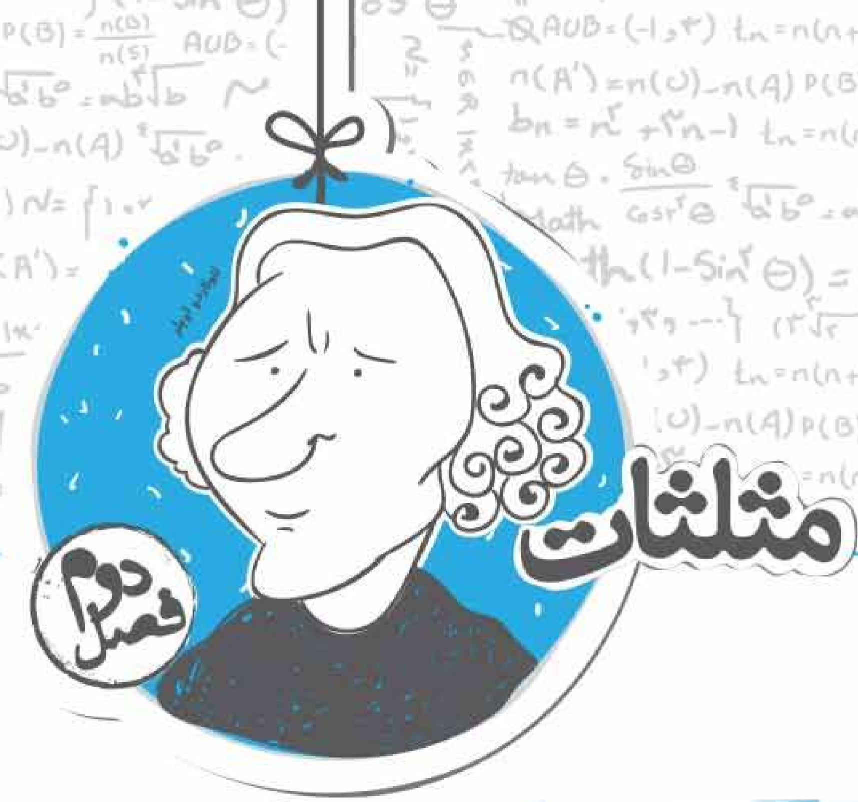
فهرست

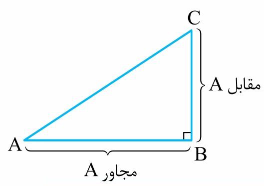


درس ۱ نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات ترکیبی از دو کلمهٔ یونانی به معنی مثلث و اندازه‌گیری است. موضوع این شاخه از ریاضیات، بررسی رابطه‌ای بین زاویه‌ها و ضلع‌های یک مثلث است. یکی از کاربردهای این علم، اندازه‌گیری فاصله به صورت غیرمستقیم *(بدون مترکردن!)* است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید. نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حادهٔ A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



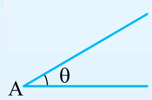
$$\sin\widehat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل به } A}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}\qquad \cos\widehat{A}=\frac{\text{ضلع مجاور به } A}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}$$

$$\tan\widehat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل به } A}{\text{ضلع مجاور به } A}=\frac{BC}{AB}\qquad \cot\widehat{A}=\frac{1}{\tan\widehat{A}}=\frac{\text{ضلع مجاور به } A}{\text{ضلع مقابل به } A}=\frac{AB}{BC}$$

نکته

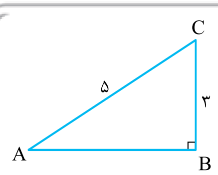
۱) نسبت کتانژانت زاویهٔ A، معکوس نسبت تانژانت زاویهٔ A است.

۲) معمولاً زاویه‌ها را با حروف یونانی α، θ و ... نمایش می‌دهیم، مثلاً در شکل مقابل می‌نویسیم $\sin\theta$ یا $\cos\theta$.



۳) نسبت های مثلثاتی برای زاویهٔ مشخص α (مثلاً $\sin 30^\circ$) ثابت بوده و ربطی به مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم‌شده ندارد.

مثال در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های A و C را به دست آورید.



پاسخ برای به دست آوردن برخی از نسبت‌ها، نیاز به طول ضلع AB داریم؛ بنابراین بهتر است ابتدا با قضیهٔ فیثاغورس آن را به دست آوریم:

$$AB^2+BC^2=AC^2 \Rightarrow AB^2+9=25 \Rightarrow AB=4$$

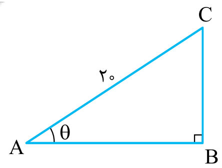
$$\sin\widehat{A}=\frac{\text{مقابل به } A}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5},\ \cos\widehat{A}=\frac{\text{مجاور به } A}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5},\ \tan\widehat{A}=\frac{\text{مقابل به } A}{\text{مجاور به } A}=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4},\ \cot\widehat{A}=\frac{1}{\tan\widehat{A}}=\frac{\text{مجاور به } A}{\text{مقابل به } A}=\frac{4}{3}$$

$$\sin\widehat{C}=\frac{\text{مقابل به } C}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5},\ \cos\widehat{C}=\frac{\text{مجاور به } C}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5},\ \tan\widehat{C}=\frac{\text{مقابل به } C}{\text{مجاور به } C}=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3},\ \cot\widehat{C}=\frac{1}{\tan C}=\frac{\text{مجاور به } C}{\text{مقابل به } C}=\frac{3}{4}$$

مورد داشتیم نوشته $\sin=\frac{3}{5}$ *یا* $\cos=\frac{4}{5}$.

ببین نسبت‌های مثلثاتی به خودی خود معنی ندارن. نسبت‌های مثلثاتی در کنار یه زاویه مثل A، معنی پیدا می‌کنن. به عبارت دیگه $\sin=\frac{3}{5}$ *معنی نداره! سینوس کدوم زاویه* $\frac{3}{5}$ *می‌شه؟ تو عبارت* $\sin\widehat{A}$ *نمی‌تونی* $\sin$ *و* A *رو جدا کنی و اون‌ها در کنار هم، معنی پیدا می‌کنن.*

مثال طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۰ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های حادهٔ آن $\frac{۳}{۵}$ است. محیط مثلث را به دست آورید.



پاسخ در این فصل هر جا لازم شد، یک شکل بکشید. یک مثلث قائم‌الزاویه با وتری به طول ۲۰، رسم کرده و θ را زاویه‌ای می‌گیریم که $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد. حالا:

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{BC}{۲۰} \Rightarrow BC = ۱۲$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع AB را نیز به دست آوریم:

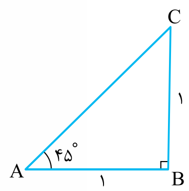
$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲ \Rightarrow AB^۲ + ۱۲^۲ = ۲۰^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow AB = ۱۶$$

بنابراین محیط مثلث می‌شود:

$$\text{محیط مثلث} = AB + BC + AC = ۱۶ + ۱۲ + ۲۰ = ۴۸$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

نسبت‌های زاویهٔ ۴۵°



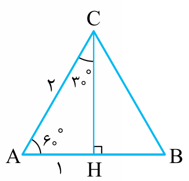
مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های قائمهٔ آن ۱ است، رسم می‌کنیم. چون مثلث متساوی‌الساقین است، $\hat{A} = \hat{C} = ۴۵^\circ$ خواهد بود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس $AC = \sqrt{۲}$ به دست می‌آید.

حالا نسبت‌های زاویهٔ ۴۵° را به دست می‌آوریم:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = ۱ \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{\tan ۴۵^\circ} = ۱$$

نسبت‌های زاویهٔ ۴۵° به دست آمد، آن‌ها را به خوبی به خاطر بسپارید.

نسبت‌های ۳۰° و ۶۰°



مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ رسم می‌کنیم. همهٔ زاویه‌ها برابر ۶۰° است. از زاویهٔ $\hat{C}$، بر خط AB، عمود می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شود (*چون نسبت‌هارو تو مثلث قائم‌الزاویه تعریف کردیم نه هر مثلثی*). چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، ارتفاع رسم‌شده، نیمساز و میانه هم هست، پس $A\hat{C}H = ۳۰^\circ$ و $AH = ۱$ خواهد بود. با استفاده از فیثاغورس نیز $CH = \sqrt{۳}$ به دست می‌آید. حالا نسبت‌های زاویه‌های ۶۰° و ۳۰° به راحتی محاسبه می‌شوند:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \cos ۶۰^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{۱}{۲} \qquad \tan ۶۰^\circ = \frac{CH}{AH} = \sqrt{۳} \qquad \cot ۶۰^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{۱}{۲} \qquad \cos ۳۰^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \cot ۳۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۳۰^\circ} = \sqrt{۳}$$

نکته

جدول مقابل را به‌خاطر بسپارید:

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

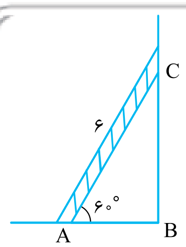
۱) $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$ یا $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ$. در حالت کلی اگر جمع دو زاویه ۹۰° بشود (متمم باشند)، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر می‌شود. مثلاً چون $۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ$ است، $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$ یا $\sin ۲۰^\circ = \cos ۷۰^\circ$.

۲) با توجه این‌که به $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ است، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، همواره نصف وتر است.

مثال نردبانی ۶ متری که با زمین زاویهٔ ۶۰° می‌سازد را به دیواری تکیه داده‌ایم.

الف) فاصلهٔ پای نردبان از دیوار (AB) چه‌قدر است؟

ب) اگر از نردبان بالا برویم، تا چه ارتفاعی از دیوار (BC) بالا رفته‌ایم؟



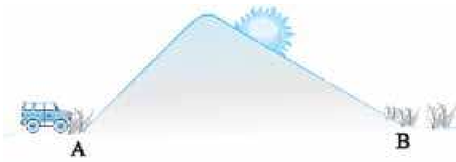
پاسخ **الف** برای به دست آوردن AB، نسبت مثلثاتی مناسب را می‌نویسیم. AB ضلع مجاور به زاویهٔ A است؛ پس از نسبت کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AB}{۶} \Rightarrow AB = ۳$$

ب BC ضلع مقابل به زاویهٔ A است، پس می‌توانیم از سینوس یا تانژانت استفاده کنیم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶} \Rightarrow BC = ۶\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

مثال یک جادهٔ کوهستانی شبیه شکل زیر است. زاویهٔ جادهٔ سربالایی و سرپایینی با سطح زمین به ترتیب ۴۵° و ۳۰° و طول جادهٔ سرپایینی ۱۲ کیلومتر است.

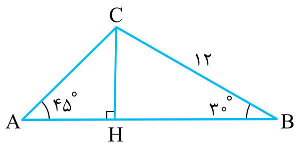


الف) ارتفاع قله را به دست آورید.

ب) طول جادهٔ سربالایی را به دست آورید.

پ) طول تونل احداث‌شده بین دو نقطهٔ B و A چه‌قدر است؟

پاسخ ابتدا یک مثلث به صورت زیر رسم می‌کنیم. برای این‌که مثلث قائم‌الزاویه درست کنیم، از C بر AB عمود می‌کنیم. از مثلث BHC شروع می‌کنیم. چون یک ضلع و یک زاویهٔ آن داده شده است:



الف $\sin ۳۰^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CH}{۱۲} \Rightarrow CH = ۶$ (ارتفاع قله)

ب $\sin ۴۵^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۶\sqrt{۲}$ طول جادهٔ سربالایی

پ $AB = AH + HB$، پس طول AH و BH را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BHC} : \cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۱۲} \Rightarrow BH = ۱۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳} \\ \overset{\Delta}{AHC} : \tan ۴۵^\circ = \frac{CH}{AH} \Rightarrow ۱ = \frac{۶}{AH} \Rightarrow AH = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow AB = ۶ + ۶\sqrt{۳}$$

مثال حاصل $A = \cos^۲ ۴۵^\circ + \frac{\tan ۴۵^\circ}{۲} + ۲\sin ۳۰^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ $۲\sin ۳۰^\circ$ یعنی ابتدا $\sin ۳۰^\circ$ را به دست آورده و در ۲ ضرب می‌کنیم، پس: $۲\sin ۳۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$.

$\frac{\tan ۴۵^\circ}{۲}$ یعنی ابتدا $\tan ۴۵^\circ$ را نوشته و حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، یعنی: $\frac{\tan ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱}{۲}$.

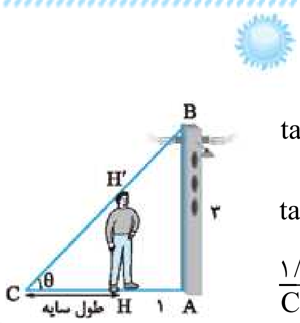
$\cos^۲ ۴۵^\circ$ یعنی $(\cos ۴۵^\circ)^۲$، یعنی حاصل $\cos ۴۵^\circ$ را به توان ۲ می‌رسانیم، یعنی: $\cos^۲ ۴۵^\circ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$، بنابراین:

$$A = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲$$

توجه دارید که توان دوم کجا گذاشته می‌شود. در حالت کلی: $\cos^۲ \theta = (\cos\theta)^۲$.

مثال شخصی با قد ۱/۸ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۱متری از یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر ایستاده است. طول سایهٔ این شخص چه‌قدر است؟

پاسخ وضعیت اولیه شخص به صورت مقابل است:

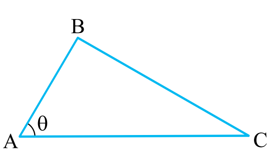


$$\tan\theta = \frac{HH'}{CH} = \frac{۱/۸}{CH}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۱+CH}$$

$$\frac{۱/۸}{CH} = \frac{۳}{۱+CH} \Rightarrow ۱/۸ + ۱/۸CH = ۳CH \Rightarrow ۱/۸ = ۱/۲CH \Rightarrow CH = \frac{۱۸}{۱۲} = \frac{۳}{۲}$$

مساحت مثلث با استفاده از سینوس



مثلث ABC را در نظر بگیرید. می‌دانیم $\frac{BH \times AC}{۲} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} = S_{ABC}$.

از طرفی $\sin\theta = \frac{BH}{AB}$، پس $BH = AB\sin\theta$. با جای‌گذاری در رابطهٔ بالا داریم:

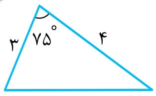
$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} \times (\text{حاصل‌ضرب دو ضلع}) \times (\text{سینوس زاویهٔ بین دو ضلع}) = \frac{۱}{۲}(AB)(AC)\sin\theta$$

$$S_{ABC} = \frac{(AB\sin\theta)(AC)}{۲} = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin\theta$$

نکته

این رابطه وقتی زاویهٔ θ منفرجه باشد هم کار می‌کند، چون جلوتر نشان می‌دهیم دو زاویهٔ مکمل، سینوس‌های برابر دارند.

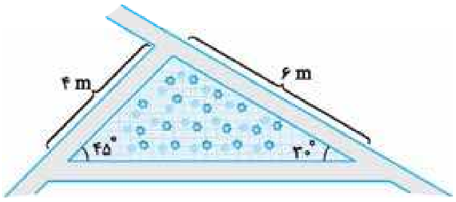
مثال با استفاده از ماشین‌حساب $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$ به دست می‌آید. مساحت مثلث مقابل را بیابید.



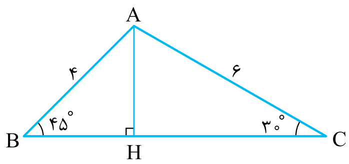
پاسخ

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴\times \sin ۷۵^\circ = ۶\times ۰/۹۶ = ۵/۷۶$$

مثال محوطهٔ گلکاری‌شده‌ای به شکل مثلث، بین چند پیاده‌رو ساخته شده است. مساحت محوطه را به دست آورید. ($\sqrt{۶}$ را تقریباً ۲/۵ بگیرید.)



پاسخ شکل زیر را رسم می‌کنیم. اگر BH و HC را به دست آوریم، طول ضلع BC به دست می‌آید. سپس می‌توانیم از رابطهٔ مساحت استفاده کنیم:



$$\cos ۴۵^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{BH}{۴} \Rightarrow BH=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{HC}{۶} \Rightarrow HC=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

پس: $BC=BH+HC=۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}$. حالا:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times \sin ۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۴\times(۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}(۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})=۴+۳\sqrt{۶}\simeq ۴+۳(۲/۵)=۱۱/۵$$ متر مربع

تذکر $\hat{A}=۱۰۵^\circ$ بنابراین $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)\sin ۱۰۵^\circ$. اگر $\sin ۱۰۵^\circ$ در مسئله داده شده بود، می‌توانستیم از این راه نیز مساحت مثلث را به دست آوریم.

در امتحان چه‌خبر؟

تیپ ۱ یک شکل که معمولاً دارای زوایای معروف است به شما می‌دهند و طول پاره‌خط‌ها را می‌خواهند. نسبت مثلثاتی مناسب را بنویسید و آن‌ها را به دست آورید.

حالا توحل کن سؤال‌های ۱ و ۲ و ۱۰ تا ۲۵ و ۳۴

تیپ ۲ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف را به خاطر داشته باشید. یک عبارت برحسب آن‌ها داده می‌شود و شما باید حاصل آن را به دست آورید.

حالا توحل کن سؤال‌های ۳ تا ۹

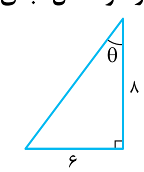
تیپ ۳ مساحت مثلث یا شکلی که چندتا مثلث در آن ایجاد می‌شود، خواسته می‌شود که باید از فرمول مساحت مثلث (که $\sin\theta$ دارد) استفاده کنید.

حالا توحل کن سؤال‌های ۲۶ تا ۳۳

سؤال‌های امتحانی

در هر شکل، جای خالی را تکمیل کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

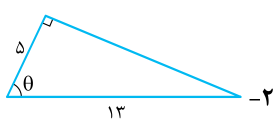
۱-



$\sin\theta=\cdots\cdots$ $\cos\theta=\cdots\cdots$

$\tan\theta=\cdots\cdots$ $\cot\theta=\cdots\cdots$

۲-



$\sin\theta=\cdots\cdots$ $\cos\theta=\cdots\cdots$

$\tan\theta=\cdots\cdots$ $\cot\theta=\cdots\cdots$

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۳- $\sin ۲۰^\circ=\cos ۷۰^\circ$

۴- $-\sin^۲ ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}$

۵- $(\tan ۴۵^\circ)\sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۶- $\sin ۶۰^\circ\cos ۳۰^\circ+\sin ۳۰^\circ\cos ۶۰^\circ$

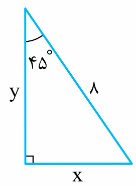
۷- $\tan ۳۰^\circ\cot ۳۰^\circ+\sin^۲ ۳۰^\circ+\cos^۲ ۳۰^\circ$

۸- $۱-۲\sin^۴ ۳۰^\circ+\frac{\cos^۲ ۳۰^\circ}{۲}$

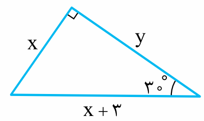
۹- $\frac{\tan ۶۰^\circ-\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۶۰^\circ\tan ۳۰^\circ}$

در هر شکل t، z، y و x را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

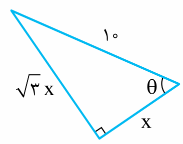
۱۰-



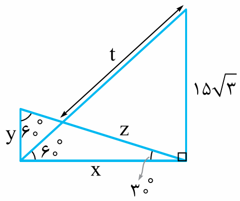
۱۱-



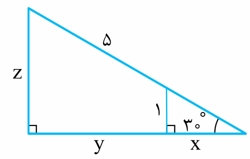
۱۲-



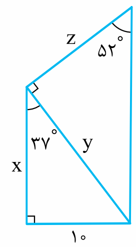
۱۳-



۱۴-



۱۵-

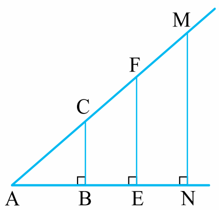


$\sin 37^\circ \simeq 0/6$

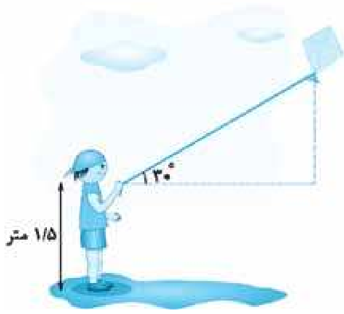
$\cos 37^\circ \simeq 0/8$

$\tan 52^\circ \simeq 1/28$

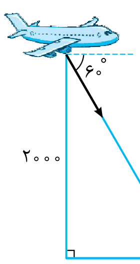
۱۶- در شکل مقابل نشان دهید $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{FE}{AE} = \dfrac{MN}{AN}$. (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱۷- فردی مطابق شکل بادبادکی را به هوا فرستاده است. اگر طول نخ بادبادک ۱۰۰ متر باشد، ارتفاع بادبادک از زمین، چه‌قدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



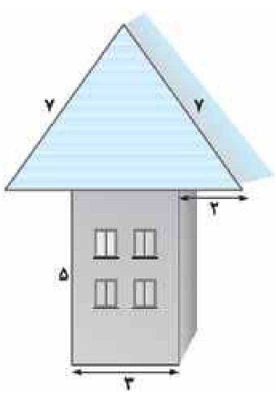
۱۸- هواپیمایی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما با زاویهٔ 60° نسبت به سطح افق، شروع به فرود می‌کند. این هواپیما تا رسیدن به سطح زمین چه مسیری را طی می‌کند؟ ($\sqrt{3} \simeq 1/7$ بگیرید.) (مشابه تمرین کتاب درسی)



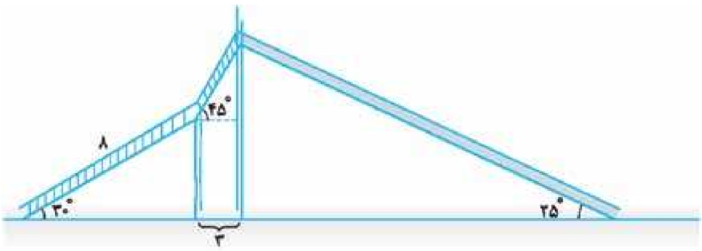
۱۹- خانه‌ای به صورت مقابل ساخته شده است.

الف) زاویه‌ای که شیروانی با سطح افق می‌سازد، چه‌قدر است؟

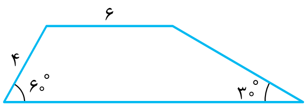
ب) نوک شیروانی چه ارتفاعی از سطح زمین دارد؟



۲۰- برای رسیدن به بالای یک سرسره، باید از دو پلکان به شکل مقابل عبور کرد. طول و ارتفاع سرسره چه‌قدر است؟ ($\sin 25^\circ \simeq 0/42$)

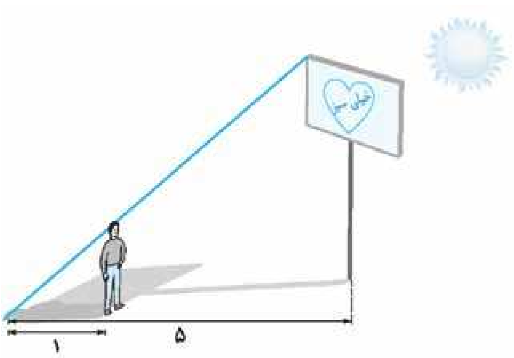


۲۱- محیط و مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به دست آورید.



۲۲- سایهٔ یک تابلوی تبلیغاتی در ساعتی از روز ۵ متر است. فردی با قد 160 cm در مقابل این تابلو در همان ساعت از روز قرار می‌گیرد. اگر طول سایهٔ این فرد ۱ متر باشد، ارتفاع تابلوی تبلیغاتی چه‌قدر است؟

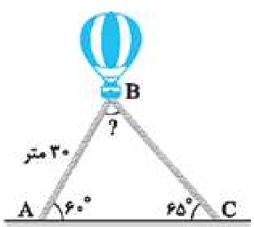
(مشابه تمرین کتاب درسی)



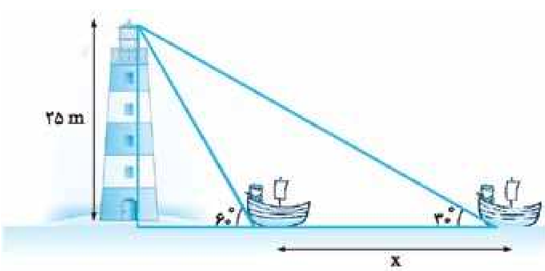
۲۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، اگر $\cos A = \frac{2}{3}$ و $b = 6$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A را مشخص کنید. (b ضلع روبه‌روی زاویهٔ B است.)

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۲۴- یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را به دست آورید. ($\sin 65^\circ = 0/85$)



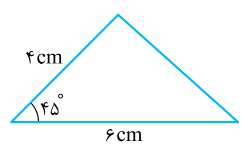
۲۵- قایقی با چنان فاصله‌ای نسبت به فانوس دریایی ایستاده است که با زاویهٔ 60° نوک فانوس را مشاهده می‌کند. این قایق مقداری از فانوس دور می‌شود به طوری که در نقطهٔ جدید، نوک فانوس با زاویهٔ 30° دیده شود. اگر ارتفاع فانوس ۲۵ متر باشد، این قایق حدوداً چند متر به عقب حرکت کرده است؟ ($\sqrt{3} \simeq 1/7$)



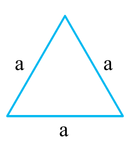
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

مساحت هر شکل را به دست آورید.

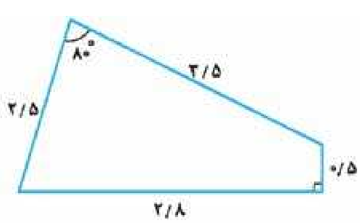
۲۶-



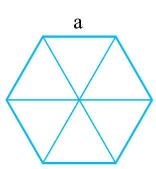
۲۷-



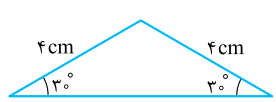
۲۸- $\sin 80^\circ \simeq 0/98$



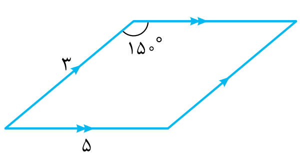
۲۹- شش‌ضلعی منتظم به ضلع a



۳۰-



۳۱-



۳۲- مساحت یک مثلث $5\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع است. اگر دو ضلع آن ۴ و ۵ باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ بین دو ضلع را به دست آورید.
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

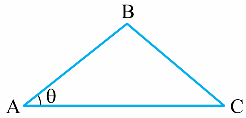
۳۳- مساحت متوازی‌الاضلاعی که طول دو قطر آن ۱۰ و ۱۲ و زاویهٔ بین آن‌ها 60° است را به دست آورید. (راهنمایی: در درس بعدی نشان می‌دهیم، دو زاویهٔ مکمل، سینوس‌های برابر دارند.)

۳۴- در مثلث ABC داریم: $\hat{A}=90^\circ$. با محاسبهٔ دو طرف رابطهٔ $\dfrac{\cos^2 B+\sin^2 C}{1-\sin^2 C}=2\tan^2 C$ نشان دهید تساوی برقرار است.

۳۵- الف) سه مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ 30° رسم کنید و ثابت کنید $\sin 30^\circ$ در هر سه مثلث برابر است.

ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 70° را با استفاده از نقاله و خط‌کش به دست آورید و با اعداد به دست آمده از ماشین‌حساب مقایسه کنید.

۳۶- ثابت کنید $S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin\theta$

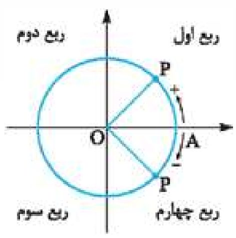


درس ۲ دایرهٔ مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث و برای زاویه‌های حاده معرفی کردیم. برای این‌که بتوانیم، نسبت‌ها را برای هر زاویه‌ای معرفی کنیم، دایرهٔ مثلثاتی را تعریف می‌کنیم.

دایرهٔ مثلثاتی و نمایش زاویه روی آن

دایره‌ای به شعاع یک که مرکز آن روی مبدأ مختصات است را **دایرهٔ مثلثاتی** می‌گوییم.



جهت مثبت و منفی مثلثاتی

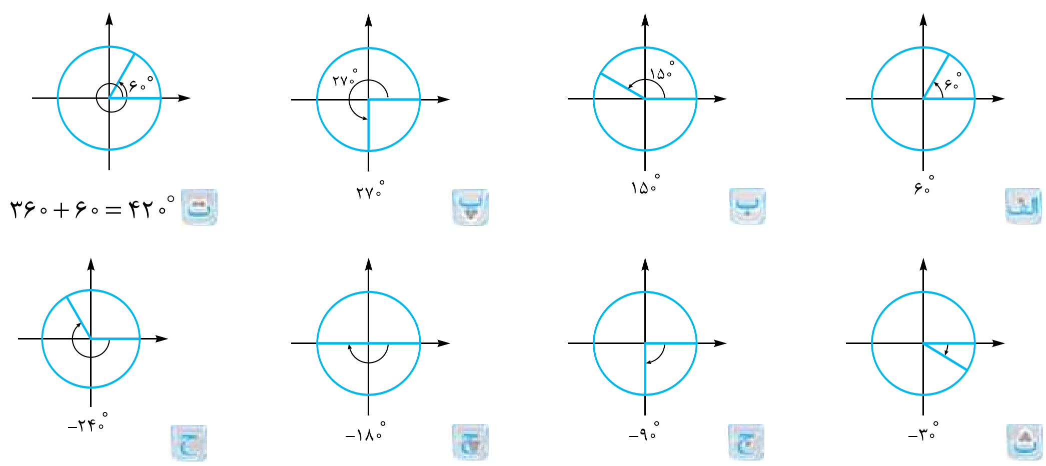
ضلع OA برای زاویه ثابت است. اگر نقطهٔ P در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (از A) شروع به حرکت کند، زاویهٔ مثبت AOP به دست می‌آید. اگر نقطهٔ P در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ منفی به دست خواهد آمد.

مثال هر زاویه را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.

الف) 60° ب) 150° پ) 270° ت) 420°

ث) -30° ج) -90° چ) -180° ح) -240°

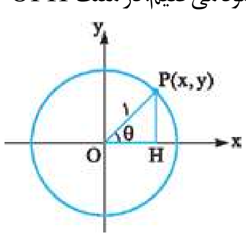
پاسخ



تذکر بعد از یک چرخش 360°، دوباره روی زاویهٔ صفر قرار می‌گیریم، بنابراین نمایش زاویه‌های 0° با 360° روی دایره یکسان است یا نمایش زاویهٔ 60° با $360^\circ+60^\circ=420^\circ$ تفاوتی نمی‌کند.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ

فرض کنید $P(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی بوده و زاویهٔ تشکیل‌شده را θ می‌نامیم. از نقطهٔ P خطی را بر محور x ها عمود می‌کنیم. در مثلث OPH نسبت‌های مثلثاتی را می‌نویسیم:

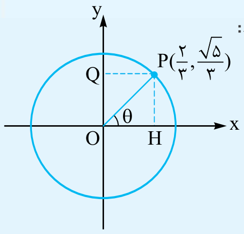


$$\cos\theta=\frac{OH}{OP}=\frac{x}{1}=x \qquad \sin\theta=\frac{PH}{OP}=\frac{y}{1}=y$$

$$\cot\theta=\frac{OH}{PH}=\frac{x}{y} \qquad \tan\theta=\frac{PH}{OH}=\frac{y}{x}$$

نکته

اگر θ در نواحی دیگر دستگاه مختصات هم قرار گیرد، همین تعریف را برای آن‌ها در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر نقطهٔ $P(x,y)$ زاویهٔ θ را به وجود آورد، $\sin\theta$ همان عرض نقطهٔ P، $\cos\theta$ همان طول نقطهٔ P، $\tan\theta$ نسبت عرض به طول نقطهٔ P و $\cot\theta$ عکس نسبت تانژانت خواهد بود. مثلاً اگر نقطهٔ $P(\frac{۲}{۳},\frac{\sqrt{۵}}{۳})$ که روی دایره قرار دارد، زاویهٔ θ را به وجود آورد:



$$\sin\theta = \text{عرض نقطهٔ } P = y = \frac{\sqrt{۵}}{۳} \qquad \cos\theta = \text{طول نقطهٔ } P = \frac{۲}{۳}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

محور کسینوس‌ها

در مثال بالا نقطهٔ H، همان x نقطهٔ P یعنی $\frac{۲}{۳}$ یا $\cos\theta$ است؛ به همین دلیل محور x ها را محور کسینوس‌ها نیز می‌نامند. در واقع اگر نقطهٔ P را روی محور x ها تصویر کنیم، نقطه به دست آمده همان $\cos\theta$ خواهد بود $(H=\cos\theta)$.

محور سینوس‌ها

نقطهٔ Q نیز همان y نقطهٔ P یعنی $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ یا $\sin\theta$ است، به همین دلیل محور y ها را محور سینوس‌ها نیز می‌نامند؛ به عبارت دیگر اگر نقطهٔ P را روی محور y ها تصویر کنیم، نقطه به دست آمده همان $\sin\theta$ خواهد بود $(Q=\sin\theta)$.

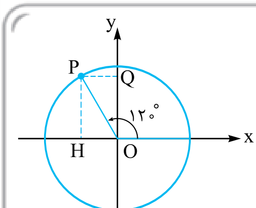
نکته

۱. اگر θ در سایر ربع‌ها قرار گیرد، ممکن است نسبت‌ها منفی هم باشند، چون طول و عرض نقاط، ممکن است منفی شوند.

۲. چون شعاع دایره ۱ است، برای هر زاویهٔ θ، داریم $-۱\le\sin\theta\le۱$ و $-۱\le\cos\theta\le۱$ اما $\tan\theta$ و $\cot\theta$ هر عدد حقیقی می‌توانند باشند.

۳. $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

مثال می‌دانیم نقطهٔ $P(\frac{-۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار داشته و زاویهٔ ایجادشده ۱۲۰° است. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۱۲۰° را به دست آورید.

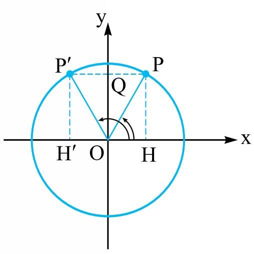


پاسخ

$$\sin ۱۲۰^\circ = y = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \tan ۱۲۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -\sqrt{۳}$$

$$\cos ۱۲۰^\circ = x = \frac{-۱}{۲} \qquad \cot ۱۲۰^\circ = \frac{x}{y} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

توجه دارید که $H=\cos ۱۲۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$ و $Q=\sin ۱۲۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد. سؤال مهمی در این‌جا وجود دارد. آیا بدون داشتن مختصات نقطهٔ P می‌توانستید نسبت‌های زاویهٔ ۱۲۰° را به دست آورید؟



زاویهٔ ۶۰° و ۱۲۰° را در دایرهٔ مثلثاتی رسم می‌کنیم. تصویر هر دو نقطهٔ P و P′ روی محور سینوس‌ها (محور y ها) یکسان است، یعنی $\sin ۱۲۰^\circ=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. اما دو نقطهٔ H و H′ قرینهٔ یکدیگرند. H همان $\cos ۶۰^\circ$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ است، پس $H'=\frac{-۱}{۲}$ و لذا $\cos ۱۲۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$ خواهد بود. به عبارت دیگر نسبت‌های زاویهٔ ۱۲۰° از روی نسبت‌های زاویهٔ ۶۰° به راحتی به دست می‌آید.

نکته

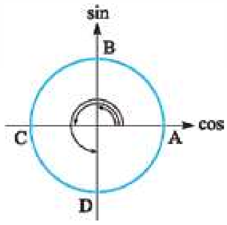
۱. اگر دو زاویه مکمل باشند، تصویر نقطهٔ P روی محور y ها یکسان شده و لذا دو زاویه، سینوس‌های برابر ولی کسینوس‌های قرینه دارند. مثلاً $\sin ۱۳۰^\circ=\sin ۵۰^\circ$ ولی $\cos ۱۳۰^\circ=-\cos ۵۰^\circ$.

۲. دو زاویهٔ مکمل، تانژانت و کتانژانت‌های قرینه دارند. مثلاً $\tan ۱۳۵^\circ=-\tan ۴۵^\circ=-۱$ و $\cot ۱۳۵^\circ=-\cot ۴۵^\circ=-۱$.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۰، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه

۱ اگر $A=(1,0)$ باشد، زاویهٔ 0° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 0^\circ = y_A = 0 \;,\cos 0^\circ = x_A = 1 \;,\tan 0^\circ = \frac{y_A}{x_A} = 0 \;,\cot 0^\circ = \frac{x_A}{y_A} = \frac{1}{0} = \text{تعریف‌نشده}$$



۲ اگر $B=(0,1)$ باشد، زاویهٔ 90° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 90^\circ = y_B = 1 \;,\cos 90^\circ = x_B = 0 \;,\tan 90^\circ = \frac{y_B}{x_B} = \frac{1}{0} = \text{تعریف‌نشده} \;,\cot 90^\circ = \frac{x_B}{y_B} = 0$$

۳ اگر $C=(-1,0)$ باشد، زاویهٔ 180° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 180^\circ = y_C = 0 \;,\cos 180^\circ = x_C = -1 \;,\tan 180^\circ = \frac{y_C}{x_C} = 0 \;,\cot 180^\circ = \frac{x_C}{y_C} = \text{تعریف‌نشده}$$

۴ اگر $D=(0,-1)$ باشد، زاویهٔ 270° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 270^\circ = y_D = -1 \;,\cos 270^\circ = x_D = 0 \;,\tan 270^\circ = \frac{y_D}{x_D} = \text{تعریف‌نشده} \;,\cot 270^\circ = \frac{x_D}{y_D} = 0$$

نکته

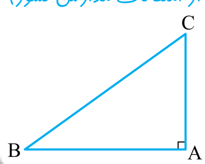
سینوس در نقاط A و C (صفر و 180°) و کسینوس در نقاط B و D (90° و 270°) برابر با صفر می‌شوند. *(سعی کن یاد بگیری و هر موقع خواستی به دست بیار، نه این‌که حفظ کنی!)*

پس جمع‌بندی این شد که:

θ	0°	90°	180°	270°	360° (همان صفر درجه)
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	$\frac{0}{1}=0$	تعریف‌نشده $=\frac{1}{0}$	0	تعریف‌نشده $=\frac{-1}{0}$	0
$\cot\theta$	تعریف‌نشده $=\frac{1}{0}$	0	تعریف‌نشده $=\frac{-1}{0}$	0	تعریف‌نشده

مثال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با زاویهٔ $(A=90^\circ)$، $\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}=?$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



پاسخ $\cos\hat{A}=0$ از طرفی B و C متمم هستند، پس $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ بنابراین داریم:

$$\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}=0+\cos^2\hat{B}+\sin^2\hat{B}=1$$

علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف

علامت سینوس: اگر مختصات نقطه $P(x,y)$ باشد، $\sin\theta=y$، عرض نقاط (y)، در ربع اول و دوم مثبت است و در ربع سوم و چهارم منفی است، پس اگر θ زاویه‌ای در ربع اول یا دوم باشد، $\sin\theta$ عددی مثبت و اگر θ در ربع سوم یا چهارم باشد، $\sin\theta$ عددی منفی است.

علامت کسینوس: طول نقاط (x) در ربع اول و چهارم مثبت و در ربع دوم و سوم منفی است، پس $\cos\theta$ در ربع اول و چهارم مثبت و در ربع دوم و سوم منفی خواهد بود

علامت تانژانت و کتانژانت: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ است، پس از ضرب علامت‌های $\sin\theta$ و $\cos\theta$، علامت $\tan\theta$ به دست می‌آید. $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ است، بنابراین علامت $\cot\theta$ با علامت $\tan\theta$ فرقی نمی‌کند.

	ربع اول $x,y>0$	ربع دوم $x<0$ و $y>0$	ربع سوم $x,y<0$	ربع چهارم $x>0$ و $y<0$
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−
	↓ همه مثبت	↓ فقط سینوس مثبت	↓ تانژانت و کتانژانت	↓ فقط کسینوس مثبت

مثال **علامت نسبت‌های مثلثاتی، زاویهٔ ۱۳۹۵° را مشخص کنید.**

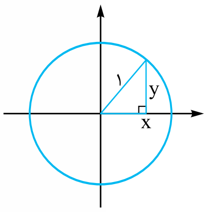
پاسخ هر ۳۶۰° که چرخش کنیم، برمی‌گردیم سر جای اول. با تقسیم ۱۳۹۵ بر ۳۶۰ داریم: $۱۳۹۵ = \overbrace{۳(۳۶۰)}^{\text{۳ دور کامل}} + ۳۱۵$

۳ دور کامل را کنار می‌گذاریم و ۳۱۵° از صفر طی می‌کنیم، پس در ربع چهارم قرار می‌گیریم، پس اگر $\theta = ۱۳۹۵^\circ$ باشد، $\cos\theta > ۰$ و سایر نسبت‌ها منفی هستند.

مثال **θ زاویه‌ای است که $\sin\theta \tan\theta > ۰$ و $\cot\theta < ۰$. θ در کدام ربع قرار دارد؟**

پاسخ $\sin\theta \tan\theta > ۰$ یعنی $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم‌علامت هستند، بنابراین θ می‌تواند در ربع اول یا چهارم باشد. $\cot\theta < ۰$ است، پس θ در ربع دوم یا چهارم است. برای این‌که هر دو شرط برقرار گردد، θ باید در ربع چهارم باشد.

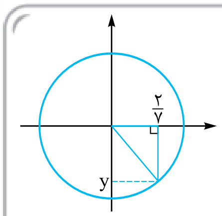
به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی از روی یک نسبت



اگر یکی از نسبت‌ها داده شده باشد، می‌توان سایر نسبت‌ها را از روی آن به دست آورد. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $x^۲ + y^۲ = ۱$. از طرفی $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ است.

حالا با داشتن یکی از نسبت‌های سینوس یا کسینوس و قراردادن در این رابطه و توجه به علامت نسبت‌ها، می‌توان سایر نسبت‌ها را به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال **اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۷}$ و θ در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ و مختصات نقطهٔ P روی دایره را به دست آورید.**



پاسخ

$$\cos\theta = x = \frac{۲}{۷} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۴۹} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۴۵}{۴۹} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{۴۵}{۴۹}} = \pm\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$$

چون θ در ربع چهارم قرار دارد، مقدار منفی برای y قابل قبول است، پس $\sin\theta = y = \frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}$. حالا $P(x,y) = P(\frac{۲}{۷}, \frac{-۳\sqrt{۵}}{۷})$ به دست می‌آید.

از طرفی:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}}{\frac{۲}{۷}} = -\frac{۳}{۲}\sqrt{۵} \quad \text{و} \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{۲}{۷}}{\frac{-۳\sqrt{۵}}{۷}} = -\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}$$

مثال **اگر $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ و θ در ربع سوم باشد، سایر نسبت‌ها را به دست آورید.**

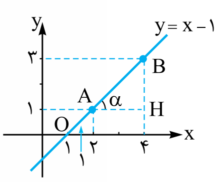
پاسخ $\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{۴}{۳}$، اما برای سایر نسبت‌ها:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{y}{x} \Rightarrow ۳x = ۴y \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}y$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow (\frac{۴}{۳}y)^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۱۶}{۹}y^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۲۵}{۹}y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \pm\frac{۳}{۵}$$

چون θ در ربع سوم است، جواب $y < ۰$ قابل قبول است، پس $y = \sin\theta = -\frac{۳}{۵}$ و $\cos\theta = x = \frac{۴}{۳}(\frac{-۳}{۵}) = \frac{-۴}{۵}$. مختصات نقطهٔ $P(x,y) = (\frac{-۴}{۵}, \frac{-۳}{۵})$، به دست می‌آید.

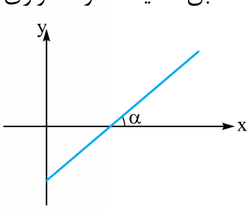
ارتباط شیب خط و تانژانت



نقاط $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را روی خط $y = x - ۱$ در نظر بگیرید. شیب این خط برابر ۱ است، چون $m_{AB} = \frac{۳-۱}{۴-۲}$.

$$\text{شیب خط} = m = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$

$BH = ۳ - ۱$ و $AH = ۴ - ۲$ است. همچنین $\tan\alpha = \frac{BH}{AH}$؛ به عبارت دیگر $\tan\alpha$ با شیب خط AB برابر است. طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{O}_۱ = \alpha$، پس $\alpha = ۴۵^\circ \Leftarrow ۱ = \text{شیب خط} = \tan\alpha$. در حالت کلی داریم:



اگر زاویهٔ بین یک خط و جهت مثبت محور xها برابر α باشد، شیب خط برابر با $\tan\alpha$ خواهد بود. اگر α زاویهٔ منفرجه باشد، شیب خط یا همان $\tan\alpha$ منفی خواهد بود.

$$\text{شیب خط} = m = \tan\alpha$$

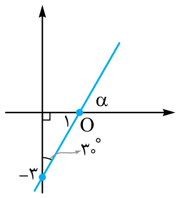
مثال خط $۳y-\sqrt{۳}x=۱$ محور x ها را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

پاسخ ابتدا معادلهٔ خط را استاندارد می‌کنیم تا شیب خط به دست آید:

$$۳y-\sqrt{۳}x=۱ \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{۱}{۳}$$

شیب خط برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و در نتیجه $\alpha=۳۰^\circ$ خواهد بود.

مثال معادلهٔ خط مقابل را بنویسید.



پاسخ $\hat{O}_۱=۶۰^\circ$، پس $\alpha=۶۰^\circ$ به دست می‌آید. $\tan\alpha=\sqrt{۳}=$ شیب خط و عرض از مبدأ آن -۳ است، بنابراین معادلهٔ خط $y=\sqrt{۳}x-۳$ خواهد بود.

در امتحان چه‌خبر؟

تیپ ۱ یک نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی داده می‌شود. از روی مختصات آن (x_P, y_P) سینوس و کسینوس و سایر نسبت‌ها به دست می‌آید. (یادتان هست که $x_P=\cos\theta$ و $y_P=\sin\theta$)

حالا تو حل کن سؤال‌های ۴۷ تا ۵۴

تیپ ۲ یک رابطهٔ مثلثاتی داده می‌شود و علامت θ خواسته می‌شود. با توجه به علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف علامت θ به دست می‌آید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۳۷ تا ۴۶

تیپ ۳ با توجه به برابری شیب خط و $\tan\alpha$ معادلهٔ خط از شما خواسته می‌شود یا این‌که $\tan\alpha$ داده شده و مجهولی در معادلهٔ خط وجود دارد. در همهٔ آن‌ها کافی است $m=\tan\alpha$ قرار دهید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۶۷ تا ۷۷ و ۸۱

تیپ ۴ با توجه به محورهای سینوس و کسینوس مقایسهٔ نسبت‌ها از شما خواسته می‌شود.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۵۵ تا ۶۶ و ۷۸ و ۸۲ و ۸۳

سؤال‌های امتحانی

در جای خالی عبارت‌های مناسب قرار دهید.

۳۷- اگر θ زاویه‌ای در ربع .... و .... باشد، $\cos\theta$ مثبت است.

۳۸- $\cos ۹۰^\circ=\cdots\cdots$ ، $\sin ۲۷۰^\circ=\cdots\cdots$ و $\tan ۱۸۰^\circ=\cdots\cdots$

۳۹- اگر $(-\frac{۱}{۷}, \frac{\sqrt{۴۸}}{۷})$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\sin\theta=\cdots\cdots$ و $\cos\theta=\cdots\cdots$.

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۴۰- $۰\le\sin^۲\theta\le۱$

۴۱- اگر $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$ آن‌گاه $\sin\theta<۰$ و $\cos\theta>۰$

۴۲- اگر $P(x,y)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، $x^۲+y^۲=۰$.

۴۳- زاویه‌های داده‌شده را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.

الف) ۲۲۵°	ب) ۷۷۰°	پ) -۳۰°
ت) -۱۲۰°	ث) -۳۰۰°	ج) -۹۰°

۴۴- مشخص کنید زاویهٔ θ در کدام ربع قرار دارد و سپس علامت نسبت‌های مثلثاتی را برای آن زاویه بیابید.

الف) ۱۲۷°	ب) ۳۱۳°	پ) -۲۴۰°	ت) -۶۲°
ث) ۲۰۰۰°	ج) -۷۳۰°	چ) ۵۴۰°	ح) -۲۷۰°

۴۵- در کدام ربع مثلثاتی $\sin\theta>۰$ و $\tan\theta<۰$ خواهد بود؟

۴۶- در کدام ربع مثلثاتی $\sin\theta\cot\theta>۰$ ولی $\tan\theta<۰$ است؟

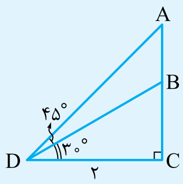
در هر قسمت، نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ به دست آمده را مشخص کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۷- $P(\frac{\sqrt{۵}}{۵}, -\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$ **۴۸- $P(-\frac{۲۴}{۲۵}, \frac{۷}{۲۵})$**

در هر قسمت، با توجه به نسبت داده‌شده و این‌که θ در کدام ربع قرار دارد، سایر نسبت‌ها را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۴۹- (θ در ربع اول) $\cos\theta=\frac{۴}{۵}$ **۵۰- (θ در ربع دوم) $\cos\theta=-۰/۶$**

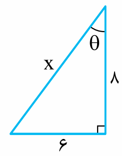
سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل دوم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>آزمون جمع‌بندی فصل دوم</th><th>رشته: تجربی و ریاضی</th><th>مدت امتحان: ۶۰ دقیقه</th><th>Kheilisabz.om</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td colspan="4">جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.
الف) اگر نقطهٔ $(-\frac{۱}{۷},\frac{۴\sqrt{۳}}{۷})$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، .... = $\sin\theta$
ب) اگر $\cos^{۲}\theta\tan\theta > ۰$ و $\sin\theta < ۰$ باشد، θ در ربع .... است.
پ) اگر $\sin\theta\cos\theta = \frac{۱}{۳}$ باشد، .... = $(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}$
ت) زاویهٔ خط $y=\sqrt{۳}x+b$ با جهت مثبت محور xها برابر .... است.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td colspan="4">در شکل مقابل طول AB را بیابید.

</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۳</td><td colspan="4">مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ۱۰ داریم که در آن کسینوس یک زاویهٔ حاده ۰/۸ است. مساحت مثلث را به دست آورید.</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۴</td><td colspan="4">می‌دانیم نقطهٔ $P(\frac{۱}{\sqrt{۷}},\sqrt{\frac{۶}{۷}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ به دست‌آمده را مشخص کنید.</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td colspan="4">حداقل و حداکثر عبارت $۲-۳\sin^{۲}x$ را به دست آورید.</td><td>۰/۵</td></tr>
<tr><td>۶</td><td colspan="4">اگر $۳۰^\circ < \alpha < ۱۲۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{۱-۳m}{۴}$ باشد، حدود تغییرات m را بیابید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۷</td><td colspan="4">اگر x زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم باشد و $\cos x = \frac{-۳}{۵}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۸</td><td colspan="4">معادلهٔ خطی بنویسید که محور عرض‌ها را در ۲ قطع کند و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° بسازد.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۹</td><td colspan="4">مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.
$$\frac{\tan^{۲}x}{۱+\tan^{۲}x}+\frac{\cot^{۲}x}{۱+\cot^{۲}x}$$</td><td>۱</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">جمع نمرات</td><td>۱۰</td></tr>
</table>

فصل دوم: مثلثات

در همهٔ شکل‌ها، ابتدا با قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع مجهول را به دست می‌آوریم. (چون x طول ضلع است، فقط جواب مثبت قبول است.)

۱- $۶^۲+۸^۲=x^۲ \Rightarrow ۱۰۰=x^۲ \Rightarrow x=۱۰$



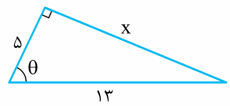
$$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۶}{۱۰}\ ,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۸}{۱۰}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۶}{۸}\ ,\ \cot\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{۸}{۶}$$

۲- $x^۲+۵^۲=۱۳^۲ \Rightarrow x^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \Rightarrow x=۱۲$

$$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۱۲}{۱۳}\ ,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۵}{۱۳}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۱۲}{۵}\ ,\ \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۵}{۱۲}$$



۳- درست است؛ چون ۲۰° و ۷۰° متمم‌اند.

۴- نادرست است؛ $-\sin^۲ ۳۰^\circ=-(\frac{۱}{۲})^۲=-\frac{۱}{۴}$

۵- درست است، $\tan ۴۵^\circ=۱$؛ پس درست است. (هر دو طرف برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.)

۶-
$$\sin ۶۰^\circ\cos ۳۰^\circ+\sin ۳۰^\circ\cos ۶۰^\circ$$
$$=(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$

۷-
$$\tan ۳۰^\circ\cot ۳۰^\circ+\sin^۲ ۳۰^\circ+\cos^۲ ۳۰^\circ$$
$$=\underbrace{(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳})}_{۱}+\underbrace{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}_{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}}=۱+۱=۲$$

۸-
$$۱-۲\sin^۴ ۳۰^\circ+\frac{\cos^۲ ۳۰^\circ}{۲}=۱-۲(\frac{۱}{۲})^۴+\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۲}$$
$$=۱-(۲\times\frac{۱}{۱۶})+\frac{\frac{۳}{۴}}{۲}=۱-\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$$

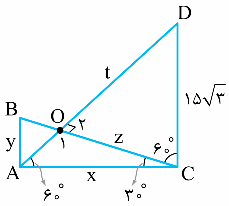
۹-
$$\frac{\tan ۶۰^\circ-\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۶۰^\circ\tan ۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+(\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۳}}{۱+۱}$$
$$=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۰-
$$\sin ۴۵^\circ=\frac{x}{۸}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{x}{۸}\Rightarrow x=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}$$
$$\tan ۴۵^\circ=\frac{x}{y}\Rightarrow ۱=\frac{x}{y}\Rightarrow y=x\Rightarrow y=۴\sqrt{۲}$$

۱۱-
$$\sin ۳۰^\circ=\frac{x}{x+۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۳}\Rightarrow ۲x=x+۳$$
$$\Rightarrow x=۳\ ,\ \cos ۳۰^\circ=\frac{y}{x+۳}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{y}{۶}\Rightarrow y=۶\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

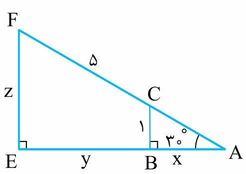
۱۲- ابتدا زاویهٔ θ را به دست می‌آوریم:
$$\tan\theta=\frac{\sqrt{۳}x}{x}=\sqrt{۳}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ\Rightarrow\cos\theta=\frac{x}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{۱۰}\Rightarrow x=۵$$

۱۳-
$$\overset{\Delta}{ACD}:\tan ۶۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}\Rightarrow\cancel{\sqrt{۳}}=\frac{۱۵\cancel{\sqrt{۳}}}{x}\Rightarrow x=۱۵$$
$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan ۳۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{y}{۱۵}\Rightarrow y=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۳}=۵\sqrt{۳}$$
$$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲=۹۰^\circ\xrightarrow{\overset{\Delta}{ODC}}\sin ۶۰^\circ=\frac{t}{۱۵\sqrt{۳}}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{t}{۱۵\sqrt{۳}}\Rightarrow t=\frac{۴۵}{۲}$$



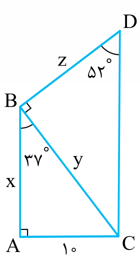
$$\overset{\Delta}{ODC}:\cos ۶۰^\circ=\frac{z}{۱۵\sqrt{۳}}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{z}{۱۵\sqrt{۳}}$$
$$\Rightarrow z=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۴-
$$\overset{\Delta}{ABC}:\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{AC}\Rightarrow AC=۲$$
$$\Rightarrow AF=۷$$
$$\overset{\Delta}{ABC}:\tan ۳۰^\circ=\frac{۱}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{x}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۳}{\sqrt{۳}}=x$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{۳}$$



$$\overset{\Delta}{AEF}:\sin ۳۰^\circ=\frac{z}{AF}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{z}{۷}$$
$$\Rightarrow z=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$
$$\overset{\Delta}{AEF}:\tan ۳۰^\circ=\frac{z}{AE}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۳/۵}{AE}$$
$$\Rightarrow AE=\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۳/۵\sqrt{۳}$$
$$AE=x+y\Rightarrow ۳/۵\sqrt{۳}=y+\sqrt{۳}\Rightarrow ۲/۵\sqrt{۳}=y$$

۱۵-
$$\overset{\Delta}{ABC}:\sin ۳۷^\circ=\frac{۱۰}{y}\Rightarrow ۰/۶=\frac{۱۰}{y}\Rightarrow y=\frac{۱۰}{۰/۶}=\frac{۱۰۰}{۶}=\frac{۵۰}{۳}$$



$$\overset{\Delta}{ABC}:\cos ۳۷^\circ=\frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow ۰/۸=\frac{x}{\frac{۵۰}{۳}}\Rightarrow x=\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۵۰}{۳}=\frac{۴۰}{۳}$$
$$\overset{\Delta}{BDC}:\tan ۵۳^\circ=\frac{y}{z}\Rightarrow ۱/۲۸=\frac{\frac{۵۰}{۳}}{z}$$
$$\Rightarrow z=\frac{\frac{۵۰}{۳}}{۱/۲۸}=\frac{\frac{۵۰}{۳}}{\frac{۱۲۸}{۱۰۰}}=\frac{۵۰۰۰}{۳۸۴}\simeq۱۳$$

۱۶- کافی است ثابت کنیم دو مثلث ABC و AFE متشابه‌اند، بعد تناسب اضلاع را بنویسیم. خب $\hat{A}$ که مشترک است. بعد $\hat{B}=\hat{E}=۹۰^\circ$؛ پس

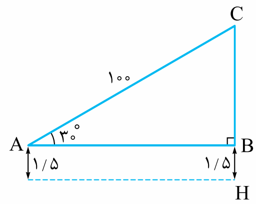
$\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{AEF}$ (ترتیب رأس‌ها رو به صورتی که با هم مساوین بنویس تا نسبت اضلاع رو راحت بنویسی)؛ حالا:

$$\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{AEF}\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{EF}\ \text{یا}\ \frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$$

شبیه همین نسبت $\frac{MN}{AN}$ هم برابر همین می‌شود (اصلاً علت این‌که $\tan\hat{A}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ تعریف می‌کنیم همینه، چون این نسبت $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ ثابت می‌مونه!)

۱۷- ارتفاع بادبادک $=CH=CB+BH=CB+۱/۵$

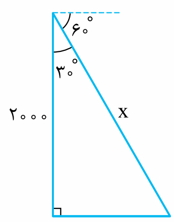
پس کافی است طول CB را به دست آوریم. چون وتر را داریم و ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° را می‌خواهیم، پس:



$$\sin ۳۰^\circ=\frac{CB}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{CB}{۱۰۰}\Rightarrow CB=۵۰$$

$\Rightarrow$ ارتفاع بادبادک $=۵۰+۱/۵=۵۱/۵$

۱۸-

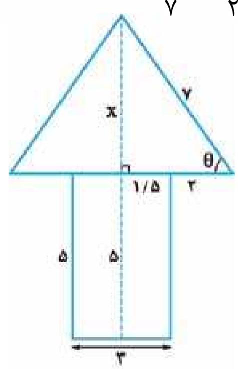


$$\cos ۳۰^\circ=\frac{۲۰۰۰}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲۰۰۰}{x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴۰۰۰}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۴۰۰۰\sqrt{۳}}{۳}\xrightarrow{\sqrt{۳}\simeq۱/۷}x\simeq۲۲۶۷$$

۲۲۶۷ متر را طی می‌کند تا به زمین برسد.

۱۹- الف) $\cos\theta=\frac{۳/۵}{۷}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$

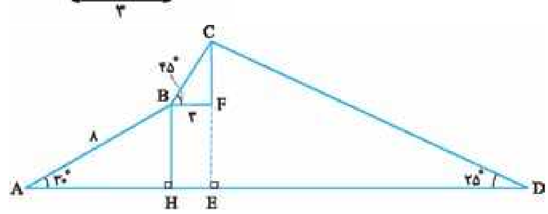


ب) $\sin\theta=\frac{x}{۷}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{x}{۷}$

$$\Rightarrow x=\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}$$

ارتفاع $=\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}+۵$

۲۰-



$$\overset{\Delta}{BCF}:\tan ۴۵^\circ=\frac{CF}{BF}\Rightarrow ۱=\frac{CF}{۳}\Rightarrow CF=۳$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:\sin ۳۰^\circ=\frac{BH}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{BH}{۸}\Rightarrow BH=۴\Rightarrow FE=۴$$

$$\overset{\Delta}{DEC}:\sin ۲۵^\circ=\frac{CE}{CD}\Rightarrow ۰/۴۲=\frac{۷}{CD}$$

$\Rightarrow CD=\frac{۷}{۰/۴۲}=\frac{۱۰۰}{۶}$ طول سرسره

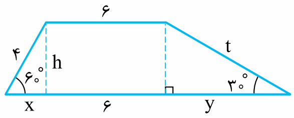
ارتفاع سرسره $=CF+FE=۴+۳=۷$

۲۱-

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{h}{t}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{t}\Rightarrow t=۴\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{h}{۴}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{h}{۴}\Rightarrow h=۲\sqrt{۳}$$

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{y}{t}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{y}{۴\sqrt{۳}}\Rightarrow y=۶$$

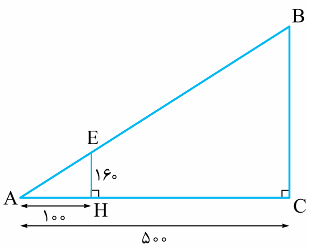


$$\cos ۶۰^\circ=\frac{x}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x=۲$$

محیط ذوزنقه $=۴+۶+t+y+۶+x=۲۴+۴\sqrt{۳}$

مساحت ذوزنقه $=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{مجموع دو قاعده}}{۲}=\frac{(۶+۱۴)(۲\sqrt{۳})}{۲}=۲۰\sqrt{۳}$

۲۲- همهٔ اعداد را به سانتی‌متر تبدیل می‌کنیم:

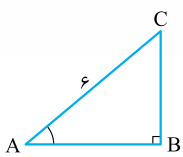


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AEH}:\tan A=\frac{۱۶۰}{۱۰۰}\\ \overset{\Delta}{ABC}:\tan A=\frac{BC}{۵۰۰}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱۶۰}{۱۰۰}=\frac{BC}{۵۰۰}\Rightarrow BC=۸۰۰\,cm=۸\,m$$

۲۳-

$$\cos A=\frac{AB}{۶}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{AB}{۶}\Rightarrow AB=۴$$

$$۴^۲+BC^۲=۶^۲\Rightarrow BC^۲=۲۰\Rightarrow BC=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

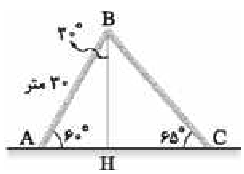


$$\Rightarrow\sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۶}$$

$$\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\cot A=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۲۴- از B عمود رسم می‌کنیم:



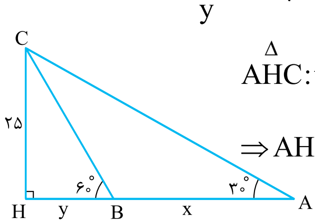
$$\sin ۶۰^\circ=\frac{BH}{۳۰}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۳۰}$$

$$\Rightarrow BH=۱۵\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۵^\circ=\frac{BH}{BC}\Rightarrow\frac{۸۵}{۱۰۰}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{BC}\Rightarrow BC=\frac{۱۰۰\times۱۵\sqrt{۳}}{۸۵}=\frac{۳۰۰\sqrt{۳}}{۱۷}$$

۲۵-

$$\overset{\Delta}{BHC}:\tan ۶۰^\circ=\frac{۲۵}{y}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{۲۵}{y}\Rightarrow y=\frac{۲۵}{\sqrt{۳}}$$



$$\overset{\Delta}{AHC}:\tan ۳۰^\circ=\frac{۲۵}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲۵}{AH}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{۷۵}{\sqrt{۳}}$$

$$AH=x+y\Rightarrow\frac{۷۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۲۵}{\sqrt{۳}}+x$$

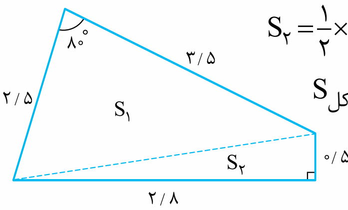
$$\Rightarrow x=\frac{۵۰}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}\xrightarrow{\sqrt{۳}\simeq۱/۷}x\simeq۲۸/۳\,m$$

۲۶- $S=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times \sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times \frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

۲۷- $S=\frac{1}{2}a\times a\times \sin 60^\circ=\frac{1}{2}a^2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۲۸-

$S_1=\frac{1}{2}\times 2/5\times 3/5\times \sin 80^\circ=\frac{1}{2}\times 2/5\times 3/5\times 0/98=4/2875$



$S_2=\frac{1}{2}\times 2/8\times 0/5\times \sin 90^\circ=0/7$

$S_{کل}=S_1+S_2=4/9875\simeq 5$

۲۹- شش‌ضلعی منتظم

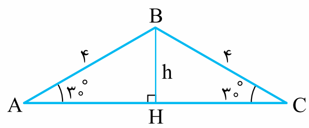
$S=6(\frac{1}{2}\times a\times a\times \sin 60^\circ)$ $\xleftarrow{\text{از ب}}$ از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a درست‌می‌شود.

$=6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۳۰- **روش اول**

$\sin 30^\circ=\frac{h}{4}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{h}{4}\Rightarrow h=2$

$AH^2+h^2=4^2\Rightarrow AH^2+4=16\Rightarrow AH=\sqrt{12}$



چون مثلث متساوی‌الساقین است، ارتفاع، میانه هم هست؛ پس: $AH=HC$ و لذا $AC=2\sqrt{12}$. حالا:

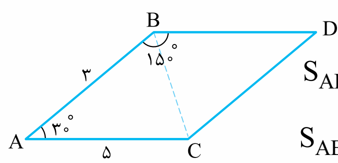
$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{12}\times \frac{1}{2}$

$=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

روش دوم $\hat{B}=120^\circ$. در درس بعد نشان می‌دهیم، دو زاویهٔ مکمل، سینوس‌های برابر دارند، پس $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$ و لذا:

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 16\times \frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

۳۱- زوایای مجاور، در متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند، پس: $\hat{A}=30^\circ$.

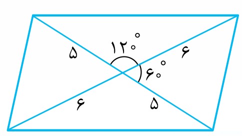


$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times \sin 30^\circ=\frac{15}{4}$

$S_{ABDC}=2S_{ABC}=2\times \frac{15}{4}=\frac{15}{2}$

۳۲- $S=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \sin\theta=5\sqrt{2}\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \theta=45^\circ$

۳۳- در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. دو زاویهٔ 60° و 120° مکمل‌اند، پس سینوس‌های برابر دارند؛ بنابراین هر چهار مثلث دارای مساحت‌های یکسانی هستند:



$S_{متوازی‌الاضلاع}=4(\frac{1}{2}\times 6\times 5\times \sin 60^\circ)$

$=30\sqrt{3}$

نکته

در حالت کلی اگر طول قطرها a و b بوده و زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع می‌شود:

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

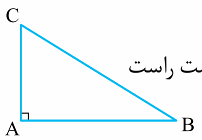
(در این‌جا می‌شد $S=\frac{1}{2}\times 12\times 10\times \sin 60^\circ=30\sqrt{3}$)

۳۴- مثلث ABC که $\hat{A}=90^\circ$ را رسم می‌کنیم:

$\cos^2 B=(\frac{AB}{BC})^2\ ,\ \sin^2 C=(\frac{AB}{BC})^2$

$$\text{سمت چپ}=\frac{(\frac{AB}{BC})^2+(\frac{AB}{BC})^2}{1-(\frac{AB}{BC})^2}=\frac{2\frac{AB^2}{BC^2}}{\frac{BC^2-AB^2}{BC^2}}$$

$$=\frac{2AB^2}{\underbrace{BC^2-AB^2}_{\text{فیثاغورس}}}=\frac{2AB^2}{AC^2}$$

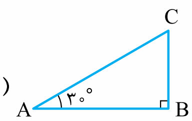


$\text{سمت راست}=2\tan^2 C=2\times (\frac{AB}{AC})^2=2\frac{AB^2}{AC^2}$

بنابراین دو طرف برابرند.

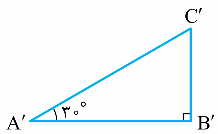
۳۵- **الف)** چند مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف که همهٔ آن‌ها یک زاویهٔ 30° دارند، رسم می‌کنیم:

۱)



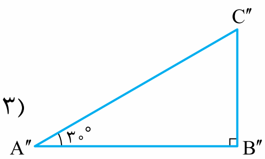
$\sin 30^\circ=\frac{BC}{AC}$

۲)



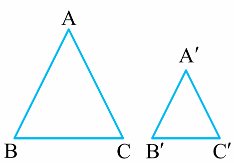
$\sin 30^\circ=\frac{B'C'}{A'C'}$

۳)



$\sin 30^\circ=\frac{B''C''}{A''C''}$

نسبت سینوس زاویهٔ A را در هر ۳ مثلث نوشته‌ایم. درست است که سه مثلث متفاوت‌اند (همنهشت نیستند)، ولی نسبت‌های نوشته‌شده با هم برابر می‌شوند؛ به عبارت دیگر $\sin 30^\circ$ همواره برابر یک عدد ثابت است و این‌که از کدام مثلث برای به دست آوردن آن استفاده کنید، مهم نیست. قبل از این‌که مطلب را اثبات کنیم، باید یک یادآوری روی مفهوم تشابه مثلث‌ها داشته باشیم. یادتان هست که دو مثلث ABC و A′B′C′ را متشابه می‌گوییم هرگاه زوایا، نظیر به نظیر مساوی بوده و اضلاع متناسب باشند، یعنی:



$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$

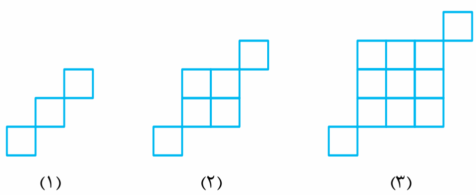
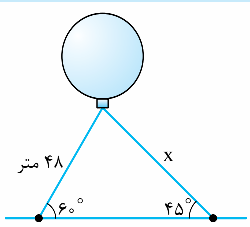
اما برای رسیدن به تشابه دو مثلث، نیازی نیست همهٔ شرط‌های بالا را بررسی کنیم، بلکه اگر دو زاویه از دو مثلث برابر باشند، ثابت می‌شود که دو مثلث متشابه‌اند. حالا مثلث‌های ۱ و ۲ طبق حالت دو زاویه، با هم متشابه‌اند:

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

$$\xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}}\frac{AB}{A'B'}=\underbrace{\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}}\Rightarrow\underbrace{\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}}$$

می‌بینید که نسبت‌ها یکسان شدند.

نمونه امتحان نیم‌سال اول		رشتهٔ ریاضی و تجربی		ریاضی ۱ (دهم)
ردیف	امتحان شمارهٔ ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	جاهای خالی را تکمیل کنید. الف) اگر مجموعهٔ A نامتناهی و مجموعهٔ B متناهی باشد، $A\cap B$ مجموعه‌ای .... است. ب) ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{4}$ برابر .... هستند. پ) کسر $\frac{x^2-1}{x^2-9}$ به ازای اعداد .... تعریف‌نشده است. ت) اگر $\sin\theta\tan\theta<0$ باشد، θ در ربع‌های .... یا .... خواهد بود. ث) اگر در معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$، $a>0$ باشد، رأس سهمی .... نقطهٔ سهمی است. ج) اگر $0<a<1$ باشد، $\sqrt[3]{a}$ .... $\sqrt{a}$ چ) .... $=(\mathbb{W}-\mathbb{N})'$ (مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید.)	۲
۲	اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \lvert x\rvert\ge 2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x+1<4\}$ باشد، الف) مجموعه‌های $A\cup B$، $A\cap B$ و $A-B$ را با بازه‌ها نمایش دهید. ب) اگر مجموعهٔ مرجع برابر $\mathbb{R}$ باشد، B' را به دست آورید.	۱/۵
۳	جملهٔ عمومی الگوی زیر را به دست آورید. آیا این الگو خطی است؟  	۰/۵
۴	الف) در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ دهم برابر ۳۴ و جمله هفدهم برابر ۱۰۴ است. جملهٔ صدم این دنباله را به دست آورید. ب) در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ چهارم و جمله هفتم به ترتیب برابر ۴۰ و ۳۲۰ هستند. جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید.	۱/۵
۵	یک بالن تبلیغاتی با دو طناب به صورت مقابل، به زمین بسته شده است. x را به دست آورید.  	۱
۶	الف) اگر نقطهٔ $P(\frac{-1}{\sqrt{7}},\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. ب) اگر $\sin\theta=\frac{1}{5}$ و θ در ربع دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.	۱/۵
۷	درستی اتحاد مثلثاتی مقابل را نشان دهید. $1-\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\sin\theta$	۱
۸	الف) عدد $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}$ را با توان‌های گویا نوشته و حاصل آن را با یک رادیکال نمایش دهید. ب) از معادلهٔ $\sqrt{3}=\sqrt[x]{3\sqrt{3}}$، x را به دست آورید.	۱/۵
۹	الف) حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید. ۱) $(\frac{x}{2}+2y)^3=$ ۲) $(2a-3)(2a+3)(16a^4+36a^2+81)=$ ب) عبارت $3x^2+11x-4$ را تجزیه کنید.	۱/۵

۱۰	ابتدا مخرج کسر را گویا و سپس حاصل را به صورت یک کسر بنویسید.	$A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$	۱
۱۱	معادله‌های درجه‌دوم را با روش خواسته‌شده حل کنید. الف) $x^2-3x+1=0$ (روش مربع کامل) ب) $3x^2-7x+4=0$ (روش کلی یا Δ)		۱/۵
۱۲	الف) مختصات رأس سهمی $y=x^2-4x+3$ را به دست آورید. ب) سهمی را رسم کنید.		۱
۱۳	عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.	$A=\dfrac{(1+x)^5(x^2-x+3)}{(x^2-6x+5)(x-3)^4}$	۱/۵
۱۴	نامعادلهٔ مقابل را حل کرده و جواب را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.	$\dfrac{x}{x-1}\le\dfrac{x+1}{x-2}$	۱
۱۵	حدود m را چنان تعیین کنید که عبارت $A=x^2-3mx+1$ همواره مثبت باشد.		۱
۱۶	نامعادلهٔ $\left\|\dfrac{x+1}{2}+3\right\|<3$ را حل کنید.		۱
	جمع نمرات		۲۰

۱- الف) $A\cap B\subseteq B$ است و چون B متناهی است، پس $A\cap B$ مجموعه‌ای متناهی است.

ب) $\pm\frac{۱}{۲}$

پ) $x^{۲}-۹=۰$، پس $x^{۲}=۹$ و لذا $x=\pm۳$. پس کسر به ازای اعداد $x=\pm۳$ تعریف‌نشده است.

ت) $\tan\theta$ و $\sin\theta$ غیرهم‌علامت هستند، پس θ در ربع‌های دوم یا سوم خواهد بود.

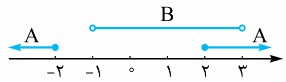
ث) پایین‌ترین

ج) $\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}$

چ) $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}\Rightarrow\{۰\}'=\mathbb{Z}-\{۰\}=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,\dots\}$

۲- الف) $A:|x|\geq ۲\Rightarrow x\geq ۲$ یا $x\leq -۲$

$B:۰<x+۱<۴\xrightarrow{-۱}-۱<x<۳$



$A\cup B=(-\infty,-۲]\cup(-۱,+\infty)$

$A\cap B=[۲,۳)$ و $A-B=(-\infty,-۲]\cup[۳,+\infty)$

ب) $B'=\mathbb{R}-B=\mathbb{R}-(-۱,۳)=(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$

۳- $a_{۱}=۲+۱,\ a_{۲}=۲+۲^{۲},\ a_{۳}=۲+۳^{۲},\dots\Rightarrow a_{n}=۲+n^{۲}$

چون جملهٔ عمومی نسبت به n از درجهٔ دوم است، پس خطی نیست.

۴- الف) $\begin{cases}t_{۱۰}=۳۴\Rightarrow a+۹d=۳۴\\ t_{۱۷}=۱۰۴\Rightarrow a+۱۶d=۱۰۴\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{کم}}۷d=۷۰\Rightarrow d=۱۰\Rightarrow a=-۵۶$

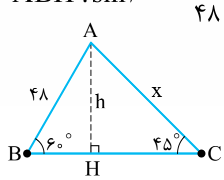
$\Rightarrow t_{n}=a+(n-۱)d\Rightarrow t_{۱۰۰}=-۵۶+۹۹(۱۰)=۹۳۴$

ب) $\begin{cases}t_{۴}=۴۰\Rightarrow ar^{۳}=۴۰\\ t_{۷}=۳۲۰\Rightarrow ar^{۶}=۳۲۰\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{ar^{۶}}{ar^{۳}}=\frac{۳۲۰}{۴۰}\Rightarrow r^{۳}=۸$

$\Rightarrow r=۲\Rightarrow a=۵\Rightarrow t_{n}=ar^{n-۱}=۵\times۲^{n-۱}$

۵- $\overset{\Delta}{ABH}:\sin۶۰^{\circ}=\frac{h}{۴۸}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{h}{۴۸}\Rightarrow h=\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۲}=۲۴\sqrt{۳}$



$\overset{\Delta}{ACH}:\sin۴۵^{\circ}=\frac{h}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲۴\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow x=\frac{۴۸\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$

$=\frac{۴۸\sqrt{۶}}{۲}=۲۴\sqrt{۶}$

۶- الف) $\sin\theta=y_{P}=\frac{-\sqrt{۶}}{\sqrt{۷}}\quad,\quad\cos\theta=x_{P}=\frac{-۱}{\sqrt{۷}}$

$\tan\theta=\frac{y_{P}}{x_{P}}=\frac{-\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۷}}}{\frac{-۱}{\sqrt{۷}}}=\sqrt{۶}\ ,\ \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

ب) $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow\cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta$

$\Rightarrow\cos^{۲}\theta=۱-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}$

چون θ در ربع دوم است، پس $\cos\theta$ منفی بوده و لذا:

$\cos\theta=\frac{-\sqrt{۲۴}}{۵}$.

$\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=-\sqrt{۲۴}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{۱}{۵}}{-\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲۴}}$

۷-

$۱-\frac{\cos^{۲}\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱+\sin\theta-\cos^{۲}\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱+\sin\theta-(۱-\sin^{۲}\theta)}{۱+\sin\theta}$

$=\frac{\overbrace{\sin\theta+\sin^{۲}\theta}^{\sin\theta(۱+\sin\theta)}}{۱+\sin\theta}=\sin\theta$

۸- الف) $\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}=\sqrt[۴]{۵\times۵^{\frac{۱}{۳}}}=\sqrt[۴]{۵^{\frac{۴}{۳}}}=(۵^{\frac{۴}{۳}})^{\frac{۱}{۴}}=۵^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۵}$

ب) $\sqrt[x]{۳\sqrt{۳}}=۳^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\sqrt[x]{۳\times۳^{\frac{۱}{۲}}}=۳^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\sqrt[x]{۳^{\frac{۳}{۲}}}=۳^{\frac{۱}{۲}}$

$\Rightarrow(۳^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{x}}=۳^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\frac{۳}{۲x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۳$

۹- الف)

۱) $(\frac{x}{۲}+۲y)^{۳}=(\frac{x}{۲})^{۳}+۳(\frac{x}{۲})^{۲}(۲y)+۳(\frac{x}{۲})(۲y)^{۲}+(۲y)^{۳}$

$=\frac{x^{۳}}{۸}+\frac{۳}{۲}x^{۲}y+۶xy^{۲}+۸y^{۳}$

۲) $\underbrace{(۲a-۳)(۲a+۳)}_{۴a^{۲}-۹}(۱۶a^{۴}+۳۶a^{۲}+۸۱)=$

$(۴a^{۲})^{۳}-۹^{۳}=۶۴a^{۶}-۷۲۹$

ب)

$۳x^{۲}+۱۱x-۴\xrightarrow[\text{و ضرب آن‌ها ۱۲- باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۱۱}}+۱۲,-۱$

$\Rightarrow۳x^{۲}+۱۱x-۴=۳x^{۲}+۱۲x-x-۴$

$=۳x(x+۴)-(x+۴)=(x+۴)(۳x-۱)$

۱۰-

$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{x-۱}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{x}+۱+\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{x-۱}$

۱۱- الف) $x^{۲}-۳x+۱=۰ \Rightarrow x^{۲}-۳x=-۱$

$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم که می‌شود } \frac{۹}{۴}]{\text{ضریب x را نصف و به توان ۲}} x^{۲}-۳x+\frac{۹}{۴}=-۱+\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۳}{۲})^{۲}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{۳}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۵}}{۲} \\ x-\frac{۳}{۲}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

ب) $a=۳\,,\,b=-۷\,,\,c=۴ \Rightarrow \Delta=b^{۲}-(۴ac)$

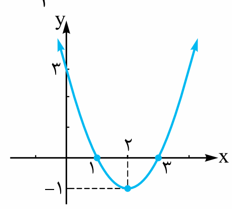
$=۴۹-۴۸=۱>۰ \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

$$\begin{cases} x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۷+۱}{۶}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳} \\ x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۷-۱}{۶}=۱ \end{cases}$$

۱۲- طول راس $=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲}=۲ \Rightarrow y=۲^{۲}-۴(۲)+۳=-۱$

$\Rightarrow$ راس $(۲,-۱)$

x	۱	۲	۳
y	۰	−۱	۰



۱۳- $(۱+x)^{۵}=۰ \Rightarrow ۱+x=۰ \Rightarrow x=-۱$

$x^{۲}-x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۱۲=-۱۱<۰$ ریشه ندارد

$\Rightarrow$ همواره موافق علامت a

$x^{۲}-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۱,۵$

$(x-۳)^{۴}=۰ \Rightarrow x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$

x		−۱		۱		۳		۵	
$(۱+x)^{۵}$	−	۰	+		+		+		+
$x^{۲}-x+۳$	+		+		+		+		+
$x^{۲}-۶x+۵$	+		+	۰	−		−	۰	+
$(x-۳)^{۴}$	+		+		+	۰	+		+
A	−	۰	+	ت.ن	−	ت.ن	−	ت.ن	+

۱۴- $\frac{x}{x-۱}\leq\frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow ۰\leq\frac{x+۱}{x-۲}-\frac{x}{x-۱}=$

$$\frac{(x+۱)(x-۱)-x(x-۲)}{(x-۲)(x-۱)}=\frac{۲x-۱}{(x-۲)(x-۱)}$$

$۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

x		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲	
$۲x-۱$	−	۰	ج+		+		ج +
$x-۲$	−		−		−	۰	+
$x-۱$	−		−	۰	+		+
کسر	−	۰	+	ت.ن	−	ت.ن	+

جواب $=[\frac{۱}{۲},۱)\cup(۲,+\infty)$

۱۵-

$$\begin{cases} \Delta<۰ \Rightarrow ۹m^{۲}-۴<۰ \Rightarrow ۹m^{۲}<۴ \xrightarrow{\sqrt{}} |۳m|<۲ \\ \Rightarrow -۲<۳m<۲ \Rightarrow -\frac{۲}{۳}<m<\frac{۲}{۳} \\ a>۰ \Rightarrow ۱>۰ \text{ همواره برقرار} \end{cases}$$

بنابراین جواب $-\frac{۲}{۳}<m<\frac{۲}{۳}$ خواهد بود.

۱۶- $|\frac{x+۱}{۲}+۳|<۳ \Rightarrow -۳<\frac{x+۱}{۲}+۳<۳ \xrightarrow{-۳}$

$-۶<\frac{x+۱}{۲}<۰ \xrightarrow{\times ۲} -۱۲<x+۱<۰ \xrightarrow{-۱} -۱۳<x<-۱$