با تقدیر از دانش‌آموزان عزیزم در دبیرستان
علامه حلی تهران (مهندسان آیندهٔ نزدیک)
به ویژه آقایان: محمدحسین کاشانی جباری،
بهراد احمدپور، امیدرضا یوسف، محمدامین غلامی
و علی پناه

تقدیم به دو برادر عزیزم مهرزاد و مهرداد

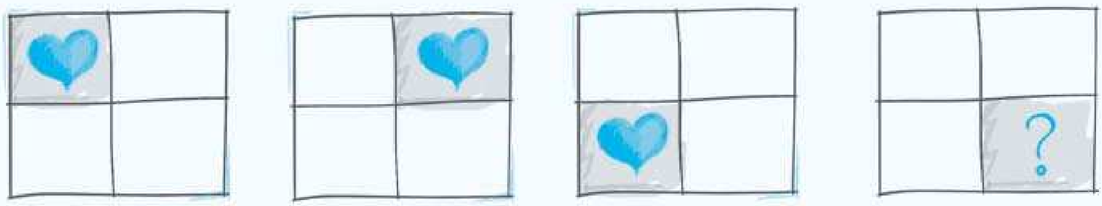
مهریار راشدی

تقدیم به همسر عزیزم

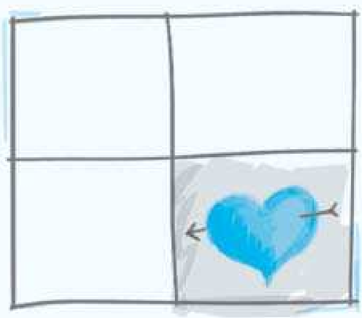
رسول محسنی‌منش

به جای مقدمهٔ ناشر

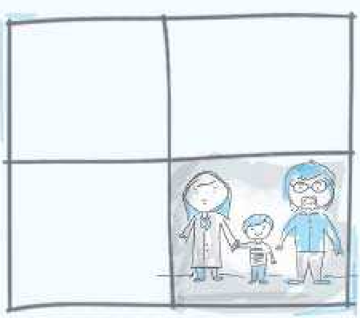
تست هوش عاطفی ـ هندسی



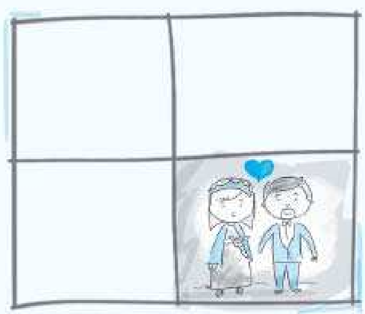
۱)



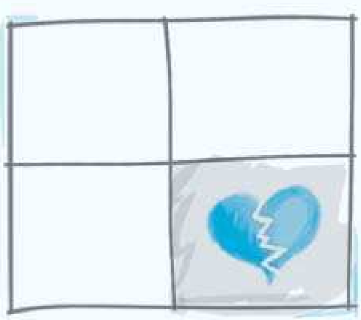
۲)



۳)



۴)



هندسه یعنی هارمونی. می‌گویند اگر قلبت با این دنیا هم‌نوا و هم‌ریتم باشد، یک اتفاق‌های خوبی برای خودت و آدم‌های دوروبرت می‌افتد

قلبت را جای چیزهایی که خوب نیست نکن!

مقدمهٔ مؤلفان

می‌دانی!
یک وقت‌هایی باید
روی یک تکه کاغذ بنویسی
«تعطیل است»
و بچسبانی پشت شیشهٔ افکارت
باید به خودت استراحت بدهی
دراز بکشی
در دلت بخندی به تمام افکاری که پشت شیشهٔ ذهنت صف کشیده‌اند
آن‌وقت، با خودت بگویی بگذار منتظر بمانند ... «حسین پناهی»

سلام به شما مهندسان آینده!

ورود شما به سال دهم و کتاب هندسهٔ دهم را خوشامد می‌گوییم.

راستش را بخواهید نوشتن مقدمهٔ کتاب، کار سختی است. حتی از نوشتن مطالبِ خودِ کتاب، سخت‌تر است.

همین اول کار، لازم است اشاره کنیم که موقع خواندن مطالب این کتاب، شعر بالا را جدی بگیرید و افکار **غیرهندسی** را پشت شیشهٔ ذهنتان در انتظار بگذارید تا ...

خب! از هر چه بگذریم، سخن کتاب **تست هندسهٔ دهم**، خوش‌تر است!

کتاب پیشِ روی شما مانند کتاب درسی شامل ۴ فصل ۱ ترسیم هندسی و استدلال، ۲ قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، ۳ چندضلعی‌ها و ۴ تجسم فضایی، است.

