

فهرست



۷

فصل اول: جبر و معادله

۴۲

پاسخ‌نامه تشریحی

۷۱

فصل دوم: تابع



۹۴

پاسخ‌نامه تشریحی



۱۱۴

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتم

۱۳۰

پاسخ‌نامه تشریحی

۱۴۴

فصل چهارم: مثلثات



۱۶۳

پاسخ‌نامه تشریحی



۱۷۶

فصل پنجم: حد و پیوستگی

۲۰۷

پاسخ‌نامه تشریحی

۲۳۱

خلاصه فصل‌ها

۲۳۵

نمونه امتحان‌های نیم‌سال اول

۲۳۹

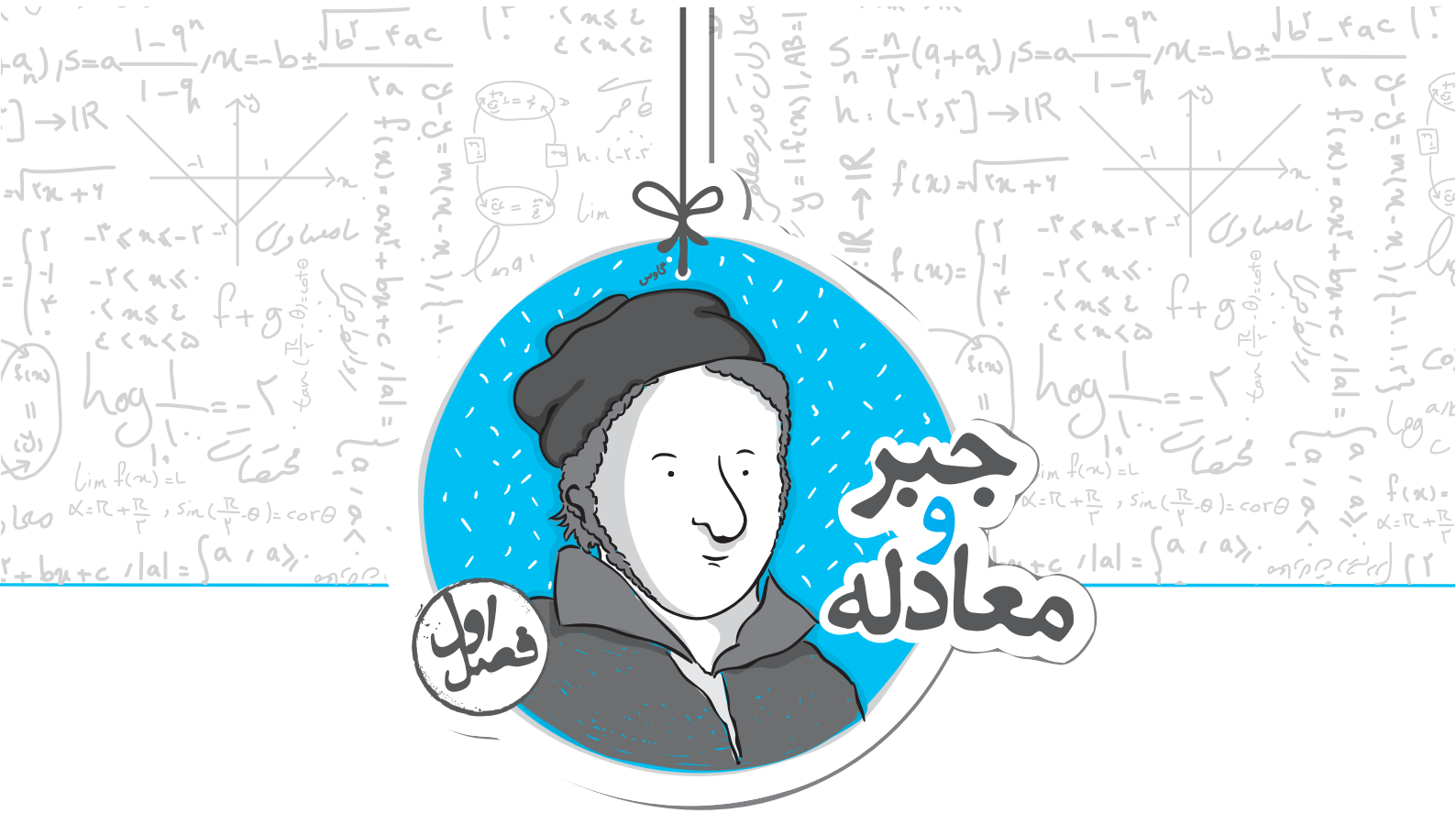
پاسخ‌نامه امتحان‌های نیم‌سال اول

۲۴۳

نمونه امتحان‌های نیم‌سال دوم

۲۵۱

پاسخ‌نامه امتحان‌های نیم‌سال دوم



مجموع جمله‌های دنباله حسابی و هندسی

سلام بچه‌ها، می‌بینم که همه شاد و پرانرژی هستید. اولین درس حسابان رو شروع می‌کنیم. در پریان دنباله‌های حسابی که هستید؟ تو درس امروز می‌فوییم جمع تعدادی جمله از دنباله حسابی و هندسی رو به دست بیاریم.

پله اول: یادآوری دنباله حسابی

دنباله اعداد که یادتان هست؟ هر تعداد عدد که پشت سر هم بنویسیم یک دنباله ایجاد می‌شود؛ مثل $1, 4, 9, 16, \dots$. به قانون یا الگویی که جمله‌های دنباله توسط آن تولید می‌شوند، جمله عمومی گفته می‌شود. حالا چرا جمله عمومی؟ چون اگر آن را داشته باشید با جای‌گذاری شماره جمله به جای n ، جمله‌ها (عموم جمله‌ها) به دست می‌آیند، مثلاً جمله عمومی دنباله‌ای که گفتیم $a_n = n^2$ است. جمله چهارم می‌شود $16 = 4^2$ ، جمله بیستم $400 = 20^2$. حالا یک دنباله حسابی بگویید، مثلاً $4, 7, 10, 13, \dots$. در این دنباله، هر جمله با عدد ثابت 3 (همون قدرنسبت فردمون) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید. در دنباله‌های حسابی هر جمله با عدد ثابت مثبت یا منفی d (قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید. به زبان دیگر اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر عدد ثابت d است؛ یعنی $a_n - a_{n-1} = d$. جمله عمومی دنباله حسابی؛ برای نوشتن جمله عمومی دنباله حسابی دو چیز می‌خواهید: یکی جمله اول (a_1) و دیگری قدرنسبت (d). با جای‌گذاری این دو تا در قانون $a_n = a_1 + (n-1)d$ جمله عمومی به دست می‌آید.

مثال و پاسخ

مثال: دنباله $9, 5, 1, -3, \dots$ را در نظر بگیرید:

الف) جمله عمومی آن را بنویسید.

ب) جمله سی و سوم دنباله، کدام است؟ جمله چندم برابر 33 است؟

پاسخ:

الف) جمله اول که تابلو -3 است. قدرنسبت هم $d = 4$ (پهارتا پهارتا داره اضافه می‌شه) است. با جای‌گذاری در فرمول جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)(4) = 4n - 7$$

$$a_{33} = 4(33) - 7 = 125$$

$$4n - 7 = 33 \Rightarrow n = 10$$

ب) جمله سی و سوم، پس $n = 33$ می‌گذاریم:

گفته جمله چندم، پس n یا همان شماره جمله، مجهول است:

یعنی دهمین عدد در دنباله برابر 33 است.

پله دوم: چند نکته تکمیلی در مورد دنباله‌های حسابی

چند نکته مهم در هر دنباله حسابی وجود دارد. خیالتان راحت باشد، سؤال مستقیم از این‌ها نمی‌آید ولی خوب، در لابه‌لای حل مسئله‌های امسال، ممکن است به آن‌ها نیاز پیدا کنید.

۱ اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، جمله وسط، میانگین دو جمله کناری است؛ یعنی $\frac{a+c}{2} = b$.

۲ جمله عمومی دنباله حسابی نسبت به n خطی (درجه حداکثر یک) است؛ مثلاً به صورت $a_n = 2n + 3$ یا $a_n = \frac{n}{4} - 1$. پس اگر دنباله‌ای مثل

$a_n = (k-2)n^2 + kn + 1$ حسابی باشد باید کاری کنید که n^2 از بین برود؛ $k-2$ را برابر صفر قرار دهید تا $k=2$ و در نتیجه $a_n = 2n + 1$ به دست آید.

۳ می‌خواهیم بین دو عدد b و a ، تعداد n عدد (واسطه) طوری قرار دهیم که همه اعداد، تشکیل یک دنباله حسابی بدهند. مثلاً می‌خواهیم بین دو عدد ۴ و ۸۱ تعداد ۶ واسطه حسابی قرار دهیم. به دو روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

روش اول: با استفاده از فرمول $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{81-4}{7} = 11$ (تعداد واسطه‌ها) + ۱ = اولی - آخری

۴, ۱۵, ۲۶, ۳۷, ۴۸, ۵۹, ۷۰, ۸۱

روش دوم: جمله اول که ۴ است. ۶ تا واسطه هم داریم؛ پس عدد ۸۱، جمله هشتم است. با فرمول جمله عمومی داریم:

$$a_n = 81 \Rightarrow a_1 + 7d = 81 \Rightarrow 4 + 7d = 81 \Rightarrow d = 11$$

پله سوم: مجموع n جمله اول دنباله حسابی

می‌خواهیم مجموع جمله‌های اول تا n ام دنباله حسابی را به دست آوریم. قبل از این که به فرمول اصلی برسیم، جمع اعداد متوالی از ۱ تا n یعنی $1 + 2 + 3 + \dots + n$ را به دست می‌آوریم:

مرحله اول: $S = 1 + 2 + \dots + n$ جمع اعداد را S می‌نامیم

مرحله دوم: $S = n + (n-1) + \dots + 1$ همین اعداد را از آخر به اول می‌نویسیم

مرحله سوم: $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ تا}} \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\text{آخری}(\text{آخری})}{2}$

مثلاً: $1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$ یا $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

حالا مجموع n جمله اول دنباله حسابی را به دست می‌آوریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$= na_1 + (1+2+3+\dots+(n-1))d = na_1 + \frac{(n-1)(n)}{2}d = \frac{2na_1 + (n-1)(n)d}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

فرمول جمع اعداد متوالی

بنابراین به خاطر می‌سپاریم که:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

حالا بگویید ببینم معنی S_1 چیست؟ جمع جمله‌های اول تا دهم. معنی S_0 (آقا به فرا فهمیدیم...) حواستان باشد برای یافتن مجموع تعدادی جمله، باید جمله اول و قدرنسبت را داشته باشید (اگر نداشتید پی؟ فب اول باید اون‌ها رو با اطلاعات مسئله پیدا کنید، بعد بنده‌زید تو فرمول). کتاب درسی یک رابطه

غیرضروری دیگر هم برای S_n گفته است:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + \underbrace{a_1 + \dots + a_n}_{a_n}) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \text{تعداد} \times \text{آخری و اولی میانگین}$$

مثال و پاسخ

مثال: دنباله حسابی $3, 2, 7, \dots$ را در نظر بگیرید:

الف) مجموع ۲۰ جمله اول دنباله را به دست آورید.

