مقدمۀ ناشر

در مملکت ما از قدیم‌الایام تا به امروز مردم برای رشتۀ تجربی سر و دست می‌شکوندن. چون از راه این رشته می‌تونن طبیب بشن و مطب بزنن و سری توی سرا در بیارن. برای همین در مملکت ما از لحظه‌ای که بچه‌ای جیغ حیاتش رو می‌کشه بهش می‌گن: سلام دکتر جان! انگار انسان‌ها دو دسته‌اند: دکتر و هیچی! یعنی یا دکتر می‌شی یا هیچی نمی‌شی! این نوع تفکر باعث شده که در مملکت ما تعداد آدمایی که ستینگز (settings) کارخونه‌شون ریاضیه ولی می‌رن تجربی زیاد بشه.[1] ندایی در ناخودآگاه این آدما هست که فریاد می‌زنه: «من ریاضی می‌خوااااااام!»

و البته این‌که توی مملکت ما خیلی چیزا افراط و تفریطیه گاهی هم چیز بدی نیست. مثلاً خدا رو شکر بچه‌های تجربی کمی افراطی ریاضی می‌خونن و این خبر خوبیه برای تجربی‌رفته‌های ریاضی‌دوست! و خلاصه این‌که در مملکت ما اگر رشته‌ات تجربیه و می‌خوای دکتر بشی باید خیلی خوب ریاضی و فیزیک بخونی (حتی گاهی بیشتر از ریاضیا!)

کتاب ماجراهای من و درسام ریاضی ۲ طوری نوشته شده که هم ریاضی رو خیلی راحت بفهمی و هم در امتحان‌های تشریحی خیلی راحت ۲۰ بگیری. چون خداوند مؤلف این کتاب رو برای خوب فهموندن ریاضی به بندگانش خلق کرده. جا داره همین‌جا به دکتر کوروش اسلامی بگم: کوروش جان ممنون که قبول کردی این کتاب رو تألیف کنی. مطمئنم که بچه‌های تجربی دعات می‌کنن.

در ضمن سپاس از همۀ دست‌اندرکاران تولید این کتاب از جمله خانم انسیه‌سادات میرجعفری که نیروی محرکۀ واحد تألیف کتابای ماجراست و ویراستاران خوبمون خانم مریم نظری، آقایان صادق محمدی و پیام ابراهیم‌نژاد و صد البته دوستان خستگی‌ناپذیرمون در واحد تولید. دست همتون درد نکنه.

شاد باشید از ته دل.

۱- از حق نگذریم، شاید دلیل این‌که پزشکای ایرانی تو دنیا بهترینن همینه.

مقدمهٔ مؤلف

سلام

کتاب‌های ماجرا اولش قرار بود خیلی ماجراجویانه‌تر و جالب‌تر نوشته شوند. حتی توی جلسه‌هایی که در این‌باره داشتیم، بعضی‌ها می‌گفتند که متن کتاب ماجرا باید مثل یک داستان باشد، کلی پیشنهاد دیگر هم بود: کاریکاتور، جوک، انیمیشن و ...

اما در عمل، کتاب‌های ماجرا این‌طور شدند که می‌بینید. علتش هم به نظرم کاملاً معلوم است؛ ماجرای هر کسی با هر کدام از درس‌هایش، یک ماجرای منحصربه‌فرد است. ممکن است من با درس ریاضی‌ام ماجرا داشته باشم، شما با درس فارسی‌تان و دیگری با هر درس دیگری، تازه ماجراهای هر کدام از ما با درس‌ها و معلم‌هایمان طیف خیلی وسیعی دارد: تراژدی، کمدی، اخلاق‌مدار، انگیزشی، سرگرم‌کننده و ...

خلاصه‌اش این‌که تصمیم گرفتیم متن کتاب ماجرا را به توضیح هر چه بهتر درس‌ها و طرح مجموعه‌ای از سؤال‌های خوب اختصاص دهیم. حالا بگذارید در مورد این کتاب برایتان بگویم:

شما که دانش‌آموز پایهٔ یازدهم رشتهٔ تجربی هستید باید بدانید که کتاب درسی‌تان نسبتاً پربار و پرکار است؛ یعنی این شمایید و یک کتاب درسی پرملات!

پس بهتر است از همین الآن (که البته نمی‌دانم کی و کجای سال تحصیلی است) همهٔ حرف و حدیث‌ها را بگذارید کنار و درس ریاضی را خوب و دقیق بخوانید.

سعی‌ام این بوده که بدون زیاده‌گویی، همه‌چیز را توضیح دهم و بعدش هم تمرین‌های لازم و کافی (یعنی نه کم‌تر و نه بیشتر) برای تسلطتان بنویسم. تا این‌جایش یعنی نوشتن کتاب، وظیفهٔ من بود، اما کار شما چیست؟ یا چه‌طور از این کتاب استفاده کنید:

۱ درس‌نامه‌ها را با صبر و حوصله بخوانید. به هر مثالی که رسیدید. اول سعی کنید خودتان حل کنید و بعد چه حل کردید و چه نه، جواب مثال را بخوانید و یاد بگیرید.

۲ یک بار که درس‌نامه را خواندید، برگردید و سعی کنید مثال‌ها را خودتان حل کنید. یک کار خیلی خوب (و البته یک کم سخت!) که می‌توانید بکنید این است که در دور اول خواندن درس‌نامه، صورت مثال‌ها را در برگه‌های جداگانه‌ای بنویسید و بعد از تمام‌شدن درس‌نامه، مثال‌ها را بدون استفاده از کتاب حل کنید.

۳ حالا بروید سراغ «سؤالات امتحانی»؛ علت این‌که اسم این قسمت را گذاشته‌ایم سؤالات امتحانی، این است که سؤالات این قسمت طوری طراحی شده‌اند که ممکن است نمونه‌شان را در هر آزمونی ببینید.

۴ در آخر هر فصل یک آزمون منتخب از سؤال‌های امتحانی مدارس سراسر کشور آورده‌ایم، تا با حال و هوای انواع سؤال‌ها بیشتر آشنا شوید. از حل این سؤالات هم غفلت نکنید!

۵ برای حل سؤال‌ها زمانتان را برنامه‌ریزی کنید. ممکن است تعداد سؤال‌های یک فصل برای یک بار حل‌کردن زیاد باشد، در این صورت سؤال‌ها را به چند قسمت تقسیم کنید و در زمان‌های مشخصی آن‌ها را حل کنید.

۶ در فاصله‌های منظم و قبل از هر آزمون یا امتحان جدی، دوباره تمرین‌ها را حل کنید.

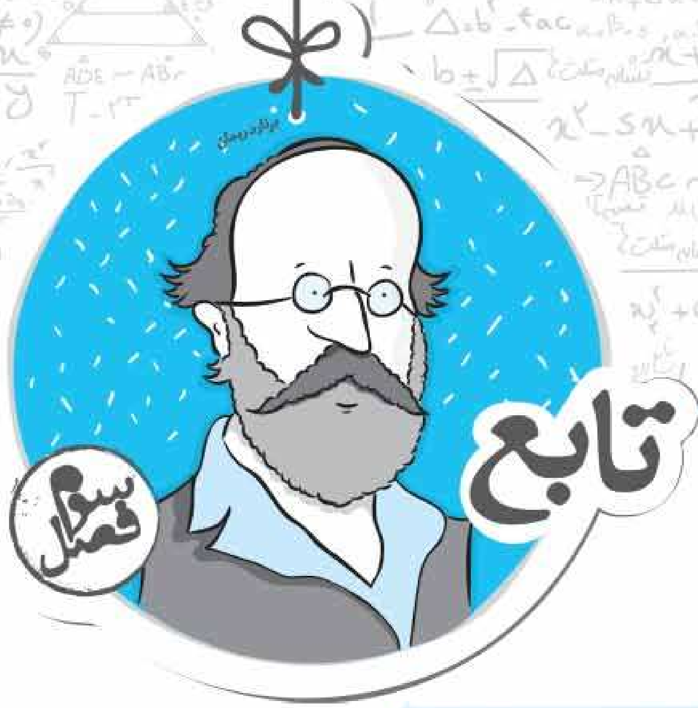
پیشنهاد می‌کنم هر ماجرایی را که در مورد هر قسمت از درس‌های ریاضی مربوط به این کتاب (چه در خانه یا در کلاس) برایتان اتفاق می‌افتد بنویسید و برایمان بفرستید. ما این ماجراها را می‌خوانیم و آن‌هایی را که جالب‌تر باشند در کتاب سال آینده چاپ می‌کنیم.

تشخیص این جالب‌بودن هم با ماست. به هر حال با همین نوشتن‌هاست که چیزهایی که برای شما یا ما خاطره (ماجرا) است برای دیگران جوک می‌شود!

در پایان از خانم‌ها سمیرا هاشمی و مهشاد زاهدی که با تماس‌های خود در رفع اشکالات این کتاب در چاپ جدید ما را یاری کردند، بسیار تشکر می‌کنیم.

خندان و پیروز باشید.

فهرست

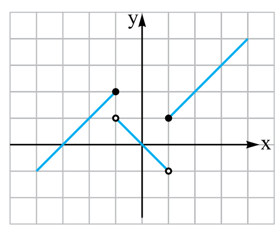


۱ آشنایی با برخی از انواع تابع

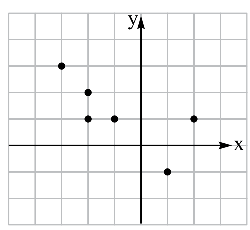
یادآوری سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم.
دیدیم: تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشند.
به بیان دیگر تابع، رابطه‌ای بین x و y است که در آن به ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار برای y به دست آید.

اگر نمودار یک تابع را در دستگاه مختصات رسم کنیم هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

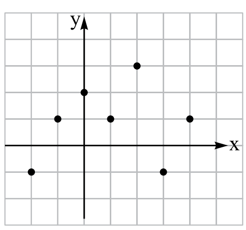
مثال **کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟**



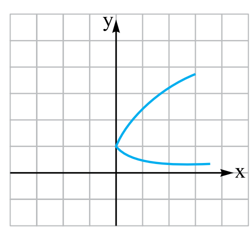
(پ)



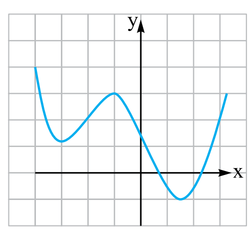
(ب)



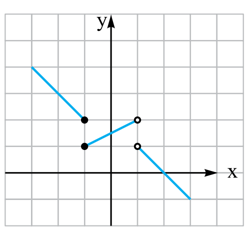
(الف)



(ج)



(ث)



(ت)

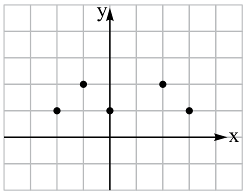
پاسخ طبق توضیحات بالا «الف»، «پ» و «ث» تابع‌اند و بقیه تابع نیستند.

دامنه

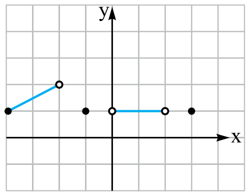
دامنهٔ تابع مجموعهٔ مقادیر مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب یا مجموعهٔ xهای تابع است. روی نمودار تابع نیز، مجموعهٔ xهای نقاط نمودار (یا همان تصویر نمودار روی محور xها) نشان‌دهندهٔ دامنهٔ تابع است.