تمام تلاشمان را کرده‌ایم که پس از خواندن درس‌نامهٔ هر فصل و حل تست‌های آن (البته با چاشنی دقت؛ به میزان لازم)، مطالب آن فصل در عمقِ وجود شما ته‌نشین شود؛ به همین خاطر در نوشتن درس‌نامه‌ها و پاسخ‌های تشریحی و همچنین چینش و طبقه‌بندی تست‌ها، وسواس و دقت زیادی به خرج داده‌ایم. کاری بوده که از دستمان برمی‌آمده

در بین تست‌ها، گاهی به طور عمدی از دستمان در رفته!!! و مطالبی که برای تکمیل بحث می‌توانست در کتاب مطرح شود را آورده‌ایم. البته از مطالبی که در سال‌های گذشته به خصوص هشتم و نهم خوانده‌اید نیز غافل نبوده‌ایم!

برای مواقع اورژانسی که برای زدن همهٔ تست‌ها وقت ندارید، تست‌های رنگی به داد شما خواهند رسید و تسلط نسبتاً خوبی برای شما ایجاد خواهند کرد؛ این تست‌ها را جدی بگیرید.

راستی! تعدادی تست هم به عنوان سری Z داریم؛ به قول شما این تست‌ها خفن هستند. تا زمانی که بر مطالب کتاب درسی و بقیهٔ تست‌ها تسلط کامل پیدا نکرده‌اید، سراغ این تست‌ها نروید!

سخن آخر: برای استفادهٔ بهتر از کتاب تست هندسهٔ دهم، توصیه می‌کنیم ابتدا متن کتاب درسی و تمارین مربوط به هر بخش را به دقت نگاه کنید (فقط نگاه نکنید! دقیق بخوانید و سؤالات را حل کنید) و بعد از آن درس‌نامه‌های این کتاب را با دقت زیادی بخوانید و پس از حل تست‌ها، حتی اگر پاسخ شما درست بود، حتماً پاسخ‌های تشریحی را دقیق ببینید.

پاسخ‌های تشریحی تست‌ها پُر است از نکات به‌دردبخور، راه‌های شگفت‌انگیز و میان‌بُر که به تسلط بیشتر، دسته‌بندی مطالب در ذهن شما و گرفتن نتیجهٔ عالی در آزمون‌ها کمک می‌کند.

سپاس‌گزاری:

از دکتر کمیل نصری که مثل همیشه از اعتماد و حمایت بی‌دریغش بهره‌مند بودیم، بسیار ممنونیم.

از خانم‌ها میترا حسامی، هدی ملک‌پور، آقایان ایمان سلیمان‌زاده و احمد خداداد حسینی بابت پیگیری‌های مستمر و زحماتشان سپاس‌گزاریم.

از ویراستاران کتاب و همکاران پرتلاشمون در واحد تولید سپاس‌گزاریم.

سعیِ جمعیِ ما بر این بوده که کتابی مفید، راهگشا و بی‌غلط به شما تقدیم کنیم، اما وجود اشکالات ادبی، نگارشی و حتی محاسباتی و علمی! امری اجتناب‌ناپذیر است. با ما در ارتباط باشید و نظرات، پیشنهادات و ایرادات احتمالی را با ما درمیان بگذارید. از همهٔ شما ممنونیم. شاد و سربلند باشید.

مهریار راشدی ـ رسول محسنی‌منش

فهرست

فصل ۱
ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۲
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳
چندضلعی‌ها

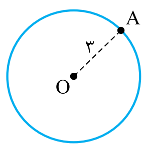
فصل ۴
تجسم فضایی

(فصل ۱)

ترسیم‌های هندسی و استدلال

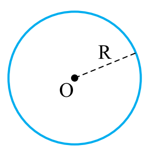
(درس ۱)

ترسیم‌های هندسی

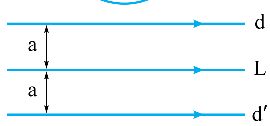


دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ را در نظر بگیرید. نقاط روی این دایره همگی دارای یک ویژگی مشترک‌اند. همهٔ این نقاط از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ هستند.

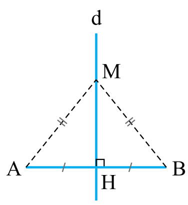
شکل‌هایی مانند دایره که نقاطشان ویژگی مشترکی دارند، در مسائل هندسی خصوصاً یافتن نقاط با ویژگی خاص و رسم شکل‌های هندسی بسیار مهم هستند. گاهی از این نقاط که دارای ویژگی مشترک هستند با نام **«مکان هندسی»** یاد می‌کنند. در ادامه با چندتا از این شکل‌ها آشنا می‌شویم.



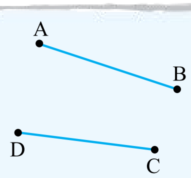
۱) نقطهٔ ثابت O را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم نقاطی از صفحه را بیابیم که فاصلهٔ آن‌ها از O برابر R باشد، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم کنیم.



۲) خط L را در نظر بگیرید. اگر دنبال نقاطی باشیم که از خط L به فاصلهٔ معلوم a باشند، این نقاط روی دو خط موازی L هستند که در طرفین L قرار دارند و باید آن‌ها را رسم کنیم.

