می‌کنیم. مثلث AOC متساوی‌الساقین است و داریم:



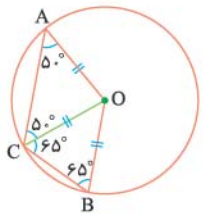

$$\begin{cases}\hat{AOC}=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۰^\circ)=۴۰^\circ\\ \hat{COB}=۹۰^\circ-۴۰^\circ=۵۰^\circ\end{cases}$$

حال در مثلث متساوی‌الساقین COB داریم:

$$\alpha+\alpha+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۱۳۰^\circ\Rightarrow\alpha=۶۵^\circ$$

**۶ ۲**

کافی است شعاع OC را رسم کنیم. دو مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود و داریم:

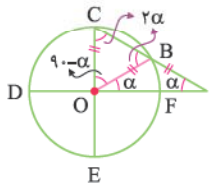



$$\begin{cases}\hat{COB}=۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ+۶۵^\circ)=۵۰^\circ\\ \hat{COA}=۱۸۰^\circ-(۵۰^\circ+۵۰^\circ)=۸۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat{AOB}=\hat{COB}+\hat{COA}=۵۰^\circ+۸۰^\circ=۱۳۰^\circ$$

**۷ ۲**

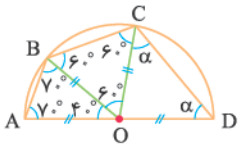
از O به B وصل می‌کنیم. چون OB شعاع دایره است و طبق فرض $OD=AB$؛ پس $OB=AB$ خواهد بود و در نتیجه مثلث OBA متساوی‌الساقین است. واضح است که مثلث BOC نیز متساوی‌الساقین بوده و زوایا به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویهٔ B در مثلث BOC، زاویهٔ خارجی مثلث OBA است. حال در مثلث BOC داریم:




$$۲\alpha+۲\alpha+(۹۰^\circ-\alpha)=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$

**۸ ۲**

از O به B و C وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOB و COD متساوی‌الساقین هستند، زیرا $OA=OB=R$ و $OC=OD=R$. از طرفی مثلث BOC نیز متساوی‌الساقین است و چون زوایای زیر دو ساق $۶۰^\circ$ هستند، پس زاویهٔ O نیز از مثلث BOC برابر $۶۰^\circ$ است و در نتیجه مثلث BOC متساوی‌الاضلاع خواهد بود. پس زاویهٔ O از مثلث COD برابر $۸۰^\circ$ خواهد شد. حال در مثلث COD داریم:

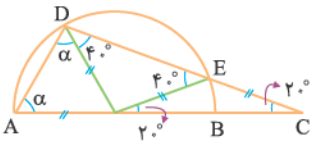



$$\alpha+\alpha+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۱۰۰^\circ\Rightarrow\alpha=۵۰^\circ$$

**۹ ۳**

AB قطر دایره است و چون $AB=۲EC$ می‌باشد، پس EC برابر شعاع دایره است. از مرکز نیم‌دایره به E و D وصل می‌کنیم.

مثلث OEC متساوی‌الساقین است. زاویهٔ OED زاویهٔ خارجی مثلث OEC است پس برابر $۴۰^\circ+۲۰^\circ=۶۰^\circ$ می‌باشد. از طرفی مثلث DOE متساوی‌الساقین است پس $\hat{ODE}=۴۰^\circ$ می‌باشد و داریم:




$$\hat{DOE}=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ-۴۰^\circ=۱۰۰^\circ\Rightarrow\hat{AOD}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ-۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین AOD داریم:

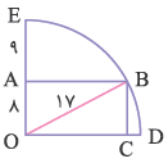
$$۶۰^\circ+\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

حال زاویهٔ ADC برابر است با:

$$\Rightarrow\hat{ADC}=۴۰^\circ+۶۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

**۱۰** ۳

از O به B وصل می‌کنیم. چون OB و OE شعاع هستند، پس $OB=OE=۸+۹=۱۷$ است. از آن‌جایی که OB قطر مستطیل ABCO است، داریم:




$$OA^۲+AB^۲=OB^۲\Rightarrow ۶۴+AB^۲=۲۸۹\Rightarrow AB^۲=۲۲۵$$

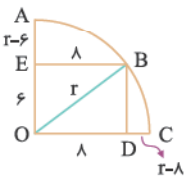
$$\Rightarrow AB=۱۵$$

بنابراین مساحت مستطیل ABCO برابر است با:

$$S=۸\times ۱۵=۱۲۰$$

**۱۱** ۲

از O به B وصل می‌کنیم. اندازه‌ها به صورت مقابل هستند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OEB داریم:



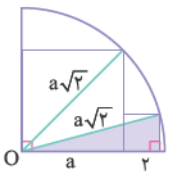

$$۶^۲+۸^۲=r^۲\Rightarrow ۱۰۰=r^۲\Rightarrow r=۱۰$$

بنابراین $AE=۱۰-۶=۴$ و $CD=۱۰-۸=۲$ هستند و داریم:

$$CD+AE=۲+۴=۶$$

**۱۲** ۳

فرض می‌کنیم طول ضلع مربع بزرگ a باشد، بنابراین شعاع ربع دایره که برابر قطر مربع بزرگ است، برابر $a\sqrt{۲}$ است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث رنگی داریم:



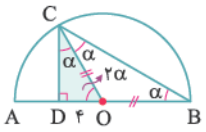

$$(a+۲)^۲+۲^۲=(a\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow a^۲+۴a+۴+۴=۲a^۲$$

$$\Rightarrow a^۲-۴a-۸=۰\Rightarrow a=۲+۲\sqrt{۲}$$

**۱۳** ۱

مثلث COB متساوی‌الساقین است، زیرا $OB=OC=r$. زاویهٔ DOC زاویهٔ خارجی مثلث COB است، پس $D\hat{O}C=۲\alpha$. از طرفی CO نیمساز زاویهٔ DCB است، پس $D\hat{C}O=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ CDO داریم:



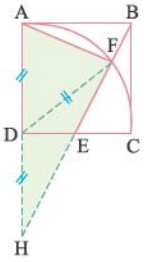

$$۹۰^\circ+\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $۳۰^\circ$ نصف وتر است. پس $OC=۸$ و این یعنی شعاع دایره برابر ۸ است. پس داریم:

$$AD=OA-OD=۸-۴=۴$$

**۱۴** ۳

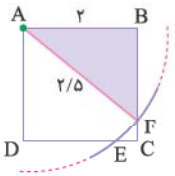
BE را از سمت E امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع مربع را در H قطع کند. دو مثلث BCE و HDE همنهشت هستند، پس $AD=DH=BC=۴$ می‌باشد. حال، از D به F وصل می‌کنیم. چون DF شعاع دایره است،




پس $DF=DA=۴$ و این یعنی در مثلث AFH، میانهٔ وارد بر ضلع AH نصف آن است. پس مثلث AFH قائم‌الزاویه است و این یعنی $A\hat{F}E=۹۰^\circ$ می‌باشد.

**۱۵** ۲

در مربع شکل زیر، به مرکز A و شعاع ۲/۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا اضلاع مربع را در E و F قطع کند. از A به F وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABF داریم:




$$AF^۲=AB^۲+BF^۲\Rightarrow ۶/۲۵=۴+BF^۲$$

$$\Rightarrow BF^۲=۲/۲۵\Rightarrow BF=۱/۵$$

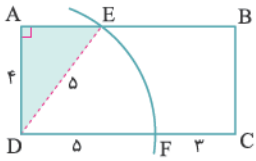
فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع، CF است. پس:

$$CF=BC-BF=۲-۱/۵=۰/۵=\frac{۱}{۲}$$

*به‌هر دیگه. می‌دونیم ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستن. از طرفی هر مضرب غیر صفر از اعداد فیثاغورسی هم اعداد فیثاغورسی میشن. $\frac{۱}{۲}\times ۴=۲$ و $\frac{۱}{۲}\times ۵=۲/۵$ هستن، پس BF برابر $\frac{۱}{۲}\times ۳=۱/۵$ میشه.*

**۱۶** ۴

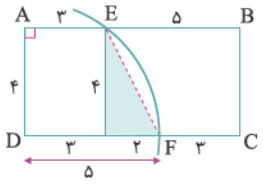
دایرهٔ به شعاع ۵ و به مرکز رأس D رسم شده است که طول‌های مستطیل را در نقاط E و F قطع می‌کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:




$$۵^۲=۴^۲+AE^۲$$

$$\Rightarrow AE^۲=۹\Rightarrow AE=۳$$

حال کافی است از E بر DC عمود کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده داریم:

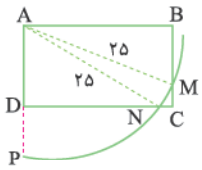



$$EF^۲=۲^۲+۴^۲\Rightarrow EF^۲=۲۰$$

$$\Rightarrow EF=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

**۱۷** ۱

واضح است که عرض مستطیل برابر ۱۵ می‌باشد. زیرا:




$$AD=BC=BM+MC=۷+۸=۱۵$$

از طرفی، $DP=۱۰$ است. پس شعاع دایره یعنی AP برابر $۲۵=۱۰+۱۵$ می‌باشد.

از A به M و N وصل می‌کنیم. چون AM و AN شعاع‌های دایره هستند، پس $AM=AN=۲۵$. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM، داریم:

$$AM^۲=AB^۲+BM^۲\Rightarrow ۲۵^۲=AB^۲+۷^۲\Rightarrow AB^۲=۵۷۶\Rightarrow AB=۲۴$$

بنابراین اندازهٔ طول مستطیل برابر ۲۴ است، یعنی $AB = CD = ۲۴$.