پ) مجموع n جمله اول (همون S_n) را بیابید.

ب) مجموع $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$ را به دست آورید.

پاسخ:

الف) $a_1 = -3$ و $d = 5$ است، پس: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(-3) + 19(5)) = 890$

ب) جمع جمله‌های اول تا بیستم، برابر ۸۹۰ شد اما برای محاسبه $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$ باید جمع جمله‌های اول تا دهم

(یعنی S_{10}) را از آن کم کنیم: $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} = S_{20} - S_{10} = 890 - \frac{10}{2}(2(-3) + 9(5)) = 695$

به جمع $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$ مجموع ده جمله دوم هم می‌گوییم (آگه بایی دیدید و مشت نکنید!). جمع بندی (الف) و (ب) این شد که برای جمع، از یک تا n فرمول داریم. اگر آن وسط‌ها، جمعی را خواستید باید S_n را از قبلی‌ها کم کنید.

پ) $S_n = \frac{n}{2}(2(-3) + (n-1)(5)) = \frac{n}{2}(5n - 11) = \frac{5n^2}{2} - \frac{11}{2}n$

بد نیست بدانید دنباله مجموع (S_n) همواره از درجه حداکثر ۲ (نه بیشتر!) درمی‌آید.

ب) جمع تعدادی جمله شماره زوج را می‌خواهیم. به a_4, a_6, \dots و ... دقت کنید:

خودشان یک دنباله حسابی با قدرنسبت $2 \times 5 = 10$ هستند. مجموع ده تا از این جمله‌ها را می‌خواهیم.

$a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = \frac{10}{2}(2(2) + 9(10)) = 470$

مثال: مجموع دوازده جمله اول دنباله حسابی برابر ۱۳۸ و جمله ششم آن برابر ۱۰ است. مجموع صد جمله اول دنباله را بیابید.

پاسخ: گفتیم تا a_1 و d نداشته باشیم کاری نمی‌توانیم بکنیم. پس اول آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \text{مجموع } 12 \text{ جمله اول} = S_{12} = 138 &\Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138 && \begin{cases} 12a_1 + 66d = 138 \\ a_1 + 5d = 10 \end{cases} \\ \text{مجموع } 6 \text{ جمله ششم} = a_6 = 10 &\Rightarrow a_1 + 5d = 10 && \times (-12) \end{aligned}$$

$$6d = 18 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -5$$

حالا $S_{100} = 50(-10 + 99(3)) = 14350$

مثال: یادش بخیر! یکی از امتحان‌های ورزش ما به این صورت بود. ۵ چوب به فاصله ۳ متری در یک خط مستقیم قرار داده می‌شد.

هر فرد باید از نقطه شروع حرکت کرده، چوب اول را برداشته و دوباره برگشته و در مکان شروع قرار می‌داد. برای چوب‌های بعدی هم همین‌طور (کم‌تر از زمان مشخصی این کار رو انجام می‌دادیم نمره کامل می‌گرفتیم). بعله برای ۲۰ ورزش هم پدرومان را درمی‌آوردن). شما محاسبه کنید برای برداشتن همه چوب‌ها چه مسافتی طی می‌شود؟

پاسخ: برای برداشتن چوب اول ۳ متر جلو و ۳ متر هم برمی‌گردیم؛ پس در کل ۶ متر را طی می‌کنیم. برای برداشتن چوب دوم

۶ متر می‌رویم و ۶ متر برمی‌گردیم؛ پس ۱۲ متر. به همین ترتیب برای چوب بعدی ۱۸ متر. کافی است مجموع ۵ جمله اول دنباله

حسابی $a_1 = 6$ و $d = 6$ را به دست آوریم: $S_5 = \frac{5}{2}(12 + 4(6)) = 90 \text{ m}$

پله چهارم: به دست آوردن دنباله از روی S_n

فرض کنید مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = 3n^2 - 4n$ به دست آید. می‌خواهیم از روی این دنباله، جمله عمومی

$$S_1 = a_1 = -1$$

دنباله را بنویسیم. اگر $n = 1$ قرار دهیم مجموع یک جمله (S_1) یا همان a_1 به دست می‌آید:

اگر $n = 2$ قرار دهیم مجموع دو جمله اول به دست می‌آید، یعنی:

اگر $a_1 = -1$ قرار دهیم $a_2 = 5$ به دست می‌آید، حالا $d = a_2 - a_1 = 6$. با داشتن قدرنسبت و جمله اول، جمله عمومی نوشته می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -1 + (n-1)(6) = 6n - 7$$

بنابراین از روی S_n هم می‌توانید خود دنباله و همه اطلاعات آن را بیابید. این را هم بگویم که اگر در برنامه‌های پربار! تلویزیون دیدید، زیاد شگفت‌زده نشوید؛ d همواره دو برابر ضریب n^2 است. ضریب n^2 برابر ۳ بود، پس $d = 6$ می‌شود.

راه حل دومی هم برای به دست آوردن a_n از روی S_n وجود دارد. اگر جمع اعداد از شماره ۱ تا n را از جمع اعداد از شماره ۱ تا $n-1$ کم کنیم، جمله na_n یا a_n به دست می‌آید؛ یعنی $S_n - S_{n-1} = a_n$. پس:

$$S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 4n - (3(n-1)^2 - 4(n-1)) = 3n^2 - 4n - (3n^2 - 6n + 3 - 4n + 4) = 6n - 7$$

(به جای n باید $n-1$ بذاریم)

پله پنجم: یادآوری دنباله هندسی

دنباله $3, 6, 12, 24, \dots$ را در نظر بگیرید. هر جمله در عدد ثابت ۲ (همون قدرنسبت) ضرب شده و جمله بعدی به دست می‌آید. دنباله‌هایی که در آن‌ها، هر جمله در عدد ثابت q ضرب شده و جمله بعدی به دست می‌آید، دنباله‌های هندسی می‌نامیم. در هر دنباله هندسی، تقسیم هر جمله بر جمله قبلی همان قدرنسبت است؛ یعنی $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.

جمله عمومی دنباله هندسی برای نوشتن جمله عمومی دنباله هندسی هم نیاز به دو چیز داریم: یکی جمله اول (a_1) و دیگری قدرنسبت (q). در این صورت جمله عمومی دنباله هندسی می‌شود: $a_n = a_1 q^{n-1}$ ($q, a_1 \neq 0$)

مثال و پاسخ

مثال: در یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت، جمله هشتم و جمله چهارم به ترتیب برابر ۸۱ و ۹ هستند. جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

پاسخ: اول باید a_1 و q را به دست آوریم. دو معادله را نوشته و با حل دستگاه، a_1 و q را به دست می‌آوریم. یادتان باشد دستگاه‌هایی که در این جا به وجود می‌آیند، معمولاً با تقسیم دو طرف حل می‌شوند.

$$\begin{aligned} a_8 = 81 &\Rightarrow a_1 q^7 = 81 \\ a_4 = 9 &\Rightarrow a_1 q^3 = 9 \end{aligned} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_1 q^7}{a_1 q^3} = \frac{81}{9} \Rightarrow q^4 = 9 \xrightarrow{q>0} q = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$a_1 (\sqrt{3})^3 = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

با جای‌گذاری در معادله دوم داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^{n-1} = \sqrt{3}^n$$

پس جمله عمومی می‌شود:

پله ششم: مجموع n جمله اول دنباله هندسی

می‌خواهیم جمع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q را به دست آوریم. فعلاً فرض کنید $q \neq 1$ باشد.

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

$$qS = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n$$

$$S - qS = a_1 - a_1 q^n \quad (\text{از بالایی فقط اولی و از پایینی آخری می‌مونه})$$

$$\Rightarrow (1-q)S = a_1(1-q^n) \Rightarrow S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

به خاطر بسپارید:

یک وقت به سرتان نزنند بنویسید $\frac{a_1(1-q)^n}{1-q}$ (دیدم که می‌گم!)؛ توان n فقط برای q است.

ممکن است برسید اگر $q = 1$ باشد چه می‌شود؟ ببینید اگر $q = 1$ باشد، نتیجه می‌شود همه جمله‌ها، برابر هستند. مثلاً دنباله به صورت a, a, a, \dots بوده است. خُب! چه کاری است جمع n جمله اول می‌شود na دیگر.

مثال و پاسخ

1, -2, 4, -8, ...

مثال: مجموع ده جمله اول دنباله هندسی مقابل را بیابید.

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = \frac{1-1024}{3} = -341$$

پاسخ: $a_1 = 1$ و $q = -2$ ، پس:

یک وقت به سرتان نزنند بنویسید $1 + (-2) + (-2)^2 + \dots$ (دیدم که می‌گم!)؛ در ترتیب عملیات، توان جلوتر از جمع و تفریق است.

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

پاسخ: دو معادله را نوشته و با استفاده از فرمول S_n آن‌ها را باز می‌کنیم:

$$S_3 = 136 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 136$$

$$S_6 = 153 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 153$$

(گفتم با تقسیم حل می‌شه!)

$$\frac{a_1(1-q^6)}{a_1(1-q^3)} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1+q^3}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136}(1-q^3)$$

مثال: برای محافظت از تابش مواد زیان‌آور (ننوشتم مُفیر؛ باور کن طرف نمی‌دونسته. دیدم که می‌گم!) رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه استفاده کنیم تا شدت تابش مواد زیان‌آور ۹۹٪ کاهش یابد؟

پاسخ: بگذارید سؤال را این‌جوری بگویم. چه قدر از مواد زیان‌آور را دور بریزیم تا بیشتر از ۹۹٪ آن دور ریخته شود؟

اول $\frac{1}{2}$ را دور می‌ریزیم. بعد از $\frac{1}{2}$ باقی‌مانده، $\frac{1}{4}$ آن را دور می‌ریزیم، پس $\frac{1}{4}$ از کل حذف می‌شود. به همین ترتیب در مرحله n ام $(\frac{1}{2})^n$ حذف می‌گردد. مجموع مواد زیان‌آوری که دور ریختیم باید از ۹۹٪ بیشتر شود، پس:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + (\frac{1}{2})^n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{99}{100} > (\frac{1}{2})^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{100} > (\frac{1}{2})^{n+1}$$

مجموع n جمله اول
دنباله هندسی با $q = \frac{1}{2}$

یعنی حداقل باید از ۷ لایه، عبور بدهیم. $7 \leq n$ (با جستجو) $\rightarrow 100 < 2^n$ دو طرف را معکوس می‌کنیم

پله هفتم: تعمیم (گسترش) اتحاد مزدوج و چاق و لاغر

اتحاد مزدوج و چاق و لاغر را که یادتان هست؟ داشتیم $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ و $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$ می‌خواهیم ببینیم اگر $a^n - 1$ باشد، طرف راست به چه شکلی درمی‌آید. ببینید:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$$

مجموع n جمله اول
دنباله هندسی با $q = a$

مثلاً: $a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ یا $a^7 - 1 = (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

نتیجه ۱: اگر n فرد باشد با تبدیل a به $-a$ اتحاد به صورت مقابل درمی‌آید:

مثلاً: $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ یا $a^5 + 1 = (a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$

نتیجه ۲: در حالت کلی نتیجه می‌شود:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$$

(از توان x یکی کم و به توان y یکی اضافه می‌شه)

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

مثلاً:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$$

شبهه نتیجه ۱ اگر n فرد باشد، با تبدیل y به $-y$ داریم:

سؤال‌های امتحانی

A

۱- گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۸

۴

(الف) قدرنسبت جمله‌های ردیف زوج دنباله $1, 3, 7, \dots$ برابر است با:

۶

۴

(ب) اگر $S_n = n^2 + n$ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد، جمله دوم دنباله برابر است با:

۲- جاهای خالی را با عبارت‌ها یا کلمه‌های مناسب پر کنید.

(الف) در روز اول یک سکه، در روز دوم دو سکه، ... و در روز دهم، ده سکه کنار می‌گذاریم. در مجموع سکه تا روز دهم کنار گذاشته‌ایم.

(ب) ۱۰ نقطه متمایز روی محیط دایره‌ای قرار دارد. از هر نقطه به نقطه دیگر وصل می‌کنیم. تعداد وتر به دست می‌آید.

۳- مجموع ۲۰ جمله اول هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

(نوبتی ۹۲)

(ب) $5, 0, -5, \dots$

(نوبتی ۹۱)

(الف) $1, -3, -5, \dots$

(ت) $a_n = \frac{n}{4} + 1$

(پ) $a_n = 3n - 1$

۴- چند جمله از دنباله $1, 4, 7, 10, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل برابر ۱۷۶ شود؟

(نوبتی ۹۵)

۵- در دنباله حسابی $1, 2, 5, \dots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

(نوبتی ۹۳)

۶- حداقل چند جمله از دنباله $3, 9, 15, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

۷- در یک دنباله حسابی مجموع ۲۰ جمله اول، سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله اول دنباله را به دست آورید.

۸- در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۱۰ و مجموع پنج جمله بعدی برابر ۳۵ است. مجموع پنجاه جمله اول دنباله را به دست آورید.

۹- در یک دنباله حسابی $S_n = n(4n - 1)$ است.

(الف) مجموع ده جمله اول را بیابید.

(ب) مجموع $a_6 + a_7 + \dots + a_{15}$ را بیابید.

(پ) جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

۱۰- از بین ۲۰ جمله اول دنباله حسابی $1, -1, -4, -7, \dots$ مجموع جمله‌های ردیف زوج و مجموع جمله‌های ردیف فرد را به دست آورید.

۱۱- در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جمله‌های ردیف فرد برابر ۵۳۰ و مجموع جمله‌های ردیف زوج برابر ۵۹۰ است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

(مشابه کتاب درسی)

۱۲- حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه کتاب درسی)

(الف) مجموع اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶

(ب) مجموع اعداد دورقمی که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

۱۳- تعدادی توپ و یک سبد مطابق شکل روی یک خط مستقیم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد $2m$ و فاصله بقیه توپ‌ها از یکدیگر $3m$ است. دونه‌ای از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته و تا سبد برگشته و توپ را درون سبد می‌اندازد.



(مشابه کتاب درسی)

او این عمل را برای بقیه توپ‌ها هم انجام می‌دهد. اگر این دونه در مجموع ۳۷۴ متر دویده

باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟

۱۴- گزینه صحیح را انتخاب کنید.

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(الف) قدرنسبت دنباله هندسی $1, \sqrt{2}, 2, \dots$ برابر است با

$\frac{1023}{2}$

$\frac{1023}{4}$

(ب) مجموع ده جمله اول دنباله $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ برابر است با

۱۰۲۳

۵۱۱

(پ) مجموع $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9$ برابر است با

۱۵- مجموع ۱۰ جمله اول هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (ب) $2, \sqrt{2}, 1, \dots$ (پ) $2, -6, 18, \dots$ (ت) $a_n = \frac{3^{n-1}}{3}$

(نهایی ۹۰)

۱۶- مجموع چند جمله از دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر ۱۲۶- است؟

۱۷- حداقل چند جمله از دنباله $1, 3, 9, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۱۸- مجموع جمله‌های اول و سوم در یک دنباله هندسی برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول را بیابید.

۱۹- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر ۱۳۶ و مجموع سه جمله بعدی ۱۷ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

۲۰- مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $2, x, 6, \dots$ را بیابید. ($q > 0$)

۲۱- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب

(نهایی ۹۴)

در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود؟

۲۲- حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ را به دست آورید.

(نهایی ۹۱)

۲۳- به کمک اتحادها عبارت روبه‌رو را ساده کنید. $A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$

سؤال‌های تکمیلی

B

۲۴- با استفاده از فرمول S_n و بار دیگر با استفاده از یک مربع $n \times n$ نشان دهید: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

۲۵- جمله ششم یک دنباله حسابی برابر ۱۰ است. مجموع یازده جمله اول دنباله را به دست آورید.

۲۶- در یک دنباله حسابی از جمله اول ۲ واحد کم و به قدرنسبت ۳ واحد اضافه می‌کنیم. مجموع ده جمله اول چه تغییری می‌کند؟

۲۷- بین دو عدد ۳ و ۴۷، تعداد ۱۰ واسطه حسابی قرار می‌دهیم. مجموع واسطه‌ها را به دست آورید.

۲۸- زوایای داخلی یک ۵ ضلعی محدب برحسب درجه، تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت 6° باشد، کوچک‌ترین زاویه ۵ ضلعی را به دست آورید.

۲۹- حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست آورید.

۳۰- بین دو عدد ۱۵۳۶ و ۳، هشت عدد طوری قرار می‌دهیم که اعداد تشکیل دنباله هندسی بدهند. مجموع این واسطه‌ها را به دست آورید.

۳۱- تویی را از ارتفاع ۵۰ متری رها می‌کنیم تا در یک مسیر مستقیم با زمین برخورد کند. بعد از هر بار برخورد توپ با زمین، $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. وقتی توپ برای بار هفتم با زمین برخورد می‌کند، چه مسافتی را پیموده است؟

۳۲- اگر $x = 2$ باشد، حاصل $(x^3 - 1)(1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-30})^{-1}$ را به دست آورید.

۳۳- ثابت کنید: $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$

سؤال‌های فضایی

C

۳۴- یک دنباله حسابی ۱۰۰ جمله دارد. اگر جمع سه جمله اول با سه جمله آخر برابر ۱۵۰ باشد، مجموع همه جمله‌ها چه قدر است؟

۳۵- در مسئله ۱۳ اگر دونده تا پایان زمان، m ۹۰۰ را طی کرده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟

۳۶- مقدار x را از معادله $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$ به دست آورید.

۳۷- اعداد طبیعی را به صورت $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \dots$ دسته‌بندی می‌کنیم (یعنی آخرین جمله هر دسته، مربع کامل است). مجموع جمله‌های دسته یازدهم را به دست آورید.

۳۸- a_n یک دنباله حسابی است. حاصل $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$ را بیابید.

۳۹- جمله‌های سوم، هفتم و نهم از یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند. مجموع چند جمله اول دنباله حسابی برابر صفر است؟

۲ معادلات درجه دوم

سلام بچه‌ها، فوبین؟ سال پیش با n روش، معادله درجه دوم رو حل کردین. باید یاد بگیرین معادله درجه ۲ رو سریع حل کنین، پس پله اول رو فوب بتونین. بین ریشه‌های معادله و ضرایب اون، روابط جالبی وجود داره که امروز می‌فویم با هم بتونیم. بعدش یکم سومی و ...

پله اول: یادآوری روش‌های حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

یک بار برای همیشه تکلیف خودتان را با معادله درجه دوم روشن کنید (دیدم که می‌گم). دانش آموز کنکور بلد نبوده درجه ۲ حل کنه! در صورت برخورد با معادله درجه دوم به ترتیب (گفتم به ترتیب نه این که سریع بری Δ) روش‌های زیر را امتحان کنید.

اگر جمع ضرایب برابر صفر باشد یعنی $a+b+c=0$ ، یکی از ریشه‌ها $x_1=1$ و دیگری $x_2 = -\frac{c}{a}$ است. مثلاً جمع ضرایب معادله $2x^2 - 5x + 3 = 0$ برابر صفر است ($2-5+3=0$)؛ پس $x_1=1$ و $x_2 = \frac{3}{2}$.

اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x_1=-1$ و دیگری $x_2 = -\frac{c}{a}$ است. مثلاً جواب‌های معادله $2x^2 + 3x + 1 = 0$ به صورت $x_1=-1$ و $x_2 = -\frac{1}{2}$ است.

از روش تجزیه استفاده کنید. این‌جا دو حالت ممکن است به وجود آید. اگر $a=1$ (ضریب x^2) باشد که خوش به حالتان است. با اتحاد یک جمله مشترک به راحتی تجزیه می‌کنید. مثلاً:

دو عدد پیدا کنید که $-5 =$ جمع و $6 =$ ضرب $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1=2, x_2=3$

اما اگر $a \neq 1$ باشد کمی داستان می‌شود! یک روش خوب و سریع به اسم ac در این‌جا وجود دارد. روی دو مثال ببینید:

مثلاً $2x^2 + 5x - 3 = 0$ را در c ضرب کرده و a را حذف کنید $\rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$ تجزیه کنید $\rightarrow (x+6)(x-1) = 0$

یکی از اعداد را بر a (یعنی ۲) تقسیم و x پرانتز دیگر را در a ضرب کنید $\rightarrow (x + \frac{6}{2})(2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$

ضرب در ۶ تقسیم بر ۶ $\rightarrow (x + \frac{3}{6})(6x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$

اگر معادله گردن کلفت شما با هیچ کدام از روش‌های بالا حل نشد، نگران نباشید! چون روش Δ همه معادله‌ها را حل می‌کند. $\Delta = b^2 - 4ac$ (بند دنیال ۴ اسب سفید) را به دست می‌آورید.

اگر $\Delta > 0$ باشد، دو ریشه از رابطه $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آید.

اگر $\Delta = 0$ باشد، دو ریشه بالا تبدیل به یک ریشه مضاعف $-\frac{b}{2a}$ می‌شود.

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

پله دوم: جمع و ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

فرض کنید معادله درجه دوم، دارای دو ریشه α و β باشد (یعنی $\Delta > 0$ باشد). می‌خواهیم بدون محاسبه ریشه‌ها (بوهویی!) جمع و ضرب ریشه‌ها یعنی $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست آوریم (هالا فود ریشه‌ها پی هستن به ما ربطی نداره!):

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

جمع ریشه‌ها را S (از Sum به معنی جمع) و ضرب آن‌ها را P (از Product به معنی ضرب) می‌نامیم. پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مثلاً در معادله $2x^2 - 7x - 1 = 0$ جمع و ضرب ریشه‌ها می‌شوند:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}, P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

مثال و پاسخ

مثال: اگر α و β ، ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، بدون محاسبه ریشه‌ها، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ ، $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ، $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ ، $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ و $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را به دست آورید.

پاسخ: قبل از همه S و P را به دست می‌آوریم:

حالا هر عبارت را به S و P ربط می‌دهیم:

الف) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2}$

ب) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = S^2 - 3SP$$

(مفط باشین فوبه!)

پ) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{\frac{21}{2}}{-\frac{1}{2}} = -21$

ت) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = (S)(S^2 - 2P - P) = S^3 - 3SP = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{95}{8}$

ث) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = PS = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

ج) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} = \frac{5}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{2}}$

مثال: در معادله $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها دو واحد بیشتر از ریشه دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه را بیابید. (نوبتی ۸۷)

پاسخ: در این مسئله S و P و رابطه مسئله را بنویسید. مجهول‌ها خودشان به دست می‌آیند! $S = \alpha + \beta = -\frac{-16}{4} = 4$

$$P = \alpha\beta = \frac{m}{4}$$

$\alpha = \beta + 2$ (پای‌گذاری تو اولی) $\rightarrow \beta + 2 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 3$ (تو دومی) $\rightarrow 3 = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 12$

پله سوم: تشکیل معادله درجه دوم

می‌خواهیم معادله درجه‌دومی بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشد. فُت! خیلی ساده، معادله $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ را می‌نویسیم. با ضرب

و ساده کردن داریم:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

یعنی کافی است اول جمع و ضرب دو ریشه را به دست بیاوریم و بعد در فرمول بالا به جای S و P جای‌گذاری کنیم. مثلاً می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشد. اول S و P را به دست می‌آوریم:

$$S = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2, P = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + (-1) = 0 \text{ (معادله‌ای که ریشه‌هایش } 1 \pm \sqrt{2} \text{ هستش)}$$

مثال و پاسخ

مثال: α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ هستند. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد.

پاسخ: برای نوشتن معادله‌ای که ریشه‌هایش $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ و $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$ باشد، باید $x_1 + x_2$ و $x_1 x_2$ را به دست آوریم. توجه دارید

که α و β ریشه‌های معادله داده شده هستند؛ پس $\alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1$ و $\alpha\beta = -1$. حالا:

$$S' = x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{1 - 2(-1)}{-1} = -3$$

$$P' = x_1 x_2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 \Rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

پله چهارم: تغییر متغیر برای حل معادله‌ها

برخی از معادله‌ها درجه دوم نیستند، ولی با یک تغییر متغیر تبدیل به درجه ۲ شده و قابل حل می‌شوند.

مثال و پاسخ

(نوبتی ۹۵)

مثال: معادله $\left(\frac{x^2}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{y} - 1\right) - 2 = 0$ را حل کنید.

پاسخ: $t = \frac{x^2}{y} - 1$ می‌گیریم، پس:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \frac{x^2}{y} - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ t+2=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \frac{x^2}{y} - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

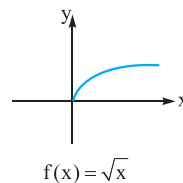
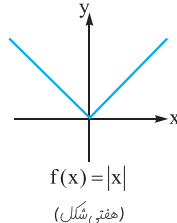
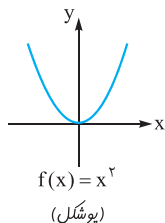
پله پنجم: یادآوری نمودارهای برخی از توابع

در سال گذشته رسم برخی از تابع‌ها را یاد گرفتید. خوب است قبل از این که به درس جدید بپردازیم، مروری روی آن‌ها داشته باشیم:

۱ نمودار تابع‌های ثابت با ضابطه $y = k$ یا $f(x) = k$ به صورت یک خط افقی است. (k یک عدد حقیقی است).

۲ نمودار تابع‌های خطی با ضابطه $f(x) = ax + b$ به صورت یک خط است. برای رسم، دو مقدار دلخواه به جای x قرار داده، مقدار y ها را به دست می‌آوریم و آن‌ها را وصل و ادامه می‌دهیم. البته توجه دارید اگر دامنه تابع محدودیت خاصی داشته باشد، نمودار فقط به ازای همان x ها قابل قبول می‌شود.

۳ نمودار تابع‌های $f(x) = x^2$ و $f(x) = |x|$ و $f(x) = \sqrt{x}$ به صورت زیر است. آن‌ها را به خاطر بسپارید.



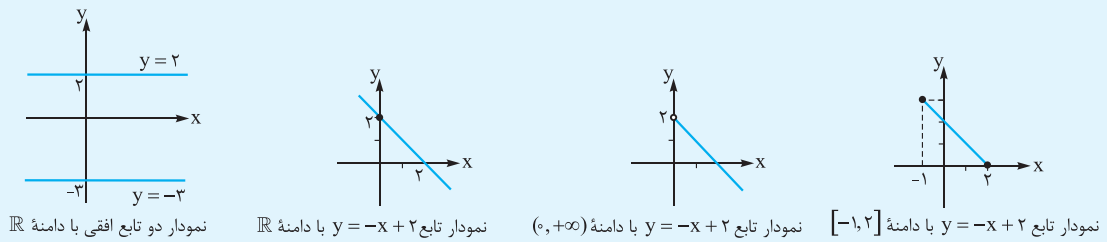
۴ برای رسم تابع $y = f(x - k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به راست و برای رسم تابع $y = f(x + k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به چپ ببریم ($k > 0$). (آره درسته به هورایی برعکس عمل می‌کنه!)

۵ برای رسم تابع $y = f(x) \pm k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد بالا یا پایین ببریم. ($k > 0$ هستش $+k$ باشه بالا میره، $-k$ باشه پایین)

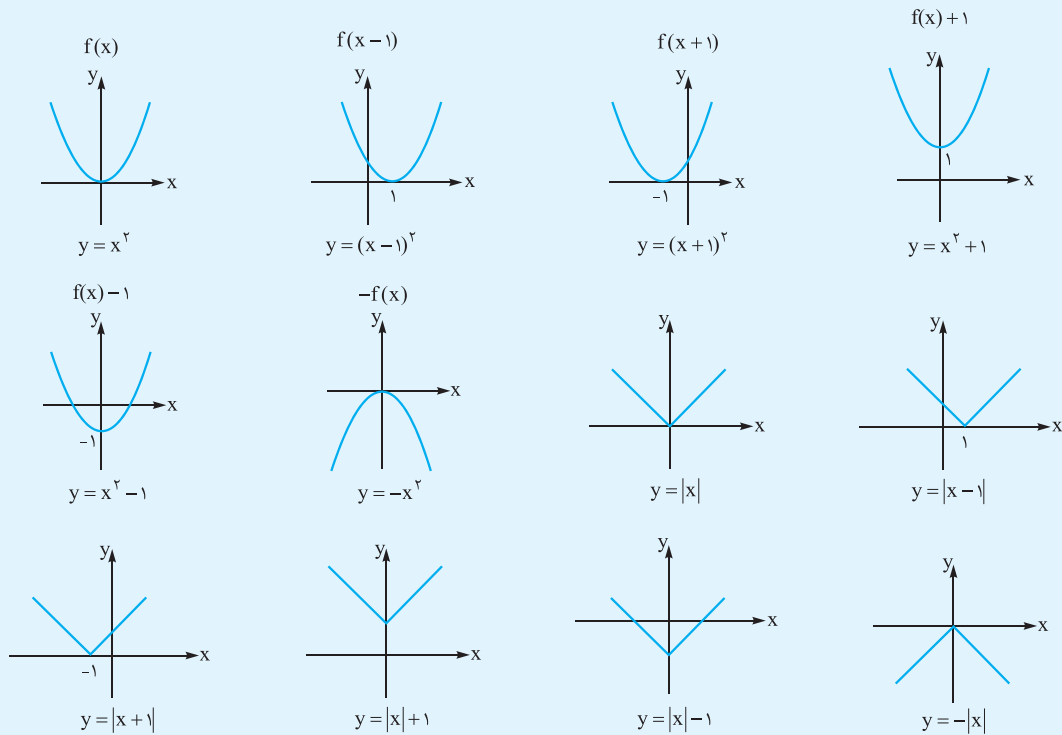
۶ برای رسم تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور افقی، قرینه کنیم.

مثال و پاسخ

مثال



مثال



پله ششم: رسم نمودار تابع های درجه دوم (سه می)

ضابطه یک تابع درجه دوم به دو صورت ممکن است داده شده باشد. در هر دو حالت نمودار آن به سادگی رسم می شود:

۱. فرم مربع کامل $y = a(x - x_0)^2 + y_0$: ریشه داخل پرانتز همان طول رأس سه می است، یعنی $x = x_0$. عدد ثابت سمت راست (y_0) هم عرض رأس سه می است، پس مختصات رأس سه می $S(x_0, y_0)$ خواهد بود. مثلاً رأس سه می $y = (x + 2)^2 - 1$ نقطه $(-2, -1)$ است. با قراردادن یکی دو نقطه بیشتر و کمتر از طول رأس در ضابطه و به دست آوردن نقطه ها، سه می رسم می شود.

۲. فرم استاندارد $y = ax^2 + bx + c$: در این حالت طول رأس سه می می شود: $x_0 = -\frac{b}{2a}$. با قراردادن این نقطه به جای x ، عرض رأس سه می هم به دست می آید. نمی دانم یادتان هست که عرض رأس سه می را از رابطه $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$ هم می توانستید به دست آورید. مختصات رأس سه می در این حالت می شود: $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$. در هر دو فرم بالا، نکته های زیر هم برقرار است:

دکته ۱: اگر $a > 0$ ، دهانه سه می رو به بالا و اگر $a < 0$ ، دهانه سه می رو به پایین درمی آید. اگر دهانه رو به بالا باشد نمودار این شکلی و رأس سه می پایین ترین نقطه است. در این حالت می گوییم سه می نقطه مینیمم (Min) دارد. اگر $a < 0$ ، دهانه رو به پایین بوده و نمودار این شکلی است. در این جا رأس سه می بالاترین نقطه است، پس می گوییم سه می ماکسیمم (Max) دارد.

نکته ۲: $x = -\frac{b}{2a}$ همواره یک خط عمودی است که محور تقارن سهمی است.

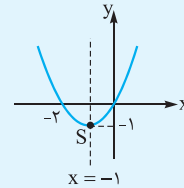
نکته ۳: در صورتی که سهمی Max داشته باشد، عرض رأس سهمی بیشترین مقدار تابع و در صورتی که Min داشته باشد، عرض رأس، کمترین مقدار تابع است.

مثال و پاسخ

مثال: با استفاده از مختصات نقطه رأس، هر سهمی را رسم می‌کنیم:

الف) $y = (x+1)^2 - 1$

x	-2	-1	0
y	0	-1	0



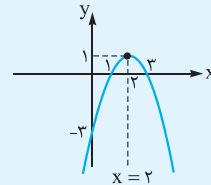
$$S \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{معادله محور تقارن } x = -1 \\ \text{دهانه رو به بالا } a > 0 \end{cases}$$

سهمی مینیمم دارد. $x = -1$ طول نقطه مینیمم است. $y = -1$ هم عرض نقطه مینیمم (کمترین مقدار) تابع است.

ب) $y = -x^2 + 4x - 3$

x	0	1	2	3
y	-3	0	1	0



$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} y = 1$$

$$\begin{cases} \text{معادله محور تقارن } x = 2 \\ \text{دهانه رو به پایین } a < 0 \end{cases}$$

سهمی ماکسیمم داشته، $x = 2$ طول نقطه ماکسیمم و $y = 1$ عرض نقطه ماکسیمم (بیشترین مقدار) تابع است.

مثال: معادله سهمی را به دست آورید که نقطه $S(1, 2)$ رأس آن بوده و از نقطه $(2, 0)$ عبور کند.

پاسخ: می‌توانیم فرم مربع کامل یا فرم استاندارد سهمی را به دست آوریم. رأس $S(1, 2)$ است؛ پس فرم مربع کامل

$y = a(x-1)^2 + 2$ است. سهمی از نقطه $(2, 0)$ عبور می‌کند؛ پس می‌توانیم این نقطه را جای گذاری کنیم:

$$0 = a(2-1)^2 + 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow y = -2(x-1)^2 + 2$$

اگر می‌خواستیم از روی فرم استاندارد برویم، کار طولانی‌تر می‌شد. معادله را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} S(1, 2) \text{ روی تابع است} \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 2 = a + b + c \\ x = 1 \text{ طول رأس} \rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a \\ (2, 0) \text{ روی تابع است} \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{در معادله‌های اول و سوم} \\ \text{به جای } b \text{ قرار می‌دهیم } -2a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -a + c \\ 0 = c \end{cases} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4$$

پس معادله سهمی می‌شود $y = -2x^2 + 4x$ (به موقع فلک نکنی $y = -2x^2 + 4x$ با $y = -2(x-1)^2 + 2$ فرق داره؛ دیرم که می‌گم!)

پله هفتم: به دست آوردن علامت ضرایب سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار

فرض کنید نمودار یک سهمی داده شده است. از روی آن اطلاعات زیادی می‌توانیم به دست آوریم. یکی هم، علامت‌های a ، b و c است:

1 علامت a که از روی دهانه به دست می‌آید. اگر دهانه رو به بالا $a > 0$ است و اگر رو به پایین باشد $a < 0$ است.

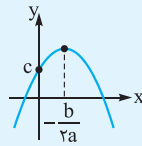
2 طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است. از روی نمودار ببینید طول رأس، مثبت یا منفی است. حالا با توجه به علامت a ، علامت b را به دست آورید.

3 به ازای $x = 0$ ، $y = c$ می‌شود، یعنی محل برخورد نمودار با محور y ها، همان c است.

مثال و پاسخ

مثال با توجه به نمودار هر سهمی علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنید.

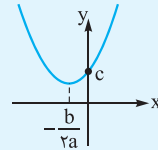
پاسخ



$a < 0 \Rightarrow$ دهانه رو به پایین

$$-\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$

$$c > 0 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$



$a > 0 \Rightarrow$ دهانه رو به بالا

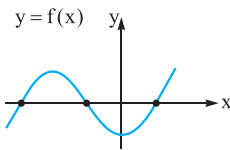
$$x = -\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

$$c > 0 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها}$$

پله هشتم: صفرهای تابع

بار دیگر به مثال پله ششم برگردید. در نمودار (الف)، به $x = -2$ و $x = 0$ صفرهای تابع $y = (x+1)^2 - 1$ گفته می‌شود. حالا چرا صفر؟ چون y یا عرض این نقطه‌ها برابر صفر هستند. به عبارت دیگر اگر در تابع $y = 0$ قرار دهیم، این دو نقطه به دست می‌آیند. بنابراین می‌توان گفت این دو نقطه ریشه‌های معادله $(x+1)^2 - 1 = 0$ هستند. در نمودار (ب) نیز $x = 1, 3$ صفرهای تابع داده‌شده یا ریشه‌های معادله $-x^2 + 4x - 3 = 0$ هستند. در حالت کلی:

صفرهای تابع $y=f(x)$ ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را صفرهای تابع می‌گوییم. این نقاط همان، محل برخورد نمودار تابع با محور x ها هستند. مثلاً از روی نمودار تابع‌های زیر می‌فهمیم:

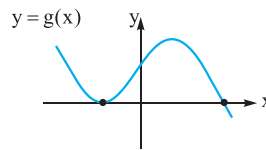


سه نقطه برخورد با محور x ها

تابع ۳ تا صفر دارد. \Rightarrow

معادله $f(x) = 0$ ، ۳ تا ریشه دارد. \Rightarrow

دوتا از ریشه‌ها منفی و یکی مثبت است. \Rightarrow

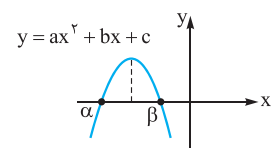


دو نقطه برخورد

تابع دوتا صفر دارد. \Rightarrow

معادله $g(x) = 0$ دوتا ریشه دارد. \Rightarrow

یکی از ریشه‌ها مثبت و دیگری منفی است. \Rightarrow



دو نقطه برخورد

تابع دوتا صفر دارد. \Rightarrow

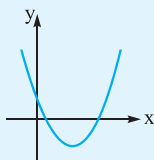
معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه دارد. \Rightarrow

هر دو ریشه منفی هستند. \Rightarrow

پس از روی نمودار سهمی، نه تنها تعداد ریشه‌ها، بلکه علامت‌های آن‌ها را هم می‌توانیم به دست آوریم. در نمودار سمت راست، بد نیست این را هم بررسی کنیم، α و β ریشه‌های معادله هستند. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ است. طول رأس هم $-\frac{b}{2a}$ است، یعنی طول رأس، در وسط ریشه‌ها قرار دارد.

مثال و پاسخ

مثال نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. با استفاده از صفرهای تابع، علامت ضرایب a ، b و c را بیابید.



پاسخ با پله هفتم هم می‌توانیم علامت‌ها را به دست بیاوریم ولی گفته با صفرهای تابع. ببینید دهانه که رو به بالا است پس $a > 0$ است.

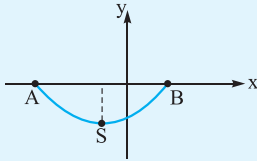
تابع دوتا صفر (دو ریشه) مثبت دارد، پس جمع آن‌ها هم مثبت است. از طرفی جمع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ است، پس $-\frac{b}{a} > 0$.

حالا چون $a > 0$ است، b باید منفی باشد. ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ هم مثبت است، حالا چون $a > 0$ است، پس $c > 0$. (با اون یکی

روش هم به دست بیار ببین همین می‌شه.)

مثال و پاسخ

(مشابه تمرین کتاب درسی)

**مثال:** دره‌ای مطابق شکل روبه‌رو با معادله $y = x^2 + 6x - 40$ مدل‌سازی می‌شود.**الف:** مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی دره یعنی A و B را به دست آورید.**ب:** اگر x بر حسب کیلومتر باشد، طول AB را به دست آورید.**پ:** اگر دره را متقارن فرض کنیم، بیشترین عمق دره چه قدر است؟**پاسخ:** الف) نقاط A و B همان صفرهای تابع هستند؛ پس: $x = -10$ و $x = 4$
پس $A(-10, 0)$ و $B(4, 0)$ خواهد بود.**ب:** فاصله دو نقطه A و B برابر 14 km است.**پ:** بیشترین عمق در رأس سهمی اتفاق می‌افتد. طول رأس در وسط صفرهای تابع است؛ پس:

$$x_S = \frac{-10 + 4}{2} = -3$$

با قراردادن x_S در تابع y_S به دست می‌آید:

$$y_S = 9 - 18 - 40 = -49$$

پس بیشترین عمق برابر 49 کیلومتر است.

پله نهم: به دست آوردن تابع از روی صفرها

خُب این همه راجع به صفرهای تابع صحبت کردیم که چی بشود (سؤال معروف شما، آقا این همه درس به چه دردی می‌فوره؟)

از روی صفرهای تابع، می‌توانیم فرم ضابطه تابع را مشخص کنیم. ببینید مثلاً وقتی $x = 2$ ، صفر یک تابع چندجمله‌ای است، با قراردادن $x = 2$ حاصل، صفر می‌شود. پس حتماً عاملی در درون ضابطه وجود داشته است که باعث به وجود آمدن صفر شده است. این عامل $x - 2$ است. به عبارت دیگر در تجزیه آن عامل $x - 2$ وجود داشته است. حالا فرض کنید α و β ریشه‌های تابع درجه دوم هستند. در تجزیه این تابع درجه دوم حتماً $(x - \alpha)(x - \beta)$ وجود دارد. بنابراین ضابطه تابع درجه دوم به صورت $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ بوده است. این فرم سهمی را تجزیه شده می‌گوییم.

مثال و پاسخ

مثال: یکی از صفرهای تابع $y = x^3 + kx^2 + x - 2$ برابر $x = -2$ است. صفرهای دیگر تابع را بیابید.**پاسخ:** اول باید k را به دست آوریم. $x = -2$ صفر تابع است؛ یعنی با جای گذاری آن در تابع، حاصل صفر می‌شود:

$$-8 + 4k - 2 - 2 = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

حالا $x = -2$ صفر تابع است، پس تابع بر $x + 2$ بخش پذیر است. با تقسیم داریم:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 + x - 2 \\
 \underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
 \hline
 x + x - 2 \\
 \underline{-(x + 2)} \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 x + 2 \\
 \hline
 x^2 + x - 1
 \end{array} \right.$$

(تمتاً باید صفر بشه که نشه به پای کار می‌نگه!)

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x + 2)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

صفرهای دیگر

بچه‌ها این روش یکی از روش‌های حل معادله درجه سوم است. اگر بتوانید یکی از ریشه‌ها (صفرهای تابع) را با جستجو (معمولاً بین مقسوم‌علیه‌های عدد ثابت تابع) بیابید، مثل بالا بقیه ریشه‌ها به دست می‌آید.

مثال و پاسخ

مثال: یک سهمی از نقاط $(-1, 0)$ ، $(2, 0)$ و $(3, 3)$ عبور می‌کند. معادله سهمی را بیابید.

پاسخ: می‌توانیم فرم سهمی را به صورت مربع کامل یا استاندارد بگیریم و با جای گذاری نقطه‌ها معادله سهمی را به دست بیاوریم. اما دقت کنید $x = 2, -1$ صفرهای تابع هستند ($y = 0$ می‌شه). پس بهتر است از فرم تجزیه شده استفاده کنیم. معادله سهمی به صورت $y = a(x+1)(x-2)$ است. حالا با جای گذاری نقطه $(3, 3)$ داریم:

$$3 = a(4)(1) \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}(x+1)(x-2)$$

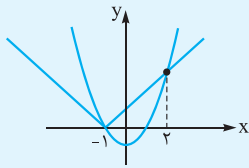
پله دهم: حل معادله $f(x) = g(x)$ به روش هندسی (نموداری)

برای حل معادله $f(x) = g(x)$ باید X هایی را به دست آوریم که با فرار دادن آن‌ها در هر دو تابع f و g ، مقدارهای یکسانی به دست می‌آید. خیلی ساده نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. X های برخورد، همان جواب‌های معادله هستند. توجه کنید این روش علاوه بر این که تعداد جواب‌ها را به ما می‌دهد، خود جواب‌ها را هم در صورتی که رُند باشند، به دست می‌دهد. البته اگر مقدار جواب‌ها رُند نباشد، با این روش فقط می‌توان محدوده جواب‌ها را پیدا کرد.

مثال و پاسخ

مثال: معادله $|x+1| = x^2 - 1$ را با روش هندسی حل کنید.

پاسخ: با توجه به پله پنجم برای رسم $y = |x+1|$ کافی است؛ نمودار قدر مطلق (هفتی شکل) را یک واحد به چپ (آره درست دیدی پپ) ببریم. برای رسم $y = x^2 - 1$ هم نمودار $y = x^2$ (پوشکل) را یک واحد پایین می‌بریم. معادله دو جواب $x = 2$ و $x = -1$ دارد. می‌دانم الان دستتان بالا می‌رود و می‌پرسید از کجا فهمیدیم در $x = 2$ برخورد می‌کنند؟ ببینید اولاً نمودارها را تمیز و دقیق رسم کنید. با این کار حدس می‌زنیم نقطه برخورد $x = 2$ است. حالا $x = 2$ را در هر دو تابع قرار دهید. می‌بینیم مقدارها مساوی است و این یعنی نقطه برخورد.



سؤال‌های امتحانی

A

۴۰- گزینه درست را انتخاب کنید.

(الف) جمع و ضرب ریشه‌های معادله $x^2 + \frac{x}{4} - 3 = 0$ به ترتیب برابر است با: $-\frac{1}{4}$ و -3 $-\frac{1}{4}$ و -3

(ب) جمع و ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - x^2 = 0$ به ترتیب برابر است با: $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ -3 و -2

۴۱- جاهای خالی را با عبارت‌ها یا کلمه‌های مناسب پر کنید.

(الف) $x = -1$ ریشه معادله $4x^2 + ax - 7 = 0$ است. ریشه دیگر است.

(ب) معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $1 \pm \sqrt{2}$ است، به صورت می‌باشد. (نوبتی ۹۴)

۴۲- α و β ریشه‌های هر معادله هستند. عبارت خواسته شده در هر قسمت را به دست آورید.

(الف) $x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = ?$ (نوبتی ۸۸) (ب) $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} + \beta^2 + \frac{1}{\beta} = ?$ (نوبتی ۸۶)

(پ) $x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = ?$ (نوبتی ۸۶) (ت) $x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = ?$ (نوبتی ۸۳)

(ث) $x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = ?$ (نوبتی ۸۴) (ج) $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} = ?$ (نوبتی ۸۵)

(چ) $x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = ?$ (نوبتی ۸۲)

پاسخ نامه تشریحی

۱- الف) جمله‌های ردیف زوج به صورت $\dots, 11, 7, 3, -1$ هستند؛ پس خودشان یک دنباله حسابی با قدرنسبت $+8$ خواهند بود.

ب) $S_1 = 2 = a_1$ و $S_2 = 6 = a_1 + a_2$ است، پس $a_2 = 4$ خواهد بود.

۲- (الف) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n=10} 1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$ (در مجموع ۵۵ سکه)

ب) از نقطه اول به هر کدام از ۹ نقطه دیگر، از نقطه دوم به ۸ نقطه باقی مانده و ... پس در کل داریم:

(در مجموع ۴۵ وتر) $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$

۳- در هر قسمت a_1 و d را به دست آورده و در رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ جای گذاری می‌کنیم:

الف) $-5, -3, -1, \dots \xrightarrow{\substack{a_1 = -5 \\ d = 2}} S_{r_0} = \frac{r_0}{2}(2(-5) + 19(2)) = 280$

ب) $-5, 0, 5, \dots \xrightarrow{\substack{a_1 = -5 \\ d = 5}} S_{r_0} = 10(-10 + 19(5)) = 850$

پ) $a_n = 3n - 1 \Rightarrow 2, 5, 8, \dots \xrightarrow{\substack{a_1 = 2 \\ d = 3}} S_{r_0} = 10(4 + 19(3)) = 610$

ت) $a_n = \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3}{2}, 2, \dots \xrightarrow{\substack{a_1 = \frac{3}{2} \\ d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}}} S_{r_0} = 10(3 + 19(\frac{1}{2})) = 125$

۴- باید ببینیم با جمع کردن چند جمله (یعنی n مجهول) $S_n = 176$ می‌شود.

$\frac{n}{2}(2 + (n-1)(3)) = 176 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n - 1) = 176 \xrightarrow{\times 2} n(3n - 1) = 352$

(طرف اومده معادله بالا رو مل کنه وقت نوبتی تموم شده! دیدم که می‌گم.)

