گاج

حسابان ۱

پایه یازدهم

رشته ریاضی و فیزیک

فرمول بیست

مؤلف

ندا فرهختی

فرمول بیست

۷۵
صفحه
درسنامه

۹۰۰
پرسش
تشریحی

۵
نمونه
امتحانی

+۵
ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان

9 786220 307747
تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

کتاب پیش رو از مجموعه کتاب‌های فرمول بیست می‌باشد.

هدف اصلی این مجموعه کتاب ارائه آموزش‌های کامل همراه با مثال ها و تمرینات متنوع بر پایه کتاب درسی و در جهت تسلط و آمادگی برای امتحانات می‌باشد.

در این کتاب...

هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائه مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد.

در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و با گردآوری سؤالات متنوع، یک مجموعه تمرین و بانک سؤال خوب و کاملی ارائه شده است .

در نهایت با حل کاملا تشریحی تمرینات، هر آنچه که یک دانش‌پژوه برای آموزش نیاز دارد، در اختیارش قرار گرفته است.

در این کتاب برخی تمرینات تحت عنوان سؤالات ستاره‌دار مشخص شده است، این گروه سؤالات همان تمرینات اولیه و حداقلی است که هر دانش‌پژوه باید با آن مواجه گردد. حجم و تنوع این دسته سؤالات به گونه‌ای طراحی شده که دانش‌پژوهانی که فرصت کمتری برای حل تمرین یا مرور فصل دارند ابتدا سراغ این دسته سؤالات بروند و سپس در مرحله بعد و در زمان مقتضی به حل بقیه تمرینات بپردازند و امکان تمرین بیشتر را داشته باشند.

گروه دیگری از تمرینات، مجموعه سؤالاتی هستند که تحت عنوان سؤالات بمب شناخته می‌شوند . سؤالات بمب شامل تمریناتی است که سطح آنها یک سر و گردن بالاتر از دیگر تمرینات است و دانش پژوهان سخت‌کوش‌تر را به چالش می‌کشد تا با حل آنها لذت حل مسأله برایشان دو چندان شود.

در انتهای کتاب، چند دوره امتحان نهایی اخیر قرار گرفته تا کار را برای مرور شب امتحان راحت‌تر کند.

برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب نیز می‌توانید به فیلم‌های آموزشی ویژهٔ شب امتحان که QR-Code آن‌ها در ابتدای هر فصل آمده، مراجعه کنید.

خلاصه این که هر آنچه که یک دانش پژوه از یک کتاب آموزشی انتظار دارد، در این کتاب گنجانده شده است. بنابراین برای همراه شدن با این کتاب تردید نکنید و از داشتنش لذت ببرید.

در پایان از همه عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم؛ همچنین از خانواده عزیزم که مرا صبورانه همراهی کردند، سپاسگزارم.

ندا فرهختی

فهرست

امتحان نهایی

بارم‌بندی درس حسابان ۱

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
اول	۱۰	۴	۴
دوم	۸	۴	۴
سوم	۲ (تا آخر درس ۱ از فصل ۳، صفحهٔ ۷۹)	۳	۳
چهارم	-	۴	۴
پنجم	-	۵	۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

1

بخش

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ جبر و معادله

حسابان یازدهم

بهترین جمله‌ای که در مورد این فصل می‌توان گفت، این است که: «پلی است از گذشته به آینده»
درواقع این فصل و حتی می‌توان گفت کتاب حسابان (۱) ارتباطی بین دانش گذشته و بخصوص مطالب ریاضی دهم و مطالب پیش رو در سال آینده و کتاب حسابان دوازدهم است.
از یک طرف با تکمیل آموخته‌های سال‌های قبل شما را به سطح خوبی از دانش حسابان می‌رساند و از طرف دیگر شما را برای مواجهه با مطالب جدی‌تر آماده می‌کند.
با نگاهی به فهرست مطالب فصل اول، خیلی زود در می‌یابید که این فصل آش شله‌قلمکاری است که در همین ابتدا می‌خواهد مطالب جامانده و مقدمات لازم را به سمع و نظر شما برساند و همین جاست که اهمیّت این فصل را بر همگان آشکار می‌سازد.
از این فصل، ۱۰ نمره در نوبت اول و ۴ نمره در نوبت دوم و شهریور سؤال طرح می‌شود.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بسته‌های ۱ و ۲ | بسته‌های ۳ و ۴ | بسته‌های ۵ و ۶ | بستهٔ ۷

بسته اول

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

این کتاب و این فصل رو با دنباله‌ها شروع می‌کنیم، باشد که این شروع فال نیکی برای ادامهٔ داستان حسابان شود.

یادآوری از دنباله‌های حسابی

اگر از سال گذشته به یاد داشته باشید، جملات دنباله‌های حسابی از جمع عددی ثابت با جملهٔ قبل آن، به‌دست می‌آیند:

$$a_1, \underbrace{a_1+d}_{a_2}, \underbrace{a_1+2d}_{a_3}, \underbrace{a_1+3d}_{a_4}, \dots \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

(a_n ، جملهٔ عمومی و d ، قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در دنباله‌های حسابی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow \boxed{a_n - a_m = (n-m)d}$$

نکته اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی باشند، b واسطهٔ حسابی بین a و c است و در نتیجه:

$$2b = a + c \quad \text{یا} \quad b = \frac{a+c}{2}$$

سؤال مقدار a را از دنبالهٔ حسابی $-1, a, 5, \dots$ بیابید. سپس قدرنسبت این دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ

$$-1, a, 5, \dots \xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} 2a = (-1) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \,,\; d = a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 3$$

حالا که دنباله‌های حسابی خوب یادتون اومد، بریم که جمله‌های این دنباله‌ها رو با هم جمع کنیم ببینیم چی دستگیرمون می‌شه.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای پیدا کردن مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه یعنی $1+2+3+\dots+n$، جناب گاوس یک ابتکار به خرج دادند و به روش زیر، این حاصل جمع را محاسبه کردند:

$$\begin{array}{l} \ \ 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ +(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{\text{n تا}} = n(n+1) \Rightarrow 2(1+2+\cdots+n)=n(n+1) \end{array}$$

و در نتیجه داریم:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

سؤال مجموع چه تعداد از اعداد طبیعی اولیه، برابر با ۲۱۰ می‌گردد؟

پاسخ

$$1+2+3+\cdots+n=210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=210 \Rightarrow n(n+1)=420 \Rightarrow n(n+1)=20\times 21 \Rightarrow n=20$$

حالا می‌توانیم از همین ابتکار الگو بگیریم و مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و جملهٔ n ام، a_n را پیدا کنیم:

$$S_n = a_1 + \overbrace{(a_1+d)}^{a_2} + \overbrace{(a_1+2d)}^{a_3} + \cdots + \overbrace{(a_1+(n-2)d)}^{a_{n-1}} + \overbrace{(a_1+(n-1)d)}^{a_n}$$

$$(a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-3)d) + \cdots + (a_1+d) + a_1 = S_n$$

با جمع کردن دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\xrightarrow{+} 2S_n = \underbrace{(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)+\cdots+(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)}_{\text{n تا}}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow \boxed{S_n = a_1+\cdots+a_n=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}}$$

و در نتیجه اگر از فرمول جملهٔ n اُم دنبالهٔ حسابی یعنی $a_n=a_1+(n-1)d$ کمک بگیریم، داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(a_1+\overbrace{(a_1+(n-1)d)}^{a_n}) \Rightarrow \boxed{S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}}$$

سؤال مجموع چند جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی $\dots,6,9,12$ برابر صفر است؟

پاسخ با یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=-3$ مواجه‌ایم، پس داریم:

$$S_n=0 \Rightarrow \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}=0 \xrightarrow[d=-3]{a_1=12} n(2(12)+(n-1)(-3))=0 \xrightarrow{n\neq 0} 24-3n+3=0 \Rightarrow 3n=27 \Rightarrow n=9$$

بنابراین مجموع ۹ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

سؤال در یک دنبالهٔ حسابی اگر $a_{12}+a_9=15$ باشد، مجموع ۲۰ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

پاسخ

$$a_{12}+a_9=(a_1+11d)+(a_1+8d)=2a_1+19d \Rightarrow 2a_1+19d=15 \quad (*)$$

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d) \overset{(*)}{=} 10(15)=150$$

نکته اگر S_n مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a_n باشد، داریم:

① $a_1=S_1$

② $S_n-S_{n-1}=a_n$

زیرا:

$$S_n-S_{n-1}=(a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+\cdots+a_{n-1})=a_n$$

سؤال اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از فرمول $S_n = ۵n^۲ + ۳n$ به‌دست آید، قدرنسبت و جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.