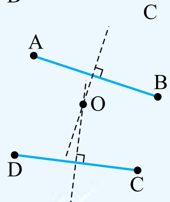


۳) پاره‌خط AB را در نظر بگیرید. عمودمنصف AB شامل همهٔ نقطه‌هایی است که فاصلهٔ آن‌ها از نقاط A و B برابر است، پس اگر از ما نقطه‌ای را خواستند که فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ A و B برابر باشد، باید عمودمنصف AB را رسم کنیم و بر روی آن به دنبال این نقطه بگردیم.

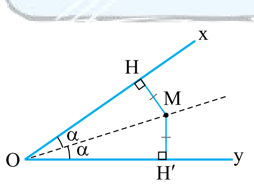


تست **دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل در نظر گرفته شده‌اند. چند نقطه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله و از نقاط C و D هم به یک فاصله باشد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



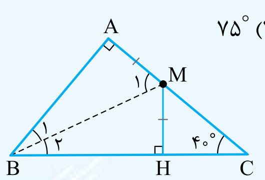
پاسخ ۲ نقاطی که از دو سر پاره‌خط AB فاصله‌های مساوی دارند همگی روی عمودمنصف این پاره‌خط قرار دارند و نقاطی هم که از دو سر پاره‌خط CD به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف پاره‌خط DC قرار دارند، پس نقطه‌ای را می‌خواهیم که هم روی عمودمنصف AB باشد هم روی عمودمنصف DC باشد. تنها نقطهٔ این‌جوری، محل برخورد عمودمنصف‌ها است! پس فقط یک نقطه با این ویژگی وجود دارد.



۴) نقاط روی نیمساز یک زاویه هم ویژگی مشترکشان این است که فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز زاویه از اضلاع زاویه برابر است، یعنی اگر M نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز زاویهٔ O باشد، همواره داریم: $MH = MH'$

تست **در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$)، نقطهٔ M روی ضلع AC قرار دارد، از M عمودی بر BC رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. اگر $MH = AM$ باشد، زاویهٔ AMB چند درجه است؟**

۱) 65° ۲) 100° ۳) 115° ۴) 75°

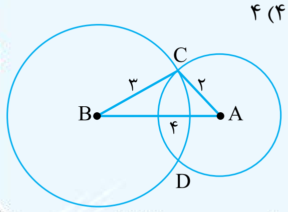


پاسخ ۱ به شکل خیره شوید! در واقع فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع‌های AB و BC برابر است، پس M روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد، بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$، پس زاویهٔ M_1 برابر است با:

$\overset{\Delta}{ABM}: \hat{M}_1 = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

تست **دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم هستند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ باشد؟**

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴



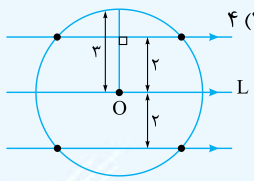
پاسخ (۳) ابتدا دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ رسم می‌کنیم، چرا که تمام نقاطی که از B به فاصلهٔ ۳ هستند روی این دایره قرار دارند. همین‌طور دایره‌ای هم به مرکز A و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. همین‌طور که می‌بینید، این دو دایره یکدیگر را در نقاط C و D قطع می‌کنند. این دو نقطه هر دو ویژگی موردنظر را دارند. دقت کنید که چون $۴ < ۳ + ۲$ است، دوتا نقطه با این ویژگی داشتیم یعنی دو دایره توانستند یکدیگر را قطع کنند.

اگر مجموع شعاع دایره‌ها برابر با ۴ می‌شد، دایره‌ها بر هم مماس می‌شدند و یک نقطه به وجود می‌آمد و اگر مجموع شعاع دایره‌ها از ۴ کم‌تر بود، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کردند و نقطه‌ای با این ویژگی پیدا نمی‌شد.

قبول دارید که در این تست در واقع مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ رسم کردیم؟!

تست **نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ و از خط L به فاصلهٔ ۲ باشند؟**

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴



پاسخ (۴) خُب نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است و نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی خط L خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، هر دو ویژگی موردنظر را دارند. (حتماً خط‌ها دایره را قطع می‌کنند؟!)

ترسیم

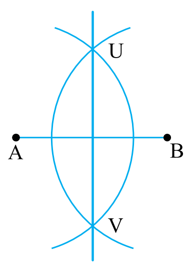
در مسائل ترسیم، به ما یک پرگار می‌دهند که با آن می‌توانیم دایره رسم کنیم (که البته باکلاس‌ترها می‌گویند: کمان می‌زنیم) و یک خط‌کش می‌دهند که با آن می‌توانیم پاره‌خط‌هایی به طول معلوم را بکشیم و البته در حل تست‌ها و مسائل فرض بر این است که رسم‌های زیر (ترسیم‌های مقدماتی) را انجام داده‌ایم و در ترسیم‌هایمان می‌توانیم از آن‌ها استفاده کنیم:

۱ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط　　۲ رسم نیمساز یک زاویه

۳ رسم خط عمود بر یک خط مفروض (از نقطه‌ای بیرون یا روی خط)　　۴ رسم خط موازی یک خط مفروض

۵ رسم یک مثلث با داشتن سه ضلع

به عنوان نمونه روش رسم عمودمنصف پاره‌خط AB را در ادامