راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر قسمت QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر قسمت مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول) تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول و دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول تا سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.
۶. تست‌های واجب با علامت (☆) و تست‌های دشوار با علامت (★) مشخص شده‌اند. در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت (☆) پاسخ دهید.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

فصل اوّل: دایــــره

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

درسنامه آموزشی

فصل اوّل: دایــــره

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اوّل: دایـــره

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

پرسش‌های تشریحی

فصل اوّل: دایـــره

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

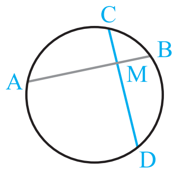
فصل سوم: روابط طولی در مثلث

فصل ۱

قسمت دوم

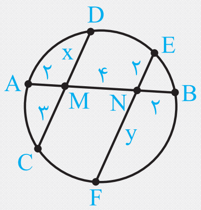
رابطه‌های طولی در دایره

آ) وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر است.



حکم : $MA\times MB=MC\times MD$

مثال در شکل مقابل مقادیر x و y را محاسبه کنید.



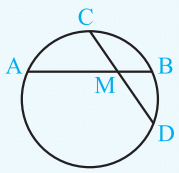
پاسخ : بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA\times MB=MD\times MC\Rightarrow ۲\times(۴+۲)=x\times ۳\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

$$NA\times NB=NF\times NE\Rightarrow(۲+۴)\times ۲=y\times ۲\Rightarrow y=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

تست مطابق شکل طول وتر AB در دایرهٔ $C(O,R)$، ۱۴ سانتی‌متر می‌باشد. این وتر، وتر CD را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کرده است. اگر $CD=۱۰$ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه تفاضل طول پاره‌خط‌های MA و MB کدام است؟

(مشابه تمرین صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)



۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹

پاسخ : بنابه فرض، وتر CD به نسبت ۲ به ۳ تقسیم شده است. پس می‌توانیم فرض کنیم $MC=۲k$ و $MD=۳k$ و داریم:

$$CD=۱۰\Rightarrow ۲k+۳k=۱۰\Rightarrow ۵k=۱۰\Rightarrow k=۲\Rightarrow\begin{cases}MC=۴\\MD=۶\end{cases}$$

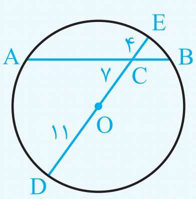
$$MA\times MB=MC\times MD\xrightarrow[MA=۱۴-x]{MB=x}(۱۴-x)\times x=۴\times ۶\Rightarrow x^۲-۱۴x+۲۴=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۱۲)=۰\Rightarrow x=۲\ \text{یا}\ x=۱۲$$

بنابراین با فرض $MA>MB$ نتیجه می‌شود $MA=۱۲$ و $MB=۲$ و تفاضل این دو مقدار برابر ۱۰ است. پس گزینهٔ (۱) درست است.

تست وتری به طول ۱۸ در یک دایره به شعاع ۱۱ مفروض است. نقطه‌ای روی این وتر، از مرکز دایره به فاصلهٔ ۷ می‌باشد. این نقطه، وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : بنابه فرض $AB=۱۸$، $OC=۷$ و $OE=OD=۱۱$، پس $CE=۴$. فرض کنیم $BC=x$ بنابراین داریم:



$$AC\cdot BC=CD\cdot CE\Rightarrow(۱۸-x)x=(۱۱+۷)\times ۴\Rightarrow x^۲-۱۸x+۷۲=۰$$

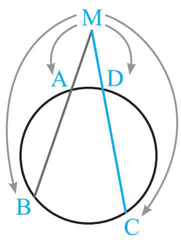
$$\Rightarrow(x-۶)(x-۱۲)=۰\Rightarrow x=۶\ \text{یا}\ x=۱۲$$

و با فرض $AC>BC$ داریم:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{۱۸-x}{x}=\frac{۱۸-۶}{۶}=\frac{۱۲}{۶}=۲\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

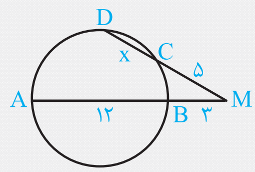
ب) رابطهٔ طولی وترهایی با امتداد متقاطع: اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه:

$$MA \times MB = MD \times MC$$



مثال

با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.

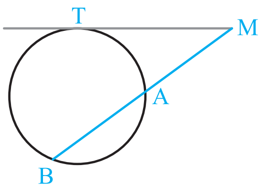


پاسخ: $MB \times MA = MC \times MD \Rightarrow ۳ \times (۳+۱۲) = ۵ \times (۵+x) \Rightarrow ۳ \times ۱۵ = ۵ \times (۵+x)$

$\Rightarrow ۳ \times ۳ = ۵ + x \Rightarrow x + ۵ = ۹ \Rightarrow x = ۴$

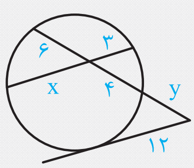
پ) رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع: اگر از نقطهٔ M یک خط مماس و یک خط قاطع بر دایرهٔ مفروض رسم کنیم، آن‌گاه طول پاره‌خط مماس (MT) واسطهٔ هندسی قطعات قاطع $(MA$ و $MB)$ قطعات قاطع هستند) می‌باشد.

$$MT^{۲} = MA \times MB$$



مثال

در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.



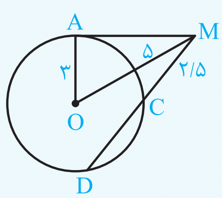
پاسخ: $۳ \times x = ۶ \times ۴ \Rightarrow ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$

$۱۲^{۲} = y \times (y+۶+۴) \Rightarrow y(y+۱۰) = ۱۴۴ \Rightarrow y^{۲} + ۱۰y = ۱۴۴ \Rightarrow y^{۲} + ۱۰y - ۱۴۴ = ۰$

$\Rightarrow (y+۱۸)(y-۸) = ۰ \Rightarrow y = -۱۸$ یا $y = ۸ \xrightarrow{y>۰} y = ۸$

تست

در شکل مقابل MA در نقطهٔ A بر دایره مماس و شعاع دایره برابر ۳ است. اگر فاصلهٔ M تا مرکز دایره برابر ۵ باشد و $MC = ۲/۵$، آن‌گاه طول وتر CD کدام است؟



۱) ۴/۲ ۲) ۳/۹ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۵

پاسخ: خط مماس، بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. پس مثلث MAO در رأس A قائمه است و داریم:

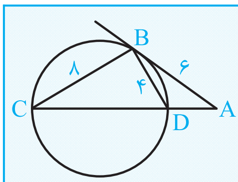
$MA^{۲} = OM^{۲} - OA^{۲} = ۵^{۲} - ۳^{۲} = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow MA = ۴$

حال بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم: $MA^{۲} = MC \times MD \Rightarrow ۴^{۲} = ۲/۵ \times (۲/۵ + CD) \Rightarrow ۱۶ = ۲/۵ \times (۲/۵ + CD)$

$\Rightarrow CD + ۲/۵ = \frac{۱۶}{۲/۵} = \frac{۶۴}{۱۰} = ۶/۴ \Rightarrow CD = ۶/۴ - ۲/۵ = ۳/۹ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست

در شکل مقابل AB در نقطهٔ B بر دایره مماس است. حاصل $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: دو زاویهٔ ظلی $A\hat{B}D$ و محاطی $A\hat{C}B$ برابرند، زیرا کمان روبه‌روی آن‌ها $\overset{\frown}{BD}$ است. پس دو مثلث ABD و ABC متشابه‌اند.

$(B\hat{A}D = B\hat{A}C\ ،\ A\hat{B}D = A\hat{C}B) \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADB} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow$

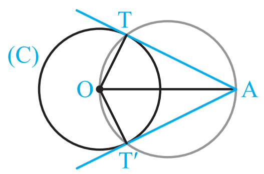
با فرض $AD = x$ و $CD = y$ داریم:

$\frac{۶}{x} = \frac{x+y}{۶} = \frac{۸}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۸} = ۳، x + y = \frac{۶ \times ۸}{۴} = ۱۲ \Rightarrow y = ۱۲ - ۳ = ۹$

دو مثلث ABD و BCD در رأس B هم‌ارتفاع هستند، در نتیجه: $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{CD} = \frac{x}{y} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$

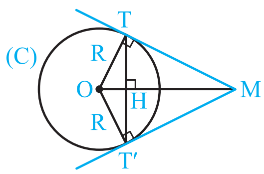
پس گزینهٔ (۱) درست است.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره



نقطهٔ A را خارج دایرهٔ $C(O،R)$ در نظر می‌گیریم. O را به A وصل می‌کنیم، دایره‌ای به قطر OA رسـم مـی‌کنیم. نقاط تلاقی آن بـا دایـرهٔ (C) را T و T′ مـی‌نـامیم. زوایـای OTA و OT′A روبـه‌رو بـه قطرنـد، پـس قائمه‌انـد. در نتیجه AT و AT′ بر دایرهٔ (C) مماس‌اند.

خواص دو مماس رسم‌شده بر یک دایرهٔ معلوم از یک نقطه خارج آن



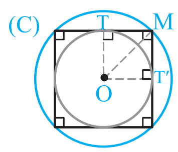
فرض کنید مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT′ بـر دایـرهٔ $C(O،R)$ رسـم شـود و H نقطـهٔ برخـورد وتر TT′ با پاره‌خط OM باشد. بنابراین داریم:

۱) طول مماس‌های MT و MT′ برابر است ($MT = MT'$).

۲) OM نیمساز زوایای TMT′ و TOT′ است.

۳) OM عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های تماس می‌باشد، یعنی OM عمودمنصف TT′ است.

۴) اگر $\widehat{M} \neq ۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی MTOT′ کایت (شبه‌لوزی) است.



۵) اگر $\widehat{M} = ۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی MTOT′ مربع است. در این حالت از هر نقطـه روی دایـرهٔ بـه مرکـز O و شعاع $OM = R\sqrt{۲}$ می‌توان ۲ مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد و بر عکس اگر از نقطه‌ای دو مماس عمـود بـر هم، بر دایرهٔ (C) رسم شود، آن‌گاه آن نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ قرار دارد.

۶) طول پاره‌خط واصل نقاط تماس برابر است با:

$$TT' = \frac{۲R.MT}{OM}$$

راهنمایی: مساحت چهارضلعی MTOT′ را به دو روش بنویسید.

۷) مثلث‌های MTO، MHT و THO متشابه هستند.

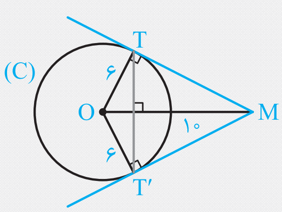
مثال

از نقطهٔ M دو مماس MT و MT′ را بر دایرهٔ $C(O،۶)$ رسم می‌کنیم. اگر $OM = ۱۰$ باشد، آن‌گاه:

آ) طول مماس‌های MT و MT′ را به‌دست آورید.

ب) طول پاره‌خط TT′ را بیابید.

پاسخ: آ) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:



$$OM^۲ = OT^۲ + MT^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۶^۲ + MT^۲ \Rightarrow MT^۲ = ۶۴ \Rightarrow MT = MT' = ۸$$

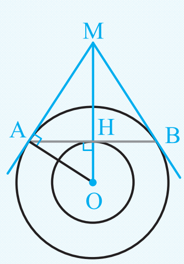
ب) برای محاسبهٔ TT′ می‌گوییم، مساحت چهارضلعی MTOT′ برابر $\frac{۱}{۲} OM \times TT'$ است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند. از طرفی مساحت همین چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث OMT است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲} TT' \times OM = ۲ \times \frac{۱}{۲} MT \times OT \Rightarrow TT' \times ۱۰ = ۲ \times ۸ \times ۶ \Rightarrow TT' = \frac{۹۶}{۱۰} = ۹/۶$$

تست

دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سـر این وتر بر دایرهٔ بزرگ‌تر در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصلهٔ M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

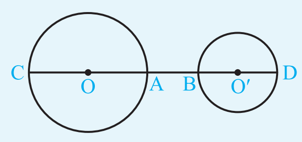


پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM بنابه رابطهٔ طولی داریم:

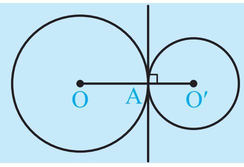
$$OA^۲ = OH \times OM \Rightarrow ۱۲^۲ = ۸ \times OM \Rightarrow OM = \frac{۱۴۴}{۸} = ۱۸ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است:

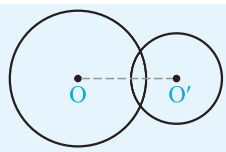
دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	

نکته کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایرهٔ متخارج مطابق شکل فوق $AB = OO' - (R + R')$ و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط آن‌ها برابر $CD = OO' + R + R'$ است.

دو دایرهٔ مماس برون	$d = R + R'$	

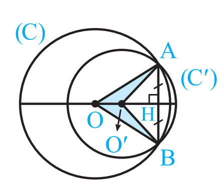
نکته ۱ در نقطهٔ تماس دو دایره یعنی نقطهٔ A فقط یک خط بر هر دو دایره مماس است.

نکته ۲ مراکز و نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس خارج روی یک خط قرار دارند.

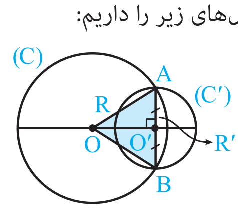
دو دایرهٔ متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	

نکته ۱ خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. (در شکل‌های زیر خط OO' عمودمنصف پاره‌خط AB است.)

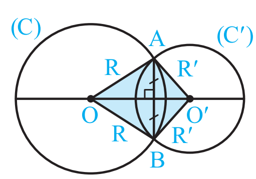
نکته ۲ اگر شعاع دو دایرهٔ متقاطع نابرابر باشد، شکل‌های زیر را داریم:



چهارضلعی $AOBO'$، دارت می‌باشد.

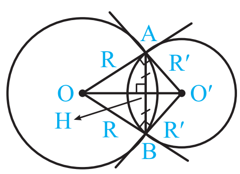


دایرهٔ (C) محیط دایرهٔ (C') را نصف می‌کند، و داریم $R^2 = OO'^2 + R'^2$

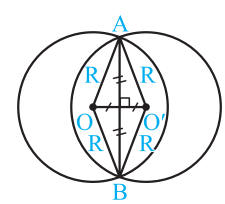


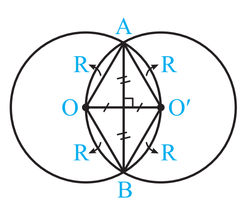
چهارضلعی $OAO'B$ کایت است.

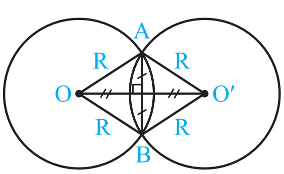
نکته ۳ شعاع‌های نقطهٔ تقاطع بر دایره‌ها مماس هستند، اگر و تنها اگر $OO'^2 = R^2 + R'^2$ باشد.

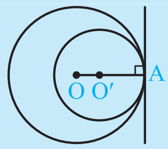


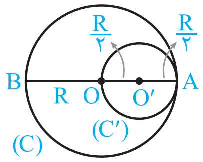
نکته ۴ اگر شعاع دو دایرهٔ متقاطع برابر باشند، چهارضلعی $AOBO'$ لوزی است.







دو دایرهٔ مماس درون	$d = R - R'$	

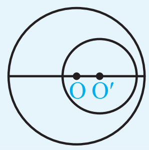
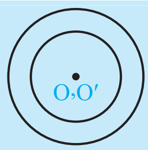


نکته ۱ در نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس داخل فقط یک خط بر هر دو دایره مماس است.

نکته ۲ مراکز و نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس داخل روی یک خط قرار دارند.

نکته ۳ اگر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر دو برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر باشد، آن‌گاه دایرهٔ کوچک از مرکز دایرهٔ بزرگ می‌گذرد.

$R = ۲R' \Leftrightarrow$ دایره (C') از مرکز دایرهٔ (C) می‌گذرد.

دو دایرهٔ متداخل	$d < R - R'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = ۰$	

مثال

طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل ۵ و مساحت ناحیهٔ بین دو دایره ۸۵π است. محیط هر یک از دایره‌ها را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

پاسخ : طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل برابر $R - R'$، $(R > R')$ است. داریم:

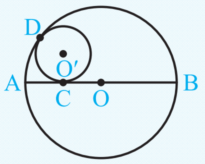
$$\text{مساحت بین دو دایره} = \pi R^۲ - \pi R'^۲ \Rightarrow ۸۵\pi = \pi R^۲ - \pi R'^۲ \Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۸۵$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۸۵ \xrightarrow[R-R'=۵]{\text{بنابه فرض}} R + R' = \frac{۸۵}{۵} = ۱۷$$

$$\begin{cases} R + R' = ۱۷ \\ R - R' = ۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲R = ۲۲ \Rightarrow R = ۱۱ \text{ ، } R' = ۶$$

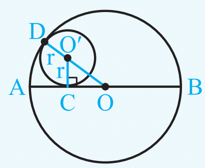
پس محیط دایره‌ها برابر ۲۲π و ۱۲π است.

تست



در شکل مقابل، دایرهٔ کوچک بر قطر AB و دایرهٔ بزرگ مماس است. اگر $BC = ۱۲$ و $AC = ۶$، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



پاسخ : در دو دایرهٔ مماس داخل، مراکز دو دایره و نقطهٔ تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند. داریم:

$$AB = ۲R \Rightarrow AC + BC = ۲R \Rightarrow ۶ + ۱۲ = ۲R \Rightarrow R = ۹$$

$$OD = OO' + O'D \Rightarrow ۹ = OO' + r \Rightarrow OO' = ۹ - r$$

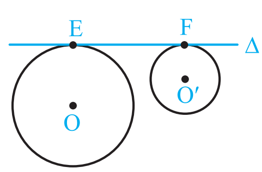
$$OA = OC + AC \Rightarrow ۹ = OC + ۶ \Rightarrow OC = ۳$$

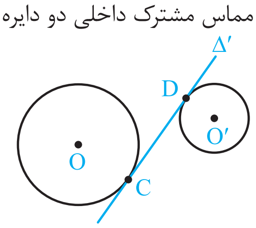
$OO'^۲ = O'C^۲ + OC^۲ \Rightarrow (۹ - r)^۲ = r^۲ + ۳^۲ \Rightarrow ۸۱ + r^۲ - ۱۸r = r^۲ + ۹ \Rightarrow ۱۸r = ۷۲ \Rightarrow r = \frac{۷۲}{۱۸} = ۴ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

مماس مشترک‌های دو دایره

آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند، آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)

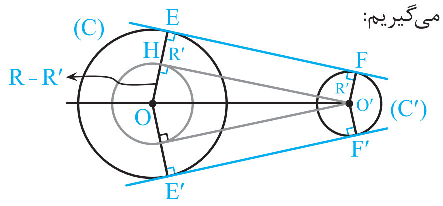
ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند. (خط Δ')





بنابه قرارداد اندازهٔ EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازهٔ CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره



آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

۲) از نقطهٔ O' مماس $O'H$ را بر دایرهٔ روبه‌رو رسم می‌کنیم.

۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ E قطع کند.

۴) مطابق شکل از نقطهٔ O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C' را در نقطهٔ F قطع کند. EF مماس مشترک خارجی دو دایره است. زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($O'F = R' \overset{\parallel}{=} EH$ و $\widehat{H} = ۹۰^\circ$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:

$$OO'^{۲} = OH^{۲} + O'H^{۲} \Rightarrow OO'^{۲} = (R - R')^{۲} + EF^{۲} \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

با فرض این‌که طول خط‌المرکزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

$$EF = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

مثال **دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۹ و طول خط‌المرکزین ۲۱ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.**

پاسخ: بنابه فرض $R = ۹$، $R' = ۶$ و $d = ۲۱$ است، در نتیجه داریم:

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۲۱^{۲} - (۹ - ۶)^{۲}} = \sqrt{۲۱^{۲} - ۳^{۲}} = \sqrt{۱۸ \times ۲۴} = ۶\sqrt{۱۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

مثال **شعاع‌های دو دایره ۲ و ۱۰ و طول خط‌المرکزین و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها به ترتیب $۴x + ۱$ و $۳x + ۳$ است. مقدار x و طول خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.**

پاسخ:

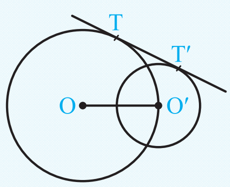
$$(۳x + ۳)^{۲} = (۴x + ۱)^{۲} - (۱۰ - ۲)^{۲} \Rightarrow ۹x^{۲} + ۱۸x + ۹ = ۱۶x^{۲} + ۸x + ۱ - ۶۴$$

$$\Rightarrow ۷x^{۲} - ۱۰x - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(۷x + ۱۸) = ۰ \Rightarrow x = ۴ \text{ یا } x = -\frac{۱۸}{۷}$$

جواب منفی قابل قبول نیست، پس $x = ۴$ و در نتیجه طول خط‌المرکزین دو دایره $۴x + ۱ = ۱۷$ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $۳x + ۳ = ۱۵$ است.

تست **دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۵ مفروضند. اگر دایرهٔ بزرگ‌تر از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر بگذرد، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟**

۱) ۴ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

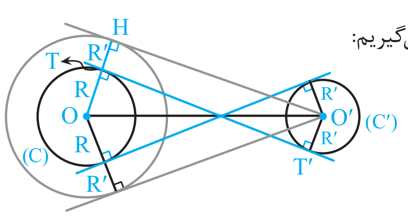


پاسخ: چون دایرهٔ بزرگ از مرکز دایرهٔ کوچک می‌گذرد، پس طول خط‌المرکزین دو دایره برابر شعاع دایرهٔ بزرگ است $OO' = R = ۵$ و در نتیجه داریم:

$$TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۵^{۲} - (۵ - ۱)^{۲}}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = \sqrt{۹} = ۳$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.



ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) به مرکز O و شعاع $R + R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

۲) از نقطهٔ O' مماس $O'H$ را بر دایرهٔ روبه‌رو رسم می‌کنیم.

۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایرهٔ (C) نقطهٔ T می‌نامیم.

۴) از نقطهٔ O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C') را در نقطهٔ T' قطع کند، خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است، زیرا $\widehat{T} = \widehat{T'} = ۹۰^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است، چون $O'T' = R' \overset{\parallel}{=} TH$ و $\widehat{H} = ۹۰^\circ$). اگر O' خارج دایرهٔ به مرکز O و شعاع $R + R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبهٔ طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل قبل و با فرض $OO'=d$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$ داریم:

$$OO'^{۲}=OH^{۲}+O'H^{۲}\Rightarrow d^{۲}=(R+R')^{۲}+TT'^{۲}\Rightarrow TT'=\sqrt{d^{۲}-(R+R')^{۲}}$$

نتیجه طول مماس مشترک داخلی دو دایره همواره از طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کوچک‌تر است.

مثال **دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۹ مفروض است. اندازهٔ مماس مشترک‌های داخلی آن را به‌دست آورید.**

پاسخ: بنابه فرض $R=۳$ ، $R'=۴$ و $d=۹$ است. بنابراین داریم:

$$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R+R')^{۲}}=\sqrt{۹^{۲}-۷^{۲}}=\sqrt{۲\times ۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

تست **اندازه‌های مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{۲۴}$ و $\sqrt{۴۸}$ است. حاصل‌ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟**

۱) ۴ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۶

پاسخ: فرض کنیم $EF=\sqrt{۲۴}$ و $CD=\sqrt{۴۸}$ ، بنابراین داریم:

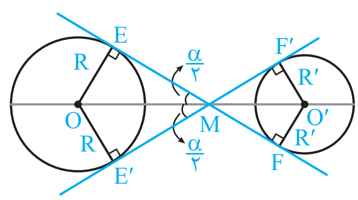
$$\begin{cases}EF^{۲}=d^{۲}-(R+R')^{۲}\\ CD^{۲}=d^{۲}-(R-R')^{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}CD^{۲}-EF^{۲}=(R+R')^{۲}-(R-R')^{۲}$$

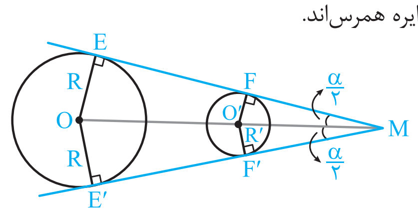
$$\Rightarrow CD^{۲}-EF^{۲}=R^{۲}+۲RR'+R'^{۲}-R^{۲}-R'^{۲}+۲RR'=۴RR'\Rightarrow RR'=\frac{CD^{۲}-EF^{۲}}{۴}\Rightarrow RR'=\frac{۴۸-۲۴}{۴}=\frac{۲۴}{۴}=۶$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المرکزین

اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند. هم‌چنین مماس‌مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند.





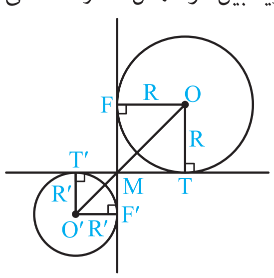
نکته۱ نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌ها و خط‌المرکزین، خط‌المرکزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند $\frac{OM}{O'M}=\frac{R}{R'}$

نکته۲ اگر α زاویهٔ بین مماس مشترک‌ها باشد، با فرض $(R>R')$ داریم:

زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی $\alpha\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R-R'}{OO'}$

زاویهٔ بین دو مماس مشترک داخلی $\alpha\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R+R'}{OO'}$

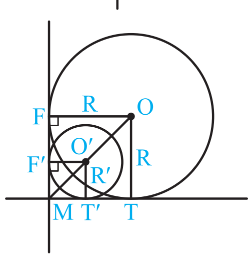
نکته۳ اگر مماس مشترک‌های داخلی دو دایره بر هم عمود باشند، آن‌گاه طول مماس مشترک داخلی آن‌ها برابر $R+R'$ و طول خط‌المرکزین دو دایره $\sqrt{۲}(R+R')$ است. زیرا چهارضلعی‌های $MTOF$، $MT'OF'$ مربع هستند.



$$FF'=TT'=MT+MT'=R+R'$$

$$OO'=OM+O'M=R\sqrt{۲}+R'\sqrt{۲}=\sqrt{۲}(R+R')$$

نکته۴ اگر مماس مشترک‌های خارجی دو دایره بر هم عمود باشند، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $R-R'(R>R')$ و طول خط‌المرکزین دو دایره $\sqrt{۲}(R-R')$ است.



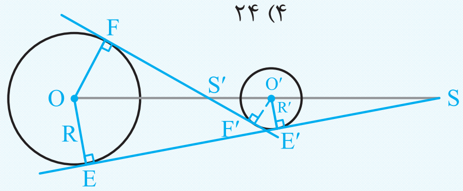
$$TT'=FF'=R-R'$$

$$OO'=OM-O'M=R\sqrt{۲}-R'\sqrt{۲}=\sqrt{۲}(R-R')$$

تست

دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ و خط‌المرکزین ۱۵ مفروض‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های داخلی از نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴



پاسخ: بنابه فرض $R=۸$ ، $R'=۴$ و $OO'=۱۵$. بنابراین داریم:

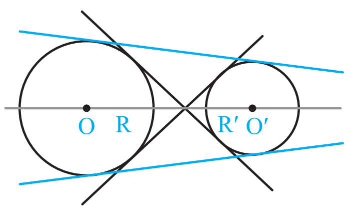
$$\overset{\Delta}{OFS'} \sim \overset{\Delta}{O'F'S'} \Rightarrow \frac{O'S'}{OS'}=\frac{O'F'}{OF} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{O'S'}{OO'}=\frac{R'}{R+R'}$$

$$\Rightarrow O'S'=۱۵\times\frac{۴}{۸+۴}=۵$$

$$\overset{\Delta}{O'SE'} \sim \overset{\Delta}{OSE} \Rightarrow \frac{O'S}{OS}=\frac{O'E'}{OE} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{O'S}{OO'}=\frac{R'}{R-R'} \Rightarrow O'S=۱۵\times\frac{۴}{۸-۴}=۱۵$$

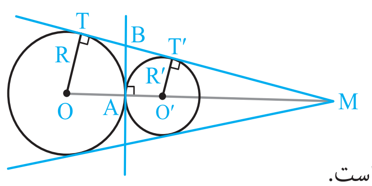
$SS'=O'S'+O'S=۵+۱۵=۲۰ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌های دو دایره



۱) دو دایره را متخارج گویند، هرگاه همهٔ نقاط دو دایره بیرون یکدیگر باشند و در این حالت همواره داریم $OO'>R+R'$. دو دایرهٔ متخارج دارای ۴ مماس مشترک می‌باشند.

$OO'>R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.



۲) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط آن‌ها بیرون یکدیگر باشند، مماس خارج نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO'=R+R'$. دو دایرهٔ مماس خارج دارای ۳ مماس مشترک هستند که دو تای آن‌ها خارجی و سومی داخلی است.

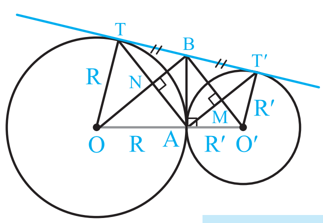
$OO'=R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره مماس خارج‌اند.

نکات: آ) مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ مماس خارج، همواره بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطهٔ تماس عمود است.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، برابر $TT'=۲\sqrt{RR'}$ است.

پ) مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ مماس خارج، پاره‌خط مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند. $(BT=BT')$

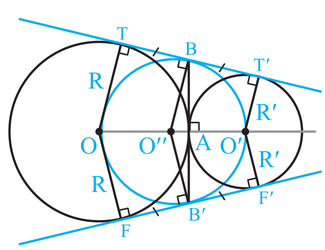
ت) در دو دایرهٔ مماس خارج نقطهٔ تماس دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی با دایره‌ها تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند. $(T\hat{A}T'=۹۰^\circ)$



زیرا در مثلث ATT' میانهٔ AB نصف ضلع TT' است.

چهارضلعی‌های $ABT'O'$ و $ABTO$ کایت هستند. پس $O'B$ عمودمنصف AT' و OB عمودمنصف AT است. بنابراین چهارضلعی $AMBN$ مستطیل است و نتیجه می‌شود:

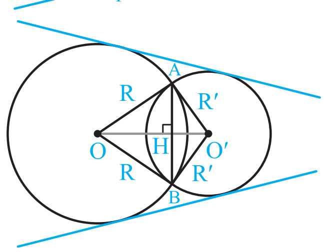
مثلثی که رأس‌های آن مراکز دو دایره و وسط مماس مشترک خارجی است، قائم‌الزاویه است. $(O\hat{B}O'=۹۰^\circ)$



ث) اگر α زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج باشد، آن‌گاه داریم $\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R-R'}{R+R'}$.

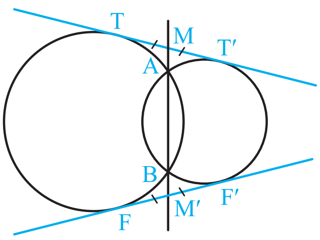
ج) در دو دایرهٔ مماس خارج، دایره به قطر OO' در نقاط وسط مماس مشترک‌های خارجی بر آن‌ها مماس است.

مطابق شکل مقابل، دایره به قطر OO' در نقاط B و B' وسط TT' و FF' بر خط‌های شامل TT' و FF' مماس است. $(OO''=O'O''=O''B=O''B'=\frac{R+R'}{۲})$



۳) دو دایره که فقط در دو نقطه مشترک باشند، متقاطع نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $|R-R'|<OO'<R+R'$. دو دایرهٔ متقاطع همواره دارای دو مماس مشترک خارجی هستند و مماس مشترک داخلی ندارند.

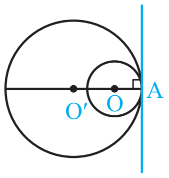
$|R-R'|<OO'<R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.



نکته در دو دایرهٔ متقاطع خط وتر مشترک دو دایره طول مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها را نصف می‌کند. زیرا:

$$\left.\begin{matrix} MT^{۲} = MA \times MB \\ MT'^{۲} = MA \times MB \end{matrix}\right\} \Rightarrow MT^{۲} = MT'^{۲} \Rightarrow MT = MT'$$

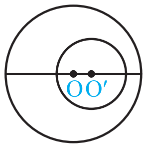
و به طریق مشابه داریم $M'F = M'F'$ و چون $TT' = FF'$ نتیجه می‌شود $MT = MT' = M'F = M'F'$.



۴) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط یکی از آن‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد، مماس درون نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = |R - R'|$

دو دایره مماس داخل هستند. $\Leftrightarrow OO' = |R - R'|$

نکته دو دایرهٔ مماس درون فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطهٔ تماس عمود است.



دو دایرهٔ متداخل

۵) دو دایره را متداخل گویند، هرگاه همهٔ نقاط یکی از آن‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد. در این حالت داریم $OO' < |R - R'|$. دو دایرهٔ متداخل مماس مشترک ندارند.

دو دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع‌های متفاوت یکی از حالات دو دایرهٔ متداخل است.

مثال

اندازهٔ شعاع‌های دو دایره ۴ و ۱۱ و طول مماس مشترک خارجی دو دایره $۷\sqrt{۳}$ است.

آ) طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست آورید.

ب) وضعیت دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.

پاسخ: بنابه فرض $R = ۱۱$، $R' = ۴$ و $TT' = ۷\sqrt{۳}$. داریم:

آ) $$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} \Rightarrow ۷\sqrt{۳} = \sqrt{d^{۲} - (۱۱ - ۴)^{۲}} \Rightarrow ۴۹ \times ۳ = d^{۲} - ۷^{۲}$$

$$\Rightarrow d^{۲} - ۴۹ = ۳ \times ۴۹ \Rightarrow d^{۲} = ۴ \times ۴۹ \Rightarrow d = ۲ \times ۷ = ۱۴$$

ب) از $R = ۱۱$، $R' = ۴$ و $d = ۱۴$ نتیجه می‌شود $R - R' < d < R + R'$. پس دو دایره متقاطع هستند.

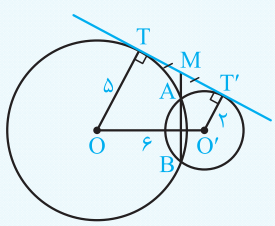
تست

دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ و طول خط‌المرکزین ۶ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اگر امتداد AB مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ M قطع کند، حاصل $MA \times MB$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۶/۷۵

پاسخ: امتداد AB طول پاره‌خط TT' را نصف می‌کند، یعنی M وسط TT' می‌باشد. بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم:

$$MT^{۲} = MA \times MB \Rightarrow MA \times MB = \left(\frac{TT'}{۲}\right)^{۲} \quad (۱)$$



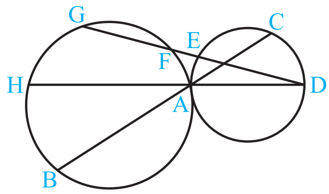
طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۶^{۲} - (۵ - ۲)^{۲}} = \sqrt{۳۶ - ۹} = \sqrt{۲۷} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow MA \times MB = \left(\frac{\sqrt{۲۷}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۲۷}{۴} = ۶/۷۵$$

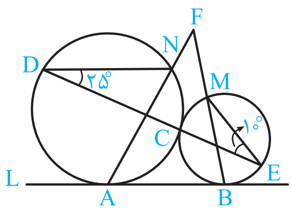
پس گزینهٔ (۴) درست است.

★۱۰۳. در شکل مقابل دو دایره در نقطهٔ A مماس خارج هستند، اگر اندازهٔ کمان FAB برابر °۱۲۰ و $\overset{\frown}{CE} = ۲\overset{\frown}{GH}$، آن‌گاه اندازهٔ کمان GH چند درجه است؟



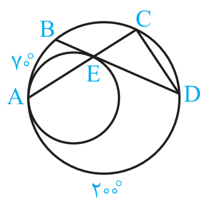
۱) ۴۰ ۲) ۳۶
۳) ۳۰ ۴) ۴۴

★۱۰۴. در شکل مقابل دو دایره در نقطهٔ C مماس خارج هستند و خط L در نقاط A و B بر دو دایره مماس است. خطی از نقطهٔ C می‌گذرد و دو دایره را در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر نقاط M و N چنان باشند که $M\hat{E}C = ۱۰^\circ$ و $C\hat{D}N = ۲۵^\circ$، آن‌گاه زاویهٔ برخورد AN و BM چند درجه است؟



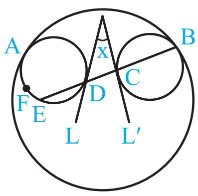
۱) ۶۵ ۲) ۵۵
۳) ۴۵ ۴) ۵۰

۱۰۵. در شکل مقابل دو دایره در نقطهٔ A مماس داخل هستند، وتر BD از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک در نقطهٔ E مماس است و امتداد AE دایرهٔ بزرگ را در نقطهٔ C قطع می‌کند. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۷۰^\circ$، $\overset{\frown}{AD} = ۲۰۰^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ D چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۱۸
۳) ۲۲/۵ ۴) ۱۵

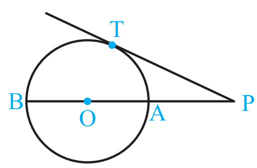
★۱۰۶. در شکل مقابل دو دایرهٔ کوچک‌تر بر دایرهٔ بزرگ مماس داخل هستند و خط‌های متقاطع L و L' بر این دو دایره مماس‌اند. اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AFE} = ۱۰۰^\circ$ باشد، آن‌گاه مقدار x کدام است؟



۱) °۱۰ ۲) °۲۰
۳) °۳۰ ۴) °۴۰

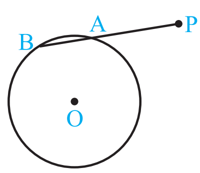
قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

☆۱۰۷. در شکل مقابل، شعاع دایره ۶، AB قطر و ۴ = PA می‌باشد. طول مماس PT کدام است؟



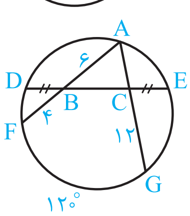
۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) ۱۴ ۴) ۸

☆۱۰۸. در شکل مقابل، ۵ = PA، ۳ = AB و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲۱}$
۲) $۲\sqrt{۱۴}$
۳) $۴\sqrt{۷}$
۴) $۳\sqrt{۷}$

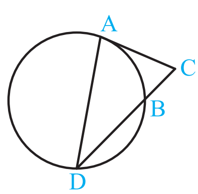
☆۱۰۹. در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟ (BD = CE)



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

(سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

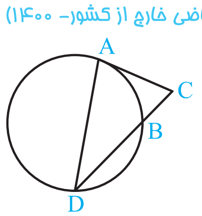
☆۱۱۰. در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$، آن‌گاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟



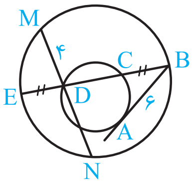
۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

☆۱۱۱. در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر DB = BC آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$



۱۱۲. در شکل مقابل AB بر دایرهٔ کوچک مماس است و طول آن ۶ می‌باشد. اگر $BC = DE$ و $MD = 4$ باشد آن‌گاه طول وتر MN کدام است؟

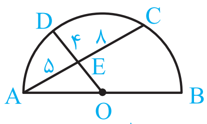
۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

☆۱۱۳. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد مماس درونی‌اند. اندازهٔ بزرگ‌ترین قطعهٔ مماس که یک سر آن بر روی دایرهٔ بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطهٔ تماس) بر روی دایرهٔ کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

۱) ۹ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) ۱۲ ۴) $8\sqrt{3}$

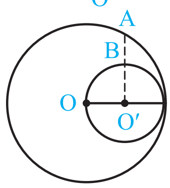
☆۱۱۴. نقطهٔ C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، که از نقطهٔ C می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$



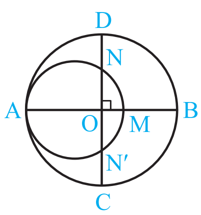
☆۱۱۵. در شکل روبه‌رو، O مرکز نیم‌دایره، $AE = 5$ ، $CE = 8$ و $DE = 4$ است. اندازهٔ OE کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷
۳) ۵ ۴) ۶



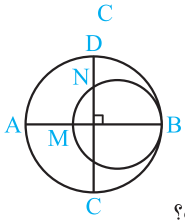
☆۱۱۶. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایرهٔ بزرگ، O' مرکز دایرهٔ کوچک، امتداد AB عمود بر OO' و طول AB برابر $3(3-\sqrt{3})$ سانتی‌متر است. شعاع دایرهٔ بزرگ چند سانتی‌متر است؟

۱) $3\sqrt{5}$ ۲) $3\sqrt{6}$
۳) $5\sqrt{3}$ ۴) $6\sqrt{3}$



☆۱۱۷. در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $MB = 16$ و $ND = 10$ باشد، مساحت بین دو دایره کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۱) 324π ۲) 625π
۳) 576π ۴) 336π



☆۱۱۸. در شکل روبه‌رو، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = 16$ ، $DN = 10$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶
۳) ۱۷ ۴) ۲۵

★۱۱۹. در مثلث به اضلاع ۶، ۵ و ۵، دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بزرگ‌ترین ضلع از وسط کمان نظیر آن کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۲

☆۱۲۰. از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم. طول مماس ۱۶ و طول بزرگ‌ترین قطعهٔ قاطع ۳۲ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط قاطع ۵ باشد، شعاع دایره کدام است؟

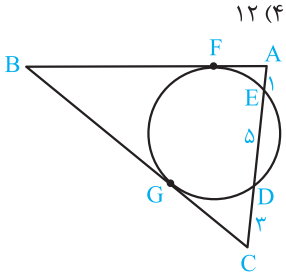
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

☆۱۲۱. از نقطهٔ M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر آن رسم شده است. اگر طول مماس ۸ و فاصلهٔ نقاط تقاطع قاطع با دایره تا نقطهٔ تماس به ترتیب ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین نقطهٔ تقاطع کدام است؟

۱) $\frac{22}{3}$ ۲) $\frac{20}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $\frac{14}{3}$

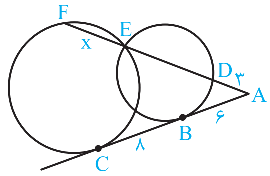
۱۲۲. اندازهٔ اضلاع مثلث ABC برابر $AB = 8$ ، $AC = 6$ و $BC = 7$ است. مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در نقطهٔ A امتداد ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اندازهٔ AD کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲



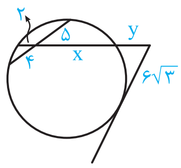
☆۱۲۳. مطابق شکل یک دایره بر اضلاع AB و BC در نقاط F و G مماس است. اگر دایره ضلع AC را قطع کند و سه پاره‌خط به طول‌های ۱، ۵ و ۳ روی آن ایجاد کند، آن‌گاه $|BC - AB|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$
۳) $6-\sqrt{6}$ ۴) $3-\sqrt{3}$



★۱۲۴. در شکل مقابل، خط شامل BC بر دو دایره مماس است و قاطع گذرنده از نقطهٔ E آن را در نقطهٔ A قطع کرده است. اگر $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ و $AD = ۳$ ، آن‌گاه اندازهٔ وتر EF کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) ۵

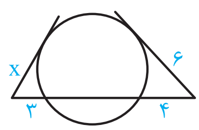


☆۱۲۵. در شکل مقابل y کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

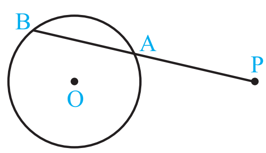
☆۱۲۶. در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطهٔ C در امتداد AB به فاصلهٔ $CB = ۲\sqrt{۲}$ انتخاب شده است، طول قطعهٔ مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) $۵\sqrt{۲}$



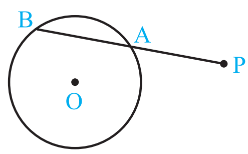
☆۱۲۷. در شکل مقابل اندازهٔ x چند واحد است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۵



☆۱۲۸. نزدیک‌ترین نقطه از دایرهٔ به شعاع ۵ واحد تا نقطهٔ مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$ ، اندازهٔ AB چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

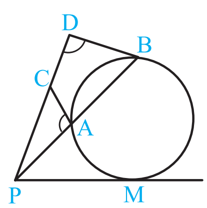


☆۱۲۹. فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازهٔ PA چند برابر شعاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱}-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$ ۳) $\sqrt{۱۱}-۲$ ۴) $\sqrt{۱۳}-۲$

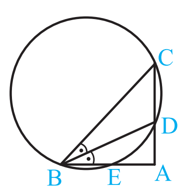
☆۱۳۰. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، مماس بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعهٔ مماس چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰



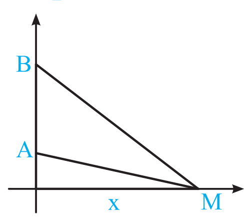
★۱۳۱. در شکل مقابل، $P\hat{A}C = P\hat{D}B$ ، $PC = ۹$ و $CD = ۷$ ، اندازهٔ مماس PM چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۸ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲



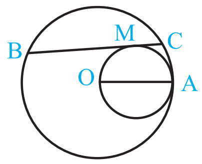
★۱۳۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ مطابق شکل BD نیمساز زاویهٔ B است. دایرهٔ محیطی مثلث BCD ضلع AB را در E قطع می‌کند. اگر $AC = ۶$ و $AE = ۱$ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟

۱) ۱۷/۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶/۵ ۴) ۱۶



★۱۳۳. دو نقطهٔ A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطهٔ M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود، تا زاویهٔ AMB بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

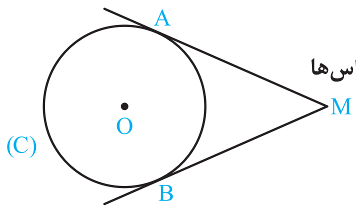
۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) ۷



★۱۳۴. در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $MO^۲$ ۲) $MA^۲$ ۳) $OA^۲$ ۴) $MA.MO$

مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه خارج دایره بر آن



☆۱۳۵. در شکل مقابل از نقطهٔ M دو مماس MA و MB بر دایرهٔ $C(O,6)$ رسم شده است. اگر طول مماس‌ها برابر ۸ باشد، دورترین فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقاط دایره کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۳۶. از نقطهٔ A دو مماس به طول ۱ بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شود که زاویهٔ بین آن‌ها 120° است. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط دایره کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☆۱۳۷. از نقطهٔ M خارج دایره به شعاع $2\sqrt{3}$ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره ۶ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نقاط تماس کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{6}$

☆۱۳۸. از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

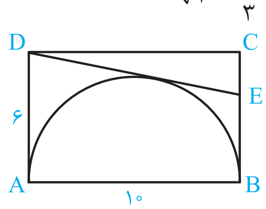
۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $3\sqrt{2}$

☆۱۳۹. در مثلث ABC $(AB = AC)$، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = 6$ و ارتفاع $AH = 4$ باشد، شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۵

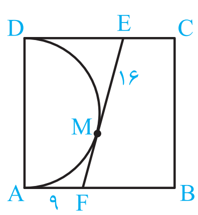
☆۱۴۰. از نقطهٔ A خارج دایره به شعاع ۱ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویهٔ بین دو مماس 60° باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ بین دایره و مماس‌ها کدام است؟

۱) $2-\frac{\pi}{6}$ ۲) $2-\frac{\pi}{3}$ ۳) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$



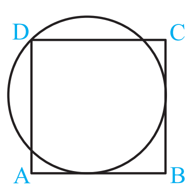
★۱۴۱. در مستطیل ABCD مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. نقطهٔ E روی ضلع BC چنان است که DE بر نیم‌دایره مماس است. طول پاره‌خط CE کدام است؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{11}{6}$



★۱۴۲. مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و EF در نقطهٔ M بر نیم‌دایره به قطر AD مماس است. اگر $ME = 16$ و $AF = 9$، آن‌گاه مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴۸۴ ۲) ۶۲۵ ۳) ۵۲۹ ۴) ۵۷۶



★۱۴۳. در شکل مقابل، ABCD مستطیل است و دایره‌ای از رأس D می‌گذرد و بر دو ضلع AB و BC مماس است. اگر $AB = 16$ و $BC = 18$ باشد، آن‌گاه شعاع دایره کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

وضعیت دو دایره نسبت به هم

۱۴۴. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ متقاطع‌اند و مراکز آن‌ها بیرون یکدیگر قرار دارد. طول خط‌المرکزین دو دایره کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☆۱۴۵. دو دایره به شعاع‌های $a+1$ و $2a+4$ و طول خط‌المرکزین $7a-15$ متخارج هستند؛ به‌ازای کم‌ترین مقدار صحیح a، بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

☆۱۴۶. فرض کنید طول خط‌المرکزین دو دایره با شعاع‌های $6a-1$ و $2-a^2$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) ۶ ۴) ۷

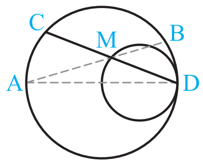
☆**۱۴۷. دو دایره مماس داخل هستند. اگر مساحت ناحیهٔ بین دو دایره ۱۴۴π و طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۸ باشد، آن‌گاه نسبت طول شعاع دایرهٔ بزرگ به شعاع دایرهٔ کوچک کدام است؟**

۱) ۱/۸ ۲) ۲/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳

☆**۱۴۸. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطهٔ A مماس درونی هستند. وتر BC از دایرهٔ بزرگ موازی خط‌المرکزین و بر دایره کوچک در نقطهٔ P مماس است. حاصل $PB \times PC$ کدام است؟** (سراسری ریاضی- ۹۷)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

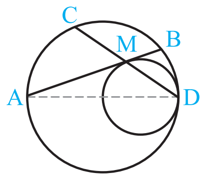
☆**۱۴۹. در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد مماس داخل و اندازهٔ کمان AC برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است. حاصل $MA \times MB$ کدام است؟** (سراسری ریاضی- ۹۹)



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۱۲

تذکر: دو اشکال بر این تست وارد است. اول این‌که اندازهٔ کمان، معمولاً برای اندازه‌اش برحسب درجه به کار می‌رود، پس بهتر بود ذکر می‌شد طول کمان. دوم این‌که AD باید ذکر شود که قطر دایرهٔ بزرگ است.

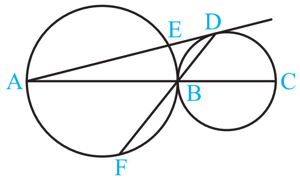
☆**۱۵۰. در شکل روبه‌رو، دو دایره در نقطهٔ D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری برابر است. وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ داخل در نقطهٔ M مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ کدام است؟** (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

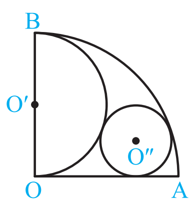
تذکر: در صورت تست باید ذکر میشد که AD قطر دایرهٔ بزرگ است.

★**۱۵۱. در شکل روبه‌رو دو دایره در نقطهٔ B مماس خارج هستند و قطر دایره‌ها $AB = ۶$ و $BC = ۴$ می‌باشد. اگر AD مماس بر دایرهٔ کوچک و امتداد BD دایرهٔ بزرگ را در F قطع کند، آن‌گاه حاصل $BD \times DF$ کدام است؟**



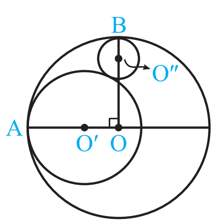
۱) ۱۲ ۲) ۱۵
۳) ۱۸ ۴) ۲۴

☆**۱۵۲. در شکل مقابل دایره بر نیم‌دایره، ربع دایره و شعاع OA مماس است. شعاع دایرهٔ کوچک چه کسری از شعاع ربع دایره است؟**



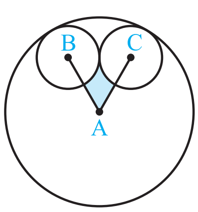
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

★**۱۵۳. در شکل مقابل دایره‌ها دو به دو مماس هستند. اگر شعاع دو دایرهٔ بزرگ‌تر ۵ و ۳ باشد. شعاع کوچک‌ترین دایره کدام است؟**



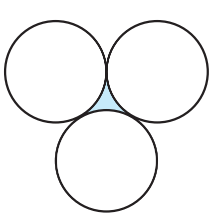
۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵
۳) ۱/۵ ۴) ۱

۱۵۴. سه دایره مطابق شکل دوبه‌دو بر هم مماس هستند و A، B و C مرکز دایره‌ها می‌باشند. اگر شعاع دایرهٔ بزرگ ۳ و شعاع‌های دایره‌های کوچک برابر ۱ باشند، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$
۳) $۲\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

☆**۱۵۵. در شکل مقابل سه دایره به شعاع‌های مساوی، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. اگر محیط هر دایره ۳۶ باشد، محیط ناحیهٔ رنگی کدام است؟**

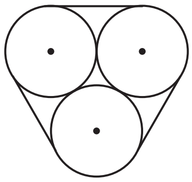


۱) ۱۸ ۲) ۶
۳) ۳۶ ۴) ۱۲

☆**۱۵۶.** در پرسش قبل، اگر شعاع دایره‌ها برابر یک باشد، مساحت ناحیهٔ بین آن‌ها کدام است؟

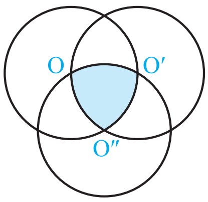
۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۳) $\pi - \sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳} - \pi$

☆**۱۵۷.** سه دایره مطابق شکل با یک طناب بسته شده‌اند. اگر شعاع دایره‌ها یک باشد، طول طناب کدام است؟



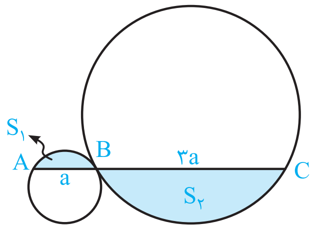
۱) $۲\pi + ۲$
۲) $۳\pi + ۴$
۳) $۶ + ۲\pi$
۴) $۶\pi + ۲$

☆**۱۵۸.** در شکل مقابل سه دایرهٔ مساوی به شعاع واحد از مرکز یکدیگر می‌گذرند، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



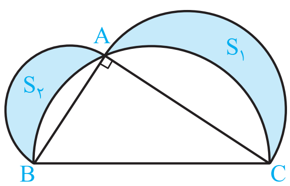
۱) $\pi - \sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{\pi - \sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۵۹. در شکل مقابل دو دایره مماس خارج هستند. اگر $S_۱ + S_۲ = ۴۰\pi$ آن‌گاه $S_۱$ کدام است؟



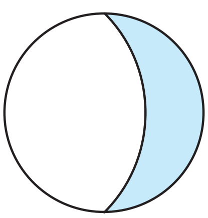
۱) ۵π
۲) ۴π
۳) ۶π
۴) ۸π

★**۱۶۰.** در شکل روبه‌رو، ABC مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع $AB = ۵$ و $AC = ۱۲$ است. سه نیم‌دایره به قطرهای BC، AC و AB رسم شده‌اند. حاصل $S_۱ + S_۲$ کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)



۱) ۶۰ ۲) ۳۰
۳) ۲۰π ۴) ۱۰π

★**۱۶۱.** در شکل مقابل کمانی از یک دایرهٔ دیگر رسم شده است که مرکز آن روی دایرهٔ مفروض است و از دو سر قطری از آن می‌گذرد. نسبت مساحت غیررنگی به مساحت رنگی کدام است؟



۱) $\pi - ۱$ ۲) π
۳) $\sqrt{۲}\pi - ۱$ ۴) $\pi - \sqrt{۲}$

مماس مشترک‌های داخلی و خارجی

☆**۱۶۲.** طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، برابر $\sqrt{۵}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

☆**۱۶۳.** دو دایرهٔ مماس خارج به شعاع‌های $R_۱ = ۸$ و $R_۲ = ۲$ مفروض‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی و O و O' مراکز دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

☆**۱۶۴.** دو دایره مماس خارج‌اند. اگر یک زاویهٔ چهارضلعی حاصل از وصل مراکز دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۶۰° باشد، آن‌گاه نسبت شعاع‌های دو دایره کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

☆**۱۶۵.** اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است، خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۷\sqrt{۶}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ (سراسری ریاضی- ۹۱)

☆**۱۶۶.** زاویهٔ بین خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۷/۵ و ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ درجه است. طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۴)

۱) ۴۲/۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷/۵ ۴) ۵۰

☆**۱۶۷.** شعاع دو دایرهٔ خارج هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویهٔ بین مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی- ۸۴)

۱) ۵۵ ۲) ۵۷/۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۲/۵

☆**۱۶۸.** طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کم‌ترین فاصلهٔ نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی- ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆**۱۶۹.** دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆**۱۷۰.** در دو دایرهٔ متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{OO'}{۲}$ می‌باشد. اندازهٔ مماس مشترک محدود به دو نقطهٔ تماس این دو دایره چند واحد است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۴

☆**۱۷۱.** دو دایرهٔ $C(O,۹)$ و $C'(O',۳)$ متقاطع‌اند. اگر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل نقاط تماس مماس مشترک خارجی و مراکز دایره‌ها برابر ۴۸ باشد، طول قسمتی از خط‌المرکزین که بین دو دایره قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

★**۱۷۲.** دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ مماس داخل‌اند. چند وتر به طول $۴\sqrt{۱۰}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

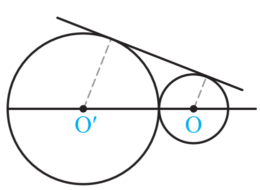
★**۱۷۳.** دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۱۳ مماس خارج‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تماس دو دایره از مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

۱) ۸/۶ ۲) ۹/۱ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۸

★**۱۷۴.** دو دایرهٔ نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO'، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) متقاطع ۲) مماس ۳) متخارج ۴) نامشخص

☆**۱۷۵.** دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ واحد بر هم مماس‌اند. دایرهٔ به قطر OO' با مماس خارجی در نقطهٔ M مشترک‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ تماس دو دایره، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

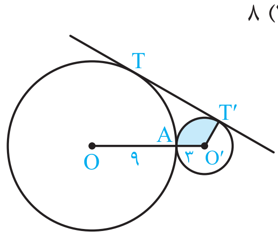


۱) ۶ ۲) ۶/۵
۳) ۷ ۴) ۷/۵

★**۱۷۶.** دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۶ و طول خط‌المرکزین ۷ در نقاط A و B متقاطع هستند. امتداد AB مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند. حاصل $MA \times MB$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

☆**۱۷۷.** در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ رنگی چند برابر π است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

☆**۱۷۸.** دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۸ و طول خط‌المرکزین ۱۹ مفروض‌اند. فرض کنیم M نقطهٔ تماس مماس مشترک داخلی دو دایره با دایرهٔ کوچک باشد. دورترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ بزرگ‌تر، از M کدام است؟

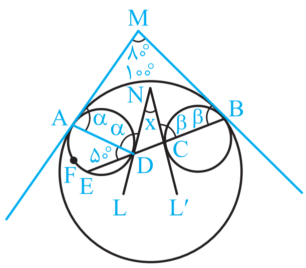
۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰

★**۱۷۹.** طول مماس مشترک دو دایرهٔ متقاطع به شعاع‌های ۹ و ۱۲ برابر $۶\sqrt{۶}$ است. طول وتر مشترک دو دایره کدام است؟

۱) ۱۴/۴ ۲) ۱۹/۶ ۳) ۱۶/۸ ۴) ۱۲/۸

۱۰۶ — ۱ **۲** ۳ ۴

خطهای مماس بر دایره‌ها در نقاط A و B را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را M می‌نامیم. زاویهٔ $\widehat{M}$ و کمان $\overset{\frown}{AB}$ مکمل یکدیگرند، پس $\widehat{M}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$. همچنین وتر AD را رسم می‌کنیم؛ اندازهٔ زاویهٔ محاطی $A\widehat{D}E$ برابر ۵۰° است. با فرض $M\widehat{A}D=\alpha$ به کمک زاویهٔ ظلی نتیجه می‌شود $A\widehat{D}N=\alpha$، همچنین با استدلال مشابه با فرض $M\widehat{B}C=\beta$ نتیجه می‌شود $B\widehat{C}N=\beta$ و در چهارضلعی AMBD داریم:



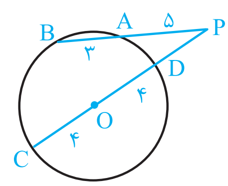
$$\alpha+۸۰^\circ+\beta+A\widehat{D}B=۳۶۰^\circ$$
$$A\widehat{D}B=۱۸۰^\circ-۵۰^\circ=۱۳۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta+۸۰^\circ+۱۳۰^\circ=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=۳۶۰^\circ-۲۱۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{NCD}: x+۱۸۰^\circ-(\alpha+۵۰^\circ)+(۱۸۰^\circ-\beta)=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow x=\alpha+\beta-۱۳۰^\circ=۱۵۰^\circ-۱۳۰^\circ=۲۰^\circ$$

۱۰۷ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$PT^۲=PA.PB=۴\times(۴+۶+۶)=۴\times۱۶\Rightarrow PT=۲\times۴=۸$$

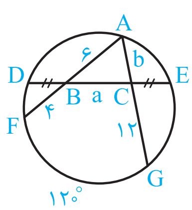
۱۰۸ — ۱ **۲** ۳ ۴



$$PA.PB=PD.PC\Rightarrow ۵\times(۵+۳)=PD.(PD+۸)$$
$$\Rightarrow PD^۲+۸PD-۴۰=۰\Rightarrow PD=-۴\pm\sqrt{۱۶+۴۰}$$
$$\xrightarrow{PD>۰} PD=-۴+\sqrt{۵۶}=-۴+۲\sqrt{۱۴}$$
$$PO=PD+OD=-۴+۲\sqrt{۱۴}+۴=۲\sqrt{۱۴}$$

۱۰۹ — ۱ **۲** ۳ ۴

فرض کنیم $DB=CE=x$، در این صورت به کمک رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:



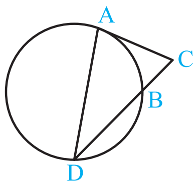
$$AB\times BF=DB\times BE$$
$$\Rightarrow ۶\times۴=x\times(a+x)\quad(۱)$$
$$AC\times CG=DC\times CE$$
$$\Rightarrow b\times۱۲=(a+x)\times x\quad(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow ۱۲b=۲۴\Rightarrow b=۲$$

زاویهٔ محاطی $\widehat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{GF}}{۲}=\dfrac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\widehat{A}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۲\times\sin۶۰^\circ$$
$$=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

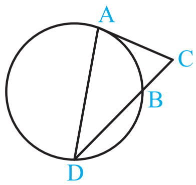
۱۱۰ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم:



$$AC^۲=BC\times CD$$
$$\xrightarrow{AC=\sqrt{۳}BC\ (\text{فرض})}(\sqrt{۳}BC)^۲=BC\times CD$$
$$\Rightarrow ۳BC^۲=BC\times CD$$
$$\Rightarrow ۳BC=CD\Rightarrow ۳BC=DB+BC$$
$$\Rightarrow ۲BC=DB\Rightarrow \frac{DB}{BC}=۲$$

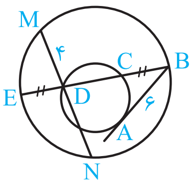
۱۱۱ — ۱ ۲ ۳ **۴**



بنا به رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم:

$$AC^۲=BC\times CD$$
$$\xrightarrow[(\text{فرض})]{DB=BC}AC^۲=BC\times(BC+DB)=BC\times(BC+BC)$$
$$\Rightarrow AC^۲=۲BC^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۲}BC\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\sqrt{۲}$$

۱۱۲ — ۱ ۲ ۳ **۴**



فرض کنیم $BC=DE=x$ و $CD=y$، بنا به رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع در دایرهٔ کوچک داریم:

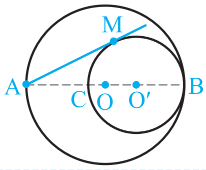
$$AB^۲=BC\times BD\Rightarrow ۶^۲=x(x+y)$$
$$\Rightarrow x(x+y)=۳۶\quad(۱)$$

بنا به رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ بزرگ می‌توان نوشت:

$$MD\times ND=DE\times BD\Rightarrow ۴\times ND=x\times(x+y)\quad(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow ۴\times ND=۳۶\Rightarrow ND=۹$$
$$MN=MD+ND=۴+۹=۱۳$$

۱۱۳ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنابه فرض دو دایره مماس داخل‌اند و $O'B=O'C=۹$ و $OA=OB=۱۲$. دورترین نقطهٔ دایرهٔ بزرگ از نقاط دایرهٔ کوچک نقطهٔ A است. بزرگ‌ترین مماس از این نقطه بر دایرهٔ کوچک رسم می‌شود و داریم:

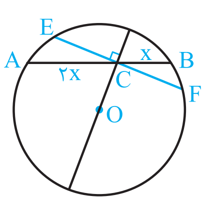


$$AM^۲=AC.AB=(AB-BC).AB$$
$$\Rightarrow AM^۲=(۲۴-۱۸)\times۲۴=۱۴۴$$
$$\Rightarrow AM=۱۲$$

۱۱۴ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنابه فرض نقطهٔ C وتر $AB=۹$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس $BC=x$ و $AC=۲x$ و در نتیجه:

$$AB=۹\Rightarrow ۳x=۹\Rightarrow x=۳\Rightarrow BC=۳\quad,\quad AC=۶$$

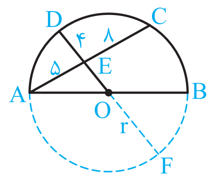


کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ C رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از نقطهٔ C عمود است، یعنی وتر EF. داریم:

$$CE.CF=AC.BC\Rightarrow CE^۲=CF^۲=۶\times۳=۱۸$$
$$\Rightarrow CE=CF=۳\sqrt{۲}\quad,\quad EF=۲CE=۲CF=۶\sqrt{۲}$$

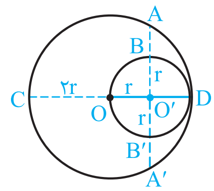
۱۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴

مطابق شکل اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، $OE = r - ۴$ می‌شود و داریم:



$$EF.DE = AE.CE$$
$$\Rightarrow ۴(r - ۴ + r) = ۵ \times ۸$$
$$\Rightarrow ۲r - ۴ = ۱۰ \Rightarrow r = ۷$$
$$OE = r - ۴ = ۷ - ۴ = ۳$$

۱۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

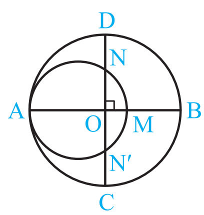


بنابه فرض $AB = ۳(۳ - \sqrt{۳})$ داریم:

$$O'A \times O'A' = O'C \times O'D$$
$$\Rightarrow O'A^{۲} = ۳r \times r$$
$$\Rightarrow (O'B + AB)^{۲} = ۳r^{۲} \Rightarrow r + ۳(۳ - \sqrt{۳}) = \sqrt{۳}r$$
$$\Rightarrow r(\sqrt{۳} - ۱) = ۳(۳ - \sqrt{۳}) \Rightarrow r = \frac{۳\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۱)}{\sqrt{۳} - ۱} = ۳\sqrt{۳}$$

شعاع دایرهٔ بزرگ $= ۲r = ۶\sqrt{۳}$

۱۱۷ ۱ ۲ ۳ **۴**



شعاع دایرهٔ بزرگ را R فرض می‌کنیم. داریم:

$$ON = ON' = R - ۱۰$$
$$OM = R - ۱۶$$
$$OA = R$$

بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ کوچک داریم:

$$OA \times OM = ON \times ON' \Rightarrow R(R - ۱۶) = (R - ۱۰)(R - ۱۰)$$
$$\Rightarrow R^{۲} - ۱۶R = R^{۲} - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

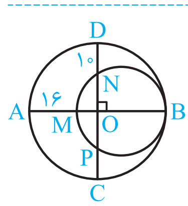
قطر دایرهٔ کوچک $AM = ۲r$ است. پس می‌توان نوشت:

$$AM = AB - BM \Rightarrow ۲r = ۲R - ۱۶ = ۵۰ - ۱۶ = ۳۴$$
$$\Rightarrow r = ۱۷$$

مساحت ناحیهٔ بین دو دایره $= \pi R^{۲} - \pi r^{۲} = \pi(۲۵^{۲} - ۱۷^{۲})$

$$= \pi(۶۲۵ - ۲۸۹) = ۳۳۶\pi$$

۱۱۸ ۱ ۲ **۳** ۴



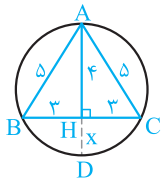
شعاع دایرهٔ بزرگ را R و شعاع دایرهٔ کوچک را r فرض می‌کنیم. قطر MB در دایرهٔ کوچک بر وتر PN عمود است، پس آن را نصف می‌کند. بنابراین:

$$OP = ON = OD - DN = R - ۱۰$$
$$OM = OA - AM = R - ۱۶ \text{ ، } OB = R$$

بنا به رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ کوچک داریم:

$$OM \times OB = ON \times OP \Rightarrow (R - ۱۶) \times R = (R - ۱۰) \times (R - ۱۰)$$
$$\Rightarrow R^{۲} - ۱۶R = R^{۲} - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$
$$MB = AB - AM \Rightarrow ۲r = ۲ \times ۲۵ - ۱۶ \Rightarrow r = \frac{۵۰ - ۱۶}{۲} = \frac{۳۴}{۲} = ۱۷$$

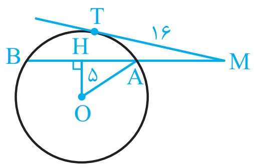
۱۱۹ **۱** ۲ ۳ ۴



مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ارتفاع AH میانه، نیمساز و عمودمنصف است؛ امتداد آن از وسط کمان نظیر BC می‌گذرد و داریم:

$$AH \times DH = BH \times CH \Rightarrow x = \frac{۳ \times ۳}{۴} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

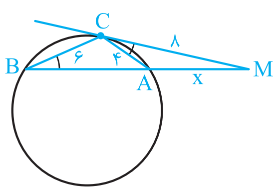
۱۲۰ ۱ ۲ ۳ **۴**



بنابه فرض $MB = ۳۲$ ، $MT = ۱۶$ و $OH = ۵$. داریم:

$$MT^{۲} = MA.MB \Rightarrow ۱۶^{۲} = MA \times ۳۲ \Rightarrow MA = ۸$$
$$AB = MB - MA = ۳۲ - ۸ = ۲۴ \Rightarrow AH = BH = ۱۲$$
$$OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} = ۵^{۲} + ۱۲^{۲} = ۱۳^{۲} \Rightarrow OA = ۱۳$$

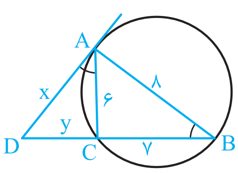
۱۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴



دو مثلث MAC و MCB به حالت (زز) متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{MB} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow MB = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲ \\ MC^{۲} = MA.MB \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۱۲ \times x = ۸^{۲} \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۱۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

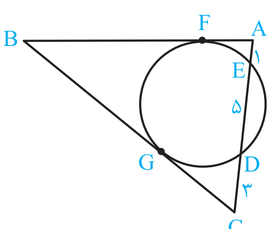
۱۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴**



$$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{BDA} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y + ۷} = \frac{۶}{۸} = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۴y \\ ۴x = ۳y + ۲۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶x = ۹x + ۸۴ \Rightarrow x = \frac{۸۴}{۷} = ۱۲$$

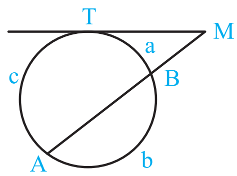
۱۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴

طول دو مماس BF و BG برابرند $(BF = BG)$ و داریم:

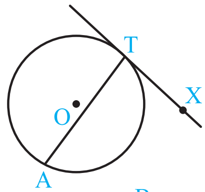


$$AF^{۲} = AE.AD$$
$$\Rightarrow AF^{۲} = ۱ \times ۶ \Rightarrow AF = \sqrt{۶}$$
$$CG^{۲} = CD.CE = ۳ \times ۸$$
$$\Rightarrow CG = ۲\sqrt{۶}$$
$$|BC - AB| = |BG + CG - BF - AF| = |CG - AF|$$
$$= |۲\sqrt{۶} - \sqrt{۶}| = \sqrt{۶}$$

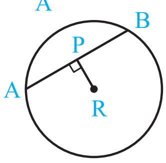
۲۸. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB}=a$، $\widehat{BA}=b$، $\widehat{AT}=c$ و $\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۵}$ اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید. (نهایی- خرداد ۹۴)



۲۹. اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی ATX مساوی $(۶-۲\alpha)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\widehat{AT}$ برابر $(۳۳+۳\alpha)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATX را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۴)



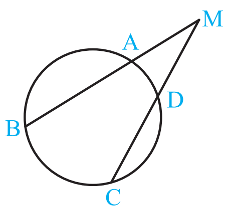
۳۰. با توجه به شکل روبه‌رو، اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=۶$، آن‌گاه طول AP و AB را به‌دست آورید. (R مرکز دایره است.) (نهایی- دی ۹۳)



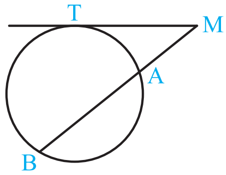
قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

۳۱. ثابت کنید هرگاه وترهای AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB=MD.MC$ (نهایی- دی ۹۵، خرداد ۹۵ و خرداد ۹۲)

۳۲. ثابت کنید اگر امتداد دو وتر AB و CD مطابق شکل در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB=MD.MC$ (نهایی- خرداد ۹۴)



۳۳. ثابت کنید اگر مطابق شکل از نقطهٔ M یک خط مماس و یک قاطع بر دایرهٔ مفروض رسم کنیم، آن‌گاه $MT^۲=MA\times MB$ (نهایی- دی ۹۱ و خرداد ۹۳)

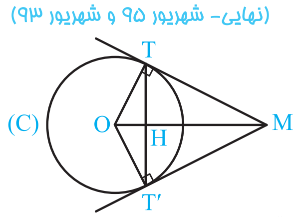


۳۴. ثابت کنید اندازهٔ دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، با هم برابر است. (نهایی- شهریور ۹۵ و شهریور ۹۳)

۳۵. در شکل مقابل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT′ بر دایرهٔ C(O،R) رسم شده است.

آ) ثابت کنید OM نیمساز زوایای TMT′ و TOT′ است.

ب) ثابت کنید OM عمودمنصف TT′ است.

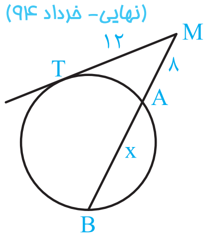


۳۶. ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، دو برابر واسطهٔ هندسی شعاع‌های دو دایره است.

۳۷. ثابت کنید خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست.

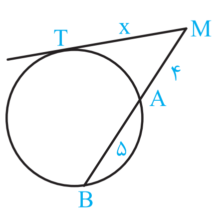
۳۸. دایرهٔ C(O،R) و نقطهٔ M در خارج این دایره داده شده‌اند. از نقطهٔ M بر این دایره دو مماس رسم کنید (مراحل رسم را توضیح دهید). (نهایی- خرداد ۹۴)

۳۹. با توجه به شکل مقابل، مقدار x را تعیین کنید. (نهایی- دی ۹۵)



۴۰. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۵)

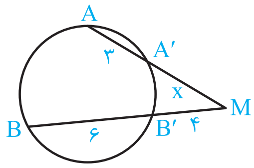
۴۱. در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۵)



۴۲. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین $d=۱۳$ برابر $۸-۵x$ باشد. (نهایی- خرداد ۹۵)

۴۳. مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المرکزین $d = ۱۳$ برابر $۵a - ۳$ باشد. (نهایی- شهریور ۹۴)

۴۴. در شکل مقابل مقدار x را محاسبه کنید. (نهایی- دی ۹۴)

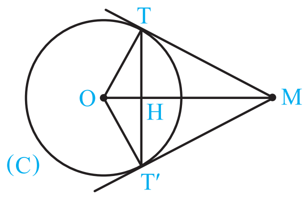


۴۵. دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ سانتی‌متر مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۳x + ۱$ باشد. (نهایی- دی ۹۴)

۴۶. دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس‌اند. H نقطهٔ برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید: (نهایی- شهریور ۸۶)

آ) خط OM نیمساز زاویه‌های $T\widehat{M}T'$ و $T\widehat{O}T'$ است.

ب) $TT'.OM = ۲R.MT$



۴۷. دایرهٔ $C(O,۵)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ $۵\sqrt{۲}$ از مرکز دایرهٔ C داده شده‌اند. MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماس‌اند. (نهایی- خرداد ۹۳)

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

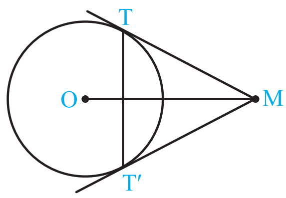
ب) نوع چهارضلعی $OTMT'$ را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۴۸. دایرهٔ $C(O,۴)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌اند (T و T' نقطه‌های تماس‌اند). (نهایی- شهریور ۸۸)

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

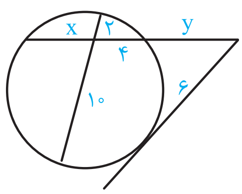
ب) طول وتر TT' را به‌دست آورید.

پ) اندازهٔ زاویهٔ TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

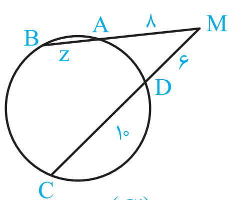


۴۹. دو دایره به شعاع ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۵x + ۲$ باشد. (نهایی- خرداد ۹۳)

۵۰. در شکل مقابل مقدارهای x و y را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۳)



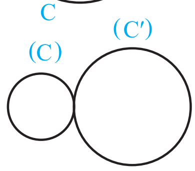
۵۱. با توجه به شکل، مقدار z را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۲)



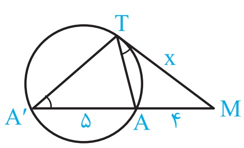
۵۲. شکل مقابل نشان‌دهندهٔ دو دایرهٔ مماس برون است. (نهایی- خرداد ۹۱)

آ) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟

ب) اگر $R = ۴$ و $R' = ۹$، آن‌گاه اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید.



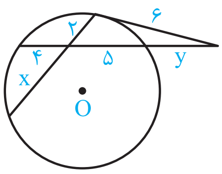
۵۳. مقدار x را در شکل روبه‌رو به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۰)



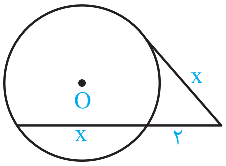
۵۴. مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط‌المرکزین $d = ۱۰$، برابر $۳a - ۱$ باشد. سپس تعیین کنید، این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند. (نهایی- شهریور ۹۰)

۵۵. طول خط‌المرکزین در دو دایرهٔ متقاطع به شعاع ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۹۰)

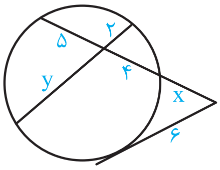
۵۶. با توجه به شکل، مقدار x و y را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۸۹)



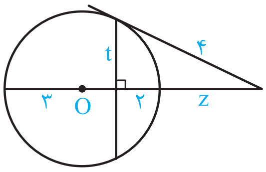
۵۷. در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۸۸)



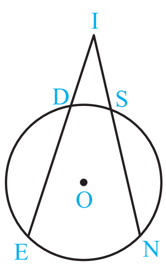
۵۸. در شکل مقابل x و y را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۸۶)



۵۹. در شکل مقابل مقدار z و t را به‌دست آورید (O مرکز دایره است). (نهایی- شهریور ۸۵)



۶۰. در شکل روبه‌رو دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید $IS = ID$ (نهایی- دی ۸۴)



۶۱. دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (نهایی- شهریور ۸۶)

۶۲. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار x را چنان تعیین کنید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $(2x - 2)$ باشد. (نهایی- خرداد ۸۷)

۶۳. دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط‌المرکزین برابر $2x + 1$ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $2x$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید. (نهایی- خرداد ۸۸)

۶۴. اگر شعاع‌های دو دایره نامساوی باشند، ثابت کنید مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین آن‌ها همرس‌اند.

۶۵. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند.

قسمت سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

۶۶. در سؤالات زیر گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (نهایی- خرداد ۹۵)

آ) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمودمنصف‌های اضلاع ۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

ب) مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمودمنصف‌های اضلاع ۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

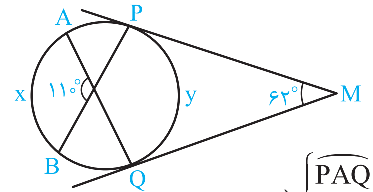
۶۷. ثابت کنید یک چندضلعی محاطی، است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس باشند.

۶۸. ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند. (نهایی- شهریور ۹۱)

۶۹. ثابت کنید در هر شش‌ضلعی محاطی مجموع زوایا به طور یک‌درمیان برابر 360° است.

۷۰. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی برابر اندازهٔ زاویهٔ خارجی مقابل به آن است.

۲۳



$$\begin{cases} \widehat{M} = \dfrac{\widehat{PAQ} - \widehat{PQ}}{۲} \\ \widehat{PAQ} + \widehat{PQ} = ۳۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{PAQ} - \widehat{PQ} = ۲ \times ۶۲^\circ = ۱۲۴^\circ \\ \widehat{PAQ} + \widehat{PQ} = ۳۶۰^\circ \end{cases}$$

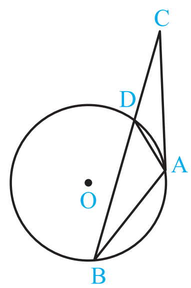
$$\xrightarrow{+} ۲\widehat{PAQ} = ۴۸۴^\circ \Rightarrow \widehat{PAQ} = ۲۴۲^\circ$$

$$\widehat{PQ} = y = ۳۶۰^\circ - ۲۴۲^\circ = ۱۱۸^\circ$$

$$A\widehat{N}B = \frac{\widehat{AB} + \widehat{PQ}}{۲} \Rightarrow ۱۱۰^\circ = \frac{x + y}{۲} \Rightarrow x + ۱۱۸^\circ = ۲۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow x = ۲۲۰^\circ - ۱۱۸^\circ = ۱۰۲^\circ$$

۲۴



$(۱) \quad$ (فرض) $AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

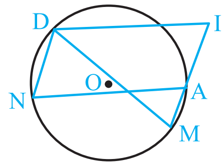
$$\left.\begin{matrix} \text{محاطی } \hat{B} = \dfrac{\widehat{AD}}{۲} \\ \text{ظلی } D\hat{A}C = \dfrac{\widehat{AD}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B} = D\hat{A}C \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow AD = CD$$

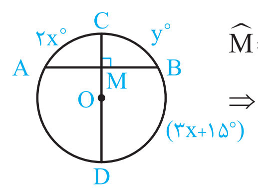
$\Rightarrow$ $\overset{\Delta}{ACD}$ متساوی‌الساقین است.

۲۵

در متوازی‌الاضلاع DIAN زوایای روبه‌رو برابرند پس $\hat{N} = \hat{I}$، از طرفی دو زاویهٔ M و N محاطی و کمان روبه‌رو به آن‌ها $\widehat{AD}$ است، پس $\widehat{M} = \widehat{N} = \frac{\widehat{AD}}{۲}$، در نتیجه $\widehat{M} = \hat{I}$ پس مثلث MDI متساوی‌الساقین است، لذا $DM = DI$



۲۶



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{۲} \Rightarrow ۹۰^\circ = \frac{۲x + ۳x + ۱۵^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵x + ۱۵ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵x = ۱۶۵^\circ \Rightarrow x = ۳۳^\circ$$

CD قطر دایره است پس می‌توان نوشت:

$$y + ۳x + ۱۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y + ۹۹^\circ + ۱۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow y = ۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ - ۹۹^\circ = ۶۶^\circ$$

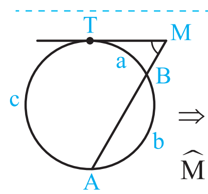
۲۷

زاویهٔ محاطی $A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{۲} \Rightarrow ۲(\alpha + ۱۶) = ۳\alpha + ۱۲$

$$\Rightarrow ۲\alpha + ۳۲ = ۳\alpha + ۱۲ \Rightarrow \alpha = ۲۰$$

$$A\hat{O}C = ۳ \times ۲۰ + ۱۲ = ۷۲^\circ \ , \ A\hat{B}C = ۲۰^\circ + ۱۶^\circ = ۳۶^\circ$$

۲۸



$$\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۵} = \frac{a + b + c}{۱ + ۴ + ۵} = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۰} = ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow a = ۳۶^\circ , b = ۴ \times ۳۶^\circ = ۱۴۴^\circ , c = ۵ \times ۳۶^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\widehat{M} = \frac{c - a}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ}{۲} = \frac{۱۴۴^\circ}{۲} = ۷۲^\circ$$

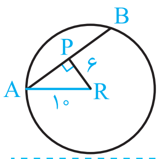
۲۹

$$A\hat{T}X = \frac{\widehat{AT}}{۲} \Rightarrow ۲\alpha - ۶ = \frac{۳\alpha + ۳۳}{۲} \Rightarrow ۴\alpha - ۱۲ = ۳\alpha + ۳۳$$

$$\Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

$$A\hat{T}X = (۲\alpha - ۶)^\circ = (۲ \times ۴۵ - ۶)^\circ = ۹۰^\circ - ۶^\circ = ۸۴^\circ$$

۳۰

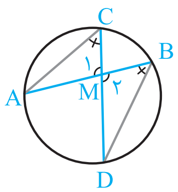


$$AR^۲ = AP^۲ + PR^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = AP^۲ + ۶^۲$$

$$\Rightarrow AP^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AP = ۸$$

$$AB = ۲AP = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

۳۱



وترهای BD و AC را رسم می‌کنیم، داریم:

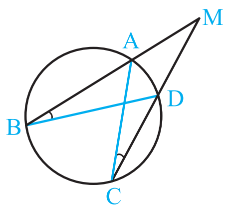
(محاطی $\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{۲}$ ، محاطی $\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{۲}$)

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

$\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$ متقابل به رأس هستند. $\Big\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMC} \sim \overset{\Delta}{DMB}$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MD \times MC$$

۳۲



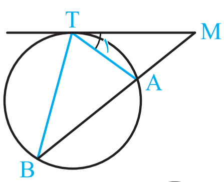
وترهای AC و BD را رسم می‌کنیم. داریم:

(محاطی $\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{۲}$ ، محاطی $\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{۲}$)

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BMD} \sim \overset{\Delta}{CMA}$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow MA \times MB = MD \times MC$$

۳۳



وترهای TA و TB را رسم می‌کنیم. داریم:

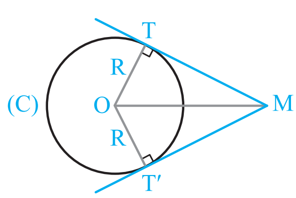
(زاویهٔ ظلی $\hat{T}_۱ = \frac{\widehat{AT}}{۲}$ ، زاویهٔ محاطی $\hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{۲}$) $\Rightarrow \hat{T}_۱ = \hat{B}$

$$(\hat{T}_۱ = \hat{B} , \widehat{M} = \widehat{M}) \Rightarrow \overset{\Delta}{MAT} \sim \overset{\Delta}{MTB} \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow MT^۲ = MA \times MB$$

۳۴

مرکز دایره را به نقطهٔ M و نقاط تماس وصل می‌کنیم. شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث‌های MOT و MOT′ قائم‌الزاویه‌اند و داریم:



$$(OT = OT' = R , OM = OM , \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ)$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{MOT} \cong \overset{\Delta}{MOT'} \Rightarrow MT = MT'$$