پاسخ

$$a_۱ = S_۱ = ۵(۱)^۲ + ۳(۱) = ۸ \quad , \quad S_۲ = a_۱ + a_۲ = ۵(۲)^۲ + ۳(۲) = ۲۰ + ۶ = ۲۶$$

$$a_۲ = S_۲ - S_۱ = ۲۶ - ۸ = ۱۸ \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = ۱۸ - ۸ = ۱۰$$

با یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = ۱۰$ مواجهیم، پس داریم:

$$\Rightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۸ + ۱۰(n-۱) = ۱۰n - ۲$$

توجه کنید که جملهٔ عمومی دنباله را به طور مستقیم از فرمول S_n هم می‌توانستیم بیابیم:

$$a_n = S_n - S_{n-۱} = ۵n^۲ + ۳n - (۵(n-۱)^۲ + ۳(n-۱))$$

$$= ۵n^۲ + ۳n - (۵n^۲ - ۱۰n + ۵ + ۳n - ۳) = \cancel{۵n^۲} + \cancel{۳n} - \cancel{۵n^۲} + ۱۰n - ۵ - \cancel{۳n} + ۳ = ۱۰n - ۲ \Rightarrow a_n = ۱۰n - ۲$$

سؤال مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۶ را بیابید. **مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی**

پاسخ

اعداد دو رقمی مضرب ۶ : $۱۲ \underset{+۶}{,} ۱۸ \underset{+۶}{,} ۲۴ , \cdots , a_n = ۱۲ + ۶(n-۱) = ۶n + ۶$

اولاً باید:

$$a_n = ۶n + ۶ < ۱۰۰ \Rightarrow ۶n < ۹۴ \Rightarrow n < \frac{۹۴}{۶} \simeq ۱۵/۶ \Rightarrow n \leq ۱۵$$

پس بزرگ‌ترین مضرب دو رقمی عدد ۶، به ازای $n = ۱۵$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \overset{n=۱۵}{=\!=} \frac{۱۵}{۲}(۲(۱۲) + \underbrace{(۱۵-۱)}_{۱۴}(۶)) = \frac{۱۵}{۲} \times ۱۰۸ = ۸۱۰$$

و یا:

$$a_n = a_{۱۵} = ۹۶ \Rightarrow S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(a_۱ + a_{۱۵}) = \frac{۱۵}{۲}\overbrace{(۱۲ + ۹۶)}^{۱۰۸} = ۸۱۰$$

بسته ۱ پرسش‌های تشریحی

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

● **در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.**

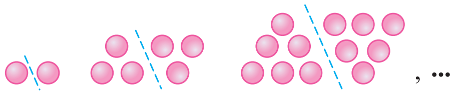
۱. مجموع .... جمله از دنبالهٔ حسابی $x, ۷, ۱۲, \ldots$ برابر ۶۰ است. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت عصر)

۲. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل .... جمله را با هم جمع کنیم حاصل بیشتر از ۴۰۰ می‌شود. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت صبح)

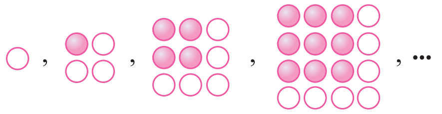
۳. مجموع جملات دنبالهٔ حسابی $۱, ۳, ۵, ۷, \ldots, ۱۹۹$ برابر با .... است. (شهریور ۱۴۰۲ غایبین)

۴. حاصل عبارت $۲ + ۴ + ۶ + \ldots + ۱۰۰$ برابر با .... است. (شهریور ۱۴۰۲)

☆ ۵. به کمک شکل‌های زیر، مجموع n عدد طبیعی اولیه (از ۱ تا n) را به‌دست آورید. (مشابه فعالیت صفحهٔ ۲ کتاب درسی)



☆ ۶. به کمک شکل زیر ثابت کنید مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی اولیه، برابر با $n^۲$ است. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)



☆ ۷. در هر یک از دنباله‌های حسابی زیر، مجموع بیست جملهٔ اول را بیابید.

آ) $-۵, ۰, ۵, \cdots$ (شهریور ۹۲)

ب) $-۵, -۳, -۱, \cdots$ (دی ۹۱)

☆ ۸. مجموع جملات دنبالهٔ $۴, ۷, ۱۰, \cdots, ۱۰۰$ را بیابید. (دی ۹۵)

۹. مجموع اعداد طبیعی فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ چقدر است؟

☆ ۱۰. مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۱۵ چقدر است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

☆ **۱۱.** **در یک دنبالهٔ حسابی، هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ بیش‌تر است. اگر جملهٔ هفتم برابر ۱۳ باشد، مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله چقدر است؟**

☆ **۱۲.** **در یک دنبالهٔ حسابی جملات هفتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می‌باشد. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.**

☆ **۱۳.** **در دنبالهٔ حسابی $۳,۹,۱۵,\cdots$ ، حداقل چند جملهٔ آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش‌تر شود؟** (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶ کتاب درسی و دی ۹۳)

۱۴. **در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ چهارم برابر با ۳ و جملهٔ هفتم برابر با ۱۲ است،**

آ) جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

ب) حداکثر چند جمله از آن را با هم جمع کنیم، تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود؟

۱۵. **در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۳ - ۲n$ ، مجموع n جملهٔ اولیهٔ دنباله (S_n) را بیابید، سپس مجموع ۱۵ جملهٔ اول آن را به‌دست آورید.**

☆ **۱۶.** **اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $S_n = \frac{۶n^۲ - ۵n}{۱۲}$ باشد،**

آ) قدرنسبت و جملهٔ اول آن را به‌دست آورید. ب) مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چقدر است؟

☆ **۱۷.** **در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۰ جمله، مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲۴۰ و مجموع جملات ردیف زوج برابر با ۲۷۰ می‌باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.** (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۱۸. **در یک دنبالهٔ حسابی با ۱۰ جمله، مجموع ۵ جملهٔ اول برابر ۲۵ و مجموع ۵ جملهٔ آخر برابر ۱۰۰ می‌باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.**

۱۹. **در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$:**

آ) اگر قدرنسبت یک واحد افزایش یابد، به مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چند واحد افزوده می‌شود؟

ب) اگر همهٔ جملات دو برابر شوند، مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن چند برابر می‌شود؟

۲۰. **مجموع چند عدد طبیعی اولیه، $\frac{۳}{۵}$ مربع تعداد آن‌ها می‌باشد؟**

☆ **۲۱.** **بر روی محیط یک دایره n نقطه قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. اگر تعداد کل پاره‌خط‌های ایجادشده برابر ۵۵ باشد، تعداد این نقاط چند تا است؟** (این مسئله را به دو روش حل کنید.) (مشابه مثال صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

۲۲. **یک موسسهٔ خیریه در اولین سال فعالیت خود ۵۰۰ خانوار را تحت پوشش خود دارد. اگر هدف این موسسه آن باشد که هر سال ۴۰ خانوار را به اعضای تحت پوشش خود بیفزاید، پس از ۱۰ سال مجموعاً چند خانوار را تحت پوشش خواهد داشت؟**

☆ **۲۳.** **یک مسابقهٔ دو، طوری طراحی شده که از کنار یک سبد شروع به دویدن کرده، در ایستگاه اول یک توپ برداشته، برمی‌گردیم و در سبد می‌اندازیم و سپس تا ایستگاه دوم رفته و دو توپ برمی‌داریم، برمی‌گردیم و در سبد می‌اندازیم و به همین ترتیب تا ایستگاه n اُم رفته، n توپ برمی‌داریم و برمی‌گردیم در سبد می‌اندازیم. اگر دونده‌ای در مجموع ۵۵ توپ در سبد انداخته باشد و فاصلهٔ بین هر دو ایستگاه متوالی و هم‌چنین ایستگاه اول تا سبد، ۲ متر باشد، مجموع مسافت‌های طی‌شده توسط این دونده را بیابید.** (مشابه مثال صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

بستهٔ دوم

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

صفحهٔ ۴ تا ۷ کتاب درسی

قبل از این‌که یاد بگیریم چه‌طور و با چه فرمولی مجموع جملات یه دنبالهٔ هندسی رو به دست بیاریم، لازم می‌دونم که یادآوری کوچیکی از دنباله‌های هندسی داشته باشیم.

یادآوری از دنباله‌های هندسی

جملات دنباله‌های هندسی از ضرب عددی ثابت و مخالف صفر در جملهٔ قبل آن به‌دست می‌آیند:

$$a_۱ \xrightarrow{\times q} \underbrace{a_۱q}_{a_۲} \xrightarrow{\times q} \underbrace{a_۱q^۲}_{a_۳} \xrightarrow{\times q} \underbrace{a_۱q^۳}_{a_۴}, \cdots \Rightarrow \boxed{a_n = a_۱q^{n-۱}}$$

(a_n جملهٔ عمومی (n اُم) و q قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین نسبت هر دو جملهٔ متوالی در دنبالهٔ هندسی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$\frac{a_n}{a_{n-۱}} = q \Rightarrow \boxed{\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}}$$

! نکته اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت باشند، b را واسطهٔ هندسی a و c می‌گویند و داریم:

$$b^۲ = ac \text{ یا } b = \sqrt{ac}$$

سؤال مقادیر x و y را در دنبالهٔ هندسی $۴, x, y, \frac{۱}{۲}, \dots$ بیابید.

پاسخ روش اول

$$۴, x, y, \frac{۱}{۲}, \dots \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} \begin{cases} x^{۲} = ۴y \Rightarrow y = \frac{x^{۲}}{۴} \\ y^{۲} = \frac{۱}{۲}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^{۲}}{۴}\right)^{۲} = \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x^{۴}}{۱۶} = \frac{x}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲x^{۴} = ۱۶x \xrightarrow[x \neq ۰]{\div(۲x)} x^{۳} = ۸ = ۲^{۳} \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow{y = \frac{x^{۲}}{۴}} y = \frac{۴}{۴} = ۱$$

روش دوم در دنبالهٔ داده شده $a_{۱} = ۴$ و $a_{۴} = \frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$q^{۴-۱} = \frac{a_{۴}}{a_{۱}} \Rightarrow q^{۳} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۴} = \frac{۱}{۸} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = a_{۱}q = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲ \\ y = x\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱ \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

اگر $S_n = a_{۱} + a_{۲} + \dots + a_n$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی باشد، به کمک روش زیر می‌توان فرمولی برای S_n یافت:

$$S_n = a_{۱} + a_{۱}q + a_{۱}q^{۲} + \dots + a_{۱}q^{n-۱} \qquad (*)$$

طرفین رابطهٔ بالا را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = a_{۱}q + a_{۱}q^{۲} + a_{۱}q^{۳} + \dots + a_{۱}q^{n-۱} + a_{۱}q^{n} \qquad (**)$$

حالا اگر طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{(**)-(*)} qS_n - S_n = (\cancel{a_{۱}q} + \cancel{a_{۱}q^{۲}} + \dots + \cancel{a_{۱}q^{n-۱}} + a_{۱}q^{n}) - (a_{۱} + \cancel{a_{۱}q} + \dots + \cancel{a_{۱}q^{n-۱}})$$

$$\Rightarrow \underbrace{qS_n - S_n}_{S_n \text{ فاکتور از }} = \underbrace{a_{۱}q^{n} - a_{۱}}_{a_{۱} \text{ فاکتور از }} \Rightarrow S_n(q-۱) = a_{۱}(q^{n}-۱) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_{۱}(q^{n}-۱)}{q-۱}}$$

توجه کنین که فرقی نمی‌کنه بنویسیم $S_n = \frac{a_{۱}(q^{n}-۱)}{q-۱}$ یا $S_n = \frac{a_{۱}(۱-q^{n})}{۱-q}$! اگه گفتین چرا؟

سؤال مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\dots, ۲, ۱, \frac{۱}{۲}$، چند برابر جملهٔ اول آن است؟ **مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی**

پاسخ

$$\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots \Rightarrow q = ۲, \; a_{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$\times ۲ \quad \times ۲$

$$\Rightarrow S_{۱۰} = \frac{a_{۱}(q^{۱۰}-۱)}{q-۱} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲^{۱۰}-۱)}{۲-۱} = \frac{۱}{۲}(۱۰۲۴-۱) = \frac{۱۰۲۳}{۲} \Rightarrow \frac{S_{۱۰}}{a_{۱}} = \frac{\frac{۱۰۲۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۲۳$$

سؤال در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر ۶۶ و مجموع ۵ جملهٔ اول برابر ۶۴ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پاسخ

$$\begin{cases} S_{۱۰} = \frac{a_{۱}(q^{۱۰}-۱)}{q-۱} = ۶۶ \\ S_{۵} = \frac{a_{۱}(q^{۵}-۱)}{q-۱} = ۶۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{S_{۱۰}}{S_{۵}} = \frac{\frac{a_{۱}(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_{۱}(q^{۵}-۱)}{q-۱}} = \frac{۶۶}{۶۴}$$

$$\xrightarrow{\text{دور در دور، نزدیک در نزدیک}} \frac{\cancel{a_{۱}}(q^{۱۰}-۱)\cancel{(q-۱)}}{\cancel{a_{۱}}(q^{۵}-۱)\cancel{(q-۱)}} = \frac{۶۶}{۶۴} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{\cancel{(q^{۵}-۱)}(q^{۵}+۱)}{\cancel{q^{۵}-۱}} = \frac{۶۶}{۶۴}$$

$$\Rightarrow q^{۵}+۱ = \frac{۳۳}{۳۲} \Rightarrow q^{۵} = \frac{۳۳}{۳۲} - ۱ \Rightarrow q^{۵} = \frac{۱}{۳۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵} \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

نکته برای مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی، یعنی S_n، نیز رابطه‌های روبه‌رو برقرار است: ❶ $S_1=a_1$ ❷ $S_n-S_{n-1}=a_n$

سؤال اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی برابر با $S_n=2^n-1$ باشد، جملهٔ اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ روش اول

$$a_1=S_1=2^1-1=1$$

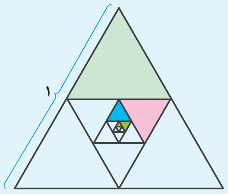
$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{(n-1)}-1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}\underbrace{(2-1)}_{1}=2^{n-1}$$

$$a_n=a_1q^{n-1}\xrightarrow[a_n=2^{n-1}]{a_1=1}2^{n-1}=1\times q^{n-1}\Rightarrow q=2$$

روش دوم

$$S_n=2^n-1 \begin{cases} S_1=a_1=2-1=1 \\ S_2=a_1+a_2=2^2-1=3 \end{cases} \Rightarrow 1+a_2=3\Rightarrow a_2=2\Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2$$

سؤال اگر هر بار وسط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنیم، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



پاسخ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ برابر است با:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

در هر مرحله مساحت رنگ‌شده $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث قبلی است:

مساحت مثلث رنگی اول: $a_1=\frac{1}{4}S=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

مساحت مثلث رنگی دوم: $a_2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

مساحت مثلث رنگی سوم: $a_3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right)\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\vdots$

بنابراین با دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{1}{4}\right)$ مواجهیم و مساحت کل قسمت رنگی ایجادشده برابر است با:

$$S_5=a_1+a_2+\cdots+a_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{4}\right)^5-1\right)}{\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4^2}\times\frac{1-\overset{1024}{4^5}}{4^5}}{-\frac{3}{4}}=\frac{-\overset{341}{\cancel{1023}}\times\sqrt{3}}{-4^6\times\cancel{3}}=\frac{341\sqrt{3}}{4096}$$

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی
مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

۲۴. در یک دنباله هندسی اگر مجموع ۶ جمله اول ۹ برابر مجموع ۳ جمله اول باشد، مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر مجموع ۵ جمله اول است؟ (شهریور ۱۴۰۲ غایبین)

۲۵. طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. پس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ (شهریور ۱۴۰۲)

● در هریک از دنباله‌های هندسی زیر، مجموع ۱۰ جملهٔ اول را بیابید.

☆ ۲۶. $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\cdots$ (خرداد ۹۱، با کمی تغییر)

۲۷. $\frac{1}{5},\frac{1}{20},\frac{1}{80},\cdots$ (شهریور ۹۵، با کمی تغییر)

☆ ۲۸. $\frac{1}{8},\frac{-1}{4},\frac{1}{2},\cdots$

● **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

۲۹. ☆ $\frac{۱}{۲}+۱+۲+۴+\cdots+۲۰۴۸$

۳۰. $-۱-۳-۹\ \cdots\ -۷۲۹$

۳۱. ☆ $۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۷۲۹}-\frac{۱}{۱۲۸}$

۳۲. ☆ مجموع چند جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی $\cdots,۲۴,-۱۲,۶,-۶$ برابر -۱۲۶ خواهد شد؟ (خرداد ۹۰)

۳۳. در یک دنبالهٔ اعداد، هر جمله دو برابر جملهٔ قبلی خود است. اگر مجموع ۵ جملهٔ اول آن برابر ۴۶/۵ باشد، جملهٔ اول دنباله را بیابید.

۳۴. ☆ در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ پانزدهم ۸ برابر جملهٔ دوازدهم است. مجموع ۸ جملهٔ اول این دنباله، چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۳۵. مجموع ۱۲ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۹ برابر مجموع ۶ جملهٔ اول آن است. قدرنسبت را بیابید.

۳۶. مجموع ۱۰ جملهٔ دوم دنبالهٔ هندسی $\cdots,۴,۲,۱$، چند برابر مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن است؟

۳۷. ☆ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n=۳\times۲^n$ است. (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

آ) مجموع ۵ جملهٔ اول آن را بیابید. ب) مجموع چند جمله از این دنباله برابر با ۳۰۶۶ است؟

۳۸. در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q، مجموع ۱۰ جملهٔ اول S می‌باشد.

آ) اگر جملهٔ اول را دو برابر کنیم، مجموع ۱۰ جملهٔ اول چند برابر می‌شود؟

ب) اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، مجموع ۱۰ جملهٔ اول را بر حسب S و q بیابید.

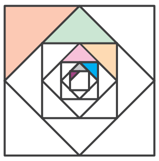
● **درستی هریک از تساوی‌های زیر را اثبات کنید.** (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۳۹. ☆ $۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}=\frac{۱-a^n}{۱-a}$

۴۰. $a^n+۱=(a+۱)(a^{n-۱}-a^{n-۲}+\cdots-a+۱)\ ;$ (n فرد)

۴۱. $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+\cdots+xy^{n-۲}+y^{n-۱})$

۴۲. اگر ضلع مربع ۱ واحد باشد و در هر مرحله وسط اضلاع مربع را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی حاصل شود، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



۴۳. ☆ طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

(تمرین ۶ صفحهٔ ۶ کتاب درسی - دی ۹۴)

۴۴. برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف شود، حداقل چند صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول، حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟

۴۵. ☆ یک مثلث با محیط P را در نظر بگیرید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث کوچک‌تری ایجاد شود. این عمل را به‌طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط مثلث‌های به‌دست‌آمده از مثلث اول تا مثلث مرحلهٔ دهم، چند برابر P است؟ (خرداد ۹۴، با کمی تغییر)

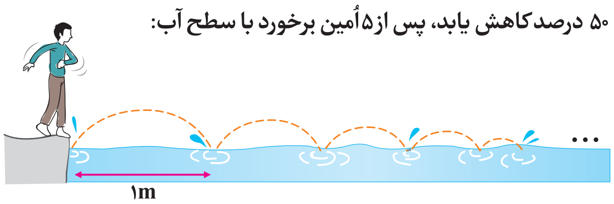
۴۶. ☆ توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی زمین بخورد، پس از زمین خوردن به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع اولیه‌اش بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را به‌طور قائم از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. پس از شروع پرتاب تا ۶اُمین برخورد به زمین، در کل مسافت عمودی طی‌شده این توپ چه‌قدر است؟ (خرداد ۹۰، با کمی تغییر و مشابه مثال صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۴۷. علی می‌خواهد پول خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۳۰۰۰۰ تومان پس‌انداز می‌کند و روزهای دیگر میزان آن را ۱۰ درصد نسبت به روز قبل افزایش می‌دهد، پس از یک هفته چند تومان پس‌انداز می‌کند؟ $((۱/۱)^۷\simeq۱/۹۵)$

۴۸. کودکی سنگی را بر روی سطح آب پرتاب می‌کند. این سنگ در مسیر نیم‌دایره‌هایی به سطح آب برخورد می‌کند. اگر اولین برخورد سنگ با سطح آب ۱ متر جلوتر از کودک باشد و پس از هر برخورد سنگ با آب، قطر نیم‌دایره ۵۰ درصد کاهش یابد، پس از ۵اُمین برخورد با سطح آب:

آ) فاصلهٔ سنگ تا کودک چقدر است؟ (تا دو رقم اعشار)

ب) سنگ چه مسافتی را پیموده است؟ $(\pi\simeq۳/۲)$



☆ **۴۹.** **پدری برای کادوی سالگرد تولد فرزندش، سال اول ۱ سکه، سال دوم ۲ سکه، سال سوم ۴ سکه و به همین ترتیب هر سال دو برابر سال قبل سکه برای او پس‌انداز می‌کند. اگر بهای هر سکه ۱۰۰۰۰ تومان باشد، وقتی این فرزند به ۱۰ سالگی می‌رسد، چند سکه کادو گرفته و بهای کل آن‌ها چقدر است؟** (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

☆ **۵۰.** **در مسئلهٔ مخترع شطرنج در صفحهٔ ۵ کتاب درسی، اگر وزن هر دانهٔ گندم ۱ گرم باشد، نشان دهید این مخترع بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم جایزه دریافت خواهد کرد.** (کاردرکلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

بسته سوم
روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم
صفحهٔ ۸ تا ۹ کتاب درسی

سال گذشته با معادلهٔ درجه دوم با شکل کلّی $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ آشنا شدید و روش‌های مختلف حل اونها رو یاد گرفتید. برای یادآوری به مثال زیر توجه کنید.

سؤال **معادلات زیر را به روش خواسته‌شده حل کنید.**

۱) $(x-1)^2-25=0$ (ریشه‌گیری)　　۲) $x^2+3x+2=0$ (روش تجزیه)

۳) $2x^2+6x-3=0$ (مربع کامل)　　۴) $3x^2-x-2=0$ (روش کلی)

پاسخ ۱) برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش ریشه‌گیری آن را به فرم $x^2=a^2$ درآورده، سپس با شرط $a\geq 0$، می‌توان با جذرگرفتن از طرفین تساوی، نتیجه گرفت $x=\pm\sqrt{a}$:

$$(x-1)^2-25=0\Rightarrow(x-1)^2=5^2\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}x-1=\pm 5\Rightarrow\begin{cases}x=5+1=6\\x=-5+1=-4\end{cases}$$

۲) برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، کافی است عبارت را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها، به حاصل ضرب ۲ عبارت درجه اول تجزیه کنیم. سپس به کمک خاصیت حاصل‌ضرب صفر، هریک از عبارات را برابر صفر قرار دهیم. توجه کنید که در این حالت اگر عبارت تجزیه‌نشدنی باشد، فاقد ریشه است.

$$x^2+3x+2=0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x+1)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\x+2=0\Rightarrow x=-2\end{cases}$$

۳) برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل، ابتدا طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2+6x-3=0\xrightarrow{\div 2}x^2+3x-\frac{3}{2}=0$$

مقدار ثابت را به سمت دیگر معادله می‌بریم:

$$x^2+3x=\frac{3}{2}$$

به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه می‌کنیم تا یک طرف به شکل مربع کامل درآید:

$$x^2+3x+\underbrace{(\frac{3}{2})^2}_{\text{مربع نصف ضریب x}}=\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2\Rightarrow(x+\frac{3}{2})^2=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}$$

طرفین را تا حد امکان ساده می‌کنیم و سپس به کمک ریشه‌گیری جواب‌ها را می‌یابیم:

$$(x+\frac{3}{2})^2=\frac{15}{4}\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}\Rightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$$

۴) برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، به روش کلی (روش Δ)، داریم:

$$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه ندارد.}\\\xrightarrow{\Delta=0}x=\frac{-b}{2a}\ \text{(ریشهٔ مضاعف)}\\\xrightarrow{\Delta>0}x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

$$3x^2-x-2=0\xrightarrow[c=-2]{a=3\ ,\ b=-1}\Delta=(-1)^2-4(3)(-2)=1+24=25>0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2(3)}=\frac{1+5}{6}=\frac{6}{6}=1\\x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2(3)}=\frac{1-5}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}\end{cases}$$

! نکته گاهی برای حل یک معادله می‌توان از تغییر متغیر کمک گرفت تا معادله به‌صورت ساده‌تری تبدیل گردد.

سؤال هریک از معادلات زیر را حل کنید.

۱ $(1-\sqrt{2}x)^2+\sqrt{2}x=0$ ۲ $(x^2-1)^2+3(x^2-1)-4=0$

پاسخ ۱ وقتی به معادله نگاه می‌کنیم یه عبارت ترسناک به شکل $(\sqrt{2}x - 1)^2$ می‌بینیم که یا باید اون رو به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای بازش کنیم یا این‌که برای از بین بردن ترس خودمون این عبارت رو یه متغیر جدید در نظر بگیریم تا شکل‌اش عوض بشه!

$$t=(1-\sqrt{2}x)\Rightarrow \sqrt{2}x=1-t \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} t^2+1-t=0\Rightarrow t^2-t+1=0 \xrightarrow{\Delta<0}$$ ریشه ندارد.

۲ در این معادله عبارت (x^2-1) تکرار شده پس اسم این عبارت رو عوض می‌کنیم و یه اسم (متغیر) جدید براش انتخاب می‌کنیم تا معادله شکل ساده‌تری به خودش بگیره!

$$t=x^2-1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} t^2+3t-4=0\Rightarrow (t-1)(t+4)=0\Rightarrow \begin{cases} t=1\Rightarrow x^2-1=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-4\Rightarrow x^2-1=-4\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

حالا که حسابی معادله درجه دوم یادتون اومد بریم سراغ مبحث شیرین روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم!

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

گفتیم که در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $\Delta>0$ باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشهٔ α و β است:

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

مجموع ریشه‌ها : $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $\alpha\beta=\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2}\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=}\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

$$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

یعنی:

حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ، **مجموع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$**

به کمک روابط بالا می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم را (در صورت وجود) بدون حل معادله به‌دست آورد.

سؤال در معادلهٔ درجه دوم $2x^2-4x+1=0$، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، بدون حل معادله حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱ $\alpha+\beta$ ۲ $\alpha\beta$ ۳ $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ ۴ $\alpha^2+\beta^2$

پاسخ

۱ $2x^2-4x+1=0\Rightarrow a=2\ ,\ b=-4\ ,\ c=1$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-4)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

۲ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

۳ $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{S}{P}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=2\times2=4$

۴ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=2^2-2\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-1=3$

سؤال اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادله $2x^2-mx-3=0$ باشد، مقدار m و ریشهٔ دیگر را بیابید.

مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ و مثال صفحهٔ ۶ کتاب درسی

پاسخ روش اول ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند:

$$2x^2-mx-3=0 \xrightarrow{x=-1} 2(-1)^2-m(-1)-3=0 \Rightarrow 2+m-3=0 \Rightarrow m=3-2=1$$

حال با جای‌گذاری $m=1$ داریم:

$$2x^2-x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(2)(-3)=25 \Rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+5}{4}=\frac{3}{2} : \text{ریشهٔ دیگر} \\ x=\frac{1-5}{4}=-1 \end{cases}$$

روش دوم کافی است از روابط بین ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-(-m)}{2}=\frac{m}{2} \\ x_1x_2=\frac{-3}{2} \end{cases} \xrightarrow{x_1=-1} \begin{cases} -1+x_2=\frac{m}{2} \\ (-1)(x_2)=\frac{-3}{2} \Rightarrow x_2=\frac{3}{2} : \text{ریشهٔ دیگر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1+\frac{3}{2}=\frac{m}{2} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow m=1$$

سؤال در هرمورد m را طوری بیابید که حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2-3x+m=0$،

۱ برابر با ۲ باشد. ۲ برابر با (-1) باشد.

پاسخ

$$2x^2-3x+m=0 \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=m \end{cases}$$

۱

$$x_1\times x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow 2=\frac{m}{2} \Rightarrow m=4$$

امّا توجه کنید که به ازای $m=4$ معادله فاقد ریشه است:

$$2x^2-3x+4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(4)=9-32<0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پس $m=4$ قابل قبول نیست. یعنی به ازای هیچ m ای حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ نمی‌شود.

۲

$$x_1\times x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow -1=\frac{m}{2} \Rightarrow m=-2$$

به ازای $m=-2$ معادله دارای دو ریشه است:

$$2x^2-3x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(-2)=9+16=25>0$$

بنابراین $m=-2$ قابل قبول است.

نکته توجه کنید در سؤالات مشابه سؤال بالا که یکی از پارامترها مجهول است و مجموع یا حاصل‌ضرب ریشه‌ها داده شده، پس از به‌دست آوردن مقدار پارامتر مجهول حتماً چک شود که آیا معادله به ازای آن دارای ریشه است و مقدار به‌دست آمده قابل قبول است یا نه.

نوشتن یک معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن

اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، این معادله را می‌توان به‌صورت‌های روبه‌رو نوشت:

صورت اول: $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

صورت دوم: $\begin{cases} S=\alpha+\beta \\ P=\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+P=0$

توجه کنید که هرضریبی از معادلات بالا نیز دارای ریشه‌های α و β است.

سؤال معادلهٔ درجه دومی بنویسید که دارای ریشه‌های ۲ و ۳- باشد. **مشابه فعالیت صفحه ۹ کتاب درسی**

پاسخ **روش اول**

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow (x-2)(x-(-3))=0 \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$$

روش دوم

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-3+2=-1 \\ P=\alpha\beta=(-3)(2)=-6 \end{cases} \xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2+x-6=0$$

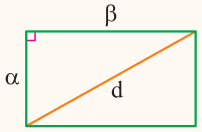
سؤال اگر محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۱۶ و ۱۵ باشد، **مشابه مثال صفحه ۹ کتاب درسی**

۱ بدون محاسبهٔ ابعاد مستطیل، طول قطر آن را بیابید. **۲** با تشکیل معادلهٔ درجه دوم، ابعاد مستطیل را بیابید.

پاسخ اگر α و β را طول و عرض این مستطیل در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} \text{محیط}: 2(\alpha+\beta)=16 \Rightarrow \alpha+\beta=8 \\ \text{مساحت}: \alpha\beta=15 \end{cases}$$

۱ اگر طول قطر مستطیل برابر d باشد، داریم:



$$d^2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8^2-2(15)=64-30$$

$$\Rightarrow d^2=34 \Rightarrow d=\sqrt{34}$$

۲ با داشتن $S=\alpha+\beta=8$ و $P=\alpha\beta=15$، می‌توان نوشت:

$$x^2-Sx+P=0 \xrightarrow[P=15]{S=8} x^2-8x+15=0 \Rightarrow \Delta=(-8)^2-4(1)(15)=64-60=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{-(-8)+\sqrt{4}}{2(1)}=\dfrac{8+2}{2}=5 : \text{طول} \\ \beta=\dfrac{-(-8)-\sqrt{4}}{2(1)}=\dfrac{8-2}{2}=3 : \text{عرض} \end{cases}$$

تعداد و علامت ریشه‌ها

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، با توجه به علامت Δ و علامت ضرایب a، b و c، می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله بدون حل آن اظهار نظر کرد: (S مجموع و P حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله است.)

۱ $\Delta=b^2-4ac>0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه}}$

- $P>0$ ← دو ریشهٔ هم‌علامت
  - $S<0$ ← هر دو منفی
  - $S>0$ ← هر دو مثبت
- $P<0$ ← دو ریشهٔ غیر هم‌علامت
  - $S<0$ ← قدرمطلق ریشهٔ منفی، بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت
  - $S>0$ ← قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت
- $P=0$ ← دارای ریشهٔ صفر
  - $S<0$ ← یک ریشه صفر و ریشهٔ دیگر منفی
  - $S>0$ ← یک ریشه صفر و ریشهٔ دیگر مثبت

مثال $2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \Delta=17>0 \xrightarrow{P=-\frac{1}{2}<0}$ دو ریشهٔ غیر هم‌علامت $\xrightarrow{S=\frac{3}{2}>0}$ قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت

مثال $-x^2+4x-3=0 \Rightarrow \Delta=4>0 \xrightarrow{P=3>0}$ دو ریشهٔ هم‌علامت $\xrightarrow{S=4>0}$ هر دو ریشه مثبت است.

یه وقت نیاین همهٔ مطالب گفته شده رو حفظ کنیدا! خیلی راحت خودتون می‌تونین با به کار گرفتن مغزتون و یه کوچولو استفاده از استدلال، به نتایج گفته شده برسین. کافیه یه بار امتحان کنین. به ترتیب از علامت Δ، بعدش علامت P و در نهایت علامت S می‌تونین نتیجه‌های بالا رو به دست بیارین.

۲ $\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف

- $S<0$ ← ریشهٔ مضاعف منفی
- $S>0$ ← ریشهٔ مضاعف مثبت

مثال $ax^2-2ax+a=0 \Rightarrow \Delta=4a^2-4a(a)=0 \xrightarrow{S=2>0}$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

۳ $\Delta=b^2-4ac<0 \Rightarrow$ ریشه ندارد.

نکته چند نکته در مورد معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$:

۱ اگر $b=0$ باشد، با شرط $ac<0$ معادله دارای دو ریشهٔ قرینه است.

۲ اگر $a=c$ باشد، با شرط $\Delta>0$ معادله دارای دو ریشهٔ معکوس است.

۳ اگر $a=-c$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ قرینه و معکوس است.

وقتی a و c هم‌علامت نباشن حتماً معادله ۲ تا ریشه رو داره! (به نظرتون چرا؟)

۴ اگر $a+b+c=0$ باشد، (مجموع ضرایب صفرباشد.) معادله دارای دو ریشهٔ $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$ می‌باشد.

۵ اگر $a+c=b$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ $x_1=-1$ و $x_2=-\frac{c}{a}$ می‌باشد.

سؤال در مورد ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید.

۱ $-3x^2+2x+1=0$ ۲ $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$ ۳ $6x^2+5x-1=0$ ۴ $-x^2+3x+1=0$

پاسخ

۱ $-3x^2+2x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$

۲ $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0 \xrightarrow{P>0\ ,\ \Delta>0}$ معادله دارای دو ریشهٔ هم‌علامت است. $\xrightarrow{S>0}$ هر دو ریشه مثبت

۳ $6x^2+5x-1=0 \xrightarrow{a+c=b} x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{-c}{a}=\frac{-(-1)}{6}=\frac{1}{6}$

۴ $-x^2+3x+1=0 \xrightarrow{a=-c}$ معادله دارای دو ریشهٔ قرینه و معکوس $\xrightarrow{S>0}$ قدرمطلق ریشهٔ منفی، کوچک‌تر از ریشهٔ مثبت

می‌تونیم بگیم ریشه‌های این معادله به‌صورت α و $\frac{-1}{\alpha}$ که $\alpha>1$ است! اگه گفتین چرا؟

بسته ۳ پرسش‌های تشریحی — روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

● درجای خالی عبارت مناسب قراردهید.

.۵۱ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $4x^2+3x-8=0$ برابر با .... است. (شهریور ۱۴۰۲)

.۵۲ معادله درجه دوم .... دارای ریشه‌های $3\pm2\sqrt{5}$ است. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت صبح)

☆ .۵۳ **معادلات زیررا به روش خواسته‌شده حل کنید.**

آ $6x^2-30x=0$ (تجزیه) ب $x^2-3x+2=0$ (تجزیه)

پ $(x-3)^2-16=0$ (ریشه‌گیری) ت $x^2+6x-7=0$ (مربع کامل)

ث $4x^2+12x+5=0$ (مربع کامل) ج $2x^2-5x+2=0$ (روش کلی)

چ $x^2+3x+5=0$ (روش کلی)

● معادلات زیررا حل کنید.

.۵۴ $(2+\sqrt{2})x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2}-2)=0$.۵۵ $(2-\sqrt{2})x^2+4x+(\sqrt{2}+2)=0$ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

☆ .۵۶ $(4-x^2)^2-2(4-x^2)-15=0$ (شهریور ۹۵) ☆ .۵۷ $\left(\frac{x^2}{2}-1\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}-1\right)-2=0$ (شهریور ۹۵)

☆ .۵۸ $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$ (شهریور ۹۲) .۵۹ $\left(\frac{x^2}{3}-2\right)^2-11\left(\frac{x^2}{3}-2\right)+10=0$ (دی ۹۱)

☆ .۶۰ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشند، بدون محاسبهٔ ریشه‌ها، حاصل $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ را بیابید.

.۶۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-8x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}$ را بیابید.

۲ بخش

پاسخ‌نامه

فصل ۱ جبر و معادله

۱ | ۵

$$\overset{+۵}{x,۷},۱۲,\ldots \Rightarrow d=۵ \Rightarrow x+۵=۷ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow a_۱=۲$$

فرض کنیم مجموع n جمله از دنبالهٔ حسابی برابر با ۶۰ باشد:

$$S_n=۶۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=۶۰$$

$$\xrightarrow[d=۵]{a_۱=۲} \frac{n}{۲}(۲(۲)+(n-۱)(۵))=۶۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}(۴+۵n-۵)=۶۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۵n-۱)=۶۰ \Rightarrow ۵n^۲-n=۱۲۰$$

$$\Rightarrow ۵n^۲-n-۱۲۰=۰$$

$$\Delta=(-۱)^۲-۴(۵)(-۱۲۰)=۱+۲۴۰۰=۲۴۰۱=۴۹^۲$$

$$\Rightarrow n=\frac{-(-۱)\pm ۴۹}{۲(۵)}=\frac{۱\pm ۴۹}{۱۰} \xrightarrow{n>۰} n=\frac{۱+۴۹}{۱۰}=\frac{۵۰}{۱۰}=۵$$

---

۲ | یازده

$$S_n>۴۰۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)>۴۰۰$$

$$\xrightarrow[d=۸]{a_۱=۴} \frac{n}{۲}(۲(۴)+(n-۱)۸)>۴۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}(۸+۸(n-۱))>۴۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۲}\times ۸(۱+n-۱)>۴۰۰ \Rightarrow ۴n^۲>۴۰۰$$

$\Rightarrow n^۲>۱۰۰ \Rightarrow n>۱۰ \Rightarrow n\geq ۱۱ \Rightarrow$ حداقل ۱۱ جمله را باید جمع کنیم.

---

۳ | ۱۰۰۰۰

$$\overset{+۲}{۱\,,\,۳}\,,\,۵\,,\,۷\,,\ldots,۱۹۹ \Rightarrow a_۱=۱,d=۲$$

حال باید تعداد جملات را بیابیم:

$$a_n=۱۹۹ \Rightarrow a_۱+(n-۱)d=۱۹۹$$

$$\xrightarrow[d=۲]{a_۱=۱} ۱+(n-۱)\times ۲=۱۹۹ \Rightarrow ۲(n-۱)=۱۹۸$$

$$\Rightarrow n-۱=۹۹ \Rightarrow n=۱۰۰$$

حال مجموع جملات را می‌یابیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۱۰۰}{۲}\overbrace{(۱+۱۹۹)}^{۲۰۰}=\frac{۱۰۰\times \cancel{۲۰۰}^{۱۰۰}}{\cancel{۲}}=۱۰۰۰۰$$

---

۴ | ۲۵۵۰

$$\underset{۲\times ۱}{۲}\overset{+۲}{+}\underset{۲\times ۲}{۴}\overset{+۲}{+}۶+\ldots+\underset{۲\times ۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow \begin{cases} a_۱=۲ \\ d=۲ \\ n=۵۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{۵۰}=\frac{۵۰}{۲}(\cancel{۲+۱۰۰}^{۱۰۲})=۵۰\times ۵۱=۲۵۵۰$$

---

۵ | با توجه به الگوی داده‌شده می‌توان نوشت:

$$۲(۱)=۱\times ۲$$

$$۲(۱+۲)=۲\times ۳$$

$$۲(۱+۲+۳)=۳\times ۴$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow ۲(۱+۲+\cdots+n)=n\times(n+۱) \Rightarrow ۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

---

۶ | با توجه به الگوی داده‌شده می‌توان نوشت:

$$۱=۱^۲$$

$$۱+۳=۲^۲$$

$$۱+۳+۵=۳^۲$$

$$۱+۳+۵+۷=۴^۲$$

$$۱+۳+۵+۷+۹=۵^۲$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}_{\text{مجموع n عدد طبیعی فرد اولیه}}=n^۲$$

---

۷ | آ) با یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=-۵$ و قدرنسبت $d=۰-(-۵)=۵$ مواجهایم. بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$\xrightarrow{n=۲۰} S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d) \xlongequal[d=۵]{a_۱=-۵} \frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۵))$$

$$\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(-۱۰+۹۵)=۱۰\times ۸۵=۸۵۰$$

ب) با یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=-۵$ و قدرنسبت $d=-۳-(-۵)=۲$ مواجهایم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$\xrightarrow{n=۲۰} S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d) \xlongequal[d=۲]{a_۱=-۵} \frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۲))$$

$$\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(-۱۰+۳۸)=۱۰\times ۲۸=۲۸۰$$

---

۸ |

$$\overset{+۳}{۴\,,\,۷}\overset{+۳}{\,,\,۱۰}\,,\,\cdots\,,\,۱۰۰$$

$\Rightarrow d=۳$ دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۴$ و قدرنسبت ۳