می‌توانیم با روش Δ معادله درجه دوم را حل کنیم اما طولانی خواهد بود. چون n عددی طبیعی است بهتر است با جستجو آن را به دست آوریم:

جمع یازده جمله $\Rightarrow 11(32) = 352 \checkmark \Rightarrow n = 11 \xrightarrow{\text{(کله)}} n = 10 \Rightarrow 10 \times (29) = 290$

۵- باید ببینیم به ازای کدام n ، $S_n > 125$ می‌شود. با استفاده از فرمول S_n داریم:

$\frac{n}{2}(-2 + 3(n-1)) > 125 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n - 5) > 125 \xrightarrow{\times 2} n(3n - 5) > 250 \xrightarrow{\text{(با جستجو برای } n)} n = 10$

$\Rightarrow 10(25) > 250 \Rightarrow$ برقرار نیست $\Rightarrow n \geq 11$

با جمع حداقل یازده جمله، از ۱۲۵ بیشتر می‌شود.

۶- شبیه مسئله قبلی باید $S_n > 300$ باشد:

$\frac{n}{2}(\underbrace{6 + (n-1)(6)}_{6n}) > 300 \Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$

توجه دارید چون n عددی طبیعی است؛ پس $n < -10$ دیگر قابل قبول نیست (و! لا تو حالت کلی از $x^2 > 100$ با ارایکال گیری نتیجه می‌گیریم $|x| > 10$). این هم می‌شه $x > 10$ یا $x < -10$.

۷- اول جمله‌های فارسی را به زبان ریاضی بنویسیم. بعد هم با فرمول S_n و a_n باز می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{r_0} = 3S_{r_1} \Rightarrow \frac{r_0}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{r_1}{2}(2a_1 + 11d) \xrightarrow{\substack{\div 4 \\ \text{وساده سازی}}} \begin{cases} 8a_1 + 4d = 0 \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases} \\ a_{r_0} = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \end{cases} \quad \times (-8) \quad \begin{cases} 8a_1 + 4d = 0 \\ 8a_1 + 16d = 48 \end{cases}$$

$$d = 4 \Rightarrow a_1 = -2$$

۸- مجموع ۵ جمله اول همان $S_5 = 10$ است، پس $S_5 = 10$. مجموع ۵ جمله بعدی یعنی $a_6 + a_7 + \dots + a_{10}$. برای این جمع کافی است جمع جمله‌های اول تا دهم را از جمع جمله‌های اول تا پنجم کم کنیم. پس $S_{10} - S_5 = 35$.

$$\begin{cases} S_5 = 10 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 10 \Rightarrow 5a_1 + 10d = 10 \xrightarrow{\div 5} \begin{cases} a_1 + 2d = 2 \\ 2a_1 + 9d = 9 \end{cases} \\ S_{10} - 10 = 35 \Rightarrow S_{10} = 45 \Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 2 \\ 2a_1 + 9d = 9 \end{cases}$$

$$d = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$S_{50} = 25(0 + 49(1)) = 1225$

پس:

۹- همان جمع جمله‌های اول تا n را به ما می‌دهد. پس: $S_n = 9n$

الف) $n = 10 \Rightarrow S_{10} = 10 \times 39 = 390$

ب) $a_6 + a_7 + \dots + a_{15} = S_{15} - S_5 = 15(59) - 5(19) = 790$

پ) طبق توضیحات پله چهارم:

$$S_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3, S_2 = 14 \Rightarrow a_1 + a_2 = 14 \Rightarrow a_2 = 11 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 8$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)(8) = 8n - 5$$

۱۰- جمله‌های ردیف زوج همان a_2, a_4, \dots, a_{10} هستند (تعدادشون ۵ تا). این‌ها خود یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ هستند، پس مجموع آن‌ها می‌شود:

$$\frac{1}{2}(-8 + 9(6)) = 23$$

جمله‌های ردیف فرد هم همان a_1, a_3, \dots, a_{10} هستند (تعدادشون باز ۵ تا). این‌ها هم دنباله حسابی با قدرنسبت ۶+ هستند پس جمع آن‌ها می‌شود:

$$\frac{1}{2}(-14 + 9(6)) = 20$$

۱۱- دو معادله را به صورت ریاضی می‌نویسیم. می‌توانیم آن‌ها را باز و از حل دستگاه دو معادله دو مجهول، a_1 و d را بیابیم. اما صبر کنید اگر این دو معادله را کم کنیم، به نتیجه خوبی می‌رسیم:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 59 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{10} = 53 \end{cases}$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{10} - a_{10}) = 6 \Rightarrow \underbrace{d + d + \dots + d}_{10d} = 6 \Rightarrow d = 6$$

جمع ۲۰ جمله اول برابر $53 + 59 = 112$ است. با فرمول S_n داریم:

$$S_{20} = 10(2a_1 + 19(6)) = 112 \Rightarrow a_1 = -1$$

۱۲- الف) اولین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶، عدد ۱۰۲ (به ۲ و ۳ می‌فوره) است. مجموع اعداد $102, 108, 114, \dots$ را می‌خواهیم. آخرین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶ نیز عدد ۹۹۶ (باز ۲ و ۳ می‌فوره هلا هی امتحان کن!) است. حالا ببینیم چندتا عدد داریم:

جمله عمومی با $a_1 = 102$ و $d = 6$ را نوشته و جمله n ام را برابر ۹۹۶ قرار می‌دهیم:

$$996 = 102 + (n-1)(6) \Rightarrow n = 150 \Rightarrow S_{150} = \frac{150}{2}(2(102) + 149(6)) = 82350$$

ب) این اعداد $12, 17, 22, \dots$ (دو رقمی‌های به شکل $5k + 2$) هستند. آخرین عدد ۹۷ است. شبیه قبلی اول تعداد این اعداد را به دست می‌آوریم:

$$97 = 12 + (n-1)(5) \Rightarrow n = 18 \Rightarrow S_{18} = 9(2(12) + 17(5)) = 981$$

۱۳- دونده برای انداختن توپ اول $2 \times 2 = 4$ متر، برای توپ دوم $2(2+3) = 10$ متر، برای توپ سوم $2(2+3+3) = 16$ و ... می‌دود. مقدار طی شده برای انداختن توپ n ام، یک دنباله حسابی با $a_1 = 4$ و $d = 6$ می‌شود. حالا:

$$S_n = 374 \Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1)(6)) = \frac{n}{2}(6n + 2) = 3n^2 + n = 374$$

پس ۱۱ توپ را درون سبد انداخته است. $n = 11 \Rightarrow 3(121) + 11 = 374 \checkmark$

۱۴- الف) در هر دنباله هندسی حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی برابر با قدرنسبت است، پس:

$$q = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{\sqrt{2}}{4})^{10})}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{4}(1023) = \frac{1023}{4}$$

ب) $q = 2$ و $a_1 = \frac{1}{4}$ است، پس:

$$S_{10} = \frac{(1)(1-2^{10})}{1-2} = 1023$$

پ) توجه دارید که جمع ده جمله (نه نه جمله!) را می‌خواهیم:

$$\text{الف) } a_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(\frac{1}{4})(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

۱۵-

$$\text{ب) } a_1 = 2, q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(2)(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10})}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4(1-\frac{2^5}{2^{10}})}{2-\sqrt{2}} = \frac{4 \times \frac{31}{32}}{2-\sqrt{2}} = \frac{31}{8(2-\sqrt{2})}$$

پ) $a_1 = 2, q = -3 \Rightarrow S_1 = \frac{(2)(1 - (-3)^1)}{1 - (-3)} = \frac{1 - 3^1}{2}$

ت) $a_n = \frac{2^{n-1}}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{3}, q = 2} S_1 = \frac{\frac{1}{3}(1 - 2^1)}{1 - 2} = \frac{1 \cdot 2^3}{3} = 341$

-۱۶

$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = -126 \Rightarrow \frac{6(1 - (-2)^n)}{3} = -126 \Rightarrow 1 - (-2)^n = -63 \Rightarrow 64 = (-2)^n \Rightarrow n = 6$

$S_n > 500 \Rightarrow \frac{1 - 3^n}{-2} > 500 \Rightarrow \frac{3^n - 1}{2} > 500 \Rightarrow 3^n - 1 > 1000 \Rightarrow 3^n > 1001$

-۱۷

با جستجو $n \geq 7$ (حداقل ۷ جمله)

$$\begin{cases} a_1 + a_r = 1 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 + a_1 q^r = 1 \Rightarrow a_1(1 + q^r) = 1 \\ S_f = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^f)}{1 - q} = 3 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} \frac{a_1(1 - q)(1 + q)(1 + q^r)}{1 - q} = 3 \end{cases}$$

-۱۸

دو رابطه را تقسیم می‌کنیم $\frac{a_1(1 + q)(1 + q^r)}{a_1(1 + q^r)} = 3 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_f = \frac{63}{5}$

-۱۹ مجموع ۳ جمله اول که همان S_3 است. سه جمله دوم a_4, a_5, a_6 است که جمع آن‌ها برابر $S_6 - S_3$ است.

$$\left. \begin{aligned} S_3 = 136 &\Rightarrow \frac{(a_1)(1 - q^3)}{1 - q} = 136 \\ S_6 - S_3 = 17 &\Rightarrow S_6 = 136 + 17 = 153 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = 153 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(با تقسیم دو طرف و ساده کردن)}} \frac{1 - q^6}{1 - q^3} = \frac{153}{136} = \frac{9}{8}$$

مزدوج $\frac{(1 - q^3)(1 + q^3)}{1 - q^3} = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_r = 6 \Rightarrow a_1 q^r = 6 \Rightarrow q^r = 3 \xrightarrow{q > 0} q = \sqrt{3}$ -۲۰ در فرمول S_n نیاز به a_1 و q داریم.

$S_1 = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{2(1 - \sqrt{3}^1)}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 - 3^5)}{1 - \sqrt{3}} = \frac{484}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = 242(\sqrt{3} + 1)$

-۲۱ مساحت مربع برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{1}{4}$ ، در مرحله دوم $\frac{1}{4}$ و ... در مرحله n ام، $(\frac{1}{4})^n$ از مساحت مربع رنگ می‌شود:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + (\frac{1}{4})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{100} \geq (\frac{1}{4})^n \xrightarrow{\text{هر دو طرف مثبتین با معکوس کردن}} 100 \leq 4^n \xrightarrow{\text{بسیار}} 7 \leq n$
یونت نامساوی عوض می‌شود

پس از حداقل ۷ مرحله، ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود.

-۲۲ توجه کردید که سؤال S_6 را نمی‌خواهد. گفته حاصل ضرب.

حاصل ضرب n جمله اول دنباله هندسی 

$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1)(a_1 q)(a_1 q^2) \dots (a_1 q^{n-1}) = (a_1)^n q^{1+2+\dots+n-1} = (a_1)^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$

در دنباله هندسی داده شده $a_1 = 2$ و $q = \sqrt{2}$ است. پس:

ضرب ۲۰ جمله اول $= 2^{20} \times (\sqrt{2})^{\frac{19 \times 20}{2}} = 2^{20} \times (\sqrt{2})^{190} = 2^{20} \times 2^{95} = 2^{115}$

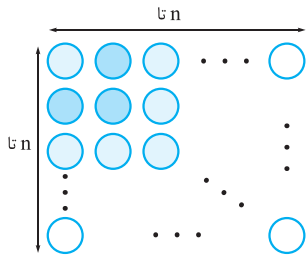
$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

-۲۳

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2}(2 + 2(n-1)) = n^2$$

مجموع n جمله اول دنباله حسابی با $d=2$ و $a_1=1$

۲۴ - روش اول



روش دوم: به شکل روبه‌رو توجه کنید. $n \times n = n^2$ دایره در شکل وجود دارد. حالا دایره‌ها را طور دیگری شمارش می‌کنیم. دایره‌ها را با الگوی مقابل آبی و سیاه می‌کنیم. تعداد آن‌ها می‌شود $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$. چون یک تعداد دایره را شمارش کرده‌ایم دو عبارت به دست آمده، برابرند. پس:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

رابطه می‌گوید مجموع n عدد فرد متوالی که از یک شروع می‌شود برابر تعداد آن‌ها به توان ۲ است.

۲۵ - رابطه اندیسی در دنباله حسابی

رابطه جالبی بین جمله‌های دنباله حسابی به نام رابطه اندیسی وجود دارد. ببینید:

$$(m, n, p, k), m+n=p+k \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_k$$

$$\text{مثلاً } a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4 = a_7 + a_0 \text{ یا } a_8 + a_0 = a_9 + a_1 \text{ (چون جمع اندیس‌های دو طرف برابر است)}$$

البته توجه کنید رابطه‌ای به صورت $a_p + a_k = a_m + a_n$ درست نیست (دوتا این‌ور و دوتا اون‌ور و اندیس‌ها رو نمی‌شده جمع کرد).

$$a_6 + a_6 = a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = \dots = a_7 + a_5$$

طبق رابطه اندیسی داریم:

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 110$$

۲۶ - دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d در نظر می‌گیریم. مجموع 10 جمله اول می‌شود $S_{10} = 5(2a_1 + 9d)$. مجموع 10 جمله اول

$$S'_{10} = 5(2a_1 - 4 + 9(d+3))$$

دنباله جدید با جمله اول $a_1 - 2$ و $d+3$ نیز می‌شود:

$$S'_{10} - S_{10} = 5[2a_1 - 4 + 9(d+3) - 2a_1 - 9d] = 115$$

حالا

$$3, \underbrace{7, \dots, 47}_{10 \text{ واسطه}}$$

۲۷ - طبق نکته‌های پله دوم $d = \frac{47-3}{10+1} = 4$ خواهد بود.

پس واسطه‌ها $7, 11, \dots$ می‌شود. جمع 10 جمله این دنباله برابر است با: $S_{10} = 5(14 + 9(4)) = 250$. توجه دارید که جمع واسطه‌ها را می‌خواهیم پس جمله اول 7 است نه 3 .

۲۸ - مجموع زوایای داخلی n ضلعی محرب

مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محرب از رابطه $180(n-2)$ به دست می‌آید.

$$\frac{5}{2}(2a_1 + 4(6)) = 540 \Rightarrow a_1 = 96$$

مجموع زوایای داخلی 5 ضلعی می‌شود $540 = 180 \times 3$. حالا $S_5 = 540$ است. پس:

۲۹ - اول بگویید ببینیم پرانتز اول جمع 8 جمله است یا 9 جمله؟ درست است جمع نه جمله دنباله هندسی با قدرنسبت x . دومی هم همین‌طور

با قدرنسبت $-x$. پس:

$$A = \frac{1-x^9}{1-x} \times \frac{1-(-x)^9}{1+x} = \frac{(1-x^9)(1+x^9)}{1-x^2} = \frac{1-x^{18}}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = \frac{1-2^9}{1-2} = 511$$

۳۰ -

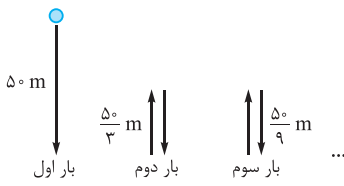
$$3, \underbrace{6, \dots, 1536}_{8 \text{ واسطه}} \downarrow \text{ جمله دهم اول}$$

$$a_1 = a_1 q^8 \Rightarrow 1536 = 3 \times q^8 \Rightarrow q^8 = 512 \Rightarrow q = 2$$

پس کافی است مجموع 8 جمله دنباله هندسی با جمله اول 6 و قدرنسبت 2 را به دست آوریم:

$$S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{6(1-2^8)}{1-2} = \frac{6(-255)}{-1} = 1530$$

-۳۱



$$\text{مجموع} = ۵۰ + ۲\left(\frac{۵۰}{۳}\right) + ۲\left(\frac{۵۰}{۳^2}\right) + \dots + ۲\left(\frac{۵۰}{۳^6}\right) \quad (\text{دقت کردید!})$$

بار اول فقط از بالا به پایین آمده است (۵۰ m). اگر این جمله را جدا کنیم، ۶ جمله بعدی تشکیل دنباله هندسی با $a_1 = \frac{۱۰۰}{۳}$ و $q = \frac{۱}{۳}$ می دهند. پس:

$$\text{مجموع} = ۵۰ + \frac{\frac{۱۰۰}{۳} \left(1 - \left(\frac{۱}{۳}\right)^6\right)}{1 - \frac{۱}{۳}} = ۵۰ + ۵۰ \left(1 - \frac{۱}{۷۲۹}\right) = ۵۰ \left(2 - \frac{۱}{۷۲۹}\right) = ۵۰ \times \frac{۱۴۵۷}{۷۲۹} \approx ۱۰۰ \text{ m}$$

-۳۲ هر چی هست زیر سر پرانتر دوم هست! یک وقت به سرتان نزد، توان -۱ را برای همه بیاورید و بنویسید: $1 + x + x^2 + \dots + x^{3^1}$ (دیدم که می گم!)

$$A = (x^{3^1} - 1) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{3^0}}\right)^{-1} = (x^{3^1} - 1) \left(\frac{x^{3^0} + x^{2 \cdot 3^0} + \dots + 1}{x^{3^0}}\right)^{-1} = \frac{(x^{3^1} - 1) \cdot x^{3^0}}{(x^{3^0} + x^{2 \cdot 3^0} + \dots + 1)}$$

$$= (x - 1) \frac{(x^{3^0} + x^{2 \cdot 3^0} + \dots + 1)}{(x^{3^0} + \dots + 1)} \xrightarrow{x=2} A = 2^{3^0}$$

-۳۳

$$x^n - y^n = y^n \left(\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1\right) = y^n \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \dots + 1\right)$$

$$= \underbrace{y^n}_{\text{همون } y^n} \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(y^{n-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} y + \dots + y^{n-1}\right) = (x - y) (x^{n-1} + x^{n-2} y + \dots + y^{n-1})$$

-۳۴ در پله سوم گفتیم مجموع n جمله اول از $S_n = \frac{n}{4}(a_1 + a_n)$ هم به دست می آید، پس $S_{۱۰۰} = ۵۰(a_1 + a_{۱۰۰})$. از طرفی:

$$(a_1 + a_{۱۰۰}) + (a_2 + a_{۹۹}) + (a_3 + a_{۹۸}) = ۱۵۰$$

اما طبق رابطه اندیسی (زیر پله سؤال ۲۵). $a_1 + a_{۱۰۰} = a_2 + a_{۹۹} = a_3 + a_{۹۸} = \dots$ بنابراین $a_1 + a_{۱۰۰} = ۵۰$ و $S_{۱۰۰} = ۵۰ \times ۵۰ = ۲۵۰۰$ است.

-۳۵ اگر شبیه مسئله ۱۳، بخواهید معادله $S_n = ۹۰۰$ را حل کنید، می بینید که معادله جواب طبیعی ندارد. احتمالاً قبل از این که دونه توپ آخر را درون سبد بیاندازد وقت تمام شده است! باید بزرگترین مقدار n را طوری به دست آوریم که $S_n < ۹۰۰$.

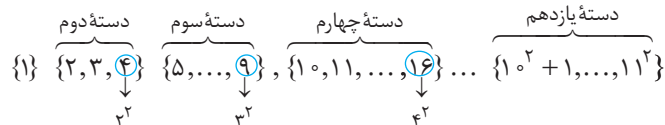
۱۷ توپ را درون سبد انداخته است. $n(3n+1) < ۹۰۰ \Rightarrow$ بیشترین مقدار n = ۱۷

$$S_n = ۲۳۱ \Rightarrow \frac{n}{4} \left(2 + (n-1)(4)\right) = ۲۳۱ \Rightarrow 2n^2 - n = ۲۳۱ \Rightarrow n = ۱۱ \quad -۳۶$$

یعنی جمع یازده جمله برابر ۲۳۱ شده است. پس X جمله یازدهم دنباله حسابی است.

$$x = a_{۱۱} = a_1 + 10d = 1 + 40 = 41$$

-۳۷ الگوی دسته بندی را ببینید:



بنابراین دسته یازدهم {۱۰۱, ۱۰۲, ..., ۱۲۱} است. جمع این بیست و یک جمله را خودتان به دست آورید. (په همه رو من نباید بگم که!)

-۳۸ اختلاف هر دو جمله متوالی برابر d است. پس برطدادن این جمع به تفاضل ایده خوبی برای شروع است. ببینید:

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{d} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}\right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{d} \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right] = \frac{1}{d} \left[\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}\right] = \frac{1}{d} \left(\frac{(n-1)d}{a_1 a_n}\right) = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$