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADN داریم:

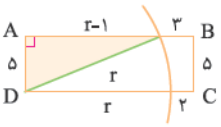
$$۲۵^۲ = ۱۵^۲ + DN^۲ \Rightarrow DN^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow DN = ۲۰$$

$$\Rightarrow NC = ۲۴ - ۲۰ = ۴$$

**۱۸** ۲

با توجه به توضیحات ارائه‌شده در صورت تست، شکل مسأله به صورت مقابل است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:

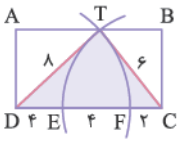



$$۵^۲ + (r-۱)^۲ = r^۲ \Rightarrow ۲۵ + r^۲ - ۲r + ۱ = r^۲$$

$$\Rightarrow ۲r = ۲۶ \Rightarrow r = ۱۳$$

**۱۹** ۴

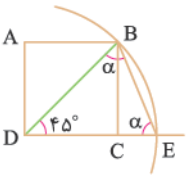
با توجه به شکل مقابل $CT = CE = ۶$ و $DT = DF = ۸$ است. چون اضلاع مثلث DTC برابر ۶، ۸ و ۱۰ و $۱۰^۲ = ۸^۲ + ۶^۲$ است، پس مثلث DTC قائم‌الزاویه است و داریم:




$$S_{ABCD} = ۲S_{DTC} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ = ۴۸$$

**۲۰** ۲

طول قطر مربع برابر $۶ = \sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ است. پس دایره به رأس D و به شعاع قطر مربع است. شکل مسأله را رسم می‌کنیم. از D به B وصل می‌کنیم. مثلث BDE متساوی‌الساقین است. از طرفی قطر مربع نیمساز زوایای مربع نیز است. در مثلث BDE داریم:

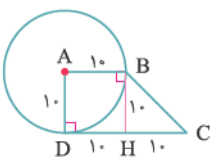



$$۴۵^\circ + \alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۶۷/۵^\circ$$

$$\hat{CBE} = \hat{DBE} - \hat{DBC} \Rightarrow \hat{CBE} = ۶۷/۵^\circ - ۴۵^\circ = ۲۲/۵^\circ$$

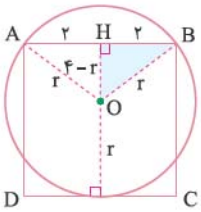
**۲۱** ۲

چون دایره به رأس A از رأس‌های B و D می‌گذرد، پس $AB = AD = ۱۰$. از نقطهٔ B عمودی بر CD رسم می‌کنیم. واضح است چهارضلعی ABHD مربع است. در نتیجه $BH = ۱۰$ و چون $CD = ۲۰$ است، پس $DH = HC = ۱۰$. مثلث BHC، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C} = ۴۵^\circ$.




**۲۲** ۲

با توجه به توضیحات صورت تست، شکل مسئله به صورت زیر است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:




$$r^۲ = ۲^۲ + (۴-r)^۲$$

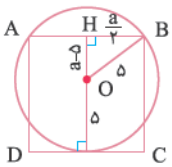
$$\Rightarrow r^۲ = ۴ + ۱۶ + r^۲ - ۸r$$

$$\Rightarrow ۸r = ۲۰ \Rightarrow r = ۲/۵$$

**نکته** اگر دایره‌ای از دو رأس مربع بگذرد و مماس بر ضلع دیگر مربع به ضلع a باشد، شعاع دایره برابر $r = \frac{۵}{۸}a$ خواهد بود.

**۲۳** ۱

**روش اول** با توجه به شکل مقابل و با فرض این‌که طول ضلع مربع برابر a باشد، داریم:




$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^۲ = OH^۲ + HB^۲ \Rightarrow ۲۵ = (a-۵)^۲ + (\frac{a}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵ = a^۲ - ۱۰a + ۲۵ + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{۴}a^۲ - ۱۰a = ۰$$

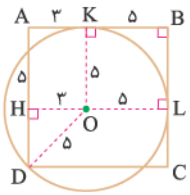
$$\Rightarrow ۵a(\frac{a}{۴} - ۲) = ۰ \Rightarrow a = ۸ \Rightarrow S_{\text{مربع}} = a^۲ = ۶۴$$

**روش دوم** با توجه به این که می‌دانیم $r = \frac{۵}{۸}a$ است، پس:

$$۵ = \frac{۵}{۸}a \Rightarrow a = ۸ \Rightarrow S = a^۲ = ۶۴$$

**۲۴** ۲

از O به K و L وصل می‌کنیم. اندازه‌ها به صورت زیر می‌باشند. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHD داریم:




$$OD^۲ = OH^۲ + HD^۲$$

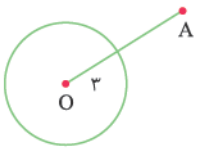
$$\Rightarrow ۲۵ = ۹ + HD^۲ \Rightarrow HD = ۴$$

بنابراین $AB = ۳ + ۵ = ۸$ و $AD = ۵ + ۴ = ۹$ است، پس:

$$S = ۹ \times ۸ = ۷۲$$

**۲۵** ۳

با توجه به داده‌های تست و شکل مقابل داریم:




$$OA > R \Rightarrow ۸ - x > ۳ \Rightarrow x < ۵$$

بنابراین مقادیر طبیعی x می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد.

**۲۶** ۲

اگر نقطهٔ A بیرون دایره باشد، آن‌گاه نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایره برابر $d-r$ است و دورترین فاصلهٔ آن تا دایره برابر $d+r$ است، پس:

$$\begin{cases} d-r=۷ \\ d+r=۱۳ \end{cases} \Rightarrow ۲d=۲۰ \Rightarrow d=۱۰ \Rightarrow r=۳$$

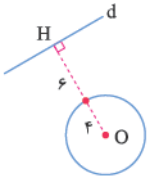
حال فرض می‌کنیم نقطهٔ A درون دایره باشد. در این حالت نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایره برابر $r-d$ و دورترین فاصلهٔ آن تا دایره برابر $d+r$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} r-d=۷ \\ d+r=۱۳ \end{cases} \Rightarrow ۲r=۲۰ \Rightarrow r=۱۰$$

دقت کنید نقطهٔ A نمی‌تواند روی دایره باشد. چون در این حالت نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره برابر صفر می‌شود.

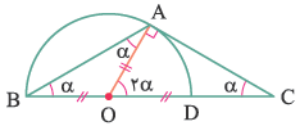
**۲۷** ۳

مطابق شکل مقابل، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا خط d برابر ۶ است.




**۲۸** ۳

از O به A وصل می‌کنیم. OA بر AC عمود است. از طرفی مثلث AOB متساوی‌الساقین است. در ضمن مثلث ABC نیز متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌ها به صورت مقابل هستند. دقت کنید زاویهٔ AOD زاویه خارجی مثلث OAB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC داریم:



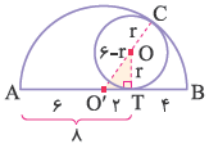

$$۹۰^\circ+\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha=۹۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $۳۰^\circ$ نصف وتر است. پس:

$$OA=\frac{OC}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{OC}{۲} \Rightarrow OC=۴ \Rightarrow CD=OC-OD=۴-۲=۲$$

**۲۹** ۲

با توجه به این‌که $AT=۸$ و $TB=۴$ است، پس اندازهٔ شعاع نیم‌دایره برابر $\frac{۸+۴}{۲}=۶$ می‌باشد. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'OT$ داریم:

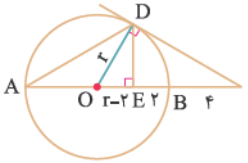



$$(۶-r)^۲=۲^۲+r^۲ \Rightarrow ۳۶-۱۲r+r^۲=۴+r^۲ \Rightarrow ۱۲r=۳۲$$

$$\Rightarrow r=\frac{۳۲}{۱۲}=\frac{۸}{۳}$$

**۳۰** ۳

از مرکز نیم‌دایره یعنی O به D وصل می‌کنیم. OD بر مماس DC عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODC داریم:

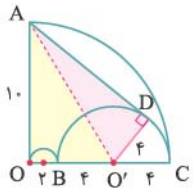



$$OD^۲=OE.OC \Rightarrow r^۲=(r-۲)(r+۴) \Rightarrow r^۲=r^۲+۲r-۸$$

$$\Rightarrow ۲r=۸ \Rightarrow r=۴$$

**۳۱** ۲

از A به مرکز نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر وصل می‌کنیم. $O'D$ بر AD عمود بوده و چون $O'D$ شعاع نیم‌دایره است، پس $O'D=۴$. حال در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $AOO'$ و $ADO'$ داریم:

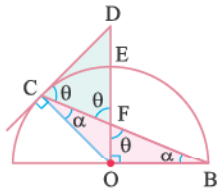



$$\begin{cases} AO^۲+OO'^۲=AO'^۲ \\ AD^۲+DO'^۲=AO'^۲ \end{cases} \Rightarrow AO^۲+OO'^۲=AD^۲+DO'^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰۰+۳۶=AD^۲+۱۶ \Rightarrow AD^۲=۱۲۰ \Rightarrow AD=۲\sqrt{۳۰}$$

**۳۲** ۴

از O به C وصل می‌کنیم. OC بر CD عمود است. از طرف دیگر $OC=OB$ است. پس مثلث BOC متساوی‌الساقین است. حال فرض می‌کنیم زاویهٔ DCF برابر $\theta$ باشد، پس $\alpha+\theta=۹۰^\circ$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ FOB نیز زاویهٔ F برابر $\theta$ خواهد شد، به دلیل این‌که زاویهٔ F در مثلث DCF با این زاویه متقابل به رأس است، پس زاویهٔ F در این مثلث هم برابر $\theta$ می‌شود و این یعنی مثلث DCF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $DF=DC=۸$.

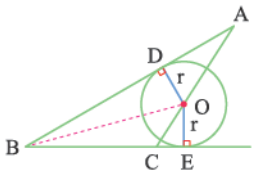



**۳۳** ۴

از O به D و E وصل می‌کنیم. OD بر AB و OE بر BE عمود است. از آن‌جایی که مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ است، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times \sin ۳۰^\circ \Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}\times AB\times ۶\times \frac{۱}{۲} \Rightarrow AB=۱۶$$

حال از O به B وصل می‌کنیم و داریم:




$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=\frac{۱}{۲}AB\times r+\frac{۱}{۲}BC\times r$$

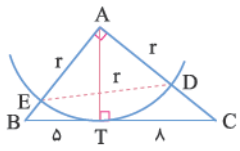
$$\Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}\times ۱۶\times r+\frac{۱}{۲}\times ۶\times r \Rightarrow ۲۴=۸r+۳r \Rightarrow r=\frac{۲۴}{۱۱}$$

**۳۴** ۴

ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ نقاط D و E مد نظر سؤال است. ابتدا از A به T وصل می‌کنیم. AT بر BC عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AT^۲=BT\times CT \Rightarrow r^۲=۵\times ۸=۴۰ \Rightarrow r=۲\sqrt{۱۰}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ EAD داریم:

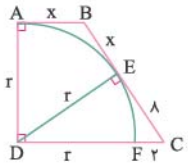


$ED^2 = AE^2 + AD^2 \Rightarrow ED^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow ED = \sqrt{2}r$

$\xrightarrow{r=2\sqrt{10}} ED = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$

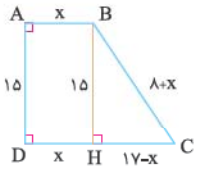
**۳۵** **۳**

از D به E وصل می‌کنیم. DE بر BC عمود است. از طرفی $BE = BA = x$ می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC داریم:




$r^2 + 8^2 = (r+2)^2 \Rightarrow r^2 + 64 = r^2 + 4r + 4 \Rightarrow 4r = 60 \Rightarrow r = 15$

حال، از رأس B بر قاعدهٔ CD عمود می‌کنیم. با توجه به اندازه‌های شکل، به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ CHB، داریم:



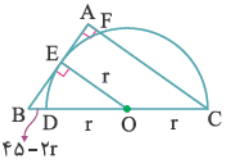

$15^2 + (17-x)^2 = (8+x)^2$

$\Rightarrow 225 + 289 - 34x + x^2 = 64 + 16x + x^2$

$\Rightarrow 50x = 450 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow BE = 9$

**۳۶** **۲**

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC طول وتر BC برابر ۴۵ است. زیرا $AB = 9 \times 3$ و $AC = 9 \times 4$ هستند و می‌دانیم اعداد ۳، ۴ و ۵ و هر مضرب غیرصفر آن‌ها اعداد فیثاغورسی هستند، پس $BC = 9 \times 5 = 45$ می‌باشد. حال از مرکز نیم‌دایره به نقطهٔ تماس وصل می‌کنیم. OE بر AB عمود است، پس OE با AC موازی است. به کمک قضیهٔ تالس در مثلث BAC داریم:



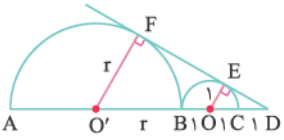

$\frac{OE}{AC} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow \frac{r}{36} = \frac{45-r}{45}$

$\Rightarrow 45r = 36 \times 45 - 36r$

$\xrightarrow{\div 9} 5r = 4 \times 45 - 4r \Rightarrow 9r = 4 \times 45 \Rightarrow r = 20$

**۳۷** **۲**

از مرکز نیم‌دایره‌ها به نقاط تماس وصل می کنیم، می‌دانیم OE و $O'F$ بر DF عمودند، پس با هم موازی‌اند. حال به کمک قضیهٔ تالس در مثلث $O'DF$ داریم:

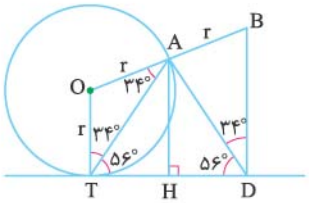



$\frac{DO}{DO'} = \frac{OE}{O'F} \Rightarrow \frac{2}{3+r} = \frac{1}{r} \Rightarrow 2r = 3 + r \Rightarrow r = 3$

**۳۸** **۳**

ابتدا مطابق توضیحات صورت تست، شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

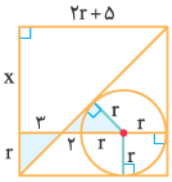
از مرکز دایره به نقطهٔ تماس یعنی T وصل می‌کنیم، بنابراین $\hat{T} = 90^\circ$ خواهد بود. از A بر ساق TD عمود می‌کنیم. طبق عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ OBDT نتیجه می‌شود که $TH = HD$. پس AH عمودمنصف پاره‌خط TD است، پس اگر از A به T وصل کنیم، $AT = AD$ خواهد بود و این یعنی مثلث TAD متساوی‌الساقین است. پس $A\hat{T}H = A\hat{D}H = 56^\circ$. زاویهٔ OTA متمم زاویهٔ $ATH = 56^\circ$ است. پس $O\hat{T}A = 34^\circ$ و چون مثلث AOT متساوی‌الساقین است، پس $O\hat{A}T = 34^\circ$. بنابراین زاویهٔ OAD برابر است با:




$O\hat{A}D = 34^\circ + (180^\circ - 56^\circ - 56^\circ) = 102^\circ$

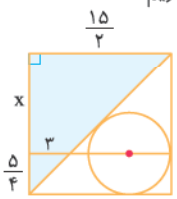
**۳۹** **۲**

می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. با توجه به شکل مقابل دو مثلث رنگی هم‌نهشت هستند، پس طول ضلع قائم مثلث رنگی بالایی برابر ۳ است. حال به کمک قضیه فیثاغورس داریم:




$r^2 + 3^2 = (r+2)^2 \Rightarrow r^2 + 9 = r^2 + 4r + 4 \Rightarrow 4r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{4}$

در شکل زیر به کمک قضیهٔ تالس در مثلث رنگی داریم:




$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}+x} = \frac{3}{\frac{15}{2}} \Rightarrow \frac{15}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} + 3x$

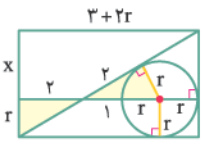
$\Rightarrow \frac{75}{8} - \frac{15}{4} = 3x \Rightarrow \frac{45}{8} = 3x \Rightarrow x = \frac{15}{8}$

بنابراین محیط بزرگ‌ترین چهارضلعی برابر است با:

$\text{محیط} = 2\left(\frac{15}{2} + \left(\frac{5}{4} + \frac{15}{8}\right)\right) = 15 + \frac{25}{4} = 15 + 6/25 = 21/25$

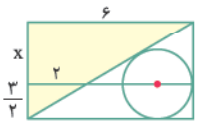
**۴۰** **۳**

می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. با توجه به شکل زیر دو مثلث رنگی همنهشت هستند، پس طول ضلع قائم مثلث رنگی بالایی برابر ۲ می‌باشد. حال به کمک قضیه فیثاغورس داریم:




$(r+1)^2 = r^2 + 2^2 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = r^2 + 4 \Rightarrow 2r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

حال به کمک قضیه تالس دو مثلث رنگی داریم:




$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+x} = \frac{2}{6} \Rightarrow 3 + 2x = 9$

$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$S = 6 \times \left(\frac{3}{2} + 3\right) = 9 + 18 = 27$

**۴۱** ۲

محیط دایره توسط نقاط A و B به دو کمان AMB و ANB تقسیم شده است. پس:

$$\text{محیط دایره} = \overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{ANB} \Rightarrow ۳۶۰^\circ = ۴\overset{\frown}{ANB} + \overset{\frown}{ANB}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{ANB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$$

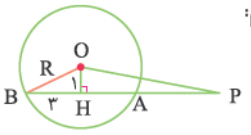
از طرفی داریم:

$$\overset{\frown}{ANB} = \overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{AN} \Rightarrow ۷۲^\circ = ۳\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{AN} = ۴\overset{\frown}{AN}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AN} = ۱۸^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = ۳ \times \overset{\frown}{AN} = ۳ \times ۱۸^\circ = ۵۴^\circ$$

**۴۲** ۳

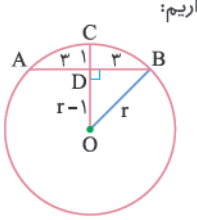
چون OH بر وتر AB عمود است، پس $AH = HB = ۳$. از O به B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم:




$$OB^۲ = OH^۲ + HB^۲ \Rightarrow R^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰ \Rightarrow R = \sqrt{۱۰}$$

**۴۳** ۴

چون C وسط کمان AB است، پس OC عمود بر وتر AB بوده و آن را نصف می‌کند. پس $AD = DB = ۳$ می‌باشند. حال از O به B وصل می‌کنیم. OB شعاع دایره است، لذا $OB = r$ و $OD = OC - CD = r - ۱$ می‌باشند. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODB داریم:




$$OB^۲ = OD^۲ + BD^۲ \Rightarrow r^۲ = (r-۱)^۲ + ۳^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ = r^۲ - ۲r + ۱۰ \Rightarrow ۲r = ۱۰ \Rightarrow r = ۵$$

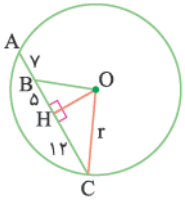
**۴۴** ۲

از O بر وتر AC عمود OH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم وتر را نصف می‌کند. طول وتر AC برابر $۲۴ = ۷ + ۱۷$ است، پس $CH = ۱۲$ و $BH = ۵$ می‌شود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم:

$$OB^۲ = BH^۲ + OH^۲ \Rightarrow (۵\sqrt{۲})^۲ = ۵^۲ + OH^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲ = ۵۰ - ۲۵ = ۲۵ \Rightarrow OH = ۵$$

حال از O به C وصل می‌کنیم، $OC = r$ می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC داریم:



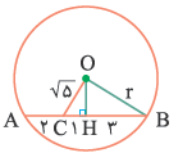

$$OC^۲ = OH^۲ + CH^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow r = ۱۳$$

**۴۵** ۲

از مرکز دایره عمود OH را بر وتر AB وارد می‌کنیم. چون OH بر AB عمود است، پس H وسط وتر AB است. با توجه به این‌که $BC = ۲AC = ۴$ است، داریم: $BH = ۳$ ، $HC = ۱$ ، $AC = ۲$ . به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC داریم:




$$OC^۲ = OH^۲ + HC^۲$$

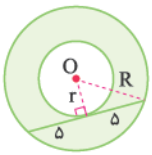
$$\Rightarrow ۵ = OH^۲ + ۱ \Rightarrow OH^۲ = ۴$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB مقدار r معلوم می‌شود:

$$OB^۲ = OH^۲ + HB^۲ \Rightarrow r^۲ = ۴ + ۹ \Rightarrow r = \sqrt{۱۳}$$

**۴۶** ۳

به شکل مقابل توجه کنید. می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. از طرفی شعاع عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند. با فرض این‌که شعاع دایرهٔ بزرگ R و شعاع دایرهٔ کوچک r باشد، داریم:



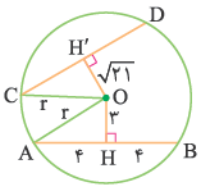

$$R^۲ = r^۲ + ۲۵ \Rightarrow R^۲ - r^۲ = ۲۵$$

مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره برابر است با:

$$\pi R^۲ - \pi r^۲ - = \pi (R^۲ - r^۲) = \pi \times ۲۵ = ۲۵\pi$$

**۴۷** ۳

شکل مسئله را رسم می‌کنیم. چون $OH' > OH$ می‌باشد، پس $AB > CD$ است، بنابراین طبق فرض سؤال $AB = ۸$ است. چون OH بر AB عمود است، پس $AH = BH = ۴$ می‌باشد. حال از O به A وصل می‌کنیم. مثلث OHA قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:




$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow r = ۵$$

با وصل کردن O به C در مثلث قائم‌الزاویهٔ OH'C داریم:

$$OC^۲ = OH'^۲ + CH'^۲$$

$$\Rightarrow ۵^۲ = (\sqrt{۲۱})^۲ + CH'^۲ \Rightarrow CH'^۲ = ۴ \Rightarrow CH' = ۲$$

چون OH' بر CD عمود است، پس آن را نصف می‌کند و داریم:

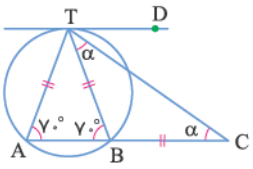
$$CD = ۲CH' = ۲ \times ۲ = ۴$$

**۴۸** ۱

چون $AC \parallel TD$ است، پس $\overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{BT}$ و در نتیجه $TA = TB$ است. از طرفی $TA = BC$ است پس $TB = BC$ می‌باشد و در نتیجه مثلث‌های TBC و ATB متساوی‌الساقین می‌باشند. زاویهٔ TBA زاویهٔ خارجی مثلث TBC است، پس:

$$۷۰^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = ۳۵^\circ$$

چون $AC \parallel TD$ می‌باشد، بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $T\hat{B}A = B\hat{T}D = ۷۰^\circ$ است.




بنابراین داریم:

$$D\hat{T}C = B\hat{T}D - B\hat{T}C \Rightarrow D\hat{T}C = ۷۰^\circ - ۳۵^\circ = ۳۵^\circ$$

**۴۹** **۲**

در مثلث قائم‌الزاویه AFE داریم:

$$۶۵^\circ + B\hat{A}E = ۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}E = ۲۵^\circ$$

شعاع عمود بر وتر DE، کمان DBE را نصف می‌کند، پس:

$$B\hat{A}E = ۲۵^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} = ۲۵ \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = ۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{DB} = ۵۰^\circ$$

چون وترهای AC و DE مساوی‌اند، پس کمان‌های AC و DE نیز برابرند:

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DBE} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۵۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

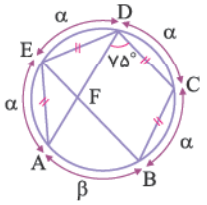
AB قطر دایره است، پس:

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۰۰^\circ + \overset{\frown}{CD} + ۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۳۰^\circ$$

**۵۰** **۱**

می‌دانیم کمان‌های متناظر با وترهای مساوی با هم برابرند. از طرفی زاویهٔ ADC محاطی است، پس:




$$A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲} \Rightarrow ۷۵^\circ = \frac{\alpha + \beta}{۲} \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۵۰^\circ$$

واضح است که $۴\alpha + \beta = ۳۶۰^\circ$ می‌باشد، پس:

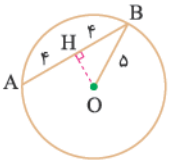
$$\begin{cases} \alpha + \beta = ۱۵۰^\circ \\ ۴\alpha + \beta = ۳۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۳\alpha = ۲۱۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۰^\circ \Rightarrow \beta = ۸۰^\circ$$

زاویهٔ AEB زاویهٔ محاطی روبه کمان AB است، پس:

$$A\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\beta}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

**۵۱** **۱**

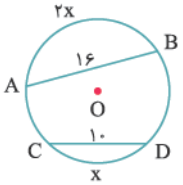
می‌دانیم قطر (شعاع) عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند. پس با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم:



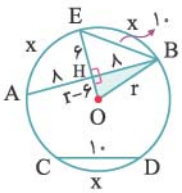

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۲۵ = OH^۲ + ۱۶ \Rightarrow OH^۲ = ۹ \Rightarrow OH = ۳$$

**۵۲** **۱**

با توجه به فرضیات سؤال، شکل مسأله به صورت مقابل است:




از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می‌دهیم تا کمان AB را در نقطهٔ E قطع کند. می‌دانیم وتر AB و کمان AB نصف می‌شوند. از طرفی چون کمان EB با کمان CD برابرند، پس وتر EB نیز با وتر CD برابر است. پس $EB = ۱۰$. از آن‌جایی که ۶، ۸ و ۱۰ اعداد فیثاغورسی هستند، پس $HE = ۶$. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:

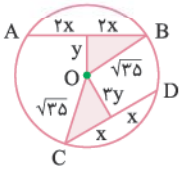



$$r^۲ = (r-۶)^۲ + ۸^۲ \Rightarrow r^۲ = r^۲ - ۱۲r + ۳۶ + ۶۴$$

$$\Rightarrow ۱۲r = ۱۰۰ \Rightarrow r = \frac{۲۵}{۳}$$

**۵۳** **۳**

با توجه به فرضیات صورت تست، شکل مسأله به صورت مقابل است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های رنگی داریم:

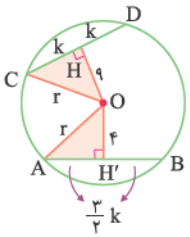



$$\begin{cases} (۲x)^۲ + y^۲ = ۳۵ \Rightarrow ۴x^۲ + y^۲ = ۳۵ \\ x^۲ + (۳y)^۲ = ۳۵ \Rightarrow x^۲ + ۹y^۲ = ۳۵ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + ۹(۳۵ - ۴x^۲) = ۳۵$$

$$\Rightarrow ۳۵x^۲ = ۳۵ \times ۸ \Rightarrow x = \sqrt{۸} \Rightarrow CD = ۲x = ۲\sqrt{۸} = ۴\sqrt{۲}$$

**۵۴** **۴**

از O بر AB و CD عمود کرده و به C و A نیز وصل می‌کنیم. OH و $OH'$ به ترتیب برابر ۹، ۴ و $OC = OA = r$ می‌باشد. از طرفی، داریم:




$$۲AB = ۳CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} AB = ۳k \\ CD = ۲k \end{cases}$$

چون OH و $OH'$ بر وترهای CD و AB عمودند، پس آن‌ها را نصف می‌کنند و داریم:

$$CH = DH = k \quad , \quad AH' = BH' = \frac{۳}{۲}k$$

به کمک قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث رنگی، داریم:

$$\begin{cases} r^۲ = ۹^۲ + k^۲ \\ r^۲ = ۴^۲ + \left(\frac{۳}{۲}k\right)^۲ \end{cases} \Rightarrow ۰ = ۶۵ - \frac{۵}{۴}k^۲ \Rightarrow \frac{۵}{۴}k^۲ = ۶۵$$

$$\Rightarrow k^۲ = \frac{۴}{۵} \times ۶۵ = ۵۲$$

بنابراین با جای‌گذاری $k^۲ = ۵۲$ در تساوی $r^۲ = ۹^۲ + k^۲$، داریم:

$$r^۲ = ۸۱ + ۵۲ = ۱۳۳ \Rightarrow r = \sqrt{۱۳۳}$$

**۵۵** **۲**

چون AB قطر دایره است، پس مرکز دایره روی AB قرار دارد. از O بر وتر CD عمود OH را وارد می‌کنیم. H وسط وتر CD خواهد بود.