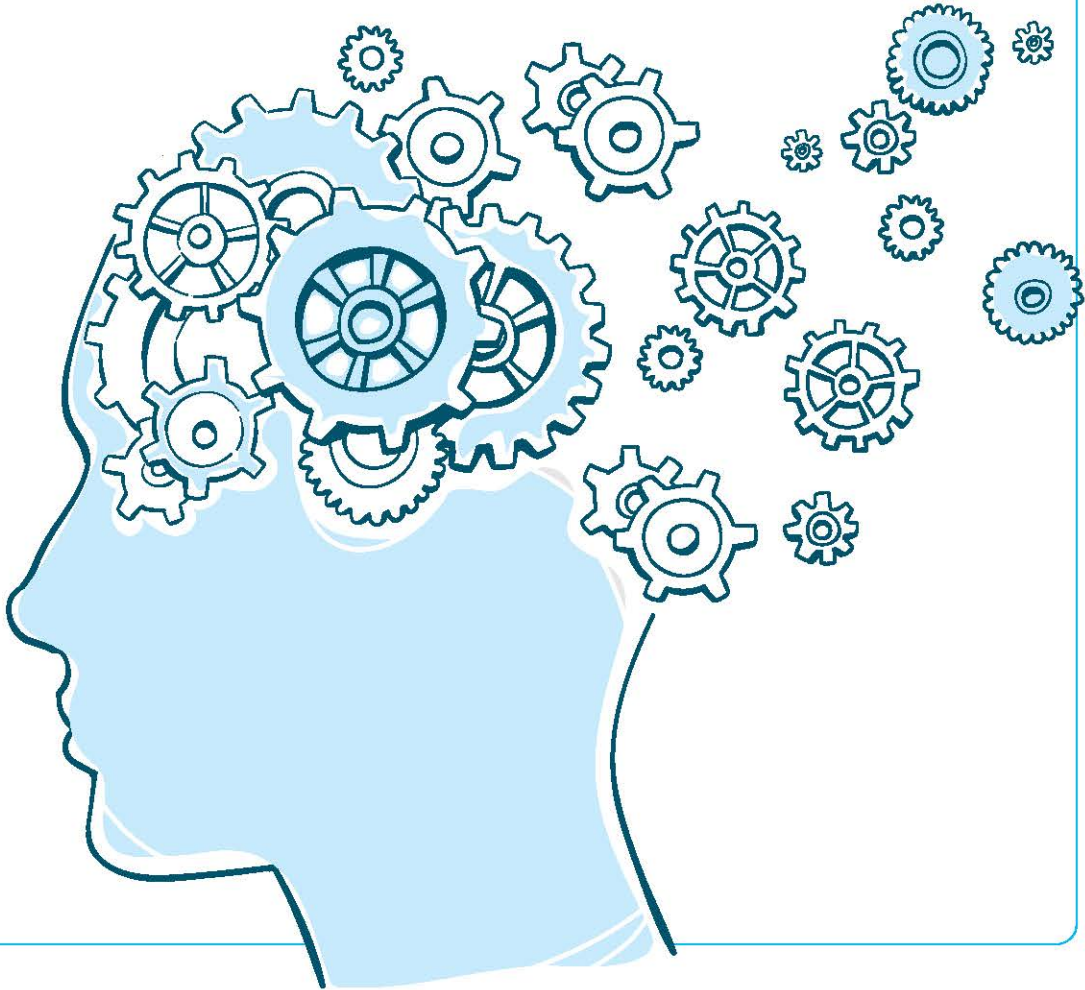


فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل اول

دستاوه

منطق ریاضی و گزاره‌ها

منطق

در لغت به معنای آن‌چه به گفته درآمده است.

در مورد منطق دو تعبیر به‌کار برده می‌شود:

۱) عموماً آن را به معنای **بررسی استدلال‌ها** تعبیر می‌کنند. بر این اساس، کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌ها است. در گذشته، منطق صرفاً شاخه‌ای از فلسفه شمرده می‌شد ولی از میانه سده نوزدهم در ریاضیات و در دهه‌های اخیر در علوم رایانه و از دهه ۱۹۸۰ در علوم شناختی نیز به آن می‌پردازند.

۲) تعبیر دیگری از منطق، روش **درست فکر کردن** است. با تکیه بر این تعبیر، می‌توان ادعا کرد که منطق‌دانان و افرادی که با منطق مانوس‌تر هستند، بسیار کم‌تر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند!

از میان اقسام بسیار زیاد منطق، می‌خواهیم در مورد شاخه‌ای از آن که به ارتباط ریاضی و منطق می‌پردازد، صحبت کنیم. این شاخه، منطق ریاضی^۱ است که اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است. تحقیقات علمی درباره منطق ریاضی، در پی بروز پرسش‌های نوین در بنیان‌های ریاضیات پدید آمد و روش‌ها و نتایج به‌دست آمده از آن، نه تنها در حل مسائل بنیادی مورد استفاده است، بلکه در بسیاری از شاخه‌های دیگر ریاضیات نظیر جبر، هندسه و توپولوژی و حتی علوم کامپیوتر هم مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. یکی از مفاهیم مهم در منطق، گزاره است. به تعاریف زیر خوب دقت کنید:

جمله خبری

جمله‌ای که خبری (وقوع یا عدم وقوع کار یا وجود یا عدم وجود حالتی) را بیان می‌کند، جمله خبری نام دارد. در این جملات، صدق و کذب بودن یا درستی و نادرستی خبرها برای مخاطب، مهم است.

گزاره

در منطق ریاضی، به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

نتیجه جمله‌های غیرخبری، مانند جملات پرسشی، امری، تعجبی یا عاطفی و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش درستی یا نادرستی آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره نیستند. مانند جملات زیر:

۲) بچه‌ها غذا بخورید. ← جمله امری

۱) علی کجا رفت؟ ← جمله پرسشی

۴) خودکار از مداد گران‌تر است. ← جمله خبری که ارزش آن معلوم نیست.

۳) کاش کنکور قبول شوم. ← جمله عاطفی

مثال کدام‌یک از جملات زیر، گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

ب) هر عدد گویا، عددی صحیح است.

الف) افسوس که زمان به سرعت می‌گذرد.

د) فردا هوا آفتابی است؟

ج) قرمه‌سبزی از قیمه خوشمزه‌تر است.

و) خیام، شاعر و ریاضی‌دان است.

ه) شیرینی بخر.

پاسخ الف) جمله عاطفی است، پس گزاره نیست.

ب) یک جمله خبری است که نادرست می‌باشد. پس چون نادرستی آن مشخص است، این جمله، یک گزاره است که ارزش آن نادرست می‌باشد.

ج) یک جمله خبری است ولی نمی‌توانیم تعیین کنیم که دقیقاً درست یا نادرست است، چون بستگی به نظر هر شخص دارد. بنابراین گزاره نیست.

د) یک جمله پرسشی است، پس گزاره نیست.

ه) جمله امری است، در نتیجه گزاره نیست.

و) یک جمله خبری است که درست می‌باشد. بنابراین گزاره‌ای است که ارزش آن درست می‌باشد.

۱- ریشه‌های پیدایش این منطق به کارهای جوزپه پنانو ریاضیدان ایتالیایی و قبل از او لایب نیتز و لامبرت می‌رسد.

طاق گزاره‌ها جمله «سارا شاگرد اول مدرسه است.» گزاره هست؟ به نظر من که نیست، آخه ما نمی‌دونیم که سارا شاگرد اول هست یا نه؟!

پاسخ اشتباه کردی، چون تعریف رو خوب به خاطر نسپردی. گفتیم گزاره، جمله خبری هست که بلافاصله یا نادرست، ولی یا لااخره سارا یا شاگرد اول هست یا نیست. پس آگه شاگرد اول باشه، ارزش جمله درست و آگه نباشه، ارزش جمله نادرست. یکی از این دو حالت قطعاً اتفاق میفته، پس گزاره هست.

طاق گزاره‌ها پس قسمت «ج» مثال قبل رو چرا گفتین گزاره نیستا خب اونم یا خوشمزه‌تر هست یا نیست دیگه!

پاسخ به جمله‌ای که گفتی، بیشتر فکر کن! واقعاً می‌تونی دقیق بگی قرمه خوشمزه‌تره یا قیمة؟ معلومه که نه. من می‌گم قیمة خوشمزه‌تره، تو می‌گی قرمه، یکی دیگه می‌گه هیچ کدوم و ... بنابراین درست یا نادرست بودن این جمله دقیقاً مشخص نیست. ولی درست یا نادرستی جمله «سارا شاگرد اول مدرسه است.» به نظر کسی بستگی نداره، از نمراتش میشه فهمید که بلافاصله هست یا نیست. تعیین گزاره بودن این پور عملیات خبری از همه سخت‌تر هستش که البته آگه خوب بهش دقت و فکر کنی، راحت می‌تونی به جواب برسی.

← جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

به مجموعه‌ی قرارداده‌ها و نمادگذاری‌هایی که در منطق ریاضی (برای گزاره‌ها) به‌کار می‌رود، جبر (حساب) گزاره‌ها گفته می‌شود.

نمادها:

۱) هر گزاره با یکی از حروف کوچک انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نشان داده می‌شود.

۲) ارزش درستی هر گزاره را با حرف «د» (یا «T» یا عدد «۱») و ارزش نادرستی آن را با حرف «ن» (یا «F» یا عدد «۰») نشان می‌دهند.

نکته چون ارزش هر گزاره درست یا نادرست (۲ حالت) است، وقتی n گزاره داریم، تعداد حالت‌های ارزشی n گزاره برابر 2^n است.

نوجه برای نمایش وضعیت ارزشی گزاره‌ها می‌توانیم جدولی به صورت زیر رسم کنیم. به تعداد حالت‌ها در هر قسمت دقت کنید:

← یک گزاره

| p |
|---|
| د |
| ن |

$2^1 = 2 =$ تعداد حالت‌ها

← دو گزاره

| p | q |
|---|---|
| د | د |
| د | ن |
| ن | د |
| ن | ن |

$2^2 = 4 =$ تعداد حالت‌ها

← سه گزاره

| p | q | r |
|---|---|---|
| د | د | د |
| د | د | ن |
| د | ن | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | د | ن |
| ن | ن | د |
| ن | ن | ن |

$2^3 = 8 =$ تعداد حالت‌ها

← نقیض گزاره

نقیض گزاره p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p» یا «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

روش نوشتن نقیض یک گزاره: هر گزاره یک جمله خبری است که دارای فعل می‌باشد. برای نوشتن نقیض آن کافی است فعل جمله را نفی کنیم،

مثلاً نقیض گزاره «۲ زوج است.» می‌شود «۲ زوج نیست.»

| p | $\sim p$ |
|---|----------|
| د | ن |
| ن | د |

نتیجه اگر گزاره p دارای ارزش درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ نادرست و اگر گزاره p دارای ارزش نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ درست است.

نکته نقیض نقیض یک گزاره برابر خود گزاره است.

مثال نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید و ارزش نقیض آن‌ها را مشخص کنید.

الف) عددی منفی است. (ب) مشهد یک شهر زیارتی است.

ج) مربع هر عددی از خود عدد بزرگ‌تر است. (د) هوا برفی است.

هـ) $2^3 < 2^2$ (و) جمع دو عدد فرد، فرد می‌شود.

پاسخ الف) عددی منفی نیست. **ارزش** ← با توجه به مقدار a درست یا نادرست است. چنین نیست که a عددی منفی است.

طاقم گزاره: ما نقیض این گزاره رو به صورت « a عددی مثبت است. » نوشتیم. درستیه؟

پاسخ: نه، کاملاً نادرسته! چون « a عددی منفی نیست » یعنی یا مثبت یا منفی. در صورتی که گزاره « a عددی مثبت است » شامل صفر نمی‌شه. پس دقت کنین، برای نوشتن نقیض به گزاره به همون روشی که گفتیم عمل کنین. یعنی فعل جمله رو منفی کنین یا از جمله «پهین نیست که ...» استفاده کنین.

- (ب) مشهد شهر زیارتی نیست. **ارزش** ← نادرست
چنین نیست که مشهد یک شهر زیارتی است.
- (ج) مربع هر عددی از خود عدد بزرگتر نیست. **ارزش** ← درست
چنین نیست که مربع هر عددی از خود عدد بزرگتر است.

طاقم گزاره: چرا ارزش این گزاره درستیه؟

پاسخ: چون مربع هر عددی همیشه از خود عدد بزرگتر نیست، مثل عدد $\frac{1}{4}$ که مربع اون $\frac{1}{16}$ میشه که از خودش کوچکتره.

- (د) هوا برفی نیست. **ارزش** ← با توجه به وضعیت هوا، درست یا نادرست است.
چنین نیست که هوا برفی است.
- (ه) $3^2 < 3^3$ یعنی عدد ۸ از عدد ۹ بزرگتر است. پس نقیض آن به صورت زیر است:
عدد ۸ از عدد ۹ بزرگتر نیست. **ارزش** ← درست
چنین نیست که عدد ۸ از عدد ۹ بزرگتر است.
- پس اگر بخواهیم نقیض این گزاره را به صورت ریاضی بنویسیم، به شکل $3^2 \geq 3^3$ می‌شود.
- (و) جمع دو عدد فرد، فرد نمی‌شود. **ارزش** ← درست (چون جمع دو عدد فرد، زوج می‌شود).
چنین نیست که جمع دو عدد فرد، فرد می‌شود.

همیشه یاد بماند

تعبیر منطق بررسی استدلال‌ها
روش درست فکر کردن

گزاره: جمله خبری که دقیقاً دارای ارزش درست یا ارزش نادرست است.

p یا q یا r ...
«د» یا «T» یا «۱» «ن» یا «F» یا «۰»
* حالت‌های ارزشی n گزاره برابر 2^n است.

می‌خوانیم نقیض p یا نقیض q یا ... یا چنین نیست که p یا ...
برای نوشتن، فعل گزاره p یا q یا ... را نفی می‌کنیم.

اگر ارزش p یا q یا ... درست باشد، ارزش ($\sim p$) یا ($\sim q$) یا ... نادرست است و برعکس.
ارزش نقیض نقیض یک گزاره ($\sim(\sim p)$) یا ($\sim(\sim q)$) یا ... با ارزش گزاره p یا q یا ... یکسان است.

نقیض گزاره

($\sim p$) یا ($\sim q$)
یا ($\sim r$) یا ...

۱- منطق در لغت به چه معنا است؟

- (۱) بررسی استدلال‌ها
(۲) روش درست فکر کردن
(۳) آن چه به گفته درآمده
(۴) نطق کردن

۲- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) منطق، شاخه‌ای از علوم ریاضی، فلسفه و رایانه است.
(۲) به جمله‌ای که وقوع یا عدم وقوع حالتی را بیان می‌کند، جمله خبری گفته می‌شود.
(۳) به هر جمله خبری، یک گزاره گفته می‌شود.
(۴) به مجموعه فراداده‌ها و نمادگذاری‌هایی که در منطق ریاضی به‌کار می‌رود، حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر، یک گزاره را نشان می‌دهد؟

- (۱) درس عربی از درس ریاضی دشوارتر است.
(۲) فردا باران می‌بارد؟
(۳) بچه‌ها ساکت باشید.
(۴) مقبره حافظ در کرمان است.

۴- چه تعداد از موارد زیر، گزاره است؟

(الف) بوستان یکی از کتاب‌های مولوی است.

(ج) هوای شمال کشور از جنوب کشور، بهتر است.

(ه) چه فیلم زیبایی است.

(۱) صفر (۲) ۱

۵- ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $3^7 = 27 \times (-3)^4$

(۳) $\frac{1}{5^2} > \frac{1}{4^3}$

(ب) هفتهٔ سختی را گذراندی؟

(د) ضرب دو عدد گنگ، عددی گویا است.

(و) در هر مثلث، مجموع دو ضلع از ضلع سوم، بزرگ‌تر است.

(۲) $\sqrt{121}$ عدد اول است.

(۴) عدد ۱۲ دارای ۶ مقسوم‌علیه صحیح است.

۶- ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(۱) میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها، چارک سوم نام دارد.

(۲) نمودار راداری برای ۴ متغیر، رسم می‌شود.

(۳) اگر یک سری از داده‌های آماری را (-۲) برابر کنیم، واریانس آن‌ها ۴ برابر می‌شود.

(۴) وزن یک شخص، متغیر کمی با مقیاس نسبی است.

۷- تعداد حالت‌های ارزشی ۱۰ گزاره چند برابر تعداد حالت‌های ارزشی ۷ گزاره است؟

(۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳) ۴ (۴) ۱۶

۸- تعداد حالت‌های ارزشی m گزاره برابر ۱۲۸ تا است. اگر ۲ تا از گزاره‌ها را حذف کنیم، از تعداد حالت‌های ارزشی، چند تا کم می‌شود؟

(۱) ۳۲ (۲) ۸۴ (۳) ۶۲ (۴) ۹۶

۹- در جدول ارزشی ۴ گزاره، چندبار حرف «د» نوشته می‌شود؟

(۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۰- نقیض گزاره «m عدد نامثبت نیست.» کدام است؟

(۱) m عدد مثبت است.

(۳) m عدد منفی است.

(۲) چنین نیست که m عدد نامثبت است.

(۴) m عدد منفی یا صفر است.

۱۱- نقیض گزاره « $-4 < -3$ » کدام نیست؟

(۱) -3 بزرگ‌تر از -4 است.

(۳) چنین نیست که -3 از -4 کوچک‌تر است.

(۲) -4 کوچک‌تر یا مساوی -3 است.

(۴) -3 از -4 کوچک‌تر نیست.

۱۲- در مورد نقیض گزاره «هر عدد منفی از معکوس خود، کوچک‌تر است.» کدام درست است؟

(۱) دارای ارزش نادرست است.

(۲) به صورت «هر عدد منفی از معکوس خود، بزرگ‌تر است.» بیان می‌شود.

(۳) دارای ارزش درست است.

(۴) به صورت «هر عدد مثبت از معکوس خود، کوچک‌تر است.» بیان می‌شود.

۱۳- اگر نقیض گزاره‌های p و q به ترتیب به صورت « $\sqrt{225}$ عدد اول است.» و « $x = y^2$ ضابطهٔ یک تابع بر حسب متغیر x نیست.» باشد،

ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب کدام است؟

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) نادرست - نادرست

۱۴- اگر ارزش نقیض گزاره «a عددی اول است.» درست باشد، a کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) $\sqrt{81}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{124}{4}$ (۴) $\sqrt{36} - \sqrt{4}$

۱۵- نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر، نادرست است؟ ($x \in \mathbb{Z}$)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

| نقیض گزاره | گزاره |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| $x \in \mathbb{N}$ | الف) $x \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ |
| $x = 0$ | ب) $x + 2x^2 \neq 0$ |
| $x \leq 2$ | ج) $x \geq 3$ |
| $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ | د) $\{x : x > -x\}$ |

دوستان

ترکیب گزاره‌ها (قسمت اول)

گاهی گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که ترکیبی از دو یا چند گزاره است. ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو یا چند گزاره‌ای که از آن تشکیل شده و همچنین نوع رابط به‌کار رفته بین آن‌ها بستگی دارد. به مفاهیم زیر توجه کنید:

گزاره ساده

گزاره‌ای است که تنها یک خبر را اعلام می‌کند و قابل تجزیه (به گزاره‌های دیگر) نیست.