مثلاً در تابع $f=\{(۰,۲),(۱,۳),(۵,-۳)\}$ دامنه برابر است با $D_f=\{۰,۱,۵\}$.

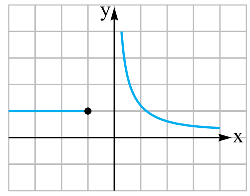
مثال دامنهٔ هر کدام از تابع‌های زیر را تعیین کنید.



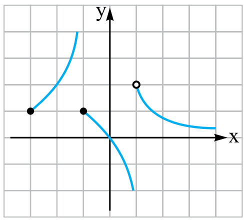
(الف)



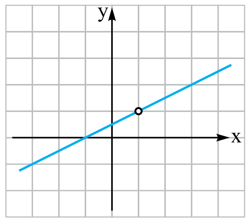
(ب)



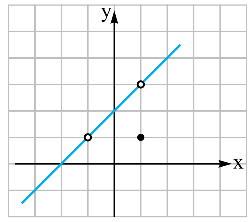
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

پاسخ دامنهٔ تابع شکل (الف) برابر مجموعهٔ نقاط $\{-۲,-۱,۰,۲,۳\}$ است. دقت کنید که دامنهٔ (و نمودار) این تابع از نقاط مجزا تشکیل شده است. در شکل (ب) دامنه برابر است با $[-۴,-۲)\cup\{-۱\}\cup(۰,۲)\cup\{۳\}$. در شکل (پ) دامنه برابر است با $(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$ دقت کنید که وقتی نمودار تابع تا انتهای محور ادامه دارد منظورمان این است که دامنه تا $+\infty$ یا $-\infty$ می‌رود. در (ت) دامنه برابر است با $[-۳,۱)\cup(۱,+\infty)$. دقت کنید که نقطهٔ $x=-۱$ مقدار مشخصی $(y=۱)$ دارد و متعلق به دامنهٔ تابع است. دامنهٔ شکل (ث) برابر است با $\mathbb{R}-\{۱\}$. و در آخر دامنهٔ شکل (ج) برابر است با $\mathbb{R}-\{-۱\}$. دقت کنید که با این‌که در $x=۱$ یک نقطهٔ توخالی داریم ولی چون تابع در $x=۱$ تعریف‌شده است (و yاش برابر ۱ است) پس $x=۱$ جزء دامنهٔ تابع است.

ضابطهٔ تابع

رابطه‌ای که y را به x مرتبط می‌کند یا از آن مقدار y را برحسب x به دست می‌آوریم، ضابطهٔ تابع است. هر تابع با ضابطه و دامنه‌اش مشخص می‌شود. یعنی برای مشخص‌بودن یک تابع باید همیشه ضابطه و دامنه‌اش را داشته باشیم. اگر در تابعی فقط ضابطه را داشته باشیم بنا به قرارداد دامنه را بزرگ‌ترین مجموعهٔ ممکن برای تعریف‌شده بودن تابع در نظر می‌گیریم.

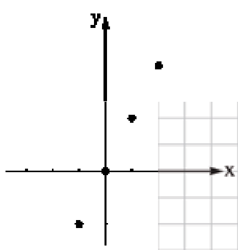
مثال تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=۲x$ ، دامنه $=\{-۱,۰,۱,۲\}$

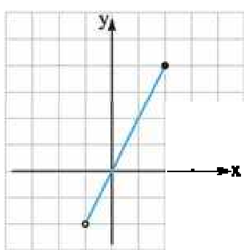
ب) $f(x)=۲x$ ، دامنه $=(-۱,۲]$

پ) $f(x)=۲x$ ، دامنه $=\mathbb{R}$

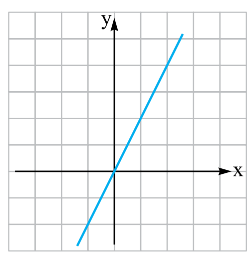
پاسخ نمودار تابع تمام یا قسمتی از خط $y=۲x$ است. فقط موقع رسم نمودار باید به دامنه توجه کنیم و نمودار را با توجه به دامنه رسم کنیم:



(الف)



(ب)



(پ)

ضابطهٔ تابع خطی

برای نوشتن ضابطهٔ یک تابع خطی، اول شیب خط را با استفاده از مختصات دو نقطه از آن از رابطهٔ $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ پیدا می‌کنیم و بعد معادلهٔ خط را با استفاده از رابطهٔ $y=mx+h$ یا $(y-y_۱)=m(x-x_۱)$ می‌نویسیم. در این حالت هم باید دامنهٔ تابع را مشخص کنیم.

توابع گویا

به هر تابعی که ضابطه‌اش به شکل $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشته می‌شود که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای باشند می‌گوییم یک تابع گویا. در این تعریف دقت کنید:

۱ $q(x)$ باید مخالف صفر باشد (چرا؟)

۲ $q(x)$ می‌تواند برابر یک عدد ثابت (و در حالت خاص ۱) باشد؛ یعنی به عنوان مثال سه تابع $f(x)=\frac{۳}{x}$ و $f(x)=۳$ و $f(x)=۳x$ هر سه گویا هستند.

مثال کدام‌یک از ضابطه‌های زیر متعلق به یک تابع گویا است؟

الف) $f(x)=\sqrt{۲}$ ب) $f(x)=\sqrt{۳}x$ پ) $f(x)=\sqrt{۳x}$

ت) $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۱}$ ث) $f(x)=\dfrac{۳x^۲+۱}{\sqrt{۲}-۱}$ ج) $f(x)=\dfrac{\sqrt[۳]{x}}{۲x+۱}$

چ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x-۱}{۲x^۲-x+\sqrt{۳}}$ ح) $f(x)=\dfrac{۲x-\frac{۱}{x+۱}}{۳x+\frac{۱}{x}}$ خ) $f(x)=۲|x|+۱$

پاسخ در هر کدام که بتوانیم تابع را به صورت $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ بنویسیم که در $p(x)$ و $q(x)$ توان x اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، تابع گویا است. با این حساب «الف»، «ب»، «ت»، «ث»، «چ» و «ح» گویا هستند ولی «پ» (چون توان x برابر $\frac{۱}{۲}$ است) و «ج» (توان x در صورت برابر $\frac{۱}{۳}$ است) و «خ» (x داخل قدرمطلق است) گویا نیستند.

دامنهٔ توابع گویا

دیدیم ضابطهٔ توابع گویا به صورت کسری است، پس تابع در هر نقطه‌ای که مخرج کسر برابر صفر شود تعریف نشده است. یعنی برای پیداکردن دامنهٔ یک تابع گویا مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و بعد دامنه را به صورت $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ می‌نویسیم. مثلاً برای پیداکردن دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۲}$ عبارت مخرج یعنی $x-۲$ را برابر صفر قرار می‌دهیم: $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$ پس دامنه برابر است با $\mathbb{R}-\{۲\}$.

توجه دقت کنید که قبل از پیداکردن دامنهٔ تابع، نباید ضابطهٔ تابع را ساده کنیم. مثلاً در تابع $f(x)=\dfrac{۲x-۶}{x-۳}$ دامنه برابر است با $\mathbb{R}-\{۳\}$. چون ریشهٔ مخرج $x=۳$ است و اگر تابع را به صورت $f(x)=\dfrac{۲(x-۳)}{x-۳}=۲ \Rightarrow f(x)=۲$ ساده کنیم، دامنهٔ این تابع جدید می‌شود $\mathbb{R}$ که درست نیست.

مثال دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۳}{x-۲}$ ب) $f(x)=\dfrac{x^۲+۳}{(x-۱)(x+۲)}$ پ) $f(x)=\dfrac{x-۳}{x^۲-۹}$

ت) $f(x)=\dfrac{۲x-۶}{x^۲-۷x+۱۲}$ ث) $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^۲+۲x+۳}$ ج) $f(x)=\dfrac{۲x^۳-x}{x^۳-x^۲-۲x}$

پاسخ در هر کدام مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

الف) $f(x)=\dfrac{۲x-۳}{x-۲}$ $\quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$

ب) $f(x)=\dfrac{x^۲+۳}{(x-۱)(x+۲)}$ $\quad (x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۲\}$

پ) $f(x)=\dfrac{x-۳}{x^۲-۹}$ $\quad x^۲-۹=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳,-۳\}$

ت) $f(x)=\dfrac{۲x-۶}{x^۲-۷x+۱۲}$ $\quad x^۲-۷x+۱۲=۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=۴ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳,۴\}$

ث) $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^۲+۲x+۳}$ $\quad x^۲+۲x+۳=۰ \Rightarrow x=\dfrac{-۲\pm\sqrt{۴-۱۲}}{۲} \Rightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

ج) $f(x)=\dfrac{۲x^۳-x}{x^۳-x^۲-۲x}$ $\quad x^۳-x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x(x^۲-x-۲)=۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۱)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \\ x=-۱ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۲,-۱\}$$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g با هم مساوی‌اند اگر: ۱ دامنه‌هایشان با هم برابر باشد. ۲ به ازای xهای یکسان، yهای یکسان داشته باشند که معمولاً شرط دوم به این منجر می‌شود که ضابطهٔ دو تابع به ازای اعضای دامنه با هم برابر باشند.

نمودار دو تابع مساوی دقیقاً روی هم منطبق می‌شوند.

مثال **تعیین کنید کدام جفت از تابع‌های زیر با هم مساوی‌اند؟**

الف) $f(x)=۳x \quad , \quad g(x)=\frac{۳x^{۲}}{x}$

ب) $f(x)=\frac{x^{۳}+x}{x^{۲}+۱} \quad , \quad g(x)=x$

پ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}}}{x} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{|x|}$

پاسخ

الف) $D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \Rightarrow$ پس دو تابع مساوی نیستند

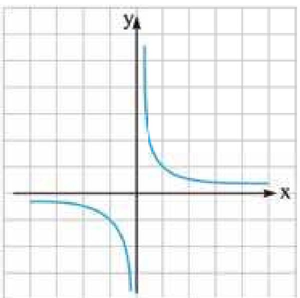
ب) $f(x)=\frac{x(x^{۲}+۱)}{x^{۲}+۱}=x \quad , \quad g(x)=x \quad , \quad D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$ دو تابع مساوی‌اند

پ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}}}{x}=\frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \quad , \quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$g(x)=\frac{x}{|x|} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

$\Rightarrow$ دو تابع مساوی‌اند

رسم توابع گویا

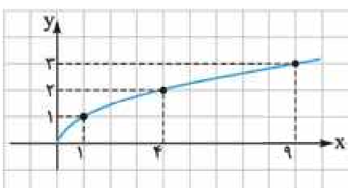


نمودار تابع‌های گویای ساده را می‌توانیم با استفاده از نقطه‌یابی رسم کنیم. بیایید با هم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را ببینیم:

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ نه محور عرض‌ها را قطع می‌کند و نه محور طول‌ها را. دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. (برد این تابع هم $\mathbb{R}-\{۰\}$ است)

در تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در محدودهٔ $x>۰$ با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد و همین‌طور در محدودهٔ $x<۰$ هم با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد.

رسم توابع رادیکالی



نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را می‌توانیم با نقطه‌یابی رسم کنیم.

دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.

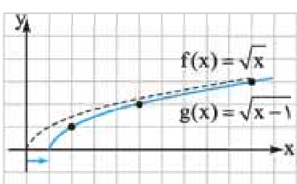
نمودار تابع‌های به شکل $f(x)=\sqrt{x-a}+b$ را می‌توانیم با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ (که در *سال قبل یاد گرفتیم*) رسم کنیم.

مثال **نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رسم کنید و سپس دامنه و برد هر کدام را بنویسید.**

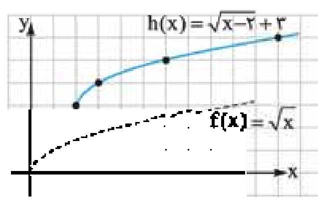
الف) $g(x)=\sqrt{x-۱}$

ب) $h(x)=\sqrt{x-۲}+۳$

پاسخ برای رسم $g(x)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد در راستای محور xها انتقال دهیم و برای رسم $h(x)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را ۲ واحد در راستای محورxها و ۳ واحد در راستای محور yها انتقال دهیم.



دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x-۱}$ بازهٔ $[۱,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.



دامنهٔ تابع $h(x)=\sqrt{x-۲}+۳$ بازهٔ $[۲,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[۳,+\infty)$ است.

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را پر کنید.

۱- دامنهٔ یک تابع گویا برابر است با ....

۲- دو تابع f و g وقتی با هم مساوی‌اند که ...(۱)... و ...(۲)... .

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

	درست	نادرست
۳- دو تابع $f(x)=\frac{x}{\lvert x\rvert}$ و $g(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$ با هم مساوی‌اند.	☐	☐
۴- دو تابع $f(x)=\frac{x^2}{\lvert x\rvert}$ و $g(x)=\lvert x\rvert$ با هم مساوی‌اند.	☐	☐

۵- یک بازیکن فوتبال ده پنالتی زده و ۶۰ درصد آن‌ها را گل کرده است. اگر این بازیکن بتواند تمام پنالتی‌هایی که از این به بعد می‌زند را گل کند:

الف) ضابطهٔ تابعی را که نشان‌دهندهٔ درصد پنالتی‌های گل‌شده بعد از زدن x پنالتی دیگر است، بنویسید.

ب) او حداقل چند پنالتی دیگر باید بزند تا درصد گل‌شدن پنالتی‌هایش بالاتر از ۹۵ درصد باشد؟

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر متعلق به یک تابع گویا است؟

۶- $f(x)=\frac{2x^2-x+3}{x-\sqrt{2}}$

۷- $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$

۸- $f(x)=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}}$

۹- $f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{x+1}$

۱۰- $f(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}$

۱۱- $f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2$

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

۱۲- $f(x)=\frac{2x+1}{2x^2+x-1}$

۱۳- $f(x)=\frac{x+3}{x+1}-\frac{x+1}{x+3}$

۱۴- $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

۱۵- $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}-1}$

۱۶- $f(x)=\frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}$

۱۷- $f(x)=\frac{x}{x^4-5x^2+4}$

۱۸- ضابطهٔ تابع گویایی را بنویسید که دامنه‌اش مجموعه‌های زیر باشد.

الف) $\mathbb{R}$ ب) $\mathbb{R}-\{-1\}$ پ) $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ ت) $\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$

نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌های داده‌شده رسم کنید.

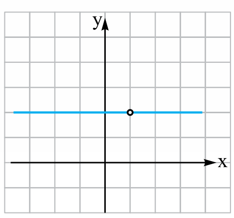
۱۹- $f(x)=\frac{1}{\lvert x\rvert}$ $[-3,3]$

۲۰- $f(x)=\frac{1}{x-3}$ $[-1,7]$

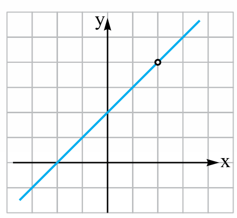
۲۱- $f(x)=-\frac{4}{x}$ $[-8,8]$

۲۲- $f(x)=\frac{2}{x}$ $[-4,4]$

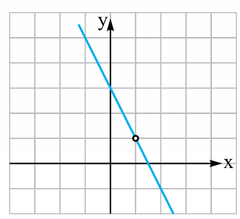
۲۳- ضابطهٔ تابع گویایی را بنویسید که نمودارش در زیر داده شده است.



(الف)



(ب)



(پ)

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

۲۴- $f(x)=\sqrt{x-3}+3$

۲۵- $f(x)=\sqrt{x+2}-1$

۲۶- $f(x)=\sqrt{4-x}+1$

۲۷- $f(x)=\sqrt{-5-x}$

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

۲۸- $f(x)=\sqrt{x+2}+1$

۲۹- $f(x)=\sqrt{x-3}-2$

۳۰- نمودار تابع $f(x)=۱-\sqrt{x-۳}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۲)

کدام‌یک از جفت تابع‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

۳۱- $f(x)=\frac{x^۴-۱}{x^۲-۱}\ ,\ g(x)=x^۲+۱$

۳۲- $f(x)=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}\ ,\ g(x)=x^۲-۱$

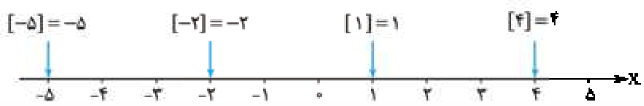
۳۳- $f(x)=\frac{x^۲-۲x+۱}{x-۱}\ ,\ g(x)=\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x^۲-۲x+۱}$

۳۴- اگر دو تابع زیر با هم برابر باشند، مقادیر a و b را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq a\\ b-۱ & x=a\end{cases}\quad \text{و}\quad g(x)=x+۲$$

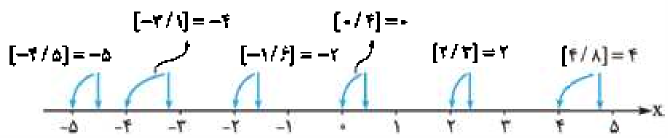
۲ تابع جزء صحیح

جزءصحیح هر عدد مثل x که آن را با $[x]$ نشان می‌دهیم برابر است با بزرگ‌ترین عدد صحیحی که کوچک‌تر یا مساوی آن عدد باشد. با این تعریف نتیجه می‌گیریم:



الف) اگر عددی صحیح باشد، جزءصحیحش برابر خودش است.

ب) اگر عددی صحیح نباشد، جزءصحیحش برابر اولین عدد صحیح سمت چپش روی محور اعداد است:



پ) اگر k عددی صحیح باشد داریم $[x+k]=[x]+k$.

مثال مقدار جزءصحیح‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $[-۰/۴]$ ب) $[۰/۰۰۱]$ پ) $[\frac{۶}{۵}]$ ت) $[-\frac{۱۷}{۴}]$

ث) $[\pi]$ ج) $[\tan ۶۰^\circ]$ چ) $[۸\cos ۴۵^\circ]$ ح) $[-\frac{\pi}{۲}]$

خ) $[\sin ۳۰^\circ]$ د) $[-۲۳۸/۲۶]$ ذ) $[۳\frac{۴}{۷}]$ ر) $[-(۷\frac{۱۱}{۱۵})]$

پاسخ طبق آن‌چه دیدید، داریم:

الف) -۱

ب) ۰

پ) ۱ (چون $\frac{۶}{۵}=۱/۲$)

ت) -۵ (چون $-\frac{۱۷}{۴}=-۴/۲۵$)

ث) ۳ (چون $\pi\simeq ۳/۱۴$)

ج) ۱ (چون $\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$)

چ) ۵ (چون $۸\cos ۴۵^\circ=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}\simeq ۵/۶$)

ح) -۲ (چون $-\frac{\pi}{۲}\simeq -۱/۵۷$)

خ) ۰ (چون $\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$)

د) -۲۳۹

ذ) ۳ (چون $۳\frac{۴}{۷}=۳+\frac{۴}{۷}$)

ر) -۸ (چون $-۷\frac{۱۱}{۱۵}=-۷-\frac{۱۱}{۱۵}$)

تابع جزء صحیح

به تابع $f(x)=[x]$ می‌گوییم **تابع جزءصحیح**، دامنهٔ این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

تابع جزءصحیح یک **تابع پله‌ای** است، یعنی می‌توان دامنه‌اش را به صورت بازه‌های مجزایی نوشت که به اعداد متعلق به هر کدام از این بازه‌ها فقط یک عدد (در برد تابع) نسبت داده می‌شود. مثلاً در مورد تابع جزءصحیح یعنی $f(x)=[x]$ در بازهٔ $[-۳,۳]$ می‌توانیم بنویسیم:

$-۳\le x<-۲ \Rightarrow f(x)=[x]=-۳$

$-۲\le x<-۱ \Rightarrow f(x)=[x]=-۲$

$-۱\le x<۰ \Rightarrow f(x)=[x]=-۱$

$۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=[x]=۰$

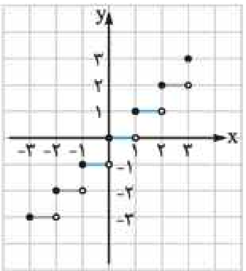
$۱\le x<۲ \Rightarrow f(x)=[x]=۱$

$۲\le x<۳ \Rightarrow f(x)=[x]=۲$

$x=۳ \Rightarrow f(x)=[x]=۳$

رسم تابع جزءصحیح

حالا برای رسم تابع نقاط ابتدایی و انتهای هر کدام از بازه‌ها را رسم و با یک پاره‌خط افقی به هم وصل می‌کنیم. دقت کنید نقاطی را که متعلق به xهای دارای مساوی هستند، توپر و نقاطی را که متعلق به xهای بدون علامت مساوی هستند توخالی رسم می‌کنیم:



از همین روش می‌توانیم برای رسم نمودار توابع ساده شامل $[x]$ استفاده کنیم.

مثال نمودار تابع‌های زیر را در بازهٔ $[-۲,۲]$ رسم کنید.

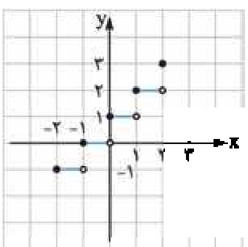
الف) $f(x)=[x]+۱$ ب) $f(x)=x[x]-۱$

پاسخ بازهٔ $[-۲,۲]$ را به بازه‌های $-۲\le x<-۱$ و $-۱\le x<۰$ و $۰\le x<۱$ و $۱\le x<۲$ و نقطهٔ $x=۲$ تقسیم می‌کنیم و در هر کدام ابتدا ضابطهٔ تابع را با قراردادن مقدار جزءصحیح ساده می‌کنیم و بعد مختصات دو نقطهٔ ابتدا و انتهای هر بازه را مشخص می‌کنیم.

