

مقدمه ناشر

قطعاً بیشترین علامت‌هایی که در درس‌های ریاضی (به خصوص حسابان) دیده می‌شد ایناست: $=$ ، \neq ، $>$ و $<$. به جورایی می‌شه گفت ریاضی بیشتر دنبال اینه که بگه چی با چی مساویه، چی با چی مساوی نیست. تساوی‌های مطلق ریاضی، دقیق و براساس منطق جبریه و مولای درزش نمی‌ره. به نظرم یکی از چیزایی که ریاضی رو جذاب کرده، همینیه که برابریش واقعاً برابریه! اما تساوی بازی‌ها، تساوی حقوق آدم‌ها، تساوی همگان در برابر قانون و ...!

برابری‌هایی که خیلی وقتاً برابر نیستند! مثلاً می‌بینید که دو تیم با هم مساوی می‌کنن ولی یکیشون حذف می‌شه. اون یکی می‌ره مرحله بعد. می‌گن بازی با تساوی به پایان رسید ولی به دلیل گل زده بیشتر در خانه حریفه فلان تیم می‌ره مرحله بعد! خب پس در واقع منظورشون اینه که این بازی مساوی، مساوی نشده! داوری و ناواری و سلیقه شخصی و ... رو هم اضافه کنید به این داستان. از این مثال تو بازی‌ها و مسابقات فراوونه. اوضاع توی تساوی آدم‌ها و حق و حقوقشون خیلی پیچیده‌تر و عجیب‌تره؛ به قول جورج اورول در کتاب قلعه حیوانات (که کتابی بس جذاب است):

all animals are equal but some animals are more equal than others!

بی‌خیال تا گیج‌تر نشدم بریم سر همون ریاضی خودمون که لااقل راست و حسینی مساویش مساویه، نامساویش هم نامساوی! ممنونم از مؤلفای بی‌نظیرمون که با نوشتن این کتاب فرصتی برای موفقیت بیشتر علاقمندان به ریاضی فراهم کردند. ممنونم از خانم‌ها هدی ملک‌پور، زهرا جالینوسی، ریحانه محمدی‌نژاد و میترا حسامی. ممنونم از ویراستاران خوبمون که می‌دونم تمام تلاششون رو کردن تا کتاب بی‌غلط بشه، ممنونم از تیم منسجم و منظم تولیدمون که در خاورمیانه هم‌تا ندارن!

ما دوستتون داریم < آن‌چه شما فکر می‌کنید

مقدمه مؤلفان

ده سال تحصیلی گذشت. فقط دو سال مانده تا کنکور و بعدش هم دانشگاه. اصل داستان هم همین دو سال است. رشته‌تان هم که ریاضی است، پس نتیجه می‌گیریم امسال باید شدیدن حسابان را دریابید! اصلن این کتاب برای همین نوشته شده که شما دوستان ریاضی یازدهمی، در حسابان به مرحله «دریابیدن» برسید! این کتاب شامل ۵ فصل و هر فصل شامل چندین درس‌نامه است و در آخر هر درس‌نامه، تست‌های آن درس‌نامه قرار دارند. در بخش تست‌ها، بعضی از تست‌ها رنگی شده‌اند. اگر وقت کافی برای زدن همه تست‌ها ندارین، این تست‌های رنگی را در اولویت قرار بدین.

تست‌های سری Z که در آخر هر بخش آمده، تست‌های جدی‌تر و قوی‌تری هستند که می‌توانید با آن‌ها خودتان را محک جدی‌تری بزنید. در پایان هر فصل هم یک آزمون جامع گذاشتیم که خودتون رو تو اون فصل محک بزنین. پاسخ تست‌های هر فصل هم در آخر آن فصل آمده است.

از تمام دوستان خیلی‌سبزی‌مان که چند سالی است با آن‌ها کار می‌کنیم تشکر می‌کنیم. از دکتر کمیل نصری، ایمان سلیمان‌زاده و خانم‌ها زهرا جالینوسی، ریحانه محمدی‌نژاد و میترا حسامی که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند تشکر می‌کنیم.

از همکاران واحد تولید هم که خیلی اذیتشان کردیم تشکر می‌کنیم.

(فصل ۳)

توابع نمایی و لگاریتمی

۲۳۴	درس ۱: تابع نمایی
۲۴۴	درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم
۲۵۱	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی
۲۶۱	آزمون فصل
۲۶۳	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۴)

مثلثات

۲۹۰	درس ۱: رادیان
۲۹۷	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی از زوایا
۳۱۱	درس ۳: توابع مثلثاتی
۳۲۰	درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۳۳۴	آزمون فصل
۳۳۶	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۵)

حد و پیوستگی

۳۷۱	درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی
۳۷۶	درس ۲: حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)
۳۸۵	درس ۳: قضایای حد
۳۹۲	درس ۴: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
۴۰۱	درس ۵: پیوستگی
۴۱۳	آزمون فصل
۴۱۶	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۱)

جبر و معادله

۷	درس ۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۷	درس ۲: معادلات درجه دوم
۳۹	درس ۳: معادلات گویا و گنگ
۴۸	درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۶۱	درس ۵: آشنایی با هندسه تحلیلی
۷۷	آزمون فصل
۷۹	پاسخ‌نامه تشریحی

(فصل ۲)

تابع

۱۴۱	درس ۱: آشنایی بیشتر با تابع
۱۴۸	درس ۲: انواع تابع
۱۶۴	درس ۳: وارون تابع
۱۷۶	درس ۴: اعمال روی توابع
۱۹۰	آزمون فصل
۱۹۲	پاسخ‌نامه تشریحی

جبر و معادله

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله حسابی

دنباله حسابی و نکاتش را سال گذشته یاد گرفتید. برای یادآوری هم که شده در جدول زیر مفاهیم و نکاتش را با هم مرور کنیم (البته برای بعضی ها تازگی داره!):

دنباله حسابی: دنباله ای که در آن تفاضل هر دو جمله متوالی مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می گویند و آن را با d نمایش می دهند. برای مثال دنباله $1, 5, 9, \dots$ یک دنباله حسابی با جمله اول 1 و قدرنسبت $4 = 5 - 1$ است.	
$a_n = a_1 + (n-1)d$	جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d برابر است با:
$b = \frac{a+c}{2}$	اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، آن گاه:
$d = \frac{b-a}{k+1}$	اگر بین دو عدد a و b واسطه حسابی قرار دهیم قدرنسبت دنباله حاصل برابر است با:
$a_m + a_n = a_p + a_q$ مثال: $a_7 + a_{10} = a_4 + a_{13}$	اگر $m \pm n = p \pm q$ در دنباله حسابی داریم:

محاسبه فرمول مجموع جملات یک دنباله حسابی

بحث را با یک مثال شروع کنیم. به دنباله حسابی $1, 2, 3, \dots$ توجه کنید. فرض کنید قرار باشد مجموع پنجاه جمله اول دنباله را محاسبه کنیم

$$S_{50} = 1 + 2 + \dots + 49 + 50$$

یعنی:

یک روش اینه که بشینی یکی یکی اعداد را با هم جمع کنی! اما یک روش قشنگ تر وجود داره! این مجموع را از انتها به ابتدا بنویسید:

$$S_{50} = 50 + 49 + \dots + 2 + 1$$

اگر طرفین این دو تساوی را با هم جمع کنیم، داریم:

$$2S_{50} = \underbrace{51 + 51 + \dots + 51 + 51}_{50 \text{ تا}} \Rightarrow 2S_{50} = 50(51) \Rightarrow S_{50} = \frac{50(51)}{2} = 25(51) = 1275$$

مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

خب! پس در حالت کلی می توانیم یک روش برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله حسابی ارائه کنیم. این روشی:

فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ جمله اول یک دنباله حسابی باشند، مجموع این جمله برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \Rightarrow S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n \quad (1)$$

حالا این مجموع را از انتها به ابتدا می نویسیم:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \Rightarrow S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1 \quad (2)$$

با جمع تساوی های (1) و (2) خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ تا}} \Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$$

بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

به عنوان مثال برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله حسابی که ۱۵ جمله دارد و جمله اول و جمله پانزدهم آن به ترتیب ۳ و ۲۵ است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[a_1 + a_{15}] = \frac{15}{2}[3 + 25] = \frac{15}{2}[28] = 15 \times 14 = 210$$

اگر فرمول جمله عمومی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ را در فرمول صفحه قبل به جای a_n جای‌گذاری کنیم، روش دیگری برای محاسبه مجموع

بالا حاصل می‌شود: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

به عنوان مثال بیاییم مجموع ده جمله اول دنباله حسابی $1, 2, 5, \dots$ را محاسبه کنیم:

جمله اول این دنباله -1 و قدرنسبت آن $3 - (-1) = 2 - (-1) = 3$ است. پس با توجه به فرمول بالا، مجموع ده جمله اول برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(-1) + (10-1)3] = \frac{10}{2}[-2 + 27] = 5(25) = 125$$

تست در یک دنباله حسابی S_n مجموع n جمله اول، $S_8 = 104$ و $S_{12} = 252$ است. S_{20} کدام است؟

۳۵۶ (۱) ۲۷۰ (۲) ۷۴۰ (۳) ۷۱۲ (۴)

پاسخ گزینه ۳ با استفاده از رابطه $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ داریم:

$$\begin{cases} S_8 = 104 \Rightarrow \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 104 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 26 \\ S_{12} = 252 \Rightarrow \frac{12}{2}[2a_1 + 11d] = 252 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 42 \end{cases}$$

تفاضل $\rightarrow 4d = 16 \Rightarrow d = 4$

حالا با استفاده از تساوی $2a_1 + 7d = 26$ جمله اول را هم محاسبه می‌کنیم:

$$2a_1 + 7(4) = 26 \Rightarrow 2a_1 = -2 \Rightarrow a_1 = -1$$

پس مجموع ۲۰ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + 19d] = 10[2(-1) + 19(4)] = 740$$

تست به ازای کدام مقدار x تساوی $(1+x^2) + (4+x^2) + (7+x^2) + \dots + (28+x^2) = 225$ برقرار است؟

۲ (۱) ۳ (۲) $2\sqrt{10}$ (۳) $3\sqrt{10}$ (۴)

پاسخ گزینه ۲ در طرف چپ تساوی اگر x^2 ها را کنار بگذاریم، با مجموع جملات دنباله حسابی $1, 4, 7, \dots, 28$ روبه‌رو می‌شویم. حالا باید دوتا کار انجام بدیم!

۱) با محاسبه تعداد جملات دنباله $1, 4, 7, \dots, 28$ تعداد x^2 ها را بیابیم: (دقت کنید که قدرنسبت دنباله برابر ۳ است.)

$$\begin{cases} a_n = 28 \\ a_1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 28 = 1 + (n-1)3 \Rightarrow 27 = 3(n-1) \Rightarrow n-1 = 9 \Rightarrow n = 10$$

(می‌توانید برای محاسبه تعداد جملات از رابطه $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ هم استفاده کنید.)

۲) مجموع جملات دنباله $1, 4, \dots, 28$ را محاسبه کنیم تا بتوانیم مقدار x را بیابیم:

$$S_{10} = 1 + 4 + 7 + \dots + 28 = \frac{10}{2}[1 + 28] = 145 \quad (*)$$

حالا به معادله بر می‌گردیم و x را محاسبه می‌کنیم:

$$145 + 10x^2 = 225 \xrightarrow{(*)} 10x^2 = 80 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2$$

جمله عمومی مجموع جملات دنباله حسابی

گاهی وقت‌ها جمله عمومی مجموع جملات یک دنباله حسابی را داریم و باید بتوانیم از آن، اطلاعات دنباله حسابی را استخراج کنیم. در این قسمت نکات آن را بررسی می‌کنیم:

فرض کنید می‌خواهیم مجموع n جمله اول دنباله $2, 8, 14, \dots$ را محاسبه کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

جمله اول دنباله $a_1 = 2$ و قدرنسبت آن $d = 6$ است. پس مجموع n جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(2) + (n-1)6] = \frac{n}{2}[4 + 6n - 6] = \frac{n}{2}[6n - 2] \Rightarrow S_n = 3n^2 - n$$

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $S_n = An^2 + Bn$ نیز قابل نمایش است. در این حالت

- ۱) جمله اول دنباله $a_1 = S_1$
- ۲) قدرنسبت دنباله $d = 2A$

نکات مقابل را خواهیم داشت:

پس در حالت کلی رابطه مربوط به مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی به صورت زیر محاسبه می‌شود (جمله n ام $a_1 q^{n-1}$ است):

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\times q} qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$\Rightarrow (1-q)S_n = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با $(q \neq 1)$:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

فرض کنید می‌خواهیم مجموع ۸ جمله اول دنباله $5, 10, 20, \dots$ را محاسبه کنیم. این دنباله یک دنباله هندسی با جمله اول ۵ و قدرنسبت $\frac{10}{5} = 2$ است. بنابراین طبق فرمول مجموع جملات دنباله هندسی، مجموع ۸ جمله اول دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{5(1-2^8)}{1-2} = \frac{5(1-256)}{-1} = 5(255) = 1275$$

تست مجموع ۶ جمله اول دنباله هندسی $\dots, (p+1), 2p-1, 2p-3, p-2$ با جملات مثبت کدام است؟

۱۸۴۰ (۴)

۱۸۲۰ (۳)

۱۸۰۰ (۲)

۱۷۸۰ (۱)

$$b^2 = ac$$

پاسخ گزینه ۳ می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه:

$$(2p-1)^2 = (p-2)(2p-3) \Rightarrow 4p^2 - 4p + 1 = 2p^2 - 2p - 3$$

پس در این جا داریم:

$$\Rightarrow 4p^2 - 4p + 1 = 2p^2 - 2p - 3 \Rightarrow p^2 - 2p - 2 = 0 \Rightarrow (p-4)(p+2) = 0 \Rightarrow p = 4, -2$$

چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $p = 4$ قابل قبول است. در نتیجه جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$p = 4: 5, 10, 20, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$$

حالا مجموع ۶ جمله اول را می‌یابیم:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{5(1-2^6)}{1-2} = \frac{5(-63)}{-1} = 5(63) = 315$$

تست در یک دنباله هندسی با قدرنسبت q مجموع ۵ جمله اول ۶۰ واحد از جمله اول بیشتر است. اگر مجموع چهار جمله اول ۳۰ باشد. آن‌گاه q کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ گزینه ۳ **روش اول** مجموع ۵ جمله اول، ۶۰ واحد از جمله اول بیشتر است؛ یعنی:

$$S_5 = 60 + a_1 \Rightarrow S_5 - a_1 = 60 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} - a_1 = 60$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - a_1 q^5 - a_1 + a_1 q}{1-q} = 60 \Rightarrow \frac{a_1 q - a_1 q^5}{1-q} = 60 \Rightarrow \frac{a_1 q(1-q^4)}{1-q} = 60 \Rightarrow q \underbrace{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}_{S_4} = 60 \Rightarrow qS_4 = 60$$

$$q(30) = 60 \Rightarrow q = 2$$

مقدار S_4 را هم که داریم (مجموع چهار جمله اول ۳۰ است؛ یعنی $S_4 = 30$) بنابراین:

روش دوم اگر جملات دنباله را به صورت $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$ در نظر بگیریم، داریم:

$$S_5 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \Rightarrow S_5 - a_1 = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \quad (*)$$

$$S_4 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \xrightarrow{\times q} qS_4 = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \quad (**)$$

از طرفی:

$$S_5 - a_1 = qS_4 \Rightarrow 60 = q(30) \Rightarrow q = 2$$

طرف راست تساوی‌های (*) و (**) با هم برابر است، پس:

$$S_n - a_1 = qS_{n-1}$$

این موضوع را می‌توانید به صورت کلی هم ببینید:

به مجموع n جمله اول دنباله هندسی می‌توان به صورت زیر هم نگاه کرد:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}$$

خوب!

تست در یک دنباله هندسی جمله اول 3^0 واحد از جمله ششم بیشتر است. اگر مجموع پنج جمله اول دنباله برابر 1^0 باشد. جمله اول دنباله کدام است؟

(1) $-\frac{31}{3^0}$ (2) $\frac{1^0}{11}$ (3) $\frac{31}{3^0}$ (4) $-\frac{1^0}{11}$

$a_1 - a_6 = 3^0$

$S_5 = 1^0$

$S_5 = \frac{a_1 - a_6}{1-q} \Rightarrow 1^0 = \frac{3^0}{1-q} \Rightarrow 1-q=3 \Rightarrow q=-2$

پاسخ گزینه ۳ جمله اول 3^0 واحد از جمله ششم بیشتر است، پس:

از طرفی مجموع پنج جمله اول برابر 1^0 است:

حالا طبق رابطه بالا داریم:

در نهایت با استفاده از تساوی $a_1 - a_6 = 3^0$ جمله اول را می‌یابیم:

$a_1 - a_6 q^5 = 3^0 \Rightarrow a_1(1 - q^5) = 3^0 \Rightarrow a_1(1 - (-2)^5) = 3^0 \Rightarrow a_1(33) = 3^0 \Rightarrow a_1 = \frac{3^0}{33} = \frac{1^0}{11}$

مثال الف مجموع ۸ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت q چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله است؟

(ب) مجموع ۴ جمله دوم دنباله بالا چند برابر مجموع ۴ جمله اول دنباله است؟

پاسخ الف

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 1+q^4$$

پس مجموع ۸ جمله اول دنباله $(1+q^4)$ برابر مجموع چهار جمله اول آن است.

(ب) مجموع چهار جمله دوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$S_8 - S_4 =$ مجموع چهار جمله دوم $=$ مجموع چهار جمله اول S_4

پس نسبت مجموع چهار جمله دوم به مجموع چهار جمله اول دنباله برابر است با:

$\frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{S_8}{S_4} - 1 \stackrel{\text{(قسمت الف)}}{=} 1 + q^4 - 1 = q^4$

پس مجموع چهار جمله دوم دنباله، q^4 برابر مجموع چهار جمله اول دنباله است.

در یک دنباله هندسی با قدرنسبت q داریم:

1 $\frac{\text{مجموع } 2n \text{ جمله اول}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$

2 $\frac{\text{مجموع } n \text{ جمله دوم}}{\text{مجموع } n \text{ جمله اول}} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = q^n$

مثال دنباله هندسی ...، ۱۲، ۶، ۳، ده جمله دارد. مجموع جملات ردیف زوج چند برابر مجموع جملات ردیف فرد است؟

پاسخ چون دنباله 1^0 جمله دارد پس:

$\frac{\text{مجموع جملات ردیف زوج}}{\text{مجموع جملات ردیف فرد}} = \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{10}}{a_1 + a_3 + \dots + a_9} = \frac{a_1 q + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^9}{a_1 + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^8} = \frac{q(a_1 + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^8)}{a_1 + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^8} = q$

با توجه به دنباله، $q = 2$ است. پس مجموع جملات ردیف زوج، ۲ برابر مجموع جملات ردیف فرد است.

اگر تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج باشد، مجموع جملات ردیف زوج، q برابر مجموع جملات ردیف فرد است.

تست یک دنباله هندسی 1^0 جمله دارد. اگر مجموع کل جملات چهار برابر مجموع جملات ردیف زوج باشد. قدرنسبت کدام است؟

(1) $\frac{1}{2}$ (2) ۲ (3) ۳ (4) $\frac{1}{3}$

جبر و معادله

پاسخ گزینه ۲ مجموع کل جملات چهار برابر مجموع جملات ردیف زوج است، پس:

$$S_{\text{کل}} = 4S_{\text{زوج}} \quad (*)$$

از طرفی طبق نکته گفته شده داریم:

$$S_{\text{زوج}} = qS_{\text{فرد}} \quad (**)$$

حالا با توجه به این که $S_{\text{کل}} = S_{\text{زوج}} + S_{\text{فرد}}$ داریم:

$$4qS_{\text{فرد}} = S_{\text{زوج}} + S_{\text{فرد}} \xrightarrow{(**)} 4qS_{\text{فرد}} = S_{\text{فرد}} + qS_{\text{فرد}}$$

$$\Rightarrow 3qS_{\text{فرد}} = S_{\text{فرد}} \Rightarrow 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

یک رابطه مهم: به مجموع $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ توجه کنید. این مجموع، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت a است. پس طبق رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ این مجموع را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1(1-a^n)}{1-a} \Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

طرفین وسطین $\rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$

مثال ساده شده عبارت $\frac{(a-1)(a^2+a^2+a+1)}{a^4-1}$ را بیابید.

پاسخ در صورت کسر، از اتحاد کادر بالا و در مخرج هم از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2+1)} = \frac{1}{a^2+1}$$

اگر یک زمانی رابطه بالا یادتون رفت یا به طور کلی گیر کردین که پی به پی بود! از خود فرمول مجموع جملات دنباله هندسی برای حل کمک بگیرید:

تست حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^4 + t^3 + t^2 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ گزینه ۲ صورت کسر، مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت t است. مخرج کسر هم مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول یک و قدرنسبت t^2 است. در نتیجه:

$$\text{عبارت} = \frac{\frac{1(1-t^{12})}{1-t}}{\frac{1(1-(t^2)^4)}{1-t^2}} = \frac{1-t^{12}}{1-t} \cdot \frac{1-t^2}{1-t^4} = \frac{1-t^2}{1-t} = 1+t$$

با قراردادن $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ حاصل را می‌یابیم:

$$\text{عبارت} = 1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{4 - 2 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مجموع جملات دنباله حسابی

- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۲۰ کدام است؟
 (۱) ۱۹۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۱۶۰
- روی محیط دایره‌ای ۱۵ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده کدام است؟
 (۱) ۱۰۵ (۲) ۹۱ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵ (برگرفته از کتاب درسی)
- مجموع ۱۵ جمله اول دنباله حسابی $\dots, ۲, -۱, -۴$ کدام است؟
 (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۵۵ (۳) ۲۷۰ (۴) ۲۸۵
- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و هر جمله از جمله مقابل خود به اندازه $\frac{1}{4}$ کم‌تر است. مجموع ده جمله اول آن کدام است؟ (مشابه تیرگی ۸۲)
 (۱) $\frac{22}{5}$ (۲) ۲۵ (۳) $\frac{27}{5}$ (۴) ۳۰
- در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چه قدر افزوده می‌شود؟
 (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰ (ریاضی ۸۳)
- مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۲۵ است. به هر یک از جمله‌ها ۶ واحد اضافه کرده و سپس در ۲ ضرب کرده و در پایان ۳ واحد از هر یک کم می‌کنیم. مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حاصل کدام است؟
 (۱) ۵۸ (۲) ۸۴ (۳) ۱۳۲ (۴) ۱۴۰

(تقریبی ۸۹)

۷- در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله، کدام است؟

- ۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

۸- حاصل $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ کدام است؟

- n^2 (۱) $n^2 - 2n$ (۲) $n^2 + 2n$ (۳) $n^2 - n$ (۴)

۹- اگر مجموع هشت جمله از دنباله حسابی با دو جمله $a_1 = 1 + 2p$ و $a_7 = p - 1$ برابر ۶۰ باشد، p کدام است؟

- ۹ (۱) ۷ (۲) -۹ (۳) -۷ (۴)

۱۰- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی a, b, c, \dots برابر ۱۵۵ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

(ریاضی ۵۴)

۱۱- اعداد $\frac{5}{4}, x, y, \frac{5}{4}$ ، چهار جمله اول یک دنباله حسابی اند. مجموع یازده جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۵۷ (۱) $62/5$ (۲) $67/5$ (۳) ۶۸ (۴)

(تقریبی ۸۸)

۱۲- در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله، صفر است؟

- ۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۱۳- در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول، ۱۰ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر است. اگر جمله پنجم ۳ واحد از جمله سوم بیشتر باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

- ۰/۲۵ (۱) -۰/۲۵ (۲) ۰/۵ (۳) -۰/۵ (۴)

۱۴- در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(ریاضی ۹۰)

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

۱۵- مجموع ۱۵ جمله اول یک دنباله حسابی با مجموع ۲۵ جمله اول آن مساوی است. مجموع ۴۰ جمله اول این دنباله برابر کدام است؟

- صفر (۱) S_{20} (۲) S_{30} (۳) S_{50} (۴)

(ریاضی ۸۵)

۱۶- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

- $7/5$ (۱) ۸ (۲) $8/5$ (۳) ۹ (۴)

۱۷- در دنباله حسابی $\dots, -22, x, -27$ مجموع جملات منفی کدام است؟

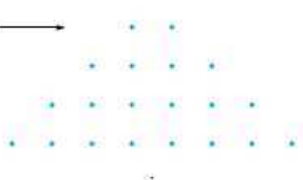
- ۱۳۵ (۱) $-289/2$ (۲) -۱۴۶ (۳) $-319/2$ (۴)

۱۸- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جمله اول کدام است؟

(تقریبی ۸۵)

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

رَدیف اول



۱۹- با توجه به الگوی مقابل، مجموع نقطه‌ها تا ردیف دهم کدام است؟

- ۵۵ (۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۱۱۰ (۴)

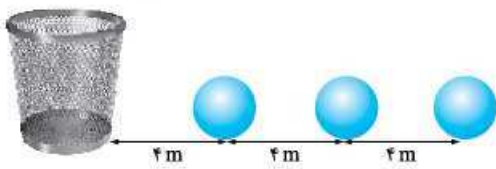
(برگرفته از کتاب درسی)

۲۰- در دنباله حسابی $\dots, 11, 8, 5$ حداقل چند جمله باید با هم جمع شوند تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

- ۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

۲۱- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۴ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۴ متر است. دونه‌های باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. حداقل چند توپ باید به سبد بیندازد تا بیش از ۴۴۰ متر دویده باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)



۲۲- در دنباله $a_n = n^2 - (n+1)^2$ مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟

- ۱ (۱) -۳۹۹ (۲) ۴۰۱ (۳) -۴۰۰ (۴)

۲۳- یک دنباله حسابی ۹۹ جمله دارد. اگر جمله وسط دنباله برابر $\frac{20}{11}$ باشد، مجموع همه جملات دنباله کدام است؟

- ۱۸۰ (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۱۲ (۳) ۲۳۶ (۴)

۲۴- در یک دنباله حسابی $20 = a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ است. مجموع ۱۱ جمله اول دنباله کدام است؟

- ۵۲ (۱) ۵۵ (۲) ۵۸ (۳) ۶۲ (۴)

۲۵- جواب معادله $(x-1) + (x+3) + (x+7) + \dots + (x+27) = 180$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۹/۵ (۲) ۸ (۳) ۸/۵ (۴)

۲۶- بین دو عدد a و 24 ، پنج واسطه حسابی قرار می‌دهیم. اگر مجموع همه جملات 126 باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴)

۲۷- بین اعداد 5 و 29 تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم. اگر مجموع تمام واسطه‌ها برابر 119 باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۲۸- در یک دنباله حسابی مجموع همه جملات 4 برابر مجموع جملات اول و آخر است. اگر جمله آخر 21 واحد از جمله اول بیشتر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۲۹- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر 240 است. اگر مجموع همه جملات دنباله برابر 520 باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

- ۱۳ (۱) ۱۸ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴)

۳۰- در یک دنباله حسابی مجموع 20 جمله اول، 121 واحد بیشتر از مجموع 9 جمله اول است. مجموع بیست و نه جمله اول کدام است؟

- ۲۷۹ (۱) ۲۹۰ (۲) ۳۰۱ (۳) ۳۱۹ (۴)

۳۱- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد و $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$ ، آن‌گاه مجموع 6 جمله اول دنباله کدام است؟

- ۶۰ (۱) ۶۶ (۲) ۷۲ (۳) ۷۵ (۴)

۳۲- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد و $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 4$ ، آن‌گاه جمله چهارم چهقدر از جمله دوم بیشتر است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۳۳- اگر مجموع چهار جمله اول یک دنباله حسابی 2 واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر و 5 واحد از مجموع پنج جمله اول کمتر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۴- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = 3n^2 - n$ است. مجموع جملات با شماره زوج کوچک‌تر از جمله بیستم کدام است؟

- ۴۲۵ (۱) ۴۵۵ (۲) ۵۰۴ (۳) ۵۱۵ (۴)

۳۵- مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله

هجدهم، کدام است؟

- ۹ (۱) $\frac{29}{3}$ (۲) $\frac{49}{3}$ (۳) ۱۸ (۴)

۳۶- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد $(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$

(تقریبی خارج ۹۳ و ریاضی ۹۹)

مجموع جملات در دسته بیستم کدام است؟

- ۴۰۱۰ (۱) ۴۰۲۰ (۲) ۴۰۳۰ (۳) ۴۰۴۰ (۴)

۳۷- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$

(مشابه خارج ریاضی ۹۱ و تقریبی ۹۳)

بیست جمله اول دسته سی‌ام کدام است؟

- ۱۸۶۰۰ (۱) ۱۸۷۰۰ (۲) ۱۷۸۰۰ (۳) ۱۶۸۰۰ (۴)

۳۸- در دو دنباله حسابی به صورت $3, 7, 11, \dots$ و $2, 5, 8, \dots$ مجموع اعداد دورقمی مشترک کدام است؟

- ۳۷۵ (۱) ۳۸۸ (۲) ۴۱۲ (۳) ۴۲۴ (۴)

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۹- مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی که مضرب 6 هستند، کدام است؟

- ۷۸۵ (۱) ۸۱۰ (۲) ۸۴۵ (۳) ۷۶۰ (۴)

(ریاضی ۹۸)

۴۰- مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب 7 ، کدام است؟

- ۷۲۱ (۱) ۷۲۸ (۲) ۷۳۵ (۳) ۷۴۲ (۴)

(تقریبی ۸۵)

۴۱- مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر 3 و کوچک‌تر از 101 کدام است؟

- ۸۱۶ (۱) ۸۵۲ (۲) ۸۶۷ (۳) ۸۸۴ (۴)

۴۲- مجموع اعداد طبیعی دورقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر 4 برابر 3 می‌باشند، کدام است؟

- ۱۱۸۵ (۱) ۱۲۲۰ (۲) ۱۲۶۵ (۳) ۱۳۸۰ (۴)

مجموع جملات دنباله هندسی

۴۳- مجموع پنج جمله اول دنباله هندسی $36, 18, 9, \dots$ کدام است؟

- $\frac{277}{4}$ (۱) ۷۰ (۲) $\frac{279}{4}$ (۳) ۶۹ (۴)

۴۴- مجموع چند جمله دنیاله هندسی ... ۱۲, ۲۴, -۶, برابر ۱۰۲۶ است؟

(۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۲

(ریاضی ۸۶ با کمی تغییر)

۴۵- دنیاله هندسی ... $\frac{1}{p}, x, 2$ با قدرنسبت منفی مفروض است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

(۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

(ریاضی خارج ۸۹ با کمی تغییر)

۴۶- در یک دنیاله هندسی به صورت ... $b, 9, a, 4$ با قدرنسبت مثبت، مجموع شش جمله اول کدام است؟

(۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

۴۷- به ازای یک مقدار x اعداد $2 - x^2$ و $2x + 4$ به ترتیب سه جمله اول از یک دنیاله هندسی با قدرنسبت مثبت هستند. مجموع هفت جمله اول این دنیاله کدام است؟

(تیری ۹۳ با کمی تغییر)

(۱) $\frac{117}{16}$ (۲) $\frac{125}{16}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴) $\frac{127}{8}$

۴۸- جمله عمومی یک دنیاله هندسی به صورت $a_n = 2^{1-n}$ است. مجموع شش جمله اول دنیاله کدام است؟

(۱) ۶۳ (۲) $\frac{63}{32}$ (۳) ۱۲۷ (۴) $\frac{127}{64}$

۴۹- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنیاله هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۱)

(۱) ۴۸۲ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۸۶ (۴) ۴۸۸

۵۰- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنیاله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

(ریاضی خارج ۸۸)

(۱) $30(2 + \sqrt{2})$ (۲) $48\sqrt{2}$ (۳) $30(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $36(\sqrt{2} + 1)$

۵۱- در دنیاله هندسی با قدرنسبت منفی ... $6, a, 2$ مجموع سه جمله دوم چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $-3\sqrt{3}$

(ریاضی ۸۵)

۵۲- در یک دنیاله هندسی، مجموع هشت جمله اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

(۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{5}{32}$ (۴) $\frac{1}{4}$

(ریاضی ۸۹)

۵۳- در یک دنیاله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول، چند برابر جمله پنجم است؟

(۱) $\frac{81}{16}$ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶

۵۴- در دنیاله هندسی افزایشی ... $b, 6, a$ اگر $a + b = 13$ آن‌گاه مجموع معکوس‌های ۶ جمله اول چند برابر مجموع معکوس‌های سه جمله اول است؟

(۱) $\frac{97}{81}$ (۲) $\frac{89}{81}$ (۳) $\frac{45}{27}$ (۴) $\frac{35}{27}$

۵۵- تعداد جملات یک دنیاله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

(ریاضی ۹۴)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۶- در یک دنیاله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، مجموع پنج جمله اول، سه برابر تفاضل جمله اول از جمله ششم است. قدرنسبت دنیاله کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{4}{3}$

۵۷- در یک دنیاله هندسی، مجموع ۸ جمله اول ۴۸ و مجموع جملات شروع از جمله چهارم و ختم به جمله یازدهم برابر ۲۴۰ است. قدرنسبت دنیاله کدام است؟

(۱) $\sqrt[3]{4}$ (۲) $\sqrt[3]{5}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{5}$

۵۸- در یک دنیاله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

(۱) $10/8$ (۲) $11/2$ (۳) $12/6$ (۴) $13/4$

۵۹- در یک دنیاله هندسی جمله سوم $1/44$ واحد از جمله دوم بیشتر است و جمله دوم $1/8$ واحد از جمله اول کم‌تر است. مجموع چهار جمله اول دنیاله کدام است؟

(۱) $0/376$ (۲) $0/488$ (۳) $0/328$ (۴) $0/456$

۶۰- در یک دنیاله هندسی با قدرنسبت مثبت، مجموع جملات سوم و ششم برابر ۱۴ و تفاضل جملات سوم و نهم برابر ۹۸ است. مجموع چهار جمله اول کدام است؟

(۱) ۶ (۲) $\frac{20}{3}$ (۳) $\frac{11}{2}$ (۴) $\frac{35}{6}$

۶۱- جمله ششم یک دنباله هندسی ۸۱ و حاصل ضرب پنج جمله اول دنباله ۲۴۳ است. مجموع پنج جمله اول دنباله کدام است؟

- ۴۰ $\frac{1}{3}$ (۱) ۴۰ $\frac{2}{3}$ (۲) ۴۰ $\frac{1}{9}$ (۳) ۴۱ $\frac{1}{9}$ (۴)

(ریاضی ۸۳)

۶۲- حاصل $A = (1+x+x^2+\dots+x^A)(1-x+x^2-\dots+x^A)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ۵۰۷ (۱) ۵۱۱ (۲) ۵۱۲ (۳) ۵۱۶ (۴)

(ریاضی ۹۳)

۶۳- حاصل عبارت $\frac{t^A - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۶۴- اگر در خانه اول شطرنج ۱ گندم، در خانه دوم ۲ گندم، در خانه سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل، گندم قرار دهیم، اولین خانه‌ای که مجموع تعداد گندم‌ها تا آن خانه بیشتر از ۴۱۰۰ خواهد بود، کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۶۵- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ کرده سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۸ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۶۶- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر بیش از ۹۹ درصد کاهش یابد؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۶۷- از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر تویی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه $\frac{8}{10}$ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

(تهی ۱۴۰۰)

- ۵۴ (۱) ۵۷ (۲) ۶۰ (۳) ۶۶ (۴)

سری

۶۸- اگر $a_n = 3^{n-1}$ و $b_n = 3^{n-1}$ مجموع ۵ جمله اول دنباله a_n, b_n کدام است؟

- ۴۲۲ (۱) ۲۱۱ (۲) ۲۱۱ (۳) ۴۲۲ (۴)

۶۹- دنباله مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ است. مجموع ده جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

- ۳۰ $\frac{1}{3}$ (۱) ۳۱ $\frac{2}{3}$ (۲) ۳۲ $\frac{1}{3}$ (۳) ۳۳ $\frac{2}{3}$ (۴)

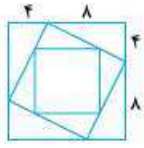
۷۰- مجموع ده جمله اول دنباله $9, 99, 999, \dots$ چندتا یک دارد؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۷۱- مجموع ده جمله اول دنباله $\frac{1}{10}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$ چند برابر $\frac{1}{10}$ است؟

- ۹۱۷۲ (۱) ۹۷۱۲ (۲) ۹۲۱۷ (۳) ۹۲۷۱ (۴)

۷۲- در شکل مقابل، طول ضلع مربع بزرگ‌تر برابر ۱۲ است. مطابق شکل مربع‌هایی با نسبت‌های ثابت روی اضلاع، در داخل مربع بزرگ‌تر رسم شده است. با رسم حداقل چند مربع، مجموع مساحت‌های مربع‌ها از ۲۹۷ بیشتر می‌شود؟



- ۷ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۷۳- در یک دنباله حسابی جمله اول ۳ واحد از جمله دوم کم‌تر است. اگر مجموع n جمله اول ۱۰ و مجموع $2n$ جمله اول ۶۸ باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴)

۷۴- حاصل مجموع $2 - 15x^{15} + 3x^3 + 2x^2 + x + 2$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- ۵ (2^{17}) (۱) ۵ (2^{16}) (۲) ۷ (2^{17}) (۳) ۷ (2^{16}) (۴)

۷۵- در یک دنباله هندسی جمله $(n-m)$ برابر ۲۰ و جمله $(n+m)$ برابر ۵ است. اگر بین جمله m ام دنباله و عدد ۱۶۰، هفت واسطه هندسی مثبت قرار دهیم، مجموع کل نه عدد حاصل کدام است؟

- ۲۸۰ $+ 70\sqrt{2}$ (۱) ۳۲۰ $+ 120\sqrt{2}$ (۲) ۲۹۰ $+ 140\sqrt{2}$ (۳) ۳۱۰ $+ 150\sqrt{2}$ (۴)

۷- گزینه ۲ از رابطه $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}[a_1 + a_{15}]$$

جمله عمومی دنباله را داریم، پس:

$$a_n = \frac{3}{2}n - 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} - 5 \\ a_{15} = \frac{45}{2} - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \left[\frac{3}{2} - 5 + \frac{45}{2} - 5 \right] = \frac{15}{2} \left[\frac{48}{2} - 10 \right]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} [24 - 10] = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

۸- گزینه ۲ **روش اول** مجموع داده شده، مجموع n جمله اول

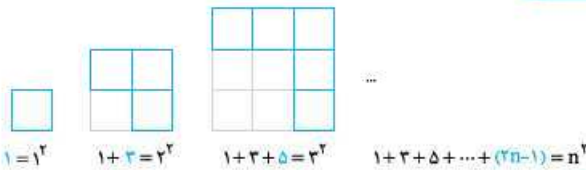
یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و جمله آخر $2n-1$ است. (جمله اول دنباله $1=1-1=2(1)-1$ ، جمله دوم $3=2(2)-1$ و ... در نتیجه جمله n ، $2(n)-1$ است. پس n جمله داریم.)

با توجه به فرمول $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ داریم:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2}[1 + 2n-1]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

روش دوم مطابق الگوی زیر عمل کنیم:



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۹- گزینه ۲ جمله اول و دوم را داریم، پس قدرنسبت را هم داریم:

$$d = a_p - a_1 = (p-1)d - (1+2p) = -p-2 \quad (*)$$

مجموع ۸ جمله اول را هم داریم:

$$S_8 = 60 \Rightarrow \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 60$$

$$\Rightarrow 4[2(1+2p) + 7(-p-2)] = 60$$

$$\Rightarrow 4(2+4p-7p-14) = 60 \Rightarrow 4(-3p-12) = 60$$

$$\Rightarrow -3p-12=15 \Rightarrow -3p=27 \Rightarrow p=-9$$

۱۰- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله را برابر d در نظر می‌گیریم. پس:

حال رابطه مجموع ۱۰ جمله اول را می‌نویسیم:

$$a_{10} = \frac{10}{2}[2(\delta-d) + (10-1)d] \Rightarrow 155 = 5[10-2d+10d-d]$$

$$\Rightarrow 7d+10=31 \Rightarrow 7d=21 \Rightarrow d=3$$

۱۱- گزینه ۲ جمله اول را داریم: $a_1=1$ اما قدرنسبت را نه. آنگاه

په‌کاره؟ فب درست و حسابی قدرنسبت رو هم بدین دیکه! باید با توجه به جملات معلوم، قدرنسبت را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_p = \frac{\delta}{2} \end{cases} \Rightarrow a_p - a_1 = \frac{\delta}{2} - 1 = 2d$$

$$\Rightarrow 2d = \frac{3}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{4}$$

۱- گزینه ۲ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر

$$S_p = 1+2+\dots+20 = \frac{20(21)}{2} = 210 \text{ است. بنابراین:}$$

۲- گزینه ۲ نقطه اول به ۱۴ نقطه دیگر وصل می‌شود و ۱۴ تا وتر

ایجاد می‌کند. نقطه دوم به ۱۳ نقطه باقی‌مانده وصل می‌شود و ۱۳ تا وتر ایجاد می‌کند. با ادامه این عمل داریم:

$$14+13+\dots+1 = \frac{14(14+1)}{2} = 105$$

۳- گزینه ۲

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ d = a_p - a_1 = -1 - (-4) = 3 \end{cases}$$

قدرنسبت و جمله اول را داریم. پس مجموع پانزده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2(-4) + 14(3)]$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[-8 + 42] = 15 \times 17 = 255$$

۴- گزینه ۲ «هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ کم‌تر است»

یعنی:

با توجه به مقادیر $a_1 = 5$ و $d = -\frac{1}{2}$ مجموع ده جمله اول دنباله برابر

است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(5) + 9(-\frac{1}{2})] = 5(5 - \frac{9}{2}) = 27/2$$

۵- گزینه ۲ مجموع ۲۰ جمله اول (وقتی هنوز دست به پیزی نزیریم!)

برابر است با:

$$S_p = \frac{p}{2}[2a_1 + (p-1)d] = 10[2a_1 + 19d]$$

حالا قدرنسبت را یک واحد زیاد می‌کنیم و مجموع ۲۰ جمله اول این

دنباله جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$S'_p = \frac{p}{2}[2a_1 + (p-1)(d+1)] = 10[2a_1 + 19d + 19]$$

$$= 10[\underbrace{2a_1 + 19d}_{S_p} + 19]$$

پس با دست‌زدن به قدرنسبت! ۱۹۰ واحد به مجموع بیست جمله اول اضافه می‌شود.

۶- گزینه ۲ مجموع ۱۰ جمله اول دنباله برابر ۲۵ است، پس:

$$S_{10} = 25 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 25 \quad (*)$$

وقتی به جملات ۶ واحد اضافه، سپس در ۲ ضرب و در

پایان ۳ واحد از هر یک کم کنیم، جملات جدید به صورت

$3 - 2(a_1 + 6), 3 - 2(a_2 + 6), \dots, 3 - 2(a_{10} + 6)$ خواهند بود.

مجموع این جملات برابر است با:

$$S' = 2(a_1 + 6) - 3 + 2(a_2 + 6) - 3 + \dots + 2(a_{10} + 6) - 3$$

$$\Rightarrow S' = 2a_1 + 12 + 2a_2 + 12 + \dots + 2a_{10} + 12$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + \underbrace{12 + 12 + \dots + 12}_{10 \text{ بار}}$$

$$\Rightarrow S' = 2(25) + 10(12) = 50 + 120 = 170$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 120d = 6a_1 + 42d \Rightarrow 4a_1 + 78d = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 39d = 0 \quad (*)$$

از طرفی مجموع چهار جمله اول برابر است با:

$$S_{40} = \frac{40}{2} [2a_1 + 39d] = 20(0) = 0$$

۱۶- گزینه: مجموع ۴ جمله اول ۱۵ است، پس $S_4 = 15$. مجموع پنج تا جمله بعدی هم ۳۰ است، پس طراح غیرمستقیم مجموع ۹ تا جمله اول را هم داده است. نگاه کن:

مجموع پنج جمله بعدی + مجموع چهار جمله اول $S_9 = 15 + 30 = 45$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{4}{2} [2a_1 + 3d] = 15 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \quad (*) \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{9}{2} [2a_1 + 8d] = 45 \Rightarrow 2a_1 + 8d = 10 \quad (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(**) - (*)} \Delta d = 10 - \frac{15}{2} \Rightarrow \Delta d = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(**)} 2a_1 + 8\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \Rightarrow 2a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 3$$

با توجه به مقدار a_1 و d جمله یازدهم را محاسبه کنیم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۱۷- گزینه: با توجه به جملات دنباله داریم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_7 = -22 \end{cases} \Rightarrow a_7 - a_1 = 7d \Rightarrow -22 - (-27) = 7d \Rightarrow 5 = 7d \Rightarrow d = \frac{5}{7}$$

برای محاسبه مجموع جملات منفی، اول باید ببینیم چندتا جمله منفی داریم پس جمله عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = -27 \\ d = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow a_n = -27 + (n-1)\frac{5}{7}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای چندتا n $a_n < 0$ است:

$$-27 + (n-1)\frac{5}{7} < 0 \Rightarrow \frac{5}{7}(n-1) < 27$$

$$\Rightarrow n-1 < \frac{54}{5} \Rightarrow n-1 < 10.8 \Rightarrow n < 11.8$$

پس دنباله، ۱۱ تا جمله منفی دارد! بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S_{11} = \frac{11}{2} [2(-27) + 10\left(\frac{5}{7}\right)] = \frac{11}{2} [-54 + 25]$$

$$= \frac{11}{2} [-29] = -\frac{319}{2}$$

۱۸- گزینه: مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است:

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = 150 \quad (*)$$

مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ است:

$$a_1 + a_3 + \dots + a_9 = 135 \quad (**)$$

حالا بین این دو جمع کنیم!

$$(*) - (**): \underbrace{(a_2 - a_1)}_d + \underbrace{(a_4 - a_3)}_d + \dots + \underbrace{(a_{10} - a_9)}_d$$

$$= 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1.5$$

جمله اول و قدرنسبت را داریم، پس از فرمول $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ برای محاسبه پانزده جمله اول استفاده می‌کنیم:

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2(1) + 14\left(\frac{1}{2}\right)] = \frac{15}{2} [2 + 7] = \frac{15 \times 9}{2} = 67.5$$

۱۲- گزینه: جمله هفتم نصف جمله سوم است $a_7 = \frac{1}{2}a_3$

$$\Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

برای این که ببینیم مجموع چند جمله اول دنباله صفر است، باید S_n را برابر

صفر قرار دهیم: $S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = 0$

$$\xrightarrow{a_1 = -10d} \frac{n}{2} [-20d + (n-1)d] = 0 \Rightarrow \frac{n}{2} [(n-21)d] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ (همه جملات صفر می‌شوند که مدنظر نیست.)} \\ n = 21 \end{cases}$$

پس مجموع ۲۱ جمله اول دنباله، صفر است.

۱۳- گزینه: مجموع پنج جمله اول، ۱۰ واحد از مجموع سه جمله اول بیشتر است: $S_5 = S_3 + 10$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} [2a_1 + 4d] = \frac{3}{2} [2a_1 + 2d] + 10$$

$$\Rightarrow 5a_1 + 10d = 3a_1 + 3d + 10 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 10 \quad (*)$$

$a_5 - a_3 = 3$: جمله پنجم، ۳ واحد از جمله سوم بیشتر است.

$$\Rightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} 2a_1 + 7\left(\frac{3}{2}\right) = 10 \Rightarrow 2a_1 + 10.5 = 10 \Rightarrow 2a_1 = -0.5 \Rightarrow a_1 = -0.25$$

۱۴- گزینه: مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول است: $S_{20} = 3S_{12}$

$$\Rightarrow \frac{20}{2} [2a_1 + (20-1)d] = 3\left(\frac{12}{2} [2a_1 + (12-1)d]\right)$$

$$\Rightarrow 10[2a_1 + 19d] = 18[2a_1 + 11d] \Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow 16a_1 = -8d \Rightarrow d = -2a_1$$

هم چنین جمله سوم دنباله برابر ۶ است:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \xrightarrow{d = -2a_1} a_1 + 2(-2a_1) = 6$$

$$\Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{d = -2a_1} d = 4$$

با توجه به مقادیر a_1 و d جمله دهم دنباله برابر است با:

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۱۵- گزینه: مجموع ۱۵ جمله اول با مجموع ۲۵ جمله اول برابر است، پس: $S_{25} = S_{15}$

با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ داریم:

$$\frac{25}{2} [2a_1 + 24d] = \frac{15}{2} [2a_1 + 14d]$$

$$\Rightarrow 5[2a_1 + 24d] = 3[2a_1 + 14d]$$

۲۱- **گزینه ۱** برای برداشتن توپ اول، ۴ متر میره و ۴ متر میار، یعنی $2(4)$. برای برداشتن توپ دوم، ۸ متر میره و ۸ متر میار، یعنی $2(8)$ و همین‌طور میره و میار...! پس کل مسافتی که دونده برای انداختن توپ n ام طی می‌کند به صورت مجموع زیر است:

$$S_n = 2(4) + 2(8) + 2(12) + \dots + 2n$$

$$= 8(1+2+3+\dots+n) = 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 4n^2 + 4n$$

فالاگه بفرمایم هانشو بگیریم و یک کاری کنیم بیش از ۴۴۰ متر بدونه...! باید نامعادله $S_n > 440$ را حل کنیم:

$$4n^2 + 4n > 440 \Rightarrow n^2 + n > 110 \Rightarrow n^2 + n - 110 > 0$$

$$\Rightarrow (n-10)(n+11) > 0 \Rightarrow n < -11, n > 10$$

پس باید بیشتر از ۱۰ تا توپ داخل سبد بندازه. یعنی حداقل ۱۱ تا توپ باید بندازه.

۲۲- **گزینه ۲** اول جمله عمومی را کمی ساده‌تر کنیم؛ با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای این کار را انجام می‌دهیم:

$$a_n = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1$$

با توجه به این‌که جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = an + b$ است و این‌جا هم جمله عمومی، یعنی $a_n = -2n - 1$ ، همین فرم را دارد، پس با یک دنباله حسابی سروکار داریم. بنابراین با کمک فرمول

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}[a_1 + a_{19}]$$

$$\frac{a_n = -2n - 1}{a_1 = -3, a_{19} = -39} \rightarrow S_{19} = \frac{19}{2}[(-3) + (-39)]$$

$$= \frac{19}{2}(-42) = 19(-21) = -399$$

۲۳- **گزینه ۲** وقتی دنباله ۹۹ جمله دارد، جمله ۵۰ام جمله وسط خواهد بود، پس: $a_{50} = \frac{2}{11}$. از طرفی مجموع ۹۹ جمله اول دنباله برابر

$$S_{99} = \frac{99}{2}[a_1 + a_{99}]$$

است با: چون جمله پنجاهم وسط جملات اول و نود و نهم است، پس:

$$a_1 + a_{99} = 2a_{50}$$

$$\Rightarrow S_{99} = \frac{99}{2}[2a_{50}] = 99a_{50} = 99\left(\frac{2}{11}\right) = 18$$

۲۴- **گزینه ۲** مجموع ۱۱ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2a_1 + 10d] \quad (*)$$

حالا از تساوی داده‌شده کمک می‌گیریم: $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$

$$\Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + 8d = 20$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 20d = 20 \xrightarrow{+2} 2a_1 + 10d = 10$$

$$\xrightarrow{(*)} S_{11} = \frac{11}{2}[10] = 55$$

۲۵- **گزینه ۲** دنباله اعداد ۲۷، ...، ۷، ۳، ۱، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -1$ ، جمله آخر $a_n = 27$ و قدرنسبت $d = 4$ می‌دهند. بنابراین تعداد جملات را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 27 = -1 + (n-1)4$$

$$\Rightarrow 28 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

$$(*) + (**): a_1 + a_7 + a_7 + a_7 + \dots + a_{19} + a_{19} = 285$$

$$\Rightarrow S_{19} = 285 \Rightarrow \frac{19}{2}[2a_1 + 19d] = 285$$

$$19(2a_1 + 19d) = 285 \xrightarrow{d=1/5} 2a_1 + 19(1/5) = 285/19$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 28/5 = 285/19 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

۱۹- **گزینه ۲** **روش اول** در ردیف اول دو نقطه، در ردیف دوم چهار نقطه و ... است. پس دنباله نقاط این ردیف‌ها به صورت زیر است:

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

برای محاسبه مجموع نقطه‌ها تا ردیف دهم، باید مجموع ده جمله اول دنباله را حساب کنیم:

$$2, 4, 6, 8, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(2) + 9(2)] = 10[2+9] = 110$$

روش دوم از نکته زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

در ردیف دهم بیست تا نقطه داریم، بنابراین:

$$S_{10} = 2 + 4 + \dots + 20 = 2(1+2+\dots+10) = 2\left(\frac{10(11)}{2}\right) = 110$$

۲۰- **گزینه ۲**

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

حداقل چند جمله باید با هم جمع شوند تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود، یعنی کمترین مقداری از n را حساب کنید که $S_n > 500$:

$$\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] > 500$$

$$\xrightarrow{a_1=5, d=3} \frac{n}{2}[2(5) + (n-1)3] > 500$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[10 + 3n - 3] > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}[3n + 7] > 500$$

$$\xrightarrow{\times 2} 3n^2 + 7n > 1000 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \quad (*)$$

جواب‌های معادله $3n^2 + 7n - 1000 = 0$ برابر است با:

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(3)(-1000)}}{2(3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{12049}}{6}$$

$$= \frac{-7 \pm 109.77}{6}$$

$$= \begin{cases} n_1 = \frac{-7 + 109.77}{6} = \frac{102.77}{6} = 17.13 \\ n_2 = \frac{-7 - 109.77}{6} = \frac{-116.77}{6} = -19.46 \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادله $(*)$ خارج دو ریشه است پس:

$$3n^2 + 7n - 1000 > 0 \Rightarrow \begin{cases} n > 17.13 \\ n < -19.46 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } n \text{ مثبت است}} n > 17.13 \Rightarrow n \geq 18$$

پس حداقل باید ۱۸ جمله اول را جمع کنیم تا مجموع بیشتر از ۵۰۰ شود

می‌توانید تعداد جملات را به صورت زیر هم حساب کنید:

$$+1 = \frac{27 - (-1)}{4} + 1$$

قدرنسبت

برگردیم معادله را حل کنیم. برای حل معادله، طرف چپ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\underbrace{(x + x + \dots + x)}_{\text{تا } 8} + (-1 + 3 + 7 + \dots + 27) = 180$$

$(-1 + 3 + 7 + \dots + 27)$ مجموع ۸ جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول -1 و جمله آخر 27 است، بنابراین:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 8x + \frac{8}{2}[-1 + 27] &= 180 \Rightarrow 8x + 4(26) = 180 \\ \Rightarrow 8x + 104 &= 180 \Rightarrow 8x = 76 \Rightarrow x = \frac{76}{8} = 9\frac{5}{8} \end{aligned}$$

۲۶- گزینه ۲ بین دو عدد a و 24 پنج واسطه حسابی قرار می‌دهیم. پس تعداد جملات برابر 7 . جمله اول a و جمله آخر (جمله هفتم) 24 است. چون مجموع همه جملات برابر 126 است، بنابراین:

$$\begin{aligned} S_7 &= \frac{7}{2}[\text{جمله اول} + \text{جمله آخر}] = \frac{7}{2}[a + 24] = 126 \\ \Rightarrow a + 24 &= 36 \Rightarrow a = 12 \end{aligned}$$

برای محاسبه قدرنسبت هم از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = a = 12 \\ a_7 = 24 \end{cases} \Rightarrow a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow 24 = 12 + 6d \Rightarrow 12 = 6d \Rightarrow d = 2$$

۲۷- گزینه ۲ **روش اول** بین 5 و 29 تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم. پس جمله اول و آخر واسطه را با فرض این که قدرنسبت دنباله حاصل d است می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم: $5, 5+d, \dots, 29-d, 29$. حالا با کمک رابطه $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ مجموع واسطه‌ها را می‌یابیم. فقط دقت کنید که جمله اول واسطه‌ها $5+d$ و جمله آخر آن $29-d$ است:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[\underbrace{5+d}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{29-d}_{\text{جمله آخر}}] \Rightarrow 119 = \frac{n}{2}[34] \\ \Rightarrow 119 &= 17n \Rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

با توجه به این که تعداد واسطه‌ها 7 است، عدد 29 جمله نهم و عدد 5 جمله اول است، پس:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_9 = a_1 + 8d \\ \Rightarrow 29 &= 5 + 8d \Rightarrow 24 = 8d \Rightarrow d = 3 \end{aligned}$$

روش دوم بین 5 و 29 تعدادی واسطه حسابی قرار دادیم. مجموع این واسطه‌ها برابر 119 است، بنابراین داریم:

$$S_n = 5 + 119 + 29 = 153$$

مجموع واسطه‌ها ۱۱۹

با داشتن جمله اول و آخر و مجموع جملات، تعداد آن‌ها را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(\text{جمله اول} + \text{جمله آخر}) \\ 153 &= \frac{n}{2}(5 + 29) = 17n \Rightarrow n = 9 \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی، قدرنسبت را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_9 = 29 \end{cases} \Rightarrow a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 29 = 5 + 8d \Rightarrow 24 = 8d \Rightarrow d = 3$$

۲۸- گزینه ۲ مجموع همه جملات، 4 برابر مجموع جملات اول و آخر

$$S_n = 4(a_1 + a_n) \quad \text{است. پس:}$$

با توجه به تساوی بالا از فرمول $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ استفاده کرده و تعداد جملات را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n}{2}[a_1 + a_n] = 4(a_1 + a_n) \Rightarrow \frac{n}{2} = 4 \Rightarrow n = 8$$

جمله آخر 21 واحد از جمله اول بیشتر است. چون $n = 8$ است پس جمله آخر همان جمله هشتم است. در نتیجه:

$$a_8 = 21 + a_1 \Rightarrow a_1 + 7d = 21 + a_1 \Rightarrow 7d = 21 \Rightarrow d = 3$$

۲۹- گزینه ۲ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر 240 است:

$$240 = \text{مجموع سه جمله آخر} + \text{مجموع سه جمله اول} \quad (*)$$

$$\begin{cases} \text{مجموع سه جمله اول} = a_1 + a_2 + a_3 \\ \text{مجموع سه جمله آخر} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 240 \quad (**)$$

مجموع اندیس‌های هر پرانتز برابر $n+1$ است، پس:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

$$\xrightarrow{(**)} 3(a_1 + a_n) = 240 \Rightarrow a_1 + a_n = 80$$

مجموع همه جملات دنباله برابر 520 است. پس با توجه به فرمول

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$520 = \frac{n}{2}(80) \Rightarrow 520 = 40n \Rightarrow n = 13$$

۳۰- گزینه ۲ مجموع بیست جمله اول 121 واحد بیشتر از مجموع نه جمله اول است. یعنی:

$$S_{20} = 120 + S_9 \Rightarrow S_{20} - S_9 = 120$$

حالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} + \dots + a_{20} \\ S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} S_{20} - S_9 = a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20} = 121$$

از a_{10} تا a_{20} ، 11 جمله داریم. بنابراین در طرف چپ تساوی طبق فرمول

$$[\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}] S_n = \frac{n}{2} \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2}[a_{10} + a_{20}] = 121 \Rightarrow a_{10} + a_{20} = 22$$

$$\Rightarrow 2a_{15} = 22 \Rightarrow a_{15} = 11$$

در نهایت مجموع بیست و نه جمله اول را می‌یابیم:

$$S_{29} = \frac{29}{2}[a_1 + a_{29}] = \frac{29}{2}(2(11)) = 319$$

۳۱- گزینه ۲

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

با توجه به این که $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$ پس: $a_n = 2n + 3 \quad (*)$

در نتیجه مجموع 6 جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_6 = \frac{6}{2}[a_1 + a_6] \xrightarrow{a_1=5, a_6=15} S_6 = 3[5 + 15] = 60$$

۳۲- گزینه ۴ داریم:

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 4 \Rightarrow S_n - S_{n-1} - S_{n-1} + S_{n-2} = 4$$

$$\Rightarrow (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) = 4 \quad (*)$$

می دانیم $a_n - S_{n-1} = a_n$ ، بنابراین $S_{n-1} - S_{n-2} = a_{n-1}$ و در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} a_n - a_{n-1} = 4 \Rightarrow d = 4 \quad (**)$$

پس برای این که ببینیم جمله چهارم چه قدر از جمله دوم بیشتر است به صورت زیر عمل می کنیم:

$$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d) - (a_1 + d) = 2d \stackrel{(**)}{=} 2(4) = 8$$

۳۳- گزینه ۴ مجموع چهار جمله اول، ۲ واحد بیشتر از مجموع سه جمله

اول است، پس:

$$S_4 - S_3 = 2 \Rightarrow a_4 = 2 \quad (*)$$

مجموع چهار جمله اول، ۵ واحد از مجموع پنج جمله اول کم تر است، پس:

$$S_5 = S_4 - 5 \Rightarrow S_5 - S_4 = -5 \Rightarrow a_5 = -5 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \begin{cases} a_4 = 2 \\ a_5 = -5 \end{cases} \Rightarrow d = a_5 - a_4 = -5 - 2 = -7$$

۳۴- گزینه ۴ با توجه به رابطه مربوط به مجموع n جمله اول دنباله،

جمله اول و قدرنسبت دنباله را حساب می کنیم:

$$S_n = 2n^2 - n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = 2(1)^2 - 1 = 1 \\ d = 2A = 2(2) = 4 \end{cases}$$

دنباله جملات با شماره زوج و کوچک تر از ۲۰ به صورت زیر است:

$$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{18}$$

پس جمله اول این دنباله برابر a_2 و قدرنسبت آن برابر $(a_4 - a_2 = 2d)$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2d = 2(4) = 8 \\ a_4 = a_2 + d = 2 + 4 = 6 \end{cases}$$

تعداد جملات زوج کوچک تر از جمله بیستم برابر ۹ تا است. پس مجموع این جملات برابر است با:

$$S_9 = \frac{9}{2}[2(8) + 8(8)] = \frac{9}{2}[2(8) + 4(16)] = 9(8 + 16) = 9(24) = 216$$

۳۵- گزینه ۴ مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله

هجدهم برابر است با:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$$

برای محاسبه این مجموع، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$S_{18} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_6}_{S_6} + \underbrace{a_7 + a_8 + \dots + a_{18}}_{\text{خواسته مسئله}}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6$$

چون $S_n = \frac{n(n-1)}{6}$ پس داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = \frac{18(18-1)}{6} - \frac{6(6-1)}{6} = 9 - (-1) = 10$$

۳۶- گزینه ۴ برای این که جملات دسته بیستم را شناسایی کنیم، اول

باید بررسی کنیم تا جمله آخر دسته نوزدهم، چندتا عدد وجود دارد!

تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته نوزدهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19(19+1)}{2} = \frac{19(20)}{2} = 190$$

پس جمله اول دسته بیستم، جمله ۱۹۱ام دنباله اعداد طبیعی است.

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \Rightarrow a_n = n$$

جمله اول دسته بیستم: $a_{191} = 191$

پس در دسته بیستم، بیست تا جمله با جمله اول ۱۹۱ و قدرنسبت ۱ داریم.

پس طبق فرمول $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ مجموع آن ها را حساب

می کنیم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(191) + (19)(1)] = 10[382 + 19] = 4010$$

تازه یک کار دیگر هم میشه کرد! بگیم چون تا جمله آخر دسته نوزدهم

۱۹۰ تا عدد داریم پس تا جمله آخر دسته بیستم ۲۱۰ تا عدد داریم. پس

با توجه به $a_n = n$ ، جمله آخر دسته بیستم ۲۱۰ است. پس طبق فرمول

[جمله آخر + جمله اول] $S_n = \frac{n}{2}$ مجموع بیست جمله را حساب کنیم:

$$S = \frac{20}{2}[191 + 210] = 4010$$

۳۷- گزینه ۴ فیلی سوال چون داره! باید اول ببینیم تا اون جمله ای که می فواد

بندتا عدد داریم.

تعداد کل اعداد تا جمله آخر دسته n ام برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

↓ ↓ ↓
دسته سوم دسته دوم دسته اول

تا جمله آخر دسته بیست و نهم $\frac{29(30)}{2} = 435$ تا عدد می بینیم. پس

تا جمله اول دسته سی ام ۴۳۶ تا عدد می بینیم. بنابراین جمله اول دسته

سی ام، جمله ۴۳۶ ام دنباله کل اعداد یعنی ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ... است.

این دنباله، دنباله اعداد طبیعی فرد است. پس جمله عمومی آن $a_n = 2n - 1$ است. (می توانید بگویید با یک دنباله حسابی با جمله اول یک و قدرنسبت ۲ روبه رو

هستیم و جمله عمومی آن به صورت $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$ است.)

جمله ۴۳۶ ام دنباله برابر است با:

$$a_{436} = 2(436) - 1 = 871$$

جمله اول دسته سی ام: $a_{30} = 2(30) - 1 = 59$

برای محاسبه مجموع بیست جمله اول دسته سی ام به صورت زیر عمل

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(59) + 19(2)] = 1780$$

۳۸- گزینه ۴ قدرنسبت دنباله جملات مشترک برابر ک.م.م قدرنسبت

دنباله هاست. (با نوشتن جملات و یافتن دو جمله مشترک می توانید به این

نتیجه برسید.) جمله اول این دنباله هم اولین جمله مشترک دورقمی است:

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \Rightarrow d_1 = 4 \\ 2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow d_2 = 3 \end{cases}$$

$a_1 = 11 \Rightarrow$ جمله اول دنباله جملات مشترک

$d = (3, 4)$ ک.م.م. قدرنسبت دنباله جملات مشترک

پس جمله عمومی دنباله جملات مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 11 + (n-1)12$$

$$\Rightarrow a_n = 12n - 1$$

برای محاسبه مجموع اعداد دورقمی مشترک باید تعداد جملات را محاسبه

کنیم. پس به صورت زیر عمل می کنیم:

$$10 \leq 12n - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 12n \leq 100$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} \leq n \leq \frac{100}{12} = 8 \frac{4}{3} \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 8$$



پس این دنباله ۸ جمله دارد. در نتیجه مجموع جملات برابر است با:

$$S_8 = \frac{8}{2} [2(11) + (7)(12)] = \frac{8}{2} [2(11+7(6))] = 8[11+42] = 8 \times 53 = 424$$

برای محاسبه مجموع ۸ جمله، می‌توانید به صورت زیر هم عمل کنید:

$$S_8 = \frac{8}{2} [a_1 + a_8] = \frac{a_n=12n-1}{a_1=11, a_8=95} \rightarrow S_8 = 4(11+95) = 4(106) = 424$$

۳۹- گزینه: اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۶ به صورت زیر هستند:

۱۲, ۱۸, ...
دنباله این اعداد، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ است. جمله عمومی دنباله هم برابر $a_n = 6n + 6 = 6(n+1)$ است. برای محاسبه مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۶، باید تعداد جملات را حساب کنیم،

پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$6n + 6 \leq 99 \Rightarrow 6n \leq 93 \Rightarrow n \leq 15.5 \Rightarrow n \leq 15$$

بنابراین، دنباله ۱۵ تا جمله دارد. در نتیجه با توجه به فرمول

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (12 + 6(16))$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (108) = 15 \times 54 = 810$$

۴۰- گزینه: کوچک‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ برابر $7(2) = 14$ و

بزرگ‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ برابر $7(14) = 98$ است و تعداد آن‌ها برابر $14 - 7 + 1 = 14 - 2 + 1 = 13$ تا است؛ بنابراین چون این اعداد تشکیل یک دنباله حسابی

(با قدرنسبت ۷) می‌دهند، مجموع آن‌ها را طبق رابطه $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مجموع} = \frac{13}{2} (14 + 98) = 728$$

۴۱- گزینه: اعداد طبیعی فرد بخش‌پذیر بر ۳ به صورت زیر هستند:

$$3, 9, 15, \dots$$

این دنباله، یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d = 6$ است. پس جمله عمومی آن برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n - 3$$

چون مجموع اعدادی که کوچک‌تر از ۱۰۱ هستند را باید حساب کنیم؛ پس ابتدا تعداد جملات کوچک‌تر از ۱۰۱ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n < 101 \Rightarrow 6n - 3 < 101 \Rightarrow 6n < 104$$

$$\Rightarrow n < \frac{104}{6} = 17.33 \Rightarrow n = \{1, 2, \dots, 17\}$$

پس دنباله، ۱۷ جمله کوچک‌تر از ۱۰۱ دارد. مجموع این ۱۷ جمله برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2} [2(3) + 16(6)] = \frac{17}{2} [2(3+48)] = 17 \times 51 = 867$$

۴۲- گزینه: اعداد طبیعی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۳ است

به صورت زیر هستند:

$$3, 7, 11, 15, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی: } a_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$$

برای محاسبه مجموع اعداد دورقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۳ است، اول باید تعداد جملات را حساب کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$10 \leq 4n - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 4n \leq 100 \Rightarrow \frac{11}{4} \leq n \leq 25$$

$$\Rightarrow 3 \leq n \leq 25$$

$$\text{تعداد جملات} = 25 - 3 + 1 = 23$$

بنابراین مجموع جملات موردنظر برابر است با:

$$S_{23} = \frac{23}{2} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) = \frac{23}{2} (a_3 + a_{25})$$

جمله عمومی دنباله، $a_n = 4n - 1$ است، پس:

$$S_{23} = \frac{23}{2} (11 + 99) = \frac{23}{2} (110) = 23(55) = 1265$$

به طور کلی اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر p برابر t است یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن p است.

۴۳- گزینه: با یک دنباله هندسی با جمله اول ۳۶ و قدرنسبت

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{36(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{36(1-\frac{1}{32})}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{36(\frac{31}{32})}{\frac{1}{2}} = 36(\frac{31}{16}) = \frac{9 \times 31}{4} = \frac{279}{4}$$

۴۴- گزینه: دنباله داده‌شده یک دنباله هندسی با جمله اول ۶ و

قدرنسبت -2 است. پس طبق فرمول $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = \frac{6(1-(-2)^n)}{3} = 2(1-(-2)^n)$$

می‌خواهیم مجموع برابر ۱۰۲۶ شود، بنابراین:

$$S_n = 1026 \Rightarrow 2(1-(-2)^n) = 1026$$

$$\Rightarrow 1-(-2)^n = 513 \Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

۴۵- گزینه: برای محاسبه مجموع شش جمله اول به a_1 و q احتیاج داریم.

a_1 که برابر ۲ است. برای محاسبه q هم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a_1 = 2, a_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 q^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{a_1=2} 2q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

چون قدرنسبت منفی است، پس $q = -\frac{1}{2}$ را قبول می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2(\frac{63}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}$$

۴۶- گزینه ۲ قدر نسبت رو داشته باشیم تمام مشکون هله!

$$a_1 = 4, a_r = 9 \Rightarrow a_1 q^r = 9 \Rightarrow 4q^r = 9 \Rightarrow q^r = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow q = \pm \sqrt[r]{\frac{9}{4}} \xrightarrow{q > 0} q = \frac{3}{2}$$

پس مجموع شش جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{4(1 - (\frac{3}{2})^6)}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{4(1 - \frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}} = -8(\frac{-665}{64}) = \frac{665}{8} = 83 \frac{1}{8}$$

۴۷- گزینه ۲ برای این که سه عدد $x^2 + 4, 2x, x^2 - 2$ سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 2 \Rightarrow \text{جملات: } 8, 4, 2 (q > 0) \\ x = -2 \Rightarrow \text{جملات: } 8, -4, 2 * \end{cases}$$

پس جملات دنباله به صورت $8, 4, 2, \dots$ هستند که این جملات، جملات متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول ۸ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است، پس مجموع هفت جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_7 = \frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q} = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = 16(1 - \frac{1}{128}) = 16(\frac{127}{128}) = \frac{127}{8}$$

۴۸- گزینه ۲ جمله اول دنباله با قراردادن $n = 1$ در جمله عمومی محاسبه می شود. برای محاسبه قدرنسبت هم، جمله دوم را حساب می کنیم و بعد از تقسیم $\frac{a_2}{a_1}$ ، مقدار q را حساب می کنیم:

$$a_n = 2^{1-n} = \begin{cases} a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \\ a_2 = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

پس تمام بساطمون برای مناسبه مجموع شش تا جمله اول پوره!

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{1(1 - (\frac{1}{2})^6)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

قدرنسبت دنباله هندسی با جمله عمومی $a(b)^{kn+c}$ ، برابر b^k است. پس قدرنسبت دنباله هندسی با جمله عمومی 2^{1-n} برابر $2^{-1} = \frac{1}{2}$ است.

۴۹- گزینه ۲ بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد درج می کنیم، پس ۴، جمله اول و ۳۲۴، جمله پنجم می شود. طبق فرمول جمله عمومی دنباله هندسی یعنی $a_n = a_1 q^{n-1}$ داریم: $a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 324 = 4q^4 \Rightarrow q^4 = 81$

$$\Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow{\text{جملات مثبت هستند}} q = 3$$

پس مجموع ۵ جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow S_5 = \frac{4(1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{4(1 - 243)}{-2} = \frac{2(-242)}{-1} = 484$$

۵۰- گزینه ۲ با توجه به این که بین ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش تا عدد قرار می دهیم، پس $a_1 = 2$ و $a_6 = 16\sqrt{2}$ است، در نتیجه قدرنسبت را اول می یابیم:

$$a_6 = a_1 q^5 \Rightarrow 16\sqrt{2} = 2q^5 \Rightarrow q^5 = 8\sqrt{2} \Rightarrow q^5 = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow q^5 = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q = 2^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{2^7}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \sqrt[10]{2^7} \end{cases}$$

پس مجموع هشت جمله اول برابر است با:

$$S_8 = \frac{2(1 - (\sqrt[10]{2^7})^8)}{1 - \sqrt[10]{2^7}} = \frac{2(1 - 2^{\frac{56}{10}})}{1 - \sqrt[10]{2^7}} = \frac{-30}{1 - \sqrt[10]{2^7}} = \frac{30}{\sqrt[10]{2^7} - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می کنیم}} S_8 = \frac{30}{\sqrt[10]{2^7} - 1} \times \frac{\sqrt[10]{2^7} + 1}{\sqrt[10]{2^7} + 1}$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{30(\sqrt[10]{2^7} + 1)}{2 - 1} = 30(\sqrt[10]{2^7} + 1)$$

۵۱- گزینه ۲ گفتیم نسبت مجموع n جمله دوم به مجموع n جمله اول q^n است، در نتیجه: $\frac{\text{مجموع سه جمله دوم}}{\text{مجموع سه جمله اول}} = q^3$ (*)

پس باید q را داشته باشیم، با توجه به جملات دنباله $a_1 = 2$ و $a_3 = 6$ داریم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{a_1 q^2}{a_1} = 3 \Rightarrow q^2 = 3 \Rightarrow q = \pm \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{q < 0} q = -\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\text{مجموع سه جمله دوم}}{\text{مجموع سه جمله اول}} = (-\sqrt{3})^3 = -3\sqrt{3}$$

۵۲- گزینه ۲ مجموع ۸ جمله اول $\frac{5}{4}$ برابر مجموع چهار جمله اول

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \quad (*)$$

است، پس:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 1 + q^4$$

در درس نامه گفتیم:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{5}{4} = 1 + q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حالا بررسی می کنیم جمله هفتم چند برابر جمله اول است. برای این کار نسبت $\frac{a_7}{a_1}$ را باید حساب کنیم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

۵۳- گزینه ۲

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{152}{136} \Rightarrow 1 + q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

در نتیجه:

پس جمله اول، ۱۶ برابر جمله پنجم است.

۵۴- گزینه ۲ اگر قدرنسبت دنباله را q در نظر بگیریم با توجه به این که جمله دوم برابر ۶ است، پس:

$$a = \frac{6}{q}, b = 6q$$

از آن جا که $a + b = 13$ است، داریم:

$$\frac{6}{q} + 6q = 13 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q^2 = 13q \Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6} \Rightarrow q = \frac{3}{2} \text{ یا } q = \frac{2}{3}$$

چون دنباله افزایشی است پس $q = \frac{3}{4}$ قابل قبول است.

حالا نسبت مجموع معکوس شش جمله اول (S'_6) به مجموع معکوس سه جمله اول (S'_3) را می‌یابیم.

دقت کنید که اگر جملات یک دنباله هندسی معکوس شود یک دنباله جدید حاصل می‌شود که قدرنسبت آن، معکوس قدرنسبت دنباله اولیه است. بنابراین:

$$\frac{S'_6}{S'_3} = 1 + (q')^3 = 1 + \left(\frac{1}{q}\right)^3 = 1 + \left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^3 = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 1 + \frac{64}{27} = \frac{91}{27}$$

۵۵- گزینه ۳ در درس‌نامه گفتیم وقتی تعداد جملات زوج است، نسبت مجموع جملات ردیف زوج $(S_{زوج})$ به مجموع جملات ردیف فرد $(S_{فرد})$ برابر q است. پس با توجه به این که مجموع تمام جملات ۳ برابر مجموع جملات ردیف فرد است، داریم:

$$\begin{cases} S_{زوج} = q S_{فرد} \\ S_{کل} = 3 S_{فرد} \end{cases} \rightarrow S_{کل} = S_{زوج} + S_{فرد} \rightarrow 3 S_{فرد} = q S_{فرد} + S_{فرد} \xrightarrow{\div S_{فرد}} 3 = q + 1 \Rightarrow q = 2$$

۵۶- گزینه ۳ مجموع پنج جمله اول، سه برابر تفاضل جمله اول و ششم است:

جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q به صورت

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

است. پس با توجه به تساوی (*) داریم:

$$\begin{aligned} -q > 1 &\rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 3(a_1 q^5 - a_1) \\ &\Rightarrow \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = -3a_1(1-q^5) \Rightarrow \frac{1}{1-q} = -3 \\ &\Rightarrow 1-q = -\frac{1}{3} \Rightarrow q = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

۵۷- گزینه ۳ مجموع ۸ جمله اول ۴۸ است:

$$S_8 = 48 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 48 \quad (*)$$

مجموع جملات شروع از جمله چهارم و ختم به جمله یازدهم، ۲۴۰ است:

$$a_4 + a_5 + \dots + a_{11} = 240 \quad (**)$$

مجموع $a_4 + a_5 + \dots + a_{11}$ مجموع $11 - 4 + 1 = 8$ جمله اول یک

دنباله هندسی با جمله اول a_4 و قدرنسبت q ($= \frac{a_5}{a_4}$) است. پس با

استفاده از رابطه مجموع جملات دنباله هندسی در تساوی (***) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_4(1-q^8)}{1-q} = 240 &\Rightarrow \frac{a_4 q^3(1-q^8)}{1-q} = 240 \\ &\xrightarrow{(*)} q^3(48) = 240 \Rightarrow q^3 = 5 \Rightarrow q = \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

تعداد اعداد طبیعی از a تا b و a و b نیز جزو اعداد هستند) برابر $b - a + 1$ است.

۵۸- گزینه ۳ مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ است:

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1 \quad (*)$$

مجموع چهار جمله اول ۳ است:

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{a_1(1+q^2)(1-q^2)}{1-q} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1(1-q^2)}{1-q} = 3 \Rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = 3 \Rightarrow 1+q = 3$$

$$\Rightarrow q = 2 \xrightarrow{(*)} a_1(1+4) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

بنابراین مجموع شش جمله اول برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{5}(1-2^6)}{1-2} = \frac{\frac{1}{5}(-63)}{-1} = \frac{63}{5} = 12 \frac{3}{5}$$

۵۹- گزینه ۳ روش اول جمله سوم $1/44$ واحد از جمله دوم بیشتر

$$a_3 = 1/44 + a_2 \Rightarrow a_3 - a_2 = 1/44 \quad \text{است:}$$

$$\Rightarrow a_1 q^2 - a_1 q = 1/44 \Rightarrow a_1 q(q-1) = 1/44 \quad (*)$$

جمله دوم $1/8$ واحد از جمله اول کمتر است:

$$a_2 = a_1 - 1/8 \Rightarrow a_2 - a_1 = -1/8$$

$$a_1 q - a_1 = -1/8 \Rightarrow a_1(q-1) = -1/8 \quad (**)$$

با تقسیم (*) بر (***) داریم:

$$\frac{a_1 q(q-1)}{a_1(q-1)} = \frac{1/44}{-1/8} \Rightarrow q = -\frac{144}{180} = -\frac{4}{5} = -0.8$$

$$\xrightarrow{(**)} a_1(-0.8-1) = -1/8 \Rightarrow a_1(-1.8) = -1/8$$

$$\Rightarrow a_1 = 1$$

پس مجموع ۴ جمله اول دنباله برابر است با:

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1(1-(-0.8)^4)}{1-(-0.8)} = \frac{1-(0.8)^4}{1.8} \\ &= \frac{(1-(0.8)^2)(1+(0.8)^2)}{1.8} = \frac{(0.36)(1.64)}{1.8} = 0.328 \end{aligned}$$

روش دوم می‌توانید چهار جمله اول را بنویسید و با هم جمع کنید.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -0.8 \end{cases} \Rightarrow \text{چهار جمله اول: } 1, -0.8, 0.64, -0.512$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = 0.328$$

۶۰- گزینه ۳ مجموع جملات سوم و ششم برابر ۱۴ است:

$$a_3 + a_6 = 14 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^2 + a_1 q^5 = 14$$

$$\Rightarrow a_1 q^2(1+q^3) = 14 \quad (*)$$

تفاضل جملات سوم و نهم برابر ۹۸ است:

$$a_9 - a_3 = 98 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^8 - a_1 q^2 = 98$$

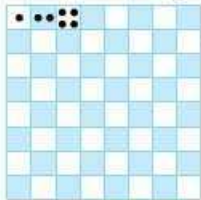
$$\Rightarrow a_1 q^2(q^6 - 1) = 98 \quad (**)$$

با تقسیم (***) بر (*) داریم:

$$\frac{a_1 q^2(q^6 - 1)}{a_1 q^2(1+q^3)} = \frac{98}{14} \Rightarrow \frac{(q^3 - 1)(q^3 + 1)}{(1+q^3)} = 7$$

$$\begin{aligned} \frac{t=1+\sqrt{17}}{2} \rightarrow \text{عبارت} &= 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \frac{1+17+2\sqrt{17}}{4} \\ \frac{4-2-2\sqrt{17}+1+17+2\sqrt{17}}{4} &= \frac{20}{4} = 5 \end{aligned}$$

۶۴- **کزیته** در خانه اول ۱ دانه گندم (2^0)، در خانه دوم تا (2^1)، در خانه سوم تا (2^2) و... و در خانه n تا 2^{n-1} تا گندم قرار می‌گیرد. پس تعداد کل گندمها تا خانه n به این صورت محاسبه می‌شود.



$$\Rightarrow S_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$$

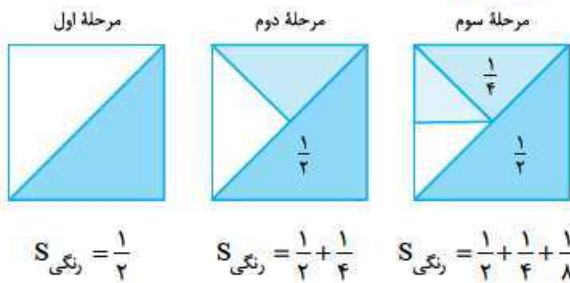
مجموع بالا، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1 \quad \text{قدرنسبت ۲ است}$$

اگر قرار باشد تعداد گندمها بیشتر از ۴۱۰۰ دانه باشد باید:

$S_n > 4100 \Rightarrow 2^n - 1 > 4100 \Rightarrow 2^n > 4101$
با توجه به این که $2^{11} = 2048$ ، $2^{12} = 4096$ و $2^{13} = 8192$ است، پس کمترین مقدار n برابر ۱۳ است. این یعنی خانه سیزدهم اولین خانه‌ای است که مجموع تعداد گندمهاش بیشتر از ۴۱۰۰ است.

۶۵- **کزیته** شکل‌های زیر گویای اطلاعات مسئله هستند:



پس مساحت قسمت رنگی تا پایان مرحله n برابر است با:

(مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$)

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

قرار است بیشتر از ۹۸ درصد مربع را رنگ بزنیم:

$$S_n > \frac{98}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} > \frac{98}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{98}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{50} \Rightarrow 2^n > 50 \Rightarrow n \geq 6$$

پس از ۶ مرحله، حداقل ۹۸ درصد سطح مربع رنگ می‌شود.

۶۶- **کزیته** **روش اول** بعد از عبور از لایه اول شدت تابش نصف

می‌شود (مرحله اول) پس $\frac{1}{2}$ شدت تابش از بین می‌رود و $\frac{1}{2}$ می‌ماند. بعد از

عبور از لایه دوم نصفه باقی‌مانده باز هم نصف می‌شود ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$).

$$\Rightarrow q^r - 1 = 7 \Rightarrow q^r = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\xrightarrow{(*)} a_1(2)^r(1+2^r) = 14$$

$$\Rightarrow a_1(4)(9) = 14 \Rightarrow a_1 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

a_1 و q را داریم، پس مجموع چهار جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{\frac{7}{18}(1-2^4)}{1-2} = \frac{\frac{7}{18}(-15)}{-1} = \frac{7}{6}(5) = \frac{35}{6}$$

۶۱- **کزیته**

(*) $a_1 q^5 = 81 \Rightarrow a_1 q^5 = 81$: جمله ششم برابر ۸۱ است.

$a_1 a_2 \dots a_6 = 243$ حاصل ضرب پنج جمله اول ۲۴۳ است.

$$\Rightarrow a_1(a_1 q)(a_1 q^2)(a_1 q^3)(a_1 q^4) = 243$$

$$\Rightarrow a_1^5 q^{1+2+3+4} = 243 \Rightarrow a_1^5 q^{10} = 243$$

$$\Rightarrow (a_1 q^2)^5 = 3^5 \Rightarrow a_1 q^2 = 3 \quad (**)$$

با تقسیم (*) بر (**):

$$\frac{a_1 q^5}{a_1 q^2} = \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

$$\xrightarrow{(**)} a_1(3)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع پنج جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{1-3} = \frac{\frac{1}{3}(-242)}{-2} = \frac{121}{3} = 40\frac{1}{3}$$

۶۲- **کزیته** عبارت $(1+x+x^2+\dots+x^8)$ مجموع ۹ جمله اول

یک دنباله هندسی با جمله اول یک و قدرنسبت x است، پس:

$$1+x+x^2+\dots+x^8 = \frac{1(1-x^9)}{1-x} = \frac{1-x^9}{1-x}$$

عبارت $(1-x+x^2-\dots+x^8)$ مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی

با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-x)$ است، پس:

$$1-x+x^2-\dots+x^8 = \frac{1(1-(-x)^9)}{1-(-x)} = \frac{1+x^9}{1+x}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)\left(\frac{1+x^9}{1+x}\right) = \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^9}{1-2} = 511$$

۶۳- **کزیته** صورت کسر، مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با

جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-t)$ است. مخرج کسر هم مجموع سه جمله اول یک

دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-t^2)$ است. پس با توجه به فرمول

مجموع جملات دنباله هندسی، عبارت را ساده می‌کنیم و حاصل را حساب

می‌کنیم:

$$\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{\frac{1(1-(-t)^9)}{1-(-t)}}{1-(-t^2)} = \frac{1+t^9}{1+t^2}$$

$$= \frac{1+t^2}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t} = 1-t+t^2$$

$$= 6 + 12 \left(\frac{\frac{4}{5} (1 - (\frac{4}{5})^{99})}{1 - \frac{4}{5}} \right) = 6 + 12 \left(4 \left(1 - (\frac{4}{5})^{99} \right) \right)$$

از آنجا که $(\frac{4}{5})^{99}$ عدد بسیار کوچکی است (خیلی نزدیک صفر) می‌توانیم از آن صرف نظر کنیم. در نتیجه:

$$S = 6 + 12(4) = 54$$

۶۸- **گزینه ۳** $a_n \cdot b_n = 2^n \cdot (3^{1-n}) = 2^n \times (3 \times 3^{-n})$

$$= 2^n \times \frac{3}{3^n} = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

این دنباله یک دنباله هندسی با جمله اول $3 \left(\frac{2}{3} \right)^1 = 2$ و قدرنسبت $\left(\frac{2}{3} \right)^1 = \frac{2}{3}$ است.

$$S_5 = \frac{2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^5 \right)}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2 \left(1 - \frac{32}{243} \right)}{\frac{1}{3}} = 6 \left(\frac{211}{243} \right)$$

در نتیجه:

$$= 2 \left(\frac{211}{81} \right) = \frac{422}{81}$$

۶۹- **گزینه ۲** با توجه به جملات دنباله، جمله اول و قدرنسبت دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6} \\ S_2 = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1 \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{6}} \frac{1}{6} + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

پس با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = \frac{1}{6}$ و قدرنسبت $d = \frac{2}{3}$ مواجهیم. پس مجموع ده جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_{10} = \frac{1}{6} \left[2 \left(\frac{1}{6} \right) + 9 \left(\frac{2}{3} \right) \right] = 5 \left[\frac{1}{3} + \frac{18}{3} \right]$$

$$= 5 \left(\frac{19}{3} \right) = \frac{95}{3} = 31 \frac{2}{3}$$

دقت کنید که:

$$\begin{array}{r} 95 \quad | \quad 3 \\ -9 \quad 31 \\ \hline 05 \quad 2 \\ \quad 3 \\ \hline 2 \end{array} \Rightarrow \frac{95}{3} = 31 \frac{2}{3}$$

۷۰- **گزینه ۳** جملات این دنباله را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$10^1 - 1, 10^2 - 1, 10^3 - 1, \dots$$

مجموع ده جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)$$

$$= (10^1 + 10^2 + \dots + 10^{10}) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

تا دنباله هندسی با جمله اول ۱۰ و قدرنسبت ۱۰

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10(1 - 10^{10})}{1 - 10} - 10 = \frac{10(1 - 10^{10})}{-9} - 10$$

$$= \frac{10 - 10^{11}}{-9} + 10 = \frac{100 - 10^{11}}{-9} = \frac{10^{11} - 100}{9}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10000000000 - 100}{9}$$

$$= \frac{9999999900}{9} = 1111111100$$

یعنی $\frac{1}{4}$ شدت تابش هم در مرحله دوم تابور می‌شه! در مرحله سوم شدت تابش از بین می‌رود و ... پس کل شدت تابشی که بعد از عبور از لایه ۱۱ام (مرحله ۱۱ام) از بین می‌رود، برابر مجموع زیر است:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

برای این که شدت تابش‌ها بیشتر از ۹۹ درصد کاهش پیدا کند باید $S_n > \frac{99}{100}$

باشد. S_n مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$

$$S_n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} > \frac{99}{100}$$

$$\xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

پس حداقل ۷ تا لایه باید ساخته شود.

روش دوم این سوال، سوال سال‌های ساله که تو کتاب هست. نمیدونم هم که چه اصراره

این سوال با کمک فرمول مجموع جملات هندسی حل بشه! این طوری که قبلی بهتره.

از شدت تابش، بعد از عبور از لایه اول $\frac{1}{2}$ باقی می‌ماند. بعد از عبور از لایه دوم $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ باقی می‌ماند و ... پس بعد از عبور از لایه ۱۱ام، $\frac{1}{2^{11}}$ از

شدت تابش باقی می‌ماند. حالا برای این که شدت تابش بیشتر از ۹۹ درصد کاهش پیدا کند، باید کم‌تر از یک درصدش باقی بماند؛ یعنی:

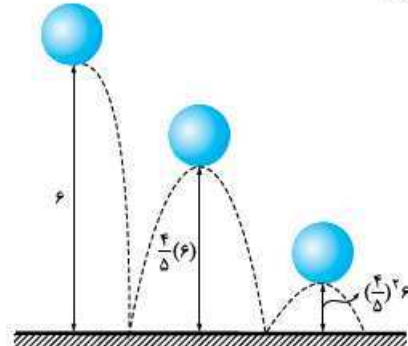
$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

۶۷- **گزینه ۲** به شکل زیر توجه کنید. وقتی توپ از ارتفاع ۶ متری رها

می‌شود ۶ متر پایین می‌آید. بعد که به زمین می‌خورد $\frac{4}{5}$ ارتفاع قبلی‌اش بالا می‌رود یعنی $\frac{4}{5}(6)$. در این مرحله، توپ $\frac{4}{5}(6)$ بالا می‌رود و

پایین می‌آید. یک بار دیگر که به زمین می‌خورد $\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}(6) \right)$ یعنی $\left(\frac{4}{5} \right)^2 6$ بالا می‌رود و پایین می‌آید و ...

بنابراین پس از صد بار به زمین خوردن، کل مسافتی که توپ طی می‌کند برابر است با:



$$S = 6 + 2 \left(\frac{4}{5} \right) 6 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 6 + \dots + \left(\frac{4}{5} \right)^{99} 6$$

$$= 6 + 2 \left(6 \left(\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{5} \right)^{99} \right) \right)$$

مجموع ۹۹ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $\frac{4}{5}$ و قدرنسبت $\frac{4}{5}$

۷۱- گزینه \Rightarrow دنباله داده شده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right), 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

$$S_{10} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \dots + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \quad \text{در نتیجه:}$$

$$= \underbrace{\left(1 + 1 + \dots + 1\right)}_{10} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}_{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}}$$

$$= 10(1) - \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 10 - \left(1 - \frac{1}{1024}\right)$$

$$= 10 - \frac{1023}{1024} = \frac{10240 - 1023}{1024} = \frac{9217}{1024} = 9217 \left(\frac{1}{1024}\right)$$

۷۲- گزینه \Rightarrow مساحت مربع اول برابر $(12)^2 = 144$ است. از طرفی طول ضلع مربع دوم با توجه به قضیه فیثاغورس برابر است با:

$$\text{طول ضلع مربع دوم} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

پس مساحت مربع دوم برابر $(\sqrt{80})^2 = 80$ است. دنباله مساحت مربعها تشکیل

یک دنباله هندسی با جمله اول ۱۴۴ و قدرنسبت $q = \frac{80}{144} = \frac{5}{9}$ می دهند.

حالا باید بررسی کنیم مجموع مساحت های چند مربع بزرگ تر از ۲۹۷ می شود. پس به صورت زیر عمل می کنیم:

$$S_n > 297 \Rightarrow \frac{144 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)}{1 - \frac{5}{9}} > 297$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 144 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)}{4} > 297$$

$$\Rightarrow 9 \times 36 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) > 297 \Rightarrow 36 \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) > 33$$

$$1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n > \frac{11}{12} \Rightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n < \frac{1}{12} \Rightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^n > 12 \Rightarrow n \geq 5$$

۷۳- گزینه \Rightarrow جمله اول، ۳ واحد از جمله دوم کم تر است، پس:

$$a_1 = a_4 - 3 \Rightarrow a_4 - a_1 = 3 \Rightarrow d = 3$$

هم چنین با توجه به رابطه $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ و اطلاعات مسئله داریم:

$$\Rightarrow \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)3] = 10 \quad (*)$$

$$S_{2n} = 68 \quad \text{مجموع } 2n \text{ جمله اول } 68 \text{ است.}$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{2} [2a_1 + (2n-1)3] = 68 \quad (**)$$

با تقسیم دو رابطه بالا بر هم داریم:

$$\frac{68}{10} = \frac{\frac{2n}{2} [2a_1 + (2n-1)3]}{\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)3]} \Rightarrow \frac{34}{5} = \frac{2[2a_1 + 6n - 3]}{[2a_1 + 3n - 3]} \quad (**)$$

$$68a_1 + 10 \cdot 2n - 10 \cdot 2 = 20a_1 + 60n - 30$$

$$\Rightarrow 48a_1 = 72 - 42n \Rightarrow 8a_1 = 12 - 7n$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{12 - 7n}{8} \xrightarrow{(*)} \frac{n}{2} \left[\frac{12 - 7n}{4} + 3n - 3 \right] = 10$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \left[\frac{12 - 7n + 12n - 12}{4} \right] = 10 \Rightarrow \frac{n}{2} \left(\frac{\Delta n}{4} \right) = 10$$

$$\Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{12 - 7(4)}{8} = -2$$

۷۴- گزینه \Rightarrow اول کاری به اون ۲ نداشته باشیم:

$$S = x + 2x^2 + 2x^3 + \dots + 15x^{15}$$

$$= x + (x^2 + x^3) + (x^4 + 2x^5) + \dots + (x^{15} + 14x^{16})$$

$$\Rightarrow S = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15}) + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{16})$$

برای محاسبه مقدار عبارت بالا، یک $15x^{16}$ اضافه و کم می کنیم:

$$\Rightarrow S = \underbrace{(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{15})}_{a_1 = x, q = x} + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{16})$$

$$+ 15x^{16} - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + (x^2 + 2x^3 + \dots + 14x^{16} + 15x^{16}) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + x(x + 2x^2 + \dots + 15x^{15}) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} + x(S) - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S - x(S) = \frac{x(1-x^{15})}{1-x} - 15x^{16}$$

$$\Rightarrow S(1-x) = \frac{x(1-x^{15}) - 15x^{16}(1-x)}{1-x}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x - x^{16} - 15x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2} = \frac{x - 16x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2}$$

پس مجموع داده شده برابر است با:

$$S' = S - 2 = \frac{x - 16x^{16} + 15x^{17}}{(1-x)^2} - 2$$

$$\xrightarrow{x=2} S' = 2 - 16(2)^{16} + 15(2)^{17} - 2$$

$$\Rightarrow S' = 15(2^{17}) - 16(2^{16}) = 2^{16} (15 \cdot 2 - 16)$$

$$= 14(2^{16}) = 7(2^{17})$$

۷۵- گزینه $\Rightarrow a_{n-m} = 20$: جمله $(n-m)$ ام 20 است.

$a_{n+m} = 5$: جمله $(n+m)$ ام 5 است.

جمله وسط جمله های $(n-m)$ ام و $(n+m)$ ام دنباله، برابر جمله m

$$\left(\frac{(n+m) + (n-m)}{2} = n \right) \text{ است. در نتیجه طبق رابطه واسطه هندسی}$$

دو عدد داریم:

$$a_n^2 = a_{n+m} a_{n-m} = 5(20) \Rightarrow a_n^2 = 100 \Rightarrow a_n = \pm 10$$

حالا بین a_n و 160 باید هفت واسطه هندسی مثبت قرار دهیم، پس حتماً $a_n = 10$ است. در نتیجه:

$$10, \square, \square, \dots, \square, 160 \Rightarrow a_1 = a_1 q^8 \Rightarrow 160 = 10 q^8$$

$$\Rightarrow q^8 = 16 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{2} \xrightarrow{\text{جملات مثبت}} q = \sqrt[4]{2}$$