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=۱۰۰ \xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d} ۴+(n-۱)(۳)=۱۰۰ \Rightarrow ۳(n-۱)=۹۶$$

$$\Rightarrow n-۱=\frac{۹۶}{۳}=۳۲ \Rightarrow n=۳۳$$

$$\Rightarrow S_{۳۳}=۴+۷+\cdots+۱۰۰=\frac{۳۳}{۲}(a_۱+a_{۳۳})=\frac{۳۳}{۲}(۴+۱۰۰)$$

$$\Rightarrow S_{۳۳}=\frac{۳۳\times \cancel{۱۰۴}^{۵۲}}{\cancel{۲}}=۱۷۱۶$$

---

۹ |

اعداد فرد طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰: $\overset{+۶}{۳\,,\,۹}\overset{+۶}{\,,\,۱۵}\,,\ldots,۹۹$

$d=۶$ دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۳$ و قدرنسبت

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=۹۹ \xrightarrow{a_n=a_۱+(n-۱)d} ۳+(n-۱)(۶)=۹۹ \Rightarrow ۶(n-۱)=۹۶$$

$$\Rightarrow n-۱=\frac{۹۶}{۶}=۱۶ \Rightarrow n=۱۷$$

و بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(a_۱+a_{۱۷})=\frac{۱۷}{۲}(۳+۹۹)=\frac{۱۷\times \cancel{۱۰۲}^{۵۱}}{\cancel{۲}}=۸۶۷$$

۱۰ | اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵، بر ۳ و ۵ بخش‌پذیرند و اولین عدد طبیعی سه‌رقمی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، ۱۰۵ است.

$$105 \overset{+15}{,} 120 \overset{+15}{,} 135 , \ldots$$

برای یافتن تعداد اعداد طبیعی سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۵ داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d < 1000 \Rightarrow 105 + (n-1)(15) < 1000$$

$$\Rightarrow 15n + 90 < 1000 \Rightarrow 15n < 910 \Rightarrow n < \frac{910}{15} \simeq 60.6 \Rightarrow n \leq 60$$

بنابراین داریم:

$$S_{60} = \frac{60}{2}(2a_1 + 59d) = \frac{60}{2}(2(105) + 59(15))$$

$$= 30\,(\overbrace{210 + 885}^{1095}) = 32850$$

و یا می‌توان گفت:

$$a_n = a_{60} = 105 + 59(15) = 990$$

$$\Rightarrow S_{60} = \frac{60}{2}(a_1 + a_{60}) = 30\,(105 + 990) = 32850$$

۱۱ | چون هر جمله از جملهٔ قبلش به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ بیش‌تر است، پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر $d = \frac{1}{2}$ است و چون $a_7 = 13$، پس داریم:

$$a_7 = a_1 + 6d = 13 \xrightarrow{d=\frac{1}{2}} a_1 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 13$$

$$\Rightarrow a_1 + 3 = 13 \Rightarrow a_1 = 13 - 3 = 10$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \xrightarrow[d=\frac{1}{2}]{a_1=10} 10\,\left(2(10) + 19\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 10\,(\overbrace{20 + 9.5}^{29.5}) = 295$$

۱۲ |

$$\begin{cases} a_7 = 32 \\ a_{12} = 12 \end{cases} \xrightarrow{a_n - a_m = (n-m)d} a_7 - a_{12} = (7-12)d$$

$$\Rightarrow \overbrace{32 - 12}^{20} = -5d \Rightarrow d = -4$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 32 \xrightarrow{d=(-4)} a_1 + 6(-4) = 32 \Rightarrow a_1 = 32 + 24 = 56$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2(56) + 14(-4))$$

$$= \frac{15}{2}(112 - 56) = \frac{15}{\cancel{2}} \times \overset{28}{\cancel{56}} = 420$$

۱۳ | دنبالهٔ حسابی با $3 \overset{+6}{,} 9 \overset{+6}{,} 15 , \ldots \Rightarrow a_1 = 3$ و $d = 6$

می‌خواهیم مجموع جملات بیشتر از ۳۰۰ شود:

$$S_n > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(2(3) + (n-1)(6)) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 6(n-1)) > 300 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۶}} \frac{6n}{2}(\underbrace{1 + n - 1}_{n}) > 300$$

$$\Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

حداقل ۱۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

۱۴ | آ)

$$\begin{cases} a_4 = 3 \\ a_7 = 12 \end{cases} \xrightarrow{a_n - a_m = (n-m)d} a_4 - a_7 = (4-7)d$$

$$\Rightarrow 3 - 12 = (-3)d \Rightarrow d = \frac{-9}{-3} = 3$$

حالا با جای‌گذاری در رابطهٔ a_4 یا a_7، مقدار a_1 را می‌یابیم:

$$a_4 = a_1 + 3d = 3 \Rightarrow a_1 + 3(3) = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - 9 = -6$$

ب)

$$S_n < 450 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) < 450$$

$$\xrightarrow[d=3]{a_1=-6} \frac{n}{2}(\underbrace{2(-6) + (n-1)(3)}_{3n-15}) < 450$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از ۳}} \frac{3n}{2}(n-5) < 450$$

$$\xrightarrow{\times\frac{2}{3}} n(n-5) < 300 \Rightarrow n^2 - 5n - 300 < 0$$

$$\Rightarrow (n-20)(n+15) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -15 < n < 20$$

$$\xrightarrow{n>0} n < 20 \Rightarrow n \leq 19$$

حداکثر ۱۹ جمله را می‌توانیم با هم جمع کنیم تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود.

۱۵ |

$$a_n = 3 - 2n \Rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1$$

روش اول

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 3 - 2n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(-2n + 4) \overset{\text{فاکتور از ۲}}{=\!=} \frac{2n}{2}(-n + 2) = n(2 - n)$$

$$\Rightarrow S_{15} = 15(\underbrace{2 - 15}_{-13}) = 15 \times (-13) = -195$$

روش دوم

$$a_n = 3 - 2n \begin{cases} \xrightarrow{n=1} a_1 = 3 - 2 = 1 \\ \xrightarrow{n=15} a_{15} = 3 - 2(15) = 3 - 30 = -27 \end{cases}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}(1 - 27) = \frac{15 \times (\overset{-13}{\cancel{-26}})}{\cancel{2}} = -195$$

۱۶ | آ)

$$S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = \frac{6-5}{12} = \frac{1}{12} \\ S_2 = a_1 + a_2 = \frac{6(4) - 5(2)}{12} = \frac{14}{12} \end{cases}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = \frac{14}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{13}{12} - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

ب)

$$S_{10} = \frac{6(10)^2 - 5(10)}{12} = \frac{600 - 50}{12} = \frac{550}{12} = \frac{275}{6}$$

و یا:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 5\left(2\left(\frac{1}{12}\right) + 9(1)\right) = 5\left(\frac{55}{6}\right) = \frac{275}{6}$$

۱۷

$$\overset{+d\ \ +d\ \ +d}{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \cdots , a_{20}}$$
$$+2d\ \ +2d$$

بنابراین داریم:

مجموع ۱۰ جمله از دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت $2d$

$$\begin{cases} a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=240 \\ a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=270 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جمله از دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_2 و قدرنسبت $2d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(2a_1+9(2d))=240 \\ \frac{10}{2}(2\underset{a_1+d}{a_2}+9(2d))=270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(2a_1+18d)=240 \\ 5(2a_1+2d+18d)=270 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 5} \begin{cases} 2a_1+18d=48 \\ 2a_1+20d=54 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} 20d-18d=54-48$$

$$\Rightarrow 2d=6 \Rightarrow d=3$$

$$\xrightarrow{2a_1+18d=48} 2a_1+18(3)=48 \Rightarrow 2a_1=48-54=-6$$

$$\Rightarrow a_1=-3$$

۱۸

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_5=25 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1+4d)=25 \\ a_6+\cdots+a_{10}=100 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_6+4d)=100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}\times 2(a_1+2d)=25 \Rightarrow 5(a_1+2d)=25 \\ \frac{5}{2}\times 2(a_6+2d)=100 \Rightarrow 5(a_1+5d+2d)=100 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 5} \begin{cases} a_1+2d=5 \\ a_1+7d=20 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} 7d-2d=20-5 \Rightarrow 5d=15$$

$$\Rightarrow d=3 \xrightarrow{a_1+2d=5} a_1+2(3)=5 \Rightarrow a_1=5-6=-1$$

۱۹ آ) دنبالهٔ حسابی را با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d در نظر می‌گیریم، داریم:

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=5(2a_1+9d)$$

حال اگر به قدرنسبت یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$S'_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9(d+1))=5(2a_1+9d+9)=5\underbrace{(2a_1+9d)}_{S_{10}}+45$$

$$\Rightarrow S'_{10}-S_{10}=45 \Rightarrow$$ ۴۵ واحد افزوده می‌شود.

ب) اگر a_1 و a_{10} به‌ترتیب جملهٔ اول و دهم دنباله باشند، داریم:

$$S_{10}=\frac{10}{2}(a_1+a_{10})$$

حالا با دو برابر شدن جملات و دنباله، خواهیم داشت:

$$S'_{10}=\frac{10}{2}\underbrace{(2a_1+2a_{10})}_{\text{فاکتور از ۲}}=2\left(\frac{10}{2}(a_1+a_{10})\right)=2S_{10} \Rightarrow$$ ۲ برابر می‌شود.

۲۰

$$1+2+\cdots+n=\frac{3}{5}n^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n^2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=\frac{3n^2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5n^2+5n=6n^2$$

$$\Rightarrow n^2-5n=0 \Rightarrow n(n-5)=0 \xrightarrow{n\neq 0} n=5$$

۲۱ **روش اول** از نقطهٔ اول به $(n-1)$ نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم

$\Leftarrow (n-1)$ پاره‌خط

از نقطهٔ دوم به $(n-2)$ نقطهٔ دیگر (همه به غیر از نقطهٔ اول) وصل می‌کنیم. $\Leftarrow (n-2)$ پاره‌خط

از نقطهٔ سوم به $(n-3)$ نقطهٔ دیگر (همه به غیر از نقاط اول و دوم) وصل می‌کنیم.

$\Leftarrow (n-3)$ پاره خط

با ادامهٔ این روند، تعداد پاره‌خط‌های ایجادشده برابر است با:

$$\text{تعداد کل پاره‌خط‌ها}=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1$$

$$\Rightarrow \text{مجموع } (n-1) \text{ عدد طبیعی اولیه}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد پاره‌خط‌ها}=\frac{(n-1)}{2}(\overbrace{(n-1)+1}^{n})=\frac{n(n-1)}{2}$$

می‌دانیم تعداد پاره‌خط‌ها ۵۵ تا است:

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=55 \Rightarrow n(n-1)=110$$

$$\Rightarrow n(n-1)=11\times 10 \Rightarrow n=11$$

روش دوم (ترکیبیات): برای داشتن هر پاره‌خط کافی است دو نقطه از این n نقطه را انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها}=\binom{n}{2}=55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=55$$

$$\Rightarrow n(n-1)=110=11\times 10 \Rightarrow n=11$$

۲۲ با یک دنبالهٔ حسابی مواجه‌ایم که:

$$a_1=500 \quad , \quad d=40$$

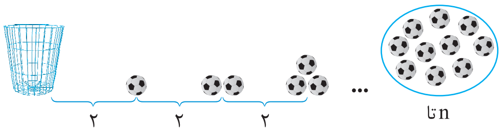
می‌خواهیم مجموع خانوارهای تحت پوشش را پس از ۱۰ سال بیابیم:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)$$

$$=5(2(500)+9(40))$$

$$\Rightarrow S_{10}=5(1000+360)=1360\times 5=6800$$ خانوار

۲۳



مجموع توپ‌هایی که دونده در سبد انداخته ۵۵ تاست، بنابراین داریم:

$$1+2+3+\cdots+n=55\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=55$$

$$\Rightarrow n(n+1)=110=10\times 11\Rightarrow n=10$$

یعنی دونده تا ایستگاه ۱۰ اُم عملیات رفت و برگشت را انجام داده است و مسافت طی‌شده توسط او برابر است با:

برای ایستگاه اول $=2\times2$ $\quad +4$

برای ایستگاه دوم $=4\times2$ $\quad +4$

برای ایستگاه سوم $=6\times2$

$\vdots$

$$\xrightarrow[a_1=4,\,d=4]{\text{دنبالهٔ حسابی}}S_{10}=\frac{10}{2}(\overbrace{2(4)+9(4)}^{11\times4})=5\times44=220$$ متر

---

۲۴ اگر قدر نسبت دنباله را q در نظر بگیریم، با شرط $q\neq1$ داریم:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=9(a_1+a_2+a_3)$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}(q^6-1)}{\cancel{q-1}}=9\times\frac{\cancel{a_1}(q^3-1)}{\cancel{q-1}}$$

$$\Rightarrow\underbrace{(q^6-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=9(q^3-1)\Rightarrow(\cancel{q^3-1})(q^3+1)=9(\cancel{q^3-1})$$

$$\Rightarrow q^3+1=9\Rightarrow q^3=8=2^3\Rightarrow q=2$$

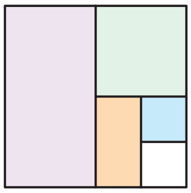
بنابراین داریم:

$$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}}=\frac{q^{10}-1}{q^5-1}=\frac{(\cancel{q^5-1})(q^5+1)}{(\cancel{q^5-1})}=q^5+1$$

$$\xrightarrow{q=2}\frac{S_{10}}{S_5}=2^5+1=32+1=33$$

---

۲۵ مقدار مساحت رنگ‌شده در هر مرحله تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهد:



$$\frac12,\frac14,\frac18,\frac1{16},\dots\Rightarrow a_1=\frac12,\ q=\frac12$$

بنابراین داریم:

مساحت رنگ‌شده پس از n مرحله $=S_n\geq\frac{99}{100}\Rightarrow\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\geq\frac{99}{100}$

$$\xrightarrow[q=\frac12]{a_1=\frac12}\frac{\cancel{\frac12}(1-(\frac12)^n)}{1-\cancel{\frac12}}\geq\frac{99}{100}\Rightarrow1-(\frac12)^n\geq\frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow(\frac12)^n\leq1-\frac{99}{100}\Rightarrow\frac1{2^n}\leq\frac1{100}\Rightarrow2^n\geq100\Rightarrow n\geq7$$

بنابراین دست کم پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

۲۶

دنبالهٔ هندسی با $\overset{\times\frac13\ \ \times\frac13}{\frac13,\frac19,\frac1{27},\dots}\Rightarrow q=\frac13$ و $a_1=\frac13$

$$\Rightarrow S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}\xlongequal[q=\frac13]{a_1=\frac13}\frac{\frac13((\frac13)^{10}-1)}{\frac13-1}=\frac{\frac13(\frac1{3^{10}}-1)}{-\frac23}$$

$$=\frac{\frac13(\frac{1-3^{10}}{3^{10}})}{-\frac23}=\frac{\frac{1-3^{10}}{3^{11}}}{-\frac23}=-\frac{\cancel{3}(1-3^{10})}{2\times\cancelto{3^{10}}{3^{11}}}=\frac{3^{10}-1}{2\times3^{10}}$$

۲۷

دنبالهٔ هندسی با $\overset{\times\frac14\ \ \times\frac14}{\frac15,\frac1{20},\frac1{80},\dots}\Rightarrow q=\frac14$ و $a_1=\frac15$

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}\xlongequal[q=\frac14]{a_1=\frac15}\frac{\frac15((\frac14)^{10}-1)}{\frac14-1}=\frac{\frac15(\frac1{4^{10}}-1)}{\frac{-3}{4}}$$

$$=\frac{\frac15(\frac{1-4^{10}}{4^{10}})}{-\frac34}=-\frac{4(1-4^{10})}{3\times5\times4^{10}}=\frac{(4^{10}-1)}{15\times4^9}$$

۲۸

دنبالهٔ هندسی با $\overset{\times(-2)\ \ \times(-2)}{\frac18,\frac{-1}{4},\frac12,\dots}\Rightarrow q=-2$ و $a_1=\frac18$

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}\xlongequal[q=-2]{a_1=\frac18}\frac{\frac18((-2)^{10}-1)}{-2-1}=\frac{\frac18(2^{10}-1)}{-3}$$

$$=\frac{1024-1}{-3\times8}=-\frac{\cancelto{341}{1023}}{\cancel{3}\times8}=\frac{-341}{8}$$

۲۹

دنبالهٔ هندسی با $\overset{\times2\ \ \times2\ \ \times2}{\frac12,1,2,4,\dots,2048}\Rightarrow q=2$ و $a_1=\frac12$

حالا تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n=2048\Rightarrow a_1q^{n-1}=2048\xrightarrow{a_1=\frac12,\,q=2}\frac12\times2^{n-1}=2048$$

$$\Rightarrow2^{n-2}=2^{11}\Rightarrow n-2=11\Rightarrow n=13$$

$$\Rightarrow\overbrace{\frac12+1+2+4+\cdots+2048}^{S_{13}}=\frac{a_1(q^{13}-1)}{q-1}=\frac{\frac12(2^{13}-1)}{\underbrace{2-1}}=\frac{2^{13}-1}{2}$$

$$=\frac{8192-1}{2}=\frac{8191}{2}=4095.5$$