الف $f(x)=[x]+۱$

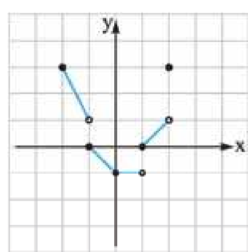
		توپر	توخالی
$-۲\le x<-۱$	$\Rightarrow f(x)=[x]+۱=-۲+۱=-۱$	-۲ -۱	-۱ -۱
$-۱\le x<۰$	$\Rightarrow f(x)=[x]+۱=-۱+۱=۰$	-۱ ۰	۰ ۰
$۰\le x<۱$	$\Rightarrow f(x)=[x]+۱=۰+۱=۱$	۰ ۱	۱ ۱
$۱\le x<۲$	$\Rightarrow f(x)=[x]+۱=۱+۱=۲$	۱ ۲	۲ ۲
$x=۲$	$\Rightarrow f(x)=[x]+۱=۲+۱=۳$	۲ ۳	

حالا نقاط را مشخص و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ب $f(x)=x[x]-۱$

		توپر	توخالی
$-۲\le x<-۱$	$\Rightarrow f(x)=x[x]-۱=-۲x-۱$	-۲ ۳	-۱ ۱
$-۱\le x<۰$	$\Rightarrow f(x)=x[x]-۱=-x-۱$	-۱ ۰	۰ -۱
$۰\le x<۱$	$\Rightarrow f(x)=x[x]-۱=-۱$	۰ -۱	۱ -۱
$۱\le x<۲$	$\Rightarrow f(x)=x[x]-۱=x-۱$	۱ ۰	۲ ۱
$x=۲$	$\Rightarrow f(x)=x[x]-۱=۳$	۲ ۳	



بیایید یک مثال دیگر هم ببینیم:

مثال **نمودار تابع زیر را رسم کنید.**

$$y=[2x] \qquad [-1,1]$$

پاسخ اول حدود تغییرات $2x$ را با توجه به بازهٔ داده‌شده پیدا می‌کنیم:

$$-1\le x\le 1 \Rightarrow -2\le 2x\le 2$$

حالا بازهٔ $-2\le 2x\le 2$ را به بازه‌هایی به طول ۱ واحد تقسیم می‌کنیم. در هر قسمت مقدار جزء صحیح و اول و آخر بازه (برحسب x) و نقاط اول و آخر بازه را تعیین می‌کنیم:

$-2\le 2x<-1 \Rightarrow y=-2$ و $-1\le x<-\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{c}-1\\-2\end{array}\right. \left|\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\\-2\end{array}\right.$

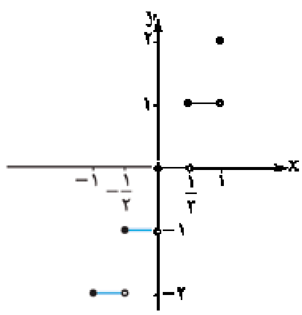
$-1\le 2x<0 \Rightarrow y=-1$ و $-\frac{1}{2}\le x<0 \Rightarrow \left|\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\\-1\end{array}\right. \left|\begin{array}{c}0\\-1\end{array}\right.$

$0\le 2x<1 \Rightarrow y=0$ و $0\le x<\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right. \left|\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\0\end{array}\right.$

$1\le 2x<2 \Rightarrow y=1$ و $\frac{1}{2}\le x<1 \Rightarrow \left|\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\1\end{array}\right. \left|\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right.$

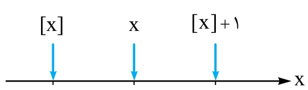
$2x=2 \Rightarrow y=2$ و $x=1 \Rightarrow \left|\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right.$

حالا نمودار را با رسم پاره‌خط‌های هر قسمت رسم می‌کنیم. (نقاط اول بازه که مساوی دارند توپر و نقاط آخر بازه که مساوی ندارند تو خالی رسم می‌شوند.)



ویژگی‌های تابع جزءصحیح

تابع جزءصحیح ویژگی‌های زیادی دارد. بهتر است چندتایشان را که مهم است بدانید:



۱ برای هر عدد حقیقی x داریم $[x]\le x<[x]+1$

این ویژگی از تعریف مستقیم جزءصحیح به دست می‌آید:

مثلاً: $[2/5]\le 2/5<[2/5]+1 \Rightarrow 2\le 2/5<3$ یا $[2]\le 2<3$

۲ هر عدد صحیح را که به صورت جمع یا تفریق داخل جزءصحیح باشد می‌توانیم بیرون بیاوریم؛ یعنی اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد داریم $[x+k]=[x]+k$.

مثلاً $[x+1]=[x]+1$ یا $[x-2]=[x]-2$.

۳ همیشه تفاضل هر عدد و جزءصحیحش، عددی بین صفر و ۱ است؛ یعنی $0\le x-[x]<1$

مثلاً: $2/5-[2/5]=2/5-2=0/5 \Rightarrow 0<0/5<1$ یا $-3/4-[-3/4]=-3/4-(-4)=0/6 \Rightarrow 0<0/6<1$

۴ حاصل $[x]+[-x]$ (یعنی جزءصحیح هر عدد به علاوهٔ جزءصحیح قرینهٔ آن عدد) یا برابر صفر است یا برابر ۱-، اگر x صحیح باشد، حاصل برابر صفر است و اگر x صحیح نباشد، حاصل برابر ۱- است؛ یعنی:

$$x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \qquad x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=0$$

از این ویژگی می‌توانیم برای پیداکردن جواب معادله‌هایی به صورت $[x]+[-x]=a$ استفاده کنیم. مثلاً:

$[x]+[-x]=0 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ یا همهٔ اعداد صحیح = مجموعهٔ جواب

$[x]+[-x]=-1 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ یا همهٔ اعداد غیرصحیح = مجموعهٔ جواب

$[x]+[-x]=1 \Rightarrow$ جواب ندارد

سـؤال‌های امتحـانی

جاهای خالی را پر کنید.

۳۵- جزءصحیح هر عدد حقیقی برابر است با .... عدد صحیحی که .... یا مساوی آن عدد باشد.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

	درست	نادرست
۳۶- اگر k یک عدد صحیح باشد، $[x+k]=[x]+k$.	☐	☐
۳۷- اگر k یک عدد صحیح باشد، $[k-x]=k-[x]$.	☐	☐
۳۸- اگر k یک عدد صحیح باشد، $[kx]=k[x]$.	☐	☐

۳۹- برد تابع $f(x)=[x]$ کدام است؟

۱) اعداد حقیقی ۲) اعداد گویا ۳) اعداد طبیعی ۴) اعداد صحیح

۴۰- اعضای یک تیم والیبال قرار است به یک مسافرت تفریحی بروند. مربی تیم برای آن‌که بتواند وضعیت جسمی بازیکنان را کنترل کند با آن‌ها قرار می‌گذارد که بعد از برگشتن به ازای هر کیلو اضافه‌وزن جریمه بدهند. جدول جریمه‌ها به صورت زیر است:

اضافه‌وزن به کیلوگرم	تا ۱	از ۱ تا ۲	از ۲ تا ۳	از ۳ تا ۵	از ۵ به بالا
جریمه به تومان	۱۰ هزار	۳۰ هزار	۶۰ هزار	۱۰۰ هزار	۵۰۰ هزار

الف) ضابطهٔ تابع جریمه را برحسب x کیلوگرم اضافه‌وزن بنویسید.

ب) نمودار تابع جریمه را رسم کنید.

۴۱- مقدار جزءصحیح‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $[۰/۹۹]$ ب) $[-۰/۹۹]$ پ) $[\sqrt{۱۰}]$ ت) $[\sqrt[۳]{۱۰۰}]$

ث) $[(۱۷/۲)^۲]$ ج) $[(۱۰/۱)^۳]$ چ) $[۸/۹\times ۹/۱]$ ح) $[۲/۰۱\times ۲/۰۲]$

۴۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۳}{[\frac{x}{۲}]-۱}$ را تعیین کنید.

۴۳- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $[\frac{۶}{۱}]+[\frac{۶}{۲}]+[\frac{۶}{۳}]+\cdots+[\frac{۶}{۶۰۰}]$ ب) $[۱۰^{-۴}]+[۱۰^{-۳}]+[۱۰^{-۲}]+\cdots+[۱۰^{۴}]$

۴۴- اگر $[x]=[y]$ باشد محدودهٔ تغییرات $|x-y|$ را تعیین کنید.

۴۵- اگر $[x]^۲-[x]=۰$ باشد، حدود x را پیدا کنید.

نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌های داده‌شده رسم کنید.

۴۶- $f(x)=[x-۲]\ ,\ [-۲,۲]$ ۴۷- $f(x)=x-[x]\ ,\ [-۲,۳]$ ۴۸- $f(x)=x+[x]\ ,\ [-۲,۲]$

۴۹- نمودار تابع $y=x[-۲x]+۱$ را در بازهٔ $(-۲,۰]$ رسم کنید.

۳ وارون تابع و تابع یک‌به‌یک

در سال گذشته دیدیم که یکی از روش‌های نمایش تابع، استفاده از زوج مرتب است. حالا اگر تابعی مانند f با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داشته باشیم، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر کدام از زوج مرتب‌ها را جابه‌جا کنیم، رابطه‌ای به دست می‌آید که به آن می‌گوییم وارون تابع f و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال وارون تابع‌های زیر را بنویسید و بگویید وارون کدام‌یک از این تابع‌ها، خودش هم تابع است؟

الف) $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,-۱),(۴,۱)\}$ ب) $g=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۳)\}$

پ) $h=\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۴),(۴,۴)\}$

پاسخ کافی است جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب را عوض کنیم:

الف $f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(-۱,۳),(۱,۴)\}$

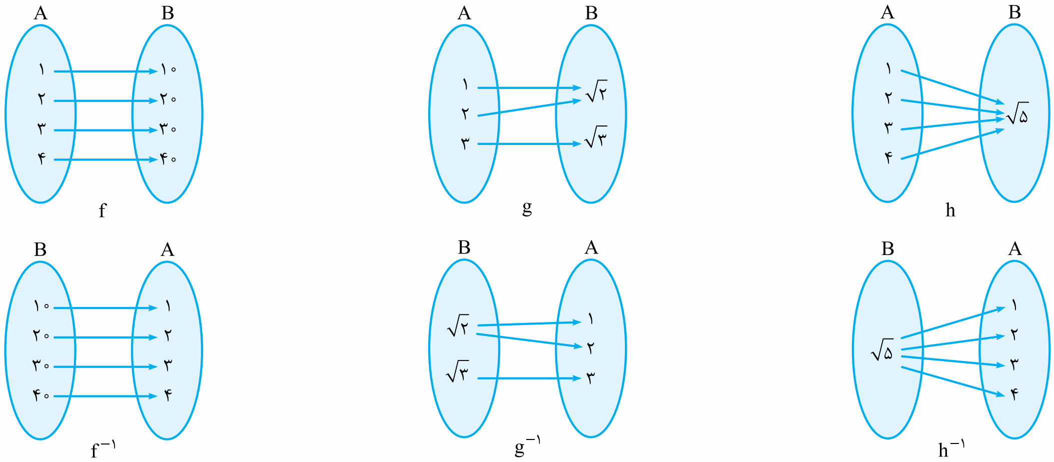
ب $g^{-1}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$

پ $h^{-1}=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴)\}$

از بین سه رابطهٔ نوشته‌شده فقط f^{-1} تابع است ولی g^{-1} و h^{-1} تابع نیستند چون دارای زوج مرتب‌هایی هستند که مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت دارند.