گزاره مرکب

گزاره‌ای است که دربارهٔ بیش از یک خبر، آگاهی می‌دهد و در واقع به گزاره‌ای گفته می‌شود که ترکیبی از چند گزاره ساده است. به‌طور مثال، گزاره «امروز سه‌شنبه است و هوا آفتابی است.» گزاره‌ای مرکب از دو گزاره ساده «امروز سه‌شنبه است.» و «هوا آفتابی است.» می‌باشد.

در این کتاب، ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دوشرطی» انجام می‌شود.

با توجه به نوع رابط بین گزاره‌ها می‌توان ترکیب آن‌ها را به ۴ دسته، تقسیم کرد:

۱- ترکیب عطفی دو گزاره

دو گزاره را می‌توان با قراردادن حرف ربط «و» با هم ترکیب کرد. گزاره حاصل را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم. مانند «شیرین کلاس دوم است و برادرش کلاس پنجم است.» اگر بخواهیم ترکیب عطفی دو گزاره p و q را بنویسیم، به‌جای حرف «و» از نماد « \wedge » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $p \wedge q$ » و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم.

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | ن |

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره: ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره، ارزش درست داشته باشند. بنابراین اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشد، ارزش گزاره « $p \wedge q$ » نادرست است. به جدول مقابل دقت کنید:

مثال ارزش گزاره‌های عطفی زیر را مشخص کنید.

(ب) ۱۳ عددی اول است و ۹ عددی اول است.

(الف) ۱۲ مضرب ۴ است و ۶ مضرب ۴ نیست.

(د) گوسفند، پر دارد و اسب، پشم دارد.

(ج) هر سال ۱۲ ماه دارد و هر ماه ۳۰ روز است.

از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم تا به وضوح، جواب برایتان مشخص شود.

| الف | ترکیب عطفی دو گزاره | ۶ مضرب ۴ نیست. | ۱۲ مضرب ۴ است. |
|-----|---------------------|--------------------|---------------------|
| د | د | د | د |
| ب | ترکیب عطفی | ۹ عددی اول است. | ۱۳ عددی اول است. |
| د | ن | ن | د |
| ج | ترکیب عطفی | هر ماه ۳۰ روز است. | هر سال ۱۲ ماه دارد. |
| د | ن | ن | د |
| د | ترکیب عطفی | اسب، پشم دارد. | گوسفند، پر دارد. |
| د | ن | ن | د |

| p | $\sim p$ | $p \wedge (\sim p)$ |
|-----|----------|---------------------|
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |

نکته ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش همواره نادرست است.

توجه ترکیب عطفی برای بیشتر از دو گزاره هم تعریف می‌شود: $p \wedge q \wedge r \wedge \dots$

۲- ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره را با قراردادن حرف ربط «یا» با هم ترکیب کنیم، گزاره حاصل را ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم. مانند «امروز آسمان آبی است یا هوا برفی است.» اگر بخواهیم ترکیب فصلی دو گزاره p و q را بنویسیم، از نماد « \vee » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $p \vee q$ » و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم.

ارزش ترکیب فصلی دو گزاره: ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی دارای ارزش نادرست است که هر دو گزاره، ارزش نادرست داشته باشند. در نتیجه اگر حداقل یکی از دو گزاره درست باشد، ارزش گزاره « $p \vee q$ » درست است.

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| د | د | د |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | ن |

مثال هر گزاره را طوری بنویسید که ارزش گزاره فصلی حاصل، مطابق جدول زیر باشد.

| ارزش گزاره | گزاره فصلی | ردیف |
|------------|---|------|
| د | سعدی کتاب شاهنامه را نوشته است یا | الف |
| د | $\sqrt{3}$ عددی گنگ است یا | ب |
| ن | $6 < 5$ یا | ج |
| د | هر مستطیلی، مربع است یا | د |

✓ **پاسخ** الف) گزاره «سعدی کتاب شاهنامه را نوشته است» گزاره‌ای نادرست است و می‌دانیم اگر بخواهیم ارزش گزاره فصلی حاصل، درست باشد، باید گزاره دومی که می‌نویسیم، حتماً دارای ارزش درست باشد. پس می‌توانیم گزاره‌ای مانند «زمین گرد است» را با گزاره اول، ترکیب فصلی کنیم. ب) گزاره « $\sqrt{3}$ عددی گنگ است» دارای ارزش درست است. با توجه به ارزش گزاره فصلی حاصل که درست است، می‌توانیم گزاره‌ای دارای ارزش درست یا نادرست را با گزاره اول، ترکیب فصلی کنیم که در هر صورت، ارزش گزاره فصلی درست می‌شود. مانند گزاره «۲ عدد اول نیست» که دارای ارزش نادرست است یا گزاره‌ای با ارزش درست، مانند «دماوند بلندترین کوه ایران است.» ج) گزاره « $6 < 5$ » دارای ارزش نادرست است و ارزش گزاره فصلی حاصلی هم نادرست می‌باشد. پس باید گزاره دوم هم دارای ارزش نادرست باشد. مانند « $1 = 5$ ».

د) ارزش گزاره «هر مستطیلی، مربع است» نادرست است و چون ارزش گزاره فصلی حاصل درست است، گزاره دوم باید دارای ارزش درست باشد. مثلاً می‌توانیم گزاره درست «ترکیب رنگ قرمز و آبی، بنفش می‌شود.» را بنویسیم.

| p | $\sim p$ | $p \vee (\sim p)$ |
|---|----------|-------------------|
| د | ن | د |
| ن | د | د |

🔍 **نکته** ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش، همواره درست است.

🔍 **توجه** ترکیب فصلی برای بیشتر از دو گزاره هم تعریف می‌شود: $p \vee q \vee r \vee \dots$

← ۳- ترکیب شرطی دو گزاره

دو گزاره را می‌توان به صورت «شرطی» با هم ترکیب کرد و گزاره حاصل را ترکیب شرطی دو گزاره می‌نامیم. مانند «اگر من خوب درس بخوانم، آن‌گاه نمره خوب خواهم گرفت.»

اگر بخواهیم از گزاره p، گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « \Rightarrow » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $p \Rightarrow q$ » و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(۱) اگر p، آن‌گاه q (۲) p نتیجه می‌دهد q را (۳) q از p نتیجه می‌شود.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

مقدم و تالی: در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به p مقدم و به q تالی می‌گوییم.

ارزش ترکیب شرطی دو گزاره: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم، یعنی p درست بوده ولی تالی، یعنی q نادرست باشد. در واقع زمانی که از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه می‌شود.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

ارزش گزاره شرطی به انتفای مقدم: وقتی ارزش مقدم، یعنی p در یک گزاره شرطی، نادرست باشد، همواره « $p \Rightarrow q$ » دارای ارزش درست است و تالی، یعنی q چه درست باشد، چه نادرست، تأثیری در ارزش ترکیب شرطی ندارد. در این دو حالت، گزاره شرطی به انتفای مقدم، دارای ارزش درست است.

تادم اجزاء: ما نفهمیدیم این آخری چی شد؟ همیشه بیشتر توضیح بدید.

✓ **پاسخ** بله؛ چرا همیشه! ببین آگه ما جمله مقدم یعنی جمله‌ای که بعد از «اگر» میاد رو گزاره‌ای نادرست بگیریم، مثل «روز قبل از شنبه، یکشنبه باشد.» اون وقت جمله بعد از «آن‌گاه» رو هر چی بگیریم، هر جمله‌ای، حالا می‌فواد درست باشه یا نادرست، مثل گزاره درست «روز بعد از یکشنبه، دوشنبه است.» یا گزاره نادرست «روز بعد از یکشنبه، سه‌شنبه است.» تو ارزش گزاره شرطی حاصل، تأثیری نداره، ارزش گزاره شرطی حاصل، همیشه درسته. ببین: «اگر روز قبل از شنبه، یکشنبه باشد، آن‌گاه روز بعد از یکشنبه، دوشنبه است.» که این یه گزاره همیشه درسته.

مثال ارزش گزاره‌های زیر را با توجه به ارزش گزاره‌های p ، q و r مشخص کنید.

الف) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ در صورتی که گزاره p ، نادرست و گزاره‌های q و r ، درست باشند.

ب) $(p \vee r) \Rightarrow (\sim q)$ در صورتی که p ، گزاره‌ای دلخواه، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای درست باشد.

ج) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ در صورتی که گزاره‌های p و r نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد.

پاسخ الف) گزاره‌ای درست و p گزاره‌ای نادرست است، پس ارزش گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ نادرست می‌شود. از طرفی r گزاره‌ای درست است، در نتیجه ترکیب عطفی گزاره‌ای نادرست با گزاره‌ای درست، گزاره‌ای نادرست می‌شود. یعنی ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ نادرست است.

ب) r گزاره‌ای درست است، پس p چه درست و چه نادرست باشد، ارزش گزاره فصلی $p \vee r$ درست است. از طرفی q گزاره‌ای نادرست است، پس نقیض آن درست می‌باشد. حال از یک گزاره درست، گزاره درست نتیجه شده، پس ارزش گزاره $(p \vee r) \Rightarrow (\sim q)$ درست است.

ج) r گزاره‌ای نادرست است، پس q چه درست باشد و چه نادرست، ارزش گزاره $r \Rightarrow q$ به انتقای مقدم، درست می‌باشد. حال از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه شده، پس ارزش گزاره $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ نادرست می‌شود.

نتیجه

۱) در یک گزاره شرطی، اگر مقدم نادرست باشد (تالی چه درست و چه نادرست)، ارزش گزاره شرطی درست است.

۲) در یک گزاره شرطی، اگر تالی درست باشد (مقدم چه درست و چه نادرست)، ارزش گزاره شرطی درست است.

۳) «همیشه یادم بمونه» مربوط به این درسنامه با درسنامه بعدی، با هم آورده شده است.

۱۶- ارزش گزاره‌های «الف» و «ب» به ترتیب کدام است؟

الف) تهران، پایتخت ایران است و علم‌کوه بلندترین قله ایران است.

ب) پل خواجه در خوزستان است یا مقبره خیام در همدان است.

۱) نادرست - نادرست ۲) نادرست - درست ۳) درست - نادرست ۴) درست - درست

۱۷- ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

۱) $(4 \leq (-2)^2) \wedge (-\sqrt{2} > -\sqrt{3})$

۲) $(-(-3)^2 < 0) \vee (-\frac{1}{p} \notin \mathbb{R})$

۳) $(|\sqrt{25}| = \sqrt{625}) \vee (\mathbb{W} \subseteq \mathbb{N})$

۴) $((\sqrt{y})^2 \in \mathbb{Q}^c) \wedge (2^0 = 0)$

۱۸- گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ در چه صورتی نادرست است؟

۱) وقتی p درست و q نادرست باشد.

۲) وقتی q نادرست باشد.

۳) وقتی p و q نادرست باشند.

۴) وقتی p نادرست باشد.

۱۹- اگر ارزش گزاره p ، نادرست و ارزش گزاره q ، درست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های $(p \vee q)$ و $(p \wedge (\sim q))$ به ترتیب کدام است؟

۱) درست - نادرست ۲) درست - درست ۳) نادرست - نادرست ۴) نادرست - درست

۲۰- ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (\sim(p \wedge q))$ کدام است؟

۱) همواره درست

۲) فقط اگر p نادرست باشد، نادرست است.

۳) همواره نادرست

۴) بستگی به ارزش p و q دارد.

۲۱- اگر نقیض گزاره‌های p و q دارای ارزش درست و گزاره r دارای ارزش نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های $(p \wedge q) \vee r$ و $(\sim(p \vee r)) \wedge (\sim q)$ به ترتیب کدام است؟

۱) درست - درست ۲) درست - نادرست ۳) نادرست - درست ۴) نادرست - نادرست

۲۲- اگر گزاره‌های نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره، همواره نادرست است؟

۱) $(p \wedge q)$

۲) $(\sim p) \vee q$

۳) $((\sim p) \wedge p) \vee q$

۴) $(q \vee (\sim q)) \wedge p$

۲۳- اگر ترکیب عطفی گزاره p با گزاره «میانه، همان چارک دوم داده‌ها است.» دارای ارزش درست باشد، گزاره p کدام می‌تواند باشد؟

۱) الفبای فارسی دارای ۲۸ حرف است.

۲) توان دوم هر عدد از خود عدد بزرگ‌تر است.

۳) متغیرها را به دو مقیاس کیفی و کمی تقسیم می‌کنند.

۴) $X^2 + Y^2 = 0$ ضابطه یک تابع است.

۲۴- ارزش گزاره $p \vee q \Rightarrow p$ در چه صورتی به انتقای مقدم، درست است؟

۱) p و q هر دو درست ۲) p نادرست و q درست ۳) p درست و q نادرست ۴) p و q هر دو نادرست

۲۵- ارزش گزاره‌های (الف) و (ب) به ترتیب کدام است؟

(الف) اگر سعدی شاعر شاهنامه است، آن‌گاه مولوی شاعر بوستان است.

(ب) اگر مقبره بوعلی در همدان است، آن‌گاه مقبره خیام در تبریز است.

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) نادرست - نادرست

۲۶- ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ در چند حالت، درست است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۷- ارزش کدام گزاره نادرست است؟

(۱) اگر ۴۵ عدد اول است، آن‌گاه ۲۸۹ عدد مربع کامل است.

(۲) اگر ۱۴ مضرب ۴ است، آن‌گاه $-4 = (-2)^2$.

(۳) اگر $-4 < -5$ است، آن‌گاه $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ نیست.

(۴) اگر $3 = 3 - 1 \times 6$ است، آن‌گاه ۹۱ عدد مرکب است.

۲۸- اگر گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، آن‌گاه ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)$ کدام است؟

(۱) درست (۲) به ارزش q بستگی دارد. (۳) نادرست (۴) به ارزش r بستگی دارد.

۲۹- ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(الف) اگر ۲۵ درصد داده‌ها کم‌تر از چارک اول است، آن‌گاه ۷۵ درصد داده‌ها بیشتر از چارک سوم است.

(ب) اگر رنگ چشم، متغیر کمی است، آن‌گاه نمره درس ریاضی، متغیر کیفی است.

(ج) اگر میانگین، معیار گرایش به مرکز است، آن‌گاه واریانس معیار پراکندگی است.

(د) اگر نمودار دایره‌ای برای دو متغیر است، آن‌گاه نمودار پراکنش نگاهت هم برای دو متغیر است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۰- اگر گزاره‌ای نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه ارزش کدام گزاره همواره نادرست است؟

(۱) $p \Rightarrow \sim p$ (۲) $\sim q \Rightarrow p$ (۳) $\sim p \Rightarrow p$ (۴) $q \Rightarrow \sim p$

۳۱- اگر گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی نادرست باشند، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(۱) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (۲) $\sim p \Rightarrow (q \vee r)$ (۳) $q \wedge (p \Rightarrow r)$ (۴) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

۳۲- اگر گزاره‌ای نادرست و ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ هم نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های q و r به ترتیب کدام است؟

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) نادرست - دلخواه (۴) دلخواه - نادرست

۳۳- اگر گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی نادرست باشند، آن‌گاه ارزش کدام گزاره، درست است؟

(۱) $q \vee (p \Rightarrow r)$ (۲) $(\sim q \vee p) \wedge r$ (۳) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim r)$ (۴) $\sim p \Rightarrow \sim (q \vee r)$

۳۴- اگر گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $(r \Rightarrow p) \vee q$ (۲) $\sim q \Rightarrow (\sim p \wedge r)$ (۳) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$ (۴) $q \wedge r \Rightarrow p$

۳۵- اگر p و q گزاره‌های دلخواه و r گزاره‌ای نادرست باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟

(۱) $(p \vee q) \wedge r$ (۲) $\sim r \Rightarrow (r \wedge p)$ (۳) $(r \Rightarrow p) \vee q$ (۴) $p \Rightarrow (q \vee r)$

۳۶- کدام یک از گزاره‌های زیر، همواره درست نیست؟

(۱) $p \vee \sim p$ (۲) $p \wedge q \Rightarrow p$ (۳) $\sim p \Rightarrow p$ (۴) $(p \Rightarrow q) \vee p$

۳۷- اگر گزاره $q \Rightarrow p$ نادرست و گزاره $t \Rightarrow (r \wedge p)$ درست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های t و r به ترتیب کدام است؟

(۱) نادرست - دلخواه (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) دلخواه - نادرست

۳۸- اگر گزاره p به صورت $a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ باشد، آن‌گاه گزاره q کدام باشد، تا ارزش گزاره $q \vee p \Rightarrow p$ درست باشد؟

(۱) عدد ۶ مقسوم‌علیه ۲۴ است. (۲) $x = 2$ ضابطه یک تابع نیست. (۳) $\sqrt{\frac{1}{4}} = 2^{-1}$ (۴) معادله $x^2 + 1 = 0$ دو ریشه دارد.

۳۹- اگر گزاره‌ای درست باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر، همواره نادرست است؟

(۱) $p \vee \sim q \Rightarrow r$ (۲) $q \Rightarrow \sim p$ (۳) $(\sim p \wedge r) \vee p$ (۴) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

۴۰- اگر گزاره‌های $p \vee q$ و $q \Rightarrow r$ درست و گزاره‌های $p \wedge r$ و $p \Rightarrow t$ نادرست باشند، آن‌گاه چندتا از گزاره‌های p, q, r و t دارای

ارزش درست هستند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۱- اگر ارزش گزاره‌های $p \wedge r$ ، $(q \vee t) \Rightarrow (r \wedge q)$ و $t \Rightarrow \sim r$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش چندتا از گزاره‌های p ، q ، r و t نادرست است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۴) ۴

۴۲- اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow p$ هر دو درست باشند، آن‌گاه کدام گزاره زیر، همواره درست است؟

- (۱) $\sim p$ (۲) q (۳) p (۴) $\sim q$

۴۳- ارزش گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ در چند حالت درست است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۳

۴۴- در چه حالتی، ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow q \vee r$ نادرست است؟

- (۱) p و q نادرست و r درست (۲) p نادرست و q و r درست (۳) p ، q و r نادرست (۴) p درست و q و r نادرست

۴۵- اگر ارزش گزاره «اگر دیروز شنبه بود، آن‌گاه فردا چهارشنبه یا دوشنبه است.» به انتفای مقدم، درست و ارزش تالی آن هم درست

باشد، آن‌گاه امروز چندشنبه است؟

- (۱) یکشنبه (۲) سه‌شنبه (۳) پنج‌شنبه (۴) جمعه

۴۶- اگر ارزش p ، درست و ارزش گزاره $(\sim p \vee \sim q) \wedge p$ نادرست باشد، ارزش q کدام است؟

- (۱) درست (۲) نادرست

(۳) چه درست باشد و چه نادرست، این گزاره نادرست است. (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۴۷- اگر ارزش گزاره شرطی $r \Rightarrow (p \vee q)$ نادرست باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر، حتماً درست است؟

- (۱) $\sim r \wedge \sim p$ (۲) $\sim q \Rightarrow p$ (۳) $q \Rightarrow \sim r$ (۴) $r \wedge (q \vee p)$

۴۸- اگر ارزش گزاره p درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره r چه باشد تا ارزش گزاره $(p \wedge \sim r) \vee q$ درست شود؟

(۱) درست (۲) r چه درست، و چه نادرست باشد، گزاره داده شده همواره درست است.

(۳) نادرست (۴) r چه درست، و چه نادرست باشد، گزاره داده شده همواره نادرست است.

درست ماه

ترکیب گزاره‌ها (قسمت دوم)

۴- ترکیب دوشروطی دو گزاره

اگر از گزاره p ، گزاره q نتیجه شده و از گزاره q هم گزاره p نتیجه شود، آن‌گاه از نماد « \Leftrightarrow » استفاده کرده و ترکیب دوشروطی دو گزاره را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم. در واقع ترکیب دوشروطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است.

روش‌های خواندن $p \Leftrightarrow q$:

- ① p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را.
- ② اگر p ، آن‌گاه q و اگر q ، آن‌گاه p .
- ③ اگر p ، آن‌گاه q و برعکس.
- ④ p شرط لازم و کافی است برای q .
- ⑤ p اگر و تنها اگر q .

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | د |

ارزش ترکیب دوشروطی دو گزاره: اگر دو گزاره p و q هر دو «درست» و یا هر دو «نادرست» باشند، ارزش ترکیب دوشروطی آن‌ها «درست» است و اگر یکی «درست» و یکی «نادرست» باشد، ارزش ترکیب دوشروطی آن‌ها «نادرست» می‌شود.

نکته اگر ارزش گزاره‌های p و q مشخص باشند، از جدول ارزش ترکیب دوشروطی p و q ، ارزش $p \Leftrightarrow q$ را تعیین می‌کنیم. ولی اگر ارزش‌های آن‌ها به تنهایی مشخص نباشند، بلکه ارزش ترکیب‌های شرطی $p \Rightarrow q$

و $q \Rightarrow p$ را بتوان تعیین کرد، از جدول ارزش ترکیب عطفی این ترکیب‌های شرطی، یعنی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ استفاده می‌کنیم.

پاسخ تشریحی

- منطق در لغت به معنای «آن چه به گفته درآمده» می باشد و گزینه های (۱) و (۲) تعابیری است که در مورد آن به کار می رود. ۳ ۱ 😊
- به هر جمله خبری، گزاره نمی گوئیم، بلکه به «هر جمله خبری که دقیقاً دارای ارزش درست یا نادرست باشد» گزاره گفته می شود. ۳ ۲ 😊
- بررسی گزینه ها:** ۴ ۳ 😊

- (۱) این یک جمله خبری است، ولی ارزش آن دقیقاً قابل مشخص کردن نیست. چون به نظر یک نفر، شاید درس عربی سخت تر باشد و به نظر یک نفر دیگر، درس ریاضی.
- (۲) این یک جمله پرسشی است و اصلاً خبری نیست.
- (۳) این یک جمله امری است نه خبری!
- (۴) این یک جمله خبری است که دارای ارزش نادرست است، پس گزاره ای با ارزش نادرست می باشد.

نکته: ما باز هم جمله هایی مثل گزینه (۱) رو نمی تونیم تشخیص بدیم که چرا گزاره نیست! همیشه به چیزی بگین ما دیگه اشتباه نکنیم؟

پاسخ: هند بار بگم! بین مهم اینه که بتونی دقیقاً ارزش درست یا نادرست بودن جمله خبری رو مشخص کنی. فب همیشه مثلاً از فوت پرس به نظر تو این جمله درست یا نه؟ حالا اگه این جمله رو به دوستت بگی، جواب میده درست یا نه؟ اون چی میگه؟ اگه جوابت این بود که شاید به نظر اون درست باشه یا نادرست، پس معلومه که گزاره نیست. اما اگه جواب هر دو تاتون قطعاً درست یا نادرست باشه، هتما گزاره هست، البته با فرض این که هر دو تاتون در مورد اون موضوع اطلاعات درست داشته باشین نه این که از رو بی سواری، درست یا نادرست رو اشتباهاً بگین. مثلاً تو گزینه (۳) تو بگی نادرست ولی دوستت بگه درست. این با نمی تونی بگی گزینه (۳) گزاره نیست، چون اون رنگه از بی سواری دوستته که نمی دونه مقبره حافظ تو شیرازه نه کرمان!!!

بررسی موارد: ۴ ۴ 😊

- (الف) یک جمله خبری نادرست است، پس یک گزاره با ارزش نادرست می باشد.
- (ب) یک جمله پرسشی است، پس گزاره نیست.
- (ج) یک جمله خبری است ولی ارزش آن را نمی توان به طور دقیق، مشخص کرد (به نظر یکی درست و به نظر دیگری نادرست است)، پس گزاره نیست.
- (د) یک جمله خبری نادرست است (چون مثلاً ضرب دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ برابر $\sqrt{6}$ می شود که گنگ است)، پس یک گزاره با ارزش نادرست می باشد.
- (ه) یک جمله عاطفی است، پس گزاره نیست.
- (و) یک جمله خبری درست است، پس یک گزاره با ارزش درست می باشد.
- بنابراین ۳ تا از موارد گفته شده، گزاره هستند.

بررسی گزینه ها: ۴ ۵ 😊

- ۱) درست $\Rightarrow (-3)^4 \times 27 = 3^4 \times 3^3 = 3^7$
- ۲) درست $\Rightarrow \sqrt{121} = 11 \Rightarrow$ عدد اول
- ۳) درست $\Rightarrow 5^2 = 25, 4^3 = 64 \Rightarrow 5^2 < 4^3 \Rightarrow \frac{1}{5^2} > \frac{1}{4^3}$
- ۴) نادرست $\Rightarrow 12$ مقسوم علیه صحیح دارد. $\Rightarrow \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \} =$ مقسوم علیه های صحیح عدد ۱۲

نمودار راداری برای حداقل ۳ متغیر رسم می شود. ۲ ۶ 😊

بقیه گزینه ها، گزاره هایی با ارزش درست هستند.

نکته: همیشه بگید چرا بقیه گزینه ها درست هستند؟

پاسخ: نه! همه رو تو ریاضی سال هم فوندری. پرو به نگاه به کتاب پارسلت بنداز، همش یادت مبار.

تعداد حالت های ارزشی n گزاره برابر 2^n است. پس داریم: ۱ ۷ 😊

$$\frac{\text{تعداد حالت های ارزشی } 10^\circ \text{ گزاره}}{\text{تعداد حالت های ارزشی } 7^\circ \text{ گزاره}} = \frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3 = 8$$

$$\text{تعداد حالت های ارزشی } m \text{ گزاره} = 2^m = 128 \Rightarrow 2^m = 2^7 \Rightarrow m = 7$$

۴ ۸ 😊

با حذف ۲ گزاره، ۵ گزاره خواهیم داشت. در نتیجه دارای $2^5 = 32$ حالت ارزشی خواهند بود.

$$\text{تفاضل تعداد حالت ها} = 128 - 32 = 96$$



۳۹

در جدول ارزشی n گزاره، برای هر گزاره، 2^{n-1} بار حرف «د» و 2^{n-1} بار حرف «ن» را می‌نویسیم. پس در مجموع، این جدول دارای $n \times 2^{n-1}$ تا حرف «د» و همچنین حرف «ن» است.

با توجه به نکته بالا برای ۴ گزاره داریم: $8 \times 4 = 32$ در کل جدول $\Rightarrow 2^3 = 8 = 2^4 - 1$: برای هر گزاره



۴۱۰

می‌دانیم برای نوشتن نقیض یک گزاره، کافی است فعل جمله را منفی کنیم یا جمله را با «چنین نیست که» شروع کنیم. پس نقیض این گزاره به صورت‌های زیر می‌شود:

(الف) m عدد نامثبت است. \leftarrow یعنی m عدد منفی یا صفر است.

(ب) چنین نیست که m عدد نامثبت نیست.

پس تنها گزینه (۴) به عنوان نقیض این گزاره، درست است.



۱۱۱

نقیض این گزاره به صورت « $4 - 3 < 4 - 3$ یا $3 - 4$ کوچک‌تر نیست.» می‌شود که یعنی « $4 \geq 3$ یا $3 - 4$ بزرگ‌تر یا مساوی $4 - 4$ کوچک‌تر یا مساوی $3 - 4$ است.» پس می‌توان نقیض آن را به صورت گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) بیان کرد.

تذکره! این گزاره صورت سؤال که اصلاً غلطه! آخه مگه $3 - 4$ از $4 - 4$ کوچک‌تره؟



۳۱۲

پاسخ فب معلومه که درست نیست! ولی مگه مومه؟ فب یه گزاره نادرسته. ما می‌فوییم نقیضش رو پیدا کنیم، حالا درسته یا نادرسته. اصلاً مومه؟ فب عوضش، نقیضش درسته. یه ذره بیشتر دقت کن بپه یان! با همین یه فکر اشتباه، راحت یه تست ساده رو از دست میدی.



۳۱۲

ارزش خود گزاره «نادرست» است. چون مثلاً عدد $-\frac{1}{2}$ ، از معکوس خود، یعنی $2 -$ بزرگ‌تر است. نقیض گزاره به صورت «هر عدد منفی از معکوس خود، کوچک‌تر نیست.» می‌شود که یعنی «بعضی عددهای منفی هستند که از معکوس خود، بزرگ‌تر می‌باشند.» و کاملاً هم درست است، مانند اعداد بین -1 و صفر.



۳۱۳

تذکره! ما نقیضش رو این طوری نوشتیم: «چنین نیست که هر عدد منفی از معکوس خود، کوچک‌تر است.» اون وقت راحت‌تر تونستیم معنی جمله رو تشخیص بدیم به جای این که فعل آخر رو منفی کنیم.



۳۱۳

پاسخ آخرین. فیلی نکته فوبی رو گفتی. گاهی با منفی کردن فعل اثر، میشه معنی نقیض رو درک کرد و گاهی با آوردن عبارت «چنین نیست که» پس همیشه تو چنین سؤال‌هایی، هر دو تاش رو امتحان کنین تا بتونین معنی اش رو فوب درک کنین و دچار اشتباه نشین.

روش اول: چون نقیض گزاره‌های p و q را داریم، ابتدا خود گزاره‌های p و q را می‌نویسیم. می‌دانیم نقیض نقیض هر گزاره، برابر خود گزاره است. پس:

$$p \sim \sqrt{225} \text{ عدد اول است.} \leftarrow p: 15 = \sqrt{225} \text{ عدد اول نیست.} \leftarrow \text{ارزش درست}$$

$q \sim x = y^2$ ضابطه یک تابع برحسب متغیر x نیست. $\leftarrow q: x = y^2$ ضابطه یک تابع برحسب متغیر x است. \leftarrow ارزش نادرست (زیرا به‌ازای مثلاً $x = 1$ دو مقدار -1 و 1 برای y وجود دارد).

بنابراین ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب «درست» و «نادرست» است.

روش دوم: ارزش نقیض گزاره‌ها را پیدا کرده و از روی آن، ارزش گزاره‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$p \sim \sqrt{225} \text{ عدد اول است.} \leftarrow \text{ارزش نادرست} \leftarrow \text{ارزش } p \text{ درست است.}$$

$$q \sim x = y^2 \text{ ضابطه یک تابع برحسب متغیر } x \text{ نیست.} \leftarrow \text{ارزش درست} \leftarrow \text{ارزش } q \text{ نادرست است.}$$



۳۱۴

چون ارزش نقیض گزاره، درست است، پس ارزش خود گزاره باید نادرست باشد. پس نباید a عددی اول باشد. در نتیجه a نمی‌تواند عدد $\frac{124}{4} = 31$ باشد.

توجه کنید که نقیض این گزاره به صورت « a عددی اول نیست.» می‌شود، یعنی a عددی مرکب است یا $a = 1$ (نه اول و نه مرکب).



۱۱۵

بررسی گزاره‌ها:

الف) $x \in \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow x \in \mathbb{N} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \xrightarrow{\text{نقیض}} x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ ✓

ب) $x + 2x^2 \neq 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} x + 2x^2 = 0 \Rightarrow x(1 + 2x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 0$ ✓

ج) $x \geq 3 \xrightarrow{\text{نقیض}} x < 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \leq 2$ ✓

د) $\{x : x > -x\} \xrightarrow{\text{نقیض}} \{x : x \leq -x\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ✓

پس نقیض همه گزاره‌ها درست هستند.

الف) تهران پایتخت ایران است و علم‌کوه بلندترین قله ایران است. ۱ ۱۶

ارزش گزاره p ، درست و ارزش گزاره q ، نادرست است (دماوند، بلندترین قله ایران است). حال ترکیب عطفی یک گزاره درست و یک گزاره نادرست، یک گزاره نادرست می‌شود.

ب) پل خواجه در خوزستان است یا مقبره خیام در همدان است.

ارزش هر دو گزاره p و q نادرست است، پس ترکیب فصلی آن‌ها هم نادرست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها: ۴ ۱۷

۱) $\begin{cases} p: 4 \leq (-2)^2 \Rightarrow 4 \leq 4 \quad \checkmark \\ q: -\sqrt{2} > -\sqrt{3} \quad \checkmark \end{cases} \Rightarrow p \wedge q \text{ درست است.}$

۲) $\begin{cases} p: -(-2)^2 < 0 \Rightarrow -4 < 0 \quad \checkmark \\ q: -\frac{1}{4} \notin \mathbb{R} \quad \times \end{cases} \Rightarrow p \vee q \text{ درست است.}$

۳) $\begin{cases} p: |-5^2| = \sqrt{625} \Rightarrow |-25| = \sqrt{25^2} \Rightarrow 25 = 25 \quad \checkmark \\ q: W \subseteq N \quad \times \quad (N \subseteq W) \end{cases} \Rightarrow p \vee q \text{ درست است.}$

۴) $\begin{cases} p: (\sqrt{7})^2 \in \mathbb{Q}^c \quad \times \quad ((\sqrt{7})^2 = 7 \in \mathbb{Q}) \\ q: 2^0 = 0 \quad \times \quad (2^0 = 1) \end{cases} \Rightarrow p \wedge q \text{ نادرست است.}$

گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط در صورتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. ۱ ۱۸

۲ ۱۹

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \vee q$ | $p \wedge (\sim q)$ | $\sim (p \wedge (\sim q))$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|---------------------|----------------------------|
| ن | د | د | ن | د | ن | د |

بنابراین ارزش هر دو گزاره، درست است.

اگر فرض کنیم $p \wedge q = r$ باشد، آن‌گاه باید ارزش گزاره $r \vee (\sim r)$ را تعیین کنیم. می‌دانیم ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش، همواره درست ۱ ۲۰

است. پس ارزش این گزاره، همواره درست می‌باشد.

چون نقیض گزاره‌های p و q دارای ارزش درست است، پس خود گزاره‌های p و q دارای ارزش نادرست هستند. در نتیجه داریم: ۲ ۲۱

| p | q | r | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $p \vee r$ | $\sim (p \vee r)$ | $(p \wedge q) \vee r$ | $\sim (p \vee r) \wedge (\sim q)$ |
|-----|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| ن | ن | ن | د | ن | ن | د | ن | د |

برای q دو حالت «د» و «ن» را در نظر می‌گیریم. ۴ ۲۲

بررسی گزینه‌ها:

۱)

| p | q | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ |
|-----|-----|--------------|---------------------|
| ن | د | ن | د |
| ن | ن | ن | د |

۲)

| p | q | $\sim p$ | $(\sim p) \vee q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|
| ن | د | د | د |
| ن | ن | د | د |

۳)

| p | q | $\sim p$ | $(\sim p) \wedge p$ | $((\sim p) \wedge p) \vee q$ |
|-----|-----|----------|---------------------|------------------------------|
| ن | د | د | ن | د |
| ن | ن | د | ن | ن |

۴)

| p | q | $\sim q$ | $q \vee (\sim q)$ | $(q \vee (\sim q)) \wedge p$ |
|-----|-----|----------|-------------------|------------------------------|
| ن | د | ن | د | ن |
| ن | ن | د | د | ن |

حاجم اجزا! ۳ خب گزینه (۳) هم نادرست داشت دیگه؟

بله، ولی درست هم داشت. اما سوال از ما فواسته کدام گزاره، همواره نادرست. تو گزینه (۳) به ازای q درست، درست و به ازای q نادرست، نادرست ولی تو گزینه (۴)، q چه درست باشه، چه نادرست، گزاره دراز شده، همواره نادرست.

نادرست، نادرست ولی تو گزینه (۴)، q چه درست باشه، چه نادرست، گزاره دراز شده، همواره نادرست.

ترکیب عطفی دو گزاره تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره، درست باشند. چون ارزش گزاره «میانه همان چارک دوم داده‌ها است.» درست است، پس p هم باید گزاره‌ای با ارزش درست باشد.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) الفبای فارسی دارای ۳۲ حرف است، پس گزاره داده‌شده، نادرست است.

(۲) توان دوم هر عدد لزوماً از خود عدد بزرگ‌تر نیست، مثل عدد $\frac{1}{4}$ که توان دوم آن $\frac{1}{16}$ است که از آن کوچک‌تر می‌باشد، پس این گزاره هم نادرست است.

(۳) متغیرها به دو نوع کیفی و کمی تقسیم می‌شوند و مقیاس تقسیم‌بندی آن‌ها ترتیبی، اسمی، فاصله‌ای و نسبتی است، پس این گزاره هم نادرست است.

(۴) $x^2 + y^2 = 0$ فقط به ازای $(0,0)$ برقرار است. پس این ضابطه یک تابع شامل یک نقطه است و بنابراین گزاره‌ای درست می‌باشد.

در نتیجه p می‌تواند گزاره گزینه (۴) باشد.

یک گزاره شرطی در صورتی به انتفای مقدم، درست است که مقدم نادرست باشد. پس باید $p \vee q$ نادرست باشد. از طرفی می‌دانیم ترکیب فصلی دو گزاره، تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره، نادرست باشند. بنابراین p و q باید هر دو نادرست باشند.

بررسی گزاره‌ها:

(الف) اگر سعدی شاعر شاهنامه است، آن‌گاه مولوی شاعر بوستان است.

p q

ارزش p نادرست است، پس این گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست می‌باشد. (البته ارزش q هم نادرست است).

(ب) اگر مقبره بوعلی در همدان است، آن‌گاه مقبره خیام در تبریز است.

p q

ارزش p درست و ارزش q نادرست است، پس ارزش این گزاره شرطی نادرست می‌باشد.

دو گزاره داریم، پس دارای $2^2 = 4$ حالت ارزشی هستند:

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $p \wedge q$ | $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ |
|-----|-----|-------------------|--------------|---------------------------------------|
| د | د | د | د | د |
| د | ن | ن | ن | ن |
| ن | د | د | ن | د |
| ن | ن | د | ن | د |

بررسی گزینه‌ها:

(۱) اگر ۴۵ عدد اول است، آن‌گاه ۲۸۹ عدد مربع کامل است.

p q

p گزاره‌ای نادرست ($45 = 9 \times 5$) و q گزاره‌ای درست ($289 = 17^2$) است. پس این گزاره شرطی، به انتفای مقدم، درست می‌باشد.

(۲) اگر ۱۴ مضرّب ۴ است، آن‌گاه $(-2)^2 = -4$.

p q

p گزاره‌ای نادرست ($14 = 2 \times 7$) و q هم گزاره‌ای نادرست ($(-2)^2 = 4$) است، پس این گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست می‌باشد.

(۳) اگر $-4 < -5$ است، آن‌گاه $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ نیست.

p q

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است. پس ارزش این گزاره شرطی، نادرست می‌باشد.

(۴) اگر $3 = 3 - 1 \times 3$ ، آن‌گاه ۹۱ عدد مرکب است.

p q

گزاره p درست ($3 = 3 - 1 \times 3 = 6 - 3 = 3$) و q هم گزاره‌ای درست ($91 = 13 \times 7$) است، پس ارزش این گزاره شرطی درست می‌باشد.

p گزاره‌ای درست است، پس ترکیب فصلی آن با هر گزاره‌ای همواره درست است. یعنی تالی در گزاره شرطی داده‌شده ($p \vee q$) همواره درست می‌باشد.

حال گزاره شرطی داریم که تالی آن درست است. پس مقدم، چه درست و چه نادرست باشد، ارزش این گزاره همواره درست خواهد بود.

بررسی گزاره‌ها:

(الف) مقدم درست و تالی نادرست است، پس این گزاره نادرست می‌باشد.

(ب) مقدم نادرست و تالی هم نادرست است، پس این گزاره به انتفای مقدم، درست می‌باشد.

(ج) مقدم درست و تالی هم درست است، پس این گزاره درست می‌باشد.

(د) مقدم نادرست و تالی درست است، پس این گزاره به انتفای مقدم، درست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها: ۳ ۳۰

- (۱) مقدم نادرست است، پس گزاره شرطی $p \Rightarrow \sim p$ به انتقای مقدم، درست است.
 (۲) تالی نادرست است. پس اگر مقدم درست باشد، گزاره شرطی نادرست و اگر مقدم نادرست باشد، گزاره شرطی درست است.
 (۳) مقدم درست و تالی نادرست است، پس گزاره شرطی نادرست می‌باشد.
 (۴) تالی درست است، پس گزاره شرطی (چه q درست باشد و چه نادرست) درست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها: ۳ ۳۱

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|--------------|------------------------------|
| ۱) | p | q | r | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \Rightarrow r$ |
| | د | ن | ن | ن | د |

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----------|---------------------------------|
| ۲) | p | q | r | $\sim p$ | $\sim p \Rightarrow (q \vee r)$ |
| | د | ن | ن | ن | د |

توجه کنید که در گزینه (۲)، ارزش $q \vee r$ اصلاً مهم نیست و گزاره به انتقای مقدم، درست است.

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-------------------|------------------------------|
| ۳) | p | q | r | $p \Rightarrow r$ | $q \wedge (p \Rightarrow r)$ |
| | د | ن | ن | ن | ن |

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-------------------|-----------------------------------|
| ۴) | p | q | r | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
| | د | ن | ن | ن | د |

در گزینه (۴) هم، گزاره به انتقای مقدم، درست است.

چون ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست است، پس حتماً مقدم درست و تالی نادرست می‌باشد. بنابراین r نادرست است. حال p نادرست و q درست است که $p \Rightarrow q$ چه درست و چه نادرست باشد، همواره برقرار است.

تذکره: چرا q هر چی باشه، $p \Rightarrow q$ درست میشه؟

پاسخ: به سؤالی پرسیدی که جوابش رو بارها و بارها گفتیم! نمیگم ببینم فوراً یادت میار یا نه؟ فقط به این دقت کن که p نادرسته ...

بررسی گزینه‌ها: ۴ ۳۳

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-------------------|----------------------------|
| ۱) | p | q | r | $p \Rightarrow r$ | $q \vee (p \Rightarrow r)$ |
| | د | ن | ن | ن | ن |

| | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----------|-----------------|----------------------------|
| ۲) | p | q | r | $\sim q$ | $\sim q \vee p$ | $(\sim q \vee p) \wedge r$ |
| | د | ن | ن | د | د | ن |

| | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----------|-------------------|-------------------------------------|
| ۳) | p | q | r | $\sim r$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim r)$ |
| | د | ن | ن | د | ن | ن |

| | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----------|------------|-------------------|--------------------------------------|
| ۴) | p | q | r | $\sim p$ | $q \vee r$ | $\sim (q \vee r)$ | $\sim p \Rightarrow \sim (q \vee r)$ |
| | د | ن | ن | ن | ن | د | د |

بررسی گزینه‌ها: ۲ ۳۴

- (۱) در گزاره شرطی $r \Rightarrow p$ ، تالی درست است، پس r چه درست باشد و چه نادرست، این گزاره شرطی درست است. حال ترکیب فصلی یک گزاره درست با یک گزاره نادرست، درست است.
 (۲) $(\sim p)$ نادرست است، پس $\sim p \wedge r$ همواره نادرست است. چون $\sim q$ درست می‌باشد، پس از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه شده و بنابراین گزاره حاصل، نادرست است.
 (۳) $(\sim p)$ نادرست است، پس گزاره شرطی $\sim p \Rightarrow r$ به انتقای مقدم، درست است. حال چون از یک گزاره درست یک گزاره درست $(\sim q)$ نتیجه شده، پس ارزش گزاره داده شده، درست است.
 (۴) q نادرست است، پس $q \wedge r$ نادرست می‌باشد. بنابراین گزاره شرطی داده شده، به انتقای مقدم، درست است.

بررسی گزینه‌ها: ۲ ۳۵

- (۱) گزاره‌ای نادرست است، پس ترکیب عطفی آن با هر گزاره‌ای همواره نادرست می‌باشد. یعنی گزاره $(p \vee q) \wedge r$ همواره نادرست است.
 (۲) $r \wedge p$ هم نادرست است. از طرفی $\sim r$ درست می‌باشد. پس از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه شده است. بنابراین گزاره داده شده، نادرست می‌باشد.

۳) $r \Rightarrow p$ نادرست است، پس $r \Rightarrow p$ به انتفای مقدم، درست می‌باشد و ترکیب فصلی آن با هر گزاره‌ای درست است. بنابراین گزاره $(r \Rightarrow p) \vee q$ همواره درست است.

۴) $r \Rightarrow p$ نادرست است، پس $r \vee q$ اگر q درست باشد، درست و اگر q نادرست باشد، نادرست است. ارزش p هم که مشخص نیست، پس ارزش این گزاره را نمی‌توان به طور دقیق تعیین کرد.

بررسی گزینه‌ها:

۳ ۳۶



| | p | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ |
|----|---|----------|-----------------|
| ۱) | د | ن | د |
| | ن | د | د |

این گزاره همواره درست است. \Rightarrow

| | p | q | $p \wedge q$ | $p \wedge q \Rightarrow p$ |
|----|---|---|--------------|----------------------------|
| ۲) | د | د | د | د |
| | د | ن | ن | د |
| | ن | د | ن | د |
| | ن | ن | ن | د |

این گزاره همواره درست است. \Rightarrow

| | p | $\sim p$ | $\sim p \Rightarrow p$ |
|----|---|----------|------------------------|
| ۳) | د | ن | د |
| | ن | د | ن |

اگر p درست باشد، درست و اگر p نادرست باشد، نادرست است. \Rightarrow

| | p | q | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \vee p$ |
|----|---|---|-------------------|----------------------------|
| ۴) | د | د | د | د |
| | د | ن | ن | د |
| | ن | د | د | د |
| | ن | ن | د | د |

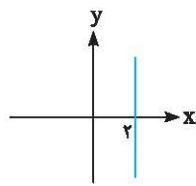
این گزاره همواره درست است. \Rightarrow

$q \Rightarrow p$ نادرست است، پس q درست و p نادرست می‌باشد. چون p نادرست است، پس $r \wedge p$ هم نادرست است (r چه درست و چه نادرست باشد). از طرفی در سؤال گفته شده $t \Rightarrow (r \wedge p)$ درست است، پس چون تالی نادرست است، باید مقدم، یعنی t هم نادرست باشد تا ارزش این گزاره درست شود. در نتیجه ارزش t نادرست و r دلخواه است.

ارزش گزاره p نادرست است، چون $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. حال چون ارزش گزاره $p \Rightarrow q \vee p$ درست است و تالی نادرست می‌باشد، باید مقدم هم نادرست باشد تا ارزش گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست شود. بنابراین $q \vee p$ نادرست است. چون p نادرست است، باید q هم نادرست باشد تا $q \vee p$ نادرست شود. پس باید گزاره‌ای را انتخاب کنیم که دارای ارزش نادرست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱ ۳۷



۱) درست، زیرا: $24 = 4 \times 6$.

۲) درست، زیرا یک خط موازی محور y ها نمودار را در بی‌شمار نقطه، قطع می‌کند.

۳) درست، زیرا: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ و $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ، پس $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ، پس $\sqrt{\frac{1}{4}} = 2^{-1}$.

۴) نادرست، زیرا: ریشه ندارد. $\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

بنابراین تنها گزاره‌ای که نادرست است، گزینه (۴) می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۴ ۳۹



۱) گزاره‌ای درست است، پس ترکیب فصلی آن با هر گزاره‌ای (چه درست و چه نادرست) همواره درست می‌باشد. حال از گزاره درست $p \vee \sim q$ ، گزاره r نتیجه شده است که اگر r درست باشد، گزاره $p \vee \sim q \Rightarrow r$ درست و اگر r نادرست باشد، گزاره $p \vee \sim q \Rightarrow r$ نادرست است.

۲) گزاره‌ای نادرست است که تالی گزاره شرطی است. پس اگر q درست باشد، گزاره شرطی $\sim p \Rightarrow q$ نادرست و اگر q نادرست باشد، درست است.

۳) $(\sim p)$ نادرست است، پس ترکیب عطفی آن با هر گزاره‌ای، همواره نادرست می‌باشد. حال ترکیب فصلی این گزاره نادرست $(\sim p \wedge r)$ با گزاره درست p ، همواره درست است.

۴) ترکیب عطفی گزاره نادرست $(\sim p)$ با هر گزاره‌ای، نادرست است. حال از گزاره درست p ، گزاره نادرست $\sim p \wedge q$ نتیجه شده، پس گزاره $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ همواره نادرست است.

گزاره‌های داده‌شده را بررسی می‌کنیم: ۲ ۴۰

(۱) $p \vee q$ درست است، پس حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست می‌باشد. (حداقل یعنی یکی یا هر دو)

(۲) $q \Rightarrow r$ درست است، پس حالت q درست و r نادرست امکان ندارد.

(۳) $p \wedge r$ نادرست است، پس حداقل یکی از گزاره‌های p یا r نادرست است.

(۴) $q \Rightarrow t$ نادرست است، پس $\sim q$ درست و t نادرست است.

حال از نتیجه‌گیری‌های فوق می‌توان فهمید که:

از (۴) نتیجه می‌شود که q نادرست و t هم نادرست است.

از (۱) و این که q نادرست است، نتیجه می‌شود که p درست است.

از (۳) و این که p درست است، نتیجه می‌شود که r نادرست است.

بنابراین گزاره p درست و گزاره‌های q ، r و t نادرست هستند.

نام‌چیز! خیلی سؤال باحالی بود. همیشه از این سؤال‌ها باز هم بدید؟

پاسخ بله که میشه! فوبه که این قدر علاقه‌مند شری! پس پرو تست بعدی رو حل کن، ببینم چیکار می‌کنی!

گزاره‌های داده‌شده را بررسی می‌کنیم: ۲ ۴۱

(۱) $p \wedge r$ نادرست است، پس حداقل یکی از گزاره‌های p یا r نادرست است.

(۲) $(r \wedge q) \Rightarrow (q \vee t)$ نادرست است، پس $q \vee t$ درست و $r \wedge q$ نادرست است. یعنی حداقل یکی از گزاره‌های q یا t درست است و همچنین حداقل یکی از گزاره‌های r یا q نادرست است.

(۳) $t \Rightarrow \sim r$ نادرست است، پس t درست و $\sim r$ نادرست است.

از موارد بالا نتیجه می‌شود که:

از (۳) می‌فهمیم که t درست و r هم درست است.

از (۱) و این که r درست است، نتیجه می‌شود که p نادرست است.

از (۲) و این که r درست است، نتیجه می‌شود که q نادرست است.

بنابراین گزاره‌های p و q نادرست و گزاره‌های r و t درست هستند.

۲ ۴۲

$p \Rightarrow q$ درست است، پس حالت p درست و q نادرست امکان ندارد.

$q \Rightarrow p$ درست است، پس حالت $\sim q$ درست و p نادرست امکان ندارد. یعنی حالت p و q هر دو نادرست، رخ نمی‌دهد.

| p | q |
|---|---|
| د | د |
| د | ن |

از موارد بالا می‌توان نتیجه گرفت که در جدول ارزشی p و q که ۴ حالت باید وجود داشته باشد، ۲ حالت p درست و q نادرست و p و q نادرست حذف می‌شوند و تنها دو حالت مقابل را داریم:

همان‌طور که می‌بینید گزاره q همواره درست است.

روش اول: می‌دانیم ۳ گزاره دارای $2^3 = 8$ حالت ارزشی هستند. از طرفی می‌دانیم یک گزاره شرطی فقط در حالتی که مقدم درست و تالی نادرست باشد، نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست می‌باشد. ۱ ۴۳

پس در این جا تنها حالتی که $r \Rightarrow p$ درست و q نادرست باشد را از ۸ حالت کم می‌کنیم. به‌طور مشابه، $p \Rightarrow r$ از بین ۴ حالت، فقط در ۱ حالت نادرست است. پس در ۳ حالت، $p \Rightarrow r$ درست می‌باشد. برای $p \Rightarrow r$ وقتی که درست است، q ، ۲ حالت درست و نادرست دارد (یعنی

۶ حالت داریم) که اگر حالت نادرست q را از آن‌ها برداریم، در کل ۳ حالت باقی می‌ماند که $p \Rightarrow r$ درست و q نادرست می‌شود. پس

در $5 = 8 - 3$ حالت این گزاره دارای ارزش درست است.

روش دوم: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

| p | q | r | $p \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ |
|---|---|---|-------------------|-----------------------------------|
| د | د | د | د | د |
| د | د | ن | ن | د |
| د | ن | د | د | ن |
| د | ن | ن | ن | د |
| ن | د | د | د | د |
| ن | د | ن | د | د |
| ن | ن | د | د | ن |
| ن | ن | ن | د | ن |

همان‌طور که می‌بینید در ۵ حالت، این گزاره دارای ارزش درست است.

چون ۳ گزاره داریم، پس $2^3 = 8$ حالت ارزشی برای آن‌ها وجود دارد. جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

| p | q | r | $\sim p$ | $\sim r$ | $q \vee r$ | $\sim p \wedge \sim r$ | $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow q \vee r$ |
|---|---|---|----------|----------|------------|------------------------|---|
| د | د | د | ن | ن | د | ن | د |
| د | د | ن | ن | د | د | ن | د |
| د | ن | د | ن | ن | د | ن | د |
| د | ن | ن | ن | د | ن | ن | د |
| ن | د | د | د | ن | د | ن | د |
| ن | د | ن | د | د | د | د | د |
| ن | ن | د | د | ن | د | ن | د |
| ن | ن | ن | د | د | ن | د | ن |

همان‌طور که می‌بینید تنها در حالت آخر که هر سه گزاره نادرست باشند، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

تذکره ۴۴ ما گزینه‌ها رو امتحان کردیم و دیدیم تنها تو حالت گزینه (۳)، ارزش این گزاره، نادرست میشه. درسته؟

پاسخ بله کارت کاملاً درسته. ما راهل کامل رو انجام دادیم تا موضوع کاملاً برا همه پا پیفته.

چون گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست است، پس حتماً مقدم آن نادرست می‌باشد. یعنی «دیروز شنبه بود». نادرست است. بنابراین امروز قطعاً یکشنبه نیست. از طرفی تالی درست است، در تالی، ترکیب فصلی دو گزاره «فردا چهارشنبه است.» و «فردا دوشنبه است.» را داریم. می‌دانیم ترکیب فصلی در صورتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها درست باشد. حال حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

(۱) هر دو درست باشند: امکان ندارد که فردا هم چهارشنبه باشد و هم دوشنبه.

(۲) «فردا چهارشنبه است.» درست و «فردا دوشنبه است.» نادرست باشد: این یعنی امروز سه‌شنبه است و امروز یکشنبه نیست.

(۳) «فردا چهارشنبه است.» نادرست و «فردا دوشنبه است.» درست باشد: این یعنی امروز سه‌شنبه نیست و امروز یکشنبه است. ولی ما گفتیم که امروز قطعاً یکشنبه نیست. پس این حالت هم امکان ندارد. بنابراین تنها حالت (۲) امکان‌پذیر است و امروز سه‌شنبه می‌باشد.

ارزش p، درست است. پس ترکیب عطفی آن با گزاره درست، درست و با گزاره نادرست، نادرست می‌شود. چون می‌دانیم ارزش گزاره داده‌شده، نادرست است، پس باید ارزش گزاره $\sim p \vee \sim q$ نادرست باشد تا ترکیب عطفی آن با گزاره درست p، نادرست شود. حال چون $\sim p$ دارای ارزش نادرست است، ترکیب فصلی آن تنها با گزاره نادرست، دارای ارزش نادرست می‌شود، یعنی باید ارزش $\sim q$ نادرست و در نتیجه ارزش q باید درست باشد.

تذکره ۴۵ ما خیلی گیج شدیم! سخت بود! راه حل دیگه‌ای نداره؟

پاسخ کدوم قسمتش سئمت بود؟ فقط به کم مراحل بررسی‌اش زیاد بود که اونم آگه مرحله به مرحله مثل ما پیش بری، هیچ وقت اشتباه نمی‌کنی. تازه بهتره در آخر دوباره جوابت رو چک کنی، این کار رو حالا با فرض p درست و q درست، انجام می‌دهیم تا ببینی که جوابمون درسته:

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ | $(\sim p \vee \sim q) \wedge p$ |
|---|---|----------|----------|----------------------|---------------------------------|
| د | د | ن | ن | ن | ن |

البته می‌شه گفت اینم به روش هل دیگه هست. تو ارزش گزاره داده‌شده رو با فرض یک بار q درست و یک بار $\sim q$ نادرست به دست بیار، ببین به ازای کدومش، ارزشش نادرست میشه. این کار رو هم انجام بدیم تا حسابی فیالمون راحت بشه. این بار با فرض p درست و q نادرست، داریم:

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ | $(\sim p \vee \sim q) \wedge p$ |
|---|---|----------|----------|----------------------|---------------------------------|
| د | ن | ن | د | د | د |

پس به ازای q نادرست، ارزش این گزاره، درست میشه و قابل قبول نیست. اینم به راهل دیگه که فکر کنم برای شما راحت‌تر و قابل درک‌تر باشه.

یک گزاره شرطی تنها در صورتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، پس I درست و $p \vee q$ نادرست است. از طرفی ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که هر دو نادرست باشند، بنابراین p و q هر دو نادرست هستند. حال ارزش گزاره‌های داده‌شده را مشخص می‌کنیم.