وارون نمودار پیکانی

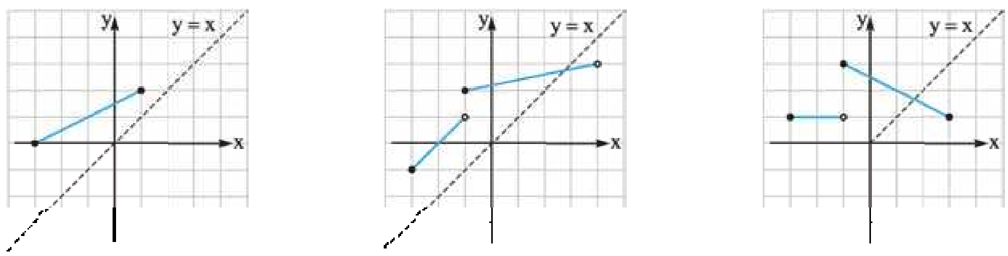
در نمودار پیکانی برای نوشتن رابطهٔ وارون کافی است جهت پیکان را عوض کنیم یا جای مجموعهٔ اول و دوم را عوض کنیم:



همان‌طور که می‌بینید در سه شکل بالا f و f^{-1} هر دو تابع‌اند اما g^{-1} و h^{-1} تابع نیستند.

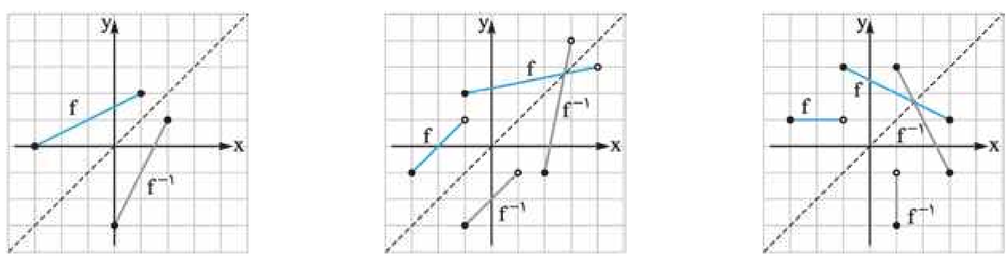
برای رسم نمودار وارون یک تابع باید جای x و yهای نقاط روی نمودار را عوض کنیم؛ یعنی قرینهٔ نمودار را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصات رسم کنیم.

مثال **نمودار وارون تابع‌های زیر را رسم کنید و بگویید وارون کدام‌ها تابع است؟**



(الف) (ب) (پ)

پاسخ کافی است قرینهٔ نمودارها را نسبت به خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y = x$) رسم کنیم:



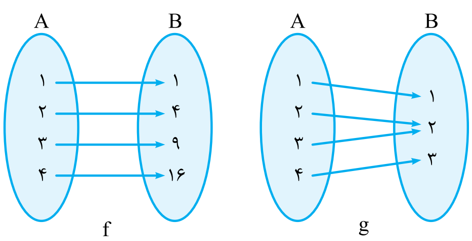
الف ب پ

از بین نمودارهای بالا وارون تابع f در شکل‌های الف و ب تابع است اما وارون تابع f در شکل پ، تابع نیست.

تابع یک‌به‌یک

دیدیم که بعضی از تابع‌ها وارونشان هم تابع است و بعضی نه. به تابع‌هایی که وارونشان هم یک تابع است می‌گوییم تابع‌های یک‌به‌یک.

تابع یک‌به‌یک تابعی است که در آن به هر عضو دامنه فقط یک عضو منحصربه‌فرد از برد تابع نسبت داده شود:



مثلاً در شکل بالا f و g هر دو تابع‌اند و f یک‌به‌یک است، اما g یک‌به‌یک نیست چون به اعضای ۲ و ۳ از دامنهٔ g، یک عضو یکسان (یعنی ۲) از برد g نسبت داده شده است.

به بیان دیگر اگر تابعی یک‌به‌یک باشد در ضابطهٔ تابع **به ازای هر x دقیقاً یک y داریم و به ازای هر y هم دقیقاً یک x داریم.**

برای بررسی یک‌به‌یک بودن یک تابع از روی نمودار آن، خطوطی موازی محور xها رسم می‌کنیم. **اگر هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک‌به‌یک است.**

به تابع‌هایی که وارونشان هم تابع است می‌گوییم **تابع وارون‌پذیر.** شرط وارون‌پذیربودن یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است.

مثال کدام‌یک از تابع‌های زیر یک‌به‌یک است؟

الف) $f=\{(۱,۲),(۲,\sqrt{۲}),(۳,\sqrt[۳]{۲}),(۴,\sqrt[۴]{۲})\}$

ب) $g=\{(۱,۲),(۲,\sqrt[۳]{۴}),(۳,\sqrt[۳]{۸}),(۴,\sqrt[۳]{۱۶})\}$

پ) $h=\{(۱,\sin ۳۰^\circ),(۲,\sin ۶۰^\circ),(۳,\cos ۴۵^\circ),(۴,\cos ۶۰^\circ)\}$

پاسخ f یک‌به‌یک است زیرا تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها (yها) با هم متفاوت‌اند. g یک‌به‌یک نیست چون $\sqrt[۳]{۸}=۲$ است و در دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۳,۲)$ دو y یکسان داریم. h یک‌به‌یک نیست چون $\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ و $\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$، پس در دو زوج مرتب $(۱,\frac{۱}{۲})$ و $(۴,\frac{۱}{۲})$ دو y یکسان داریم.

مثال مقدار m را طوری پیدا کنید که تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۱),(۱,m^۲+۲),(۳m,m)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد.

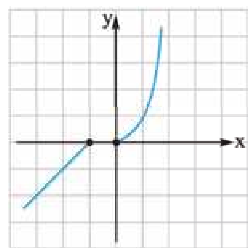
پاسخ اول می‌رویم سراغ تابع‌بودن f. چون در f دو زوج مرتب $(۱,۳)$ و $(۱,m^۲+۲)$ را داریم پس باید $m^۲+۲=۳$ باشد، یعنی $m^۲=۱$ و در نتیجه $m=۱$ یا $m=-۱$، حالا f را به ازای $m=۱$ و $m=-۱$ می‌نویسیم:

$m=۱ \Rightarrow f=\{(۱,۳),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱)\}$

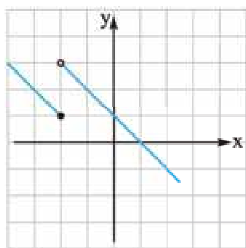
$m=-۱ \Rightarrow f=\{(۱,۳),(۲,۱),(۱,۳),(-۳,-۱)\}$

می‌بینیم که به ازای $m=۱$ تابع f یک‌به‌یک نیست چون در آن دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۳,۱)$ را داریم (دو y یکسان) ولی به ازای $m=-۱$ تابع f یک‌به‌یک است. پس جواب سؤال $m=-۱$ است.

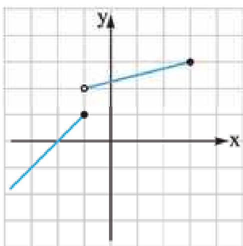
مثال کدام‌یک از نمودارهای زیر متعلق به یک تابع یک‌به‌یک است؟



(پ)

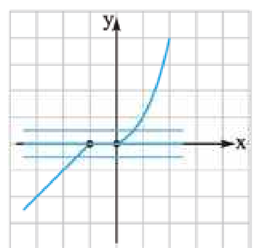


(ب)

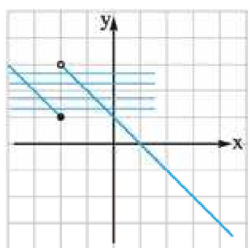


(الف)

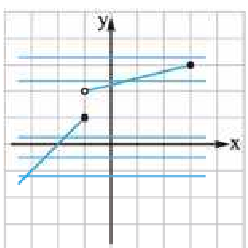
پاسخ در هر کدام از نمودارها بررسی می‌کنیم که خطوط موازی محور xها نمودار تابع را در چند نقطه قطع می‌کند:



پ



ب



الف

در شکل الف هر خط موازی محور xها (هر جا که رسم کنیم) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. (یعنی یا قطع نمی‌کند و یا فقط در یک نقطه قطع می‌کند) پس تابع شکل الف یک‌به‌یک است. در شکل ب همان‌طور که می‌بینید تمام خطوط افقی که در فاصلهٔ $۱\le y<۳$ رسم می‌شوند نمودار را در دو نقطه قطع می‌کنند پس تابع یک‌به‌یک نیست. در شکل پ تمام خطوط افقی نمودار را در یک نقطه قطع می‌کنند مگر خط $y=۰$ (یعنی همان محور xها) و همین یک خط (یعنی یک y مشترک در دو نقطه) باعث می‌شود که تابع یک‌به‌یک نباشد.

سؤال‌های امتحانی

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

	درست	نادرست
۵۰- اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، وارون تابع f نیز یک تابع است.	☐	☐
۵۱- f تابعی یک‌به‌یک است اگر هر خط موازی محور yها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.	☐	☐
۵۲- اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، می‌توانیم با محدودکردن دامنه، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم.	☐	☐

۵۳- وارون هر کدام از تابع‌های زیر را بنویسید و بگویید وارون کدام، یک تابع است؟

الف) $f=\{(۲,-۱),(-۱,۳),(۳,۲),(۱,۱)\}$

ب) $g=\{(۳,۲),(۲,۳),(۱,۲),(-۲,۱)\}$

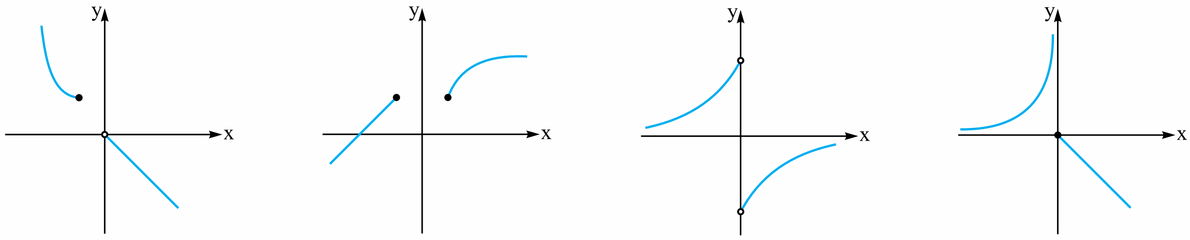
پ) $h=\{(۲,\sqrt{۲}),(۴,\sqrt{۴}),(۸,\sqrt{۸}),(۱۶,\sqrt[۴]{۱۶})\}$

■ در هر مورد نمودار تابع‌های زیر و نمودار وارون آن‌ها را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۵۴- $f(x)=\sqrt{x-۲}+۱$

۵۵- $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\le ۰ \\ ۲x & x>۱ \end{cases}$

۵۶- کدام تابع یک‌به‌یک است؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

۵۷- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

الف) $f(x)=۳x+۲$

ب) $f(x)=۲x^{۲}-۱$

پ) $f(x)=\sqrt{x-۲}$

ت) $f(x)=\dfrac{۱}{x}$

ث) $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\le ۱ \\ x-۱ & x>۱ \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\le ۱ \\ ۲x & x>۱ \end{cases}$

۵۸- مقدار m و n را طوری پیدا کنید تا $f=\{(۱,m+۱),(m+۳,۳m),(۱,m^{۲}+۱),(۳,n-۲)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد.

■ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

	درست	نادرست
۵۹- یک تابع خطی همواره یک‌به‌یک است.	☐	☐
۶۰- یک سهمی با دامنهٔ R هرگز یک‌به‌یک نیست.	☐	☐
۶۱- یک تابع چندضابطه‌ای ممکن است یک‌به‌یک باشد.	☐	☐
۶۲- هر تابعی که وارون داشته باشد یک‌به‌یک است.	☐	☐
۶۳- هر تابعی که یک‌به‌یک باشد تابع وارون دارد.	☐	☐
۶۴- برای رسم نمودار تابع وارون، قرینهٔ نمودار تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم.	☐	☐

■ با رسم نمودار تابع تعیین کنید تابع‌های زیر در کدام‌یک از بازه‌های $[۱,+\infty)$، $[-۱,۲]$، $[۰,۱)$ و $(-\infty,۰]$ یک به یک هستند؟

۶۵- $f(x)=۳x+۲$ $\quad(-\infty,۰],[۰,۱),[-۱,۲],[۱,+\infty)$

۶۶- $f(x)=[x]+۱$ $\quad(-\infty,۰],[۰,۱),[-۱,۲],[۱,+\infty)$

۶۷- $f(x)=x-[x]$ $\quad(-\infty,۰],[۰,۱),[-۱,۲],[۱,+\infty)$

۶۸- $f(x)=x^{۲}-۲x$ $\quad(-\infty,۰],[۰,۱),[-۱,۲],[۱,+\infty)$

۶۹- $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\le ۱ \\ x-۲ & x>۱ \end{cases}$

۷۰- $f(x)=\dfrac{۱}{|x|}$ $\quad(-\infty,۰],[۰,۱),[-۱,۲],[۱,+\infty)$

۷۱- تابع f با دامنهٔ $[-۲,۲]$ به صورت $f(x)=\begin{cases} -x & x\ne ۰ \\ a & x=۰ \end{cases}$ تعریف شده است. a چه اعدادی می‌تواند باشد تا f یک تابع یک‌به‌یک شود؟

۷۲- تابع f با دامنهٔ $[-۲,۲]$ و برد $[۱,۳]$ مفروض است. چند نمودار برای f می‌توانید مثال بزنید که f تابعی یک‌به‌یک باشد؟ چندتا از این نمودارها خطی‌اند؟

۴ به‌دست‌آوردن ضابطهٔ تابع وارون

گفتیم اگر تابع یک‌به‌یک باشد، وارونش هم یک تابع است. به این تابع می‌گوییم تابع وارون تابع اول. برای پیداکردن تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک این کارها را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱ به جای $f(x)$ (یا هر حرف دیگری که برای معرفی تابع استفاده شده باشد) y می‌گذاریم.

۲ در رابطهٔ نوشته‌شده x را برحسب y پیدا می‌کنیم.

۳ جای x و y را عوض می‌کنیم.

۴ در رابطهٔ آخر به جای y می‌گذاریم $f^{-۱}(x)$.

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل سوم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	رشتهٔ علوم تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $f(x)=\frac{x(x-۱)^۲}{x^۳-۳x^۲+۲x}$ ب) $f(x)=\frac{x-\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x-۲}}$			
۲	تساوی دو تابع زیر را بررسی کنید. $f(x)=\sqrt{(x-۲)^۲(x-۳)}$ $g(x)=\vert x-۲\vert\sqrt{x-۳}$			
۳	معادلهٔ زیر را حل کنید. $[x-۲+[x]]=۴$			
۴	تابع $y=\vert x\vert+[x]$ را در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم کنید.			
۵	a و b را طوری به دست آورید که تابع $f=\{(a-b,۳),(۵,۲),(-۴,۳),(۵,a+۳),(۱,۱)\}$ وارون‌پذیر باشد.			
۶	دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، مقدار a چه‌قدر است؟			
۷	تابع $f(x)=\begin{cases}\vert x\vert+۱ & x\geq ۱\\ x+a & x<۱\end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود a را بیابید.			
۸	وارون تابع $f(x)=\frac{۲\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}-۴}$ را به دست آورید.			
۹	الف) نمودار تابع $f(x)=x^۲-۴x$ را رسم کنید. ب) با محدودکردن، ضابطهٔ تابع وارون را بیابید.			
۱۰	ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ را به دست آورید.			
۱۱	اگر در تابع خطی $f(۳)=۷$ و $f(۱)=۳$ باشد، ضابطهٔ وارون f را مشخص کنید.			
۱۲	اگر $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۱,۳),(۰,۴)\}$ و $g^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,۲),(۱,۳),(۵,۴)\}$ باشند، تابع $\frac{g^{-۱}-۲f}{f^{-۱}}$ را به دست آورید.			
۱۳	اگر دو تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=-۳x+۳$ باشند، مطلوب است: الف) دامنه و ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ ب) $(۲f-g)(۰)$			
۱۴	نمودار تابع مقابل را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید. $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x-۲} & x>۲\\ ۲\sqrt{x+۲} & -۱\leq x\leq ۲\end{cases}$			

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

۲- ۱) دامنه‌هایشان مساوی باشد. ۲) به ازای xهای یکسان yهای یکسان داشته باشند. (یا ضابطه‌هایشان مساوی باشد.)

۳- درست

۴- نادرست

۵- الف) چون بعد از ۱۰ پنالتی اول، x پنالتی زده شده، پس در کل $x+۱۰$ پنالتی زده شده است و از این پنالتی‌ها، ۶۰ درصد ده پنالتی اول یعنی ۶ پنالتی به علاوهٔ x پنالتی دیگر یعنی $x+۶$ پنالتی گل شده است. پس ضابطهٔ تابعی که نشان‌دهندهٔ درصد پنالتی‌های گل‌شده است، برابر است با:

$$f(x)=\frac{x+۶}{x+۱۰}\times ۱۰۰$$

ب) برای آن‌که درصد پنالتی‌های گل‌شده از ۹۵ درصد بیشتر باشد، باید داشته باشیم:

$$f(x)>۹۵ \Rightarrow \frac{x+۶}{x+۱۰}\times ۱۰۰>۹۵$$

$$\Rightarrow ۱۰۰x+۶۰۰>۹۵x+۹۵۰ \Rightarrow ۵x>۳۵۰ \Rightarrow x>۷۰$$

و چون $x>۷۰$ است پس باید حداقل ۷۱ پنالتی دیگر بزند.

۶- گویا

۷- غیرگویا

۸- گویا

۹- گویا (چون $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$)

۱۰- گویا

۱۱- گویا

۱۲- $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{۲x^۲+x-۱}\qquad ۲x^۲+x-۱=۰$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۲)(-۱)}}{۲(۲)}=\frac{-۱\pm\sqrt{۹}}{۴}=\frac{-۱\pm ۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-۱-۳}{۴}=-۱ \\ x=\dfrac{-۱+۳}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,\tfrac{۱}{۲}\}$$

۱۳- $f(x)=\dfrac{x+۳}{x+۱}-\dfrac{x+۱}{x+۳}$

$$\begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,-۳\}$$

۱۴- $f(x)=\dfrac{۱}{x^۳-x}$

$$x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-۱\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱,-۱\}$$

۱۵- $f(x)=\dfrac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x-۱}-۱}$ ریشهٔ مخرج‌ها

$$\begin{cases} x=۰ \\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \\ \dfrac{۱}{x-۱}-۱=۰\Rightarrow \dfrac{۱}{x-۱}=۱ \\ \Rightarrow x-۱=۱\Rightarrow x=۲\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}$$

۱۶- $f(x)=\dfrac{۱}{\frac{x-۲}{x+۱}}$

ریشهٔ مخرج‌ها $\Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$

۱۷- $f(x)=\dfrac{x}{x^۴-۵x^۲+۴}$

$$x^۴-۵x^۲+۴=۰ \Rightarrow (x^۲-۱)(x^۲-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱\end{cases} \\ x^۲-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲\end{cases}\end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱,۲,-۲\}$$

۱۸-

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲+۱}$

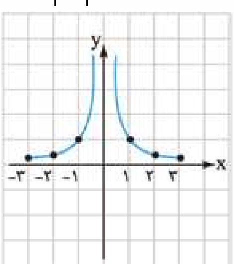
ب) $f(x)=\dfrac{۱}{x+۱}$

پ) $f(x)=\dfrac{۱}{(x+۲)(x-۲)}$

ت) $f(x)=\dfrac{۱}{x(x-۱)(x+۱)}$

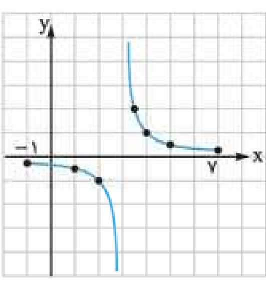
۱۹- $y=\dfrac{۱}{|x|}\qquad [-۳,۳]$

x	−۳	−۲	−۱	۱	۲	۳
y	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$



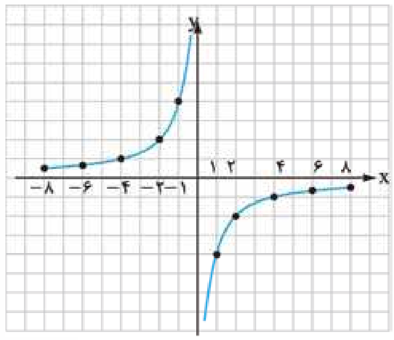
۲۰- $f(x)=\dfrac{۱}{x-۳}\qquad [-۱,۷]$

x	−۱	۱	۲	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	۴	۵	۷
y	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۲}$	−۱	−۲	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



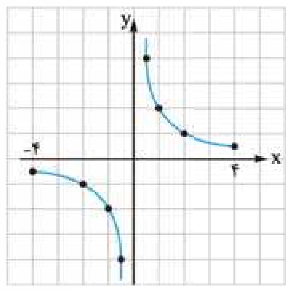
-۲۱ $f(x)=-\frac{۴}{x} \qquad [-۸,۸]$

x	-۸	-۶	-۴	-۲	-۱	۱	۲	۴	۶	۸
y	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	۲	۴	-۴	-۲	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$



-۲۲ $f(x)=\frac{۲}{x} \qquad [-۴,۴]$

x	-۴	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	-۴	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$



-۲۳ الف) شکل داده‌شده تابع ثابت $f(x)=۲$ است که $x=۱$ متعلق به دامنه‌اش نیست، پس باید عامل صفرکنندهٔ $x-۱$ را در صورت و مخرج داشته باشیم؛ یعنی:

$$f(x)=\frac{۲x-۲}{x-۱} \quad \text{یا} \quad f(x)=\frac{۲(x-۱)}{x-۱}$$

ب) نمودار داده‌شده یک تابع خطی است که از نقاط $(۰,۲)$ و $(۱,۳)$ می‌گذرد، پس:

$$(۰,۲),(۱,۳) \Rightarrow m=\frac{۳-۲}{۱-۰}=۱ \Rightarrow y=x+۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع باید به شکل $f(x)=x+۲, x\neq ۲$ باشد (چون $x=۲$ جزء دامنهٔ تابع نیست) یعنی می‌توانیم ضابطه را به شکل زیر بنویسیم:

$$f(x)=\frac{(x+۲)(x-۲)}{x-۲} \Rightarrow f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$$

پ) نمودار داده‌شده یک تابع خطی است که از نقاط $(۰,۳)$ و $(۲,-۱)$ می‌گذرد و $x=۱$ جزو دامنهٔ تابع نیست، پس مثل قسمت قبل داریم:

$$(۰,۳),(۲,-۱) \Rightarrow m=\frac{-۱-۳}{۲-۰}=-۲ \Rightarrow y=-۲x+۳$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(-۲x+۳)(x-۱)}{x-۱}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۲x^۲+۲x+۳x-۳}{x-۱}=\frac{-۲x^۲+۵x-۳}{x-۱}$$

-۲۴ برای پیداکردن دامنه، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x-۳}+۳$$

$$x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳ \Rightarrow D_f=[۳,+\infty)$$

-۲۵ $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$

$$x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲ \Rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$$

-۲۶ $f(x)=\sqrt{۴-x}+۱$

$$۴-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۴ \Rightarrow D_f=(-\infty,۴]$$

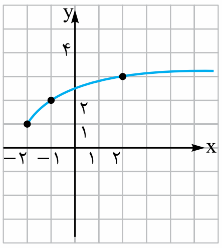
-۲۷ $f(x)=\sqrt{-۵-x}$

$$-۵-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۵ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۵]$$

-۲۸

$f(x)=\sqrt{x+۲}+۱$

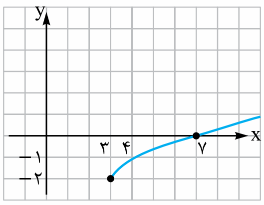
x	-۲	-۱	۲	۷
y	۱	۲	۳	۴



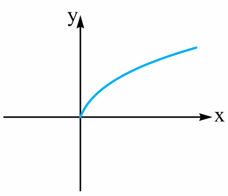
-۲۹

$f(x)=\sqrt{x-۳}-۲$

x	۳	۴	۷	۱۲
y	-۲	-۱	۰	۱

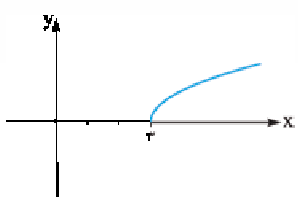


-۳۰



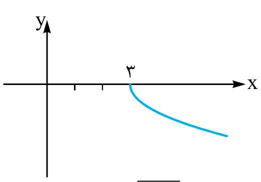
انتقال (+۳) واحد در راستای محور xها

$y=\sqrt{x}$



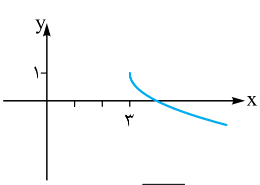
قرینه نسبت به محور xها

$y=\sqrt{x-۳}$



انتقال (+۱) واحد در راستای محور yها

$y=-\sqrt{x-۳}$



$y=۱-\sqrt{x-۳}$

طبق نمودار دامنه و برد برابرند با: $D_f=[۳,+\infty)$ و $R_f=(-\infty,۱]$

۳۱- ابتدا دامنهٔ دو تابع داده‌شده را با هم مقایسه می‌کنیم و اگر دامنه‌ها مساوی بود، می‌رویم سراغ بررسی برابری ضابطهٔ دو تابع.

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۴-۱}{x^۲-۱} \\ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\} \\ g(x)=x^۲+۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow f\neq g$$

۳۲-

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۴-۱}{x^۲+۱} \Rightarrow D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=x^۲-۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f=D_g$$

$$f(x)=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}=\frac{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}{x^۲+۱}=x^۲-۱=g(x)$$

دو تابع مساوی‌اند.

۳۳-

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۲-۲x+۱}{x-۱}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\} \\ g(x)=\dfrac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x^۲-۲x+۱}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\} \end{cases} \Rightarrow D_f=D_g$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^۲-۲x+۱}{x-۱}=\dfrac{(x-۱)^۲}{x-۱} \\ =x-۱,\ x\neq ۱ \\ g(x)=\dfrac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x^۲-۲x+۱}=\dfrac{(x-۱)^۳}{(x-۱)^۲} \\ =x-۱,\ x\neq ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

دو تابع مساوی‌اند

۳۴- ضابطهٔ تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq a \\ b-۱ & x=a \end{cases}$ در نقطهٔ $x=a$ جدا شده است و چون $x=۲$ ریشهٔ مخرج ضابطهٔ بالایی است باید $a=۲$ باشد. از طرف دیگر چون در تابع $g(x)=x+۲$، $x=۲$ داریم $g(۲)=۲+۲=۴$ پس $f(۲)$ هم باید برابر ۴ باشد یعنی:

$$b-۱=۴\Rightarrow b=۵$$

۳۵- بزرگ‌ترین ـ کوچک‌تر ۳۶- درست

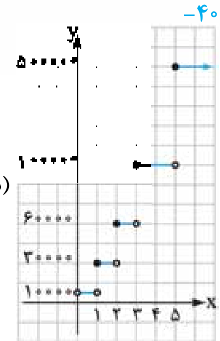
۳۷- نادرست ۳۸- نادرست

۳۹- گزینهٔ «۴»

۴۰-

الف) $f(x)=\begin{cases} ۱۰۰۰۰ & ۰<x<۱ \\ ۳۰۰۰۰ & ۱\leq x<۲ \\ ۶۰۰۰۰ & ۲\leq x<۳ \\ ۱۰۰۰۰۰ & ۳\leq x<۵ \\ ۵۰۰۰۰۰ & x\geq ۵ \end{cases}$

ب)



۴۱- الف) $۰<۰/۹۹<۱ \Rightarrow [۰/۹۹]=۰$

ب) $-۱<-۰/۹۹<۰ \Rightarrow [-۰/۹۹]=-۱$

پ) $۳<\sqrt{۱۰}<۴ \Rightarrow [\sqrt{۱۰}]=۳$

ت) $۴<\sqrt[۳]{۱۰۰}<۵ \Rightarrow [\sqrt[۳]{۱۰۰}]=۴$

ث) $(۱۷/۲)^۲=(۱۷+۰/۲)^۲=۱۷^۲+۲(۱۷)(۰/۲)+(۰/۲)^۲$

$=۲۸۹+۶/۸+۰/۰۴=۲۹۵/۸+۰/۰۴$

$\Rightarrow [(۱۷/۲)^۲]=۲۹۵$

ج) $(۱۰/۱)^۳=(۱۰+۰/۱)^۳$

$=۱۰^۳+۳(۱۰)^۲(۰/۱)+۳(۱۰)(۰/۱)^۲+(۰/۱)^۳$

$=۱۰۰۰+۳۰+۰/۳+۰/۰۰۱=۱۰۳۰+۰/۳۰۰۱$

$\Rightarrow [(۱۰/۱)^۳]=۱۰۳۰$

چ) $۸/۹\times ۹/۱=(۹-۰/۱)(۹+۰/۱)=۹^۲-(۰/۱)^۲$

$=۸۱-۰/۰۱ \Rightarrow [۸/۹\times ۹/۱]=۸۰$

ح) $۲/۰۱\times ۲/۰۲=(۲+۰/۰۱)\times(۲+۰/۰۲)$

$=۲^۲+(۰/۰۱+۰/۰۲)(۲)+(۰/۰۱)(۰/۰۲)$

$=۴+۰/۰۶+۰/۰۰۰۲ \Rightarrow [۲/۰۱\times ۲/۰۲]=۴$

۴۲- تابع $f(x)=\dfrac{۳}{[\frac{x}{۲}]-۱}$ یک تابع کسری است. مخرج تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$[\tfrac{x}{۲}]-۱=۰ \Rightarrow [\tfrac{x}{۲}]=۱ \xrightarrow[{[x]=k \ \Rightarrow\ k\leq x<k+۱}]{\text{با استفاده از ویژگی}}$$

$$۱\leq\frac{x}{۲}<۲ \Rightarrow ۲\leq x<۴ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[۲,۴)$$

۴۳- الف) $[\frac{۶}{۱}]+[\frac{۶}{۲}]+[\frac{۶}{۳}]+\cdots+[\frac{۶}{۶۰۰}]$

از $\frac{۶}{۷}$ به بعد حاصل تمام جزءصحیح‌ها برابر صفر می‌شود، پس:

$$[\tfrac{۶}{۱}]+[\tfrac{۶}{۲}]+[\tfrac{۶}{۳}]+[\tfrac{۶}{۴}]+[\tfrac{۶}{۵}]+[\tfrac{۶}{۶}]+\underbrace{[\tfrac{۶}{۷}]+[\tfrac{۶}{۸}]+\cdots+[\tfrac{۶}{۶۰۰}]}_{۰}$$

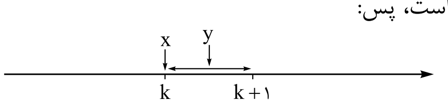
$=۶+۳+۲+۱+۱+۱+۰=۱۴$

ب) $[۱۰^{-۴}]+[۱۰^{-۳}]+[۱۰^{-۲}]+\cdots+[۱۰^{۴}]$

$$=\overbrace{[\tfrac{۱}{۱۰۰۰۰}]}^{۰}+\overbrace{[\tfrac{۱}{۱۰۰۰}]}^{۰}+\overbrace{[\tfrac{۱}{۱۰۰}]}^{۰}+\overbrace{[\tfrac{۱}{۱۰}]}^{۰}$$

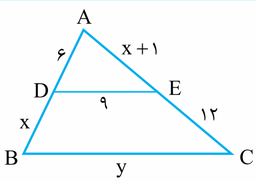
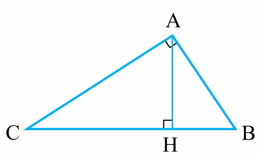
$$+\underbrace{[۱۰^۰]}_{۱}+\underbrace{[۱۰^۱]}_{۱۰}+\underbrace{[۱۰^۲]}_{۱۰۰}+\underbrace{[۱۰^۳]}_{۱۰۰۰}+\underbrace{[۱۰^۴]}_{۱۰۰۰۰}=۱۱۱۱۱$$

۴۴- چون محدودهٔ $|x-y|$ را می‌خواهیم و x و y دلخواه‌اند فرض می‌کنیم $x<y$ است، پس:



طبق شکل بالا اگر x یک عدد صحیح باشد، محدودهٔ تغییرات y بازهٔ $[k,k+۱)$ است؛ پس اختلاف بین y و x می‌تواند برابر صفر (در صورتی که $x=y$ باشد) و یا برابر عددی که حداکثرش کوچک‌تر از ۱ واحد است باشد، یعنی $۰\leq|x-y|<۱$، بنابراین اختلاف بین x و y یا همان $|x-y|$ عددی است بین صفر و ۱ که هرگز برابر ۱ نمی‌شود.

نمونه امتحان نیم‌سال اول	رشتهٔ تجربی	ریاضی ۲
امتحان شمارهٔ ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com

ردیف	سؤال	نمره
۱	نقاط $A(۱,-۱)$، $B(۴,۰)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع مثلث را تعیین کنید.	۱
۲	معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۲-\sqrt{۲}$ و $۲+\sqrt{۲}$ باشد.	۰/۵
۳	معادله‌های زیر را حل کنید: الف) $x^۴+۵x^۲-۳۶=۰$ ب) $(x^۲+x)^۲+x^۲+x-۶=۰$	۱/۵
۴	معادلهٔ زیر را حل کنید. $\frac{x+۴}{۲x-۴}+\frac{x}{x+۲}=\frac{۴}{x^۲-۴}$	۱
۵	معادلهٔ زیر را حل کنید. $\sqrt{x-۳}+x=۵$	۱
۶	طریقهٔ رسم خط عمود بر یک خط را از نقطه‌ای غیرواقع بر آن توضیح دهید.	۰/۵
۷	خط d و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن مفروض است. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنیم که یک رأسش نقطهٔ A و طول ساق‌هایش ۵ سانتی‌متر و قاعده‌اش بر خط d قرار داشته باشد. روش رسم را توضیح دهید.	۰/۷۵
۸	در شکل روبه‌رو، $DE \parallel BC$ است. مقدار x و y را پیدا کنید. 	۲
۹	هر کدام از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید. الف) در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی از اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی بزرگ‌تر است. ب) مجموع هر دو عدد اول دلخواه همواره یک عدد مرکب است.	۰/۵
۱۰	در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو $AB=۳$ و $BH=\frac{۹}{۵}$ است. اندازهٔ CH و AC را پیدا کنید. 	۱/۲۵
۱۱	نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را رسم کنید.	۱
۱۲	دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ ب) $f(x)=\frac{۲x+۱}{x^۲-۵x+۶}$	۱
۱۳	ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۳}$ را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۴	نمودار تابع $f(x)=[x]-۱$ را با دامنهٔ $[-۲,۲)$ رسم کنید.	۰/۷۵
۱۵	در هر کدام از موارد زیر ضابطهٔ $f+g$ و $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ هر کدام را به دست آورید. الف) $\begin{cases} f(x)=x^۲-۳x+۲ \\ g(x)=x-۲ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases}$	۱/۵

۱۶	اندازهٔ طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان را در یک دایره به شعاع ۲۰ سانتی‌متر پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۷	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (درست / نادرست) الف) اگر زاویهٔ بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی $\frac{۱}{۲}$ رادیان باشد، آن‌گاه اندازهٔ قاعدهٔ این مثلث، کوچک‌تر از اندازهٔ ساق آن است. ☐ ☐ ب) $\sin\frac{۲\pi}{۳} = -\sin\frac{\pi}{۳}$ ☐ ☐	۰/۵
۱۸	مقدار عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $\sin^{۲}(\frac{۴\pi}{۳}) + \tan(\frac{۳\pi}{۴}) - \cos\frac{۵\pi}{۳}$ ب) $\sin ۷۵۰^\circ + \cos ۳۰۰^\circ + \tan ۵۸۵^\circ$	۱
۱۹	نمودار تابع $y = ۲\cos x$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.	۱/۵
۲۰	در یک مثلث $\hat{A} = \frac{\pi}{۲}$ و $\hat{B} = ۵\hat{C}$ است: الف) زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را برحسب رادیان و درجه پیدا کنید. ب) حاصل عبارت $\sin^{۲} A + \sin^{۲} B + \sin^{۲} C$ را پیدا کنید.	۱/۲۵
	جمع نمرات	۲۰

۱- طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم: $A(1,-1), B(4,0), C(0,2)$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(1-4)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

می‌دانیم که $AB=AC$ و $AB^2+AC^2=BC^2$ (یعنی $(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=(\sqrt{20})^2$).

پس مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

۲- مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) را حساب می‌کنیم:

$$S=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$$

$$P=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2^2-(\sqrt{2})^2=4-2=2$$

پس معادله به صورت $x^2-Sx+P=0$ یعنی $x^2-4x+2=0$ است.

۳- الف) $x^4+5x^2-36=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+5t-36=0$

$$\Rightarrow (t+9)(t-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-9 \\ t=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=-9 \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ x^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

ب) $(x^2+x)^2+x^2+x-6=0 \xrightarrow{x^2+x=u} u^2+u-6=0$

$$\Rightarrow (u+3)(u-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-3 \\ u=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=-3 \\ x^2+x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+x+3=0 \Rightarrow \Delta=1-4(1)(3)<0 \quad \text{ریشه‌ندارد} \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

۴- مخرج مشترک می‌گیریم و دو طرف را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{2x-4}+\frac{x}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x+2)+x(2x-4)}{2(x-2)(x+2)}=\frac{4}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+6x+8+2x^2-4x}{2(x-2)(x+2)}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+2x+8}{2}=4 \Rightarrow 3x^2+2x+8=8$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x=0 \Rightarrow x(3x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \text{ق‌ق} \\ x=-\frac{2}{3} \quad \text{ق‌ق} \end{cases}$$

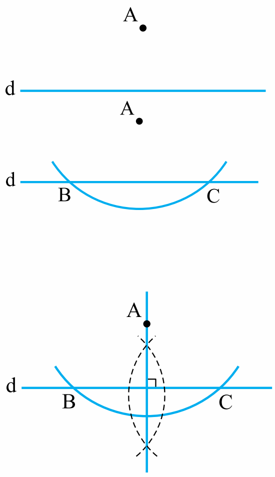
۵- $\sqrt{x-3}+x=5 \Rightarrow \sqrt{x-3}=5-x$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-3=25-10x+x^2$$

$$\Rightarrow x^2-11x+28=0 \Rightarrow (x-4)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \quad \text{ق‌ق} \\ x=7 \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

جواب $x=7$ چون در معادلهٔ $\sqrt{x-3}=5-x$ صدق نمی‌کند قابل‌قبول نیست.

۶- خط d و نقطهٔ A را غیر واقع بر آن در نظر می‌گیریم.

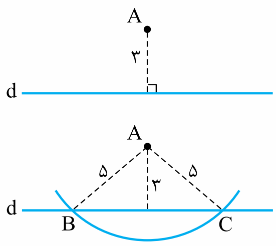


الف) به مرکز A و به شعاعی که خط d را قطع کند کمان می‌زنیم تا خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند.

ب) عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم.

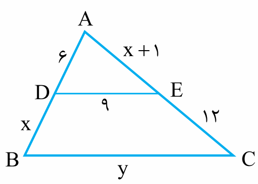
پ) نقطهٔ A روی عمودمنصف پاره‌خط BC واقع است چون از B و C به یک فاصله است. عمودمنصف رسم‌شده همان عمودی است که از نقطهٔ A بر خط d رسم کرده‌ایم.

۷- نقطهٔ A را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از خط d در نظر می‌گیریم. به مرکز A دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند.



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسئله است.

۸- طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{x}=\frac{x+1}{12} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} x(x+1)=6\times 12$$

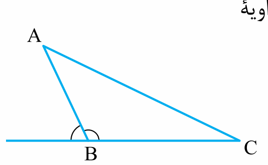
$$\Rightarrow x^2+x-72=0 \Rightarrow (x+9)(x-8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-9 \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ x=8 \end{cases}$$

و طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

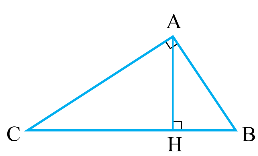
$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{14}=\frac{9}{y} \Rightarrow y=\frac{14\times 9}{6}=21$$

۹- الف) اگر زاویهٔ داخلی منفرجه باشد زاویهٔ خارجی‌اش حاده است، مثل شکل روبه‌رو.



ب) اگر عدد ۲ و ۵ را در نظر بگیریم $2+5=7$ است که یک عدد اول است.

۱۰- $AB=3, BH=\frac{9}{5}$



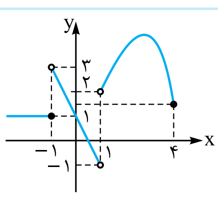
می‌دانیم: $AB^2=BH\times BC$

$$\Rightarrow 9=\frac{9}{5}\times BC \Rightarrow BC=5$$

$$CH=BC-BH \Rightarrow CH=5-\frac{9}{5}=\frac{25-9}{5}=\frac{16}{5}$$

$$AC^2=CH\times BC \Rightarrow AC^2=\frac{16}{5}\times 5 \Rightarrow AC^2=16 \Rightarrow AC=4$$

نمونه امتحان نیم‌سال دوم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۲ ـ نوبت عصر	رشتهٔ تجربی	ریاضی ۲	
امتحان شمارهٔ ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	گزینهٔ مناسب را تعیین کنید. الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۲)$ از خط $۳x+۴y-۶=۰$ کدام است؟ ۱) $\frac{-۴}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$ ب) در هر مثلث هر پاره‌خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند .... ضلع سوم است. ۱) موازی ۲) مساوی ۳) موازی و مساوی نصف ۴) موازی و مساوی پ) اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{۴}{۲۵}$ باشد، نسبت نیمسازهای آن‌ها برابر .... است. ۱) $\frac{۱۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵۰}$ ت) برد تابع $f(x)=[x]$ کدام است؟ ۱) اعداد حقیقی ۲) اعداد گویا ۳) اعداد طبیعی ۴) اعداد صحیح ث) اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ ۱) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ۲) $P(A\cap B)=P(S)$ ۳) $A\cap B=\varnothing$ ۴) $A\cap B=A\times B$	۱/۲۵
۲	الف) اگر $A(۲,۴)$ و $B(۴,-۲)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. ب) معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید. $\sqrt{۲-x}=x$	۱/۷۵
۳	الف) حکم کلی زیر را با مثال نقض رد کنید. به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است. ب) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به رأس قائمهٔ A، اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد و $AH=۴\ cm$ و $BH=۲\ cm$ آن‌گاه اندازهٔ HC و BA را به دست آورید.	۲
۴	اگر $f(x)=۳x+۵$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۸)$ را تعیین کنید.	۰/۵
۵	اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۴$ باشد، ضابطه و دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.	۱/۷۵
۶	نمودار تابع $y=-\sin x+۱$ را در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکزیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.	۱/۵
۷	حاصل عبارت زیر را بیابید: $A=\sin ۱۲۰^\circ-\cos ۱۵۰^\circ$	۱/۵
۸	نمودار تابع $y=-\log_۲(x-۳)$ را رسم کنید.	۱
۹	معادلات نمایی و لگاریتمی زیر را حل کنید. الف) $۳^{x-۲}=\frac{۱}{۲۷^x}$ ب) $\log(x+۳)+\log x=۱$	۲
۱۰	اگر $\log ۲\simeq ۰/۳$ و $\log ۳\simeq ۰/۴۸$، آن‌گاه حاصل $\log ۱۲$ را بیابید.	۰/۵
۱۱	با توجه به نمودار، حاصل را بیابید.  $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)-۳\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)+۳f(-۱)=$	۱

نمونه امتحان نیم‌سال دوم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۲ ـ نوبت عصر		رشتهٔ تجربی	ریاضی ۲	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره
۱۲	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید. الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱۴۰۲^-} [x]$ پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \cos x$			۱
۱۳	مقادیر b و a را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases} -۱ & x<-۱ \\ ax+b & x=-۱ \\ x^۲-b & x>-۱ \end{cases}$			۱/۵
۱۴	فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۶ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از دو تیم قهرمان خواهد شد؟			۱/۲۵
۱۵	ضریب تغییرات داده‌های زیر را تعیین کنید. ۱,۳,۵,۷			۱/۵
	جمع نمرات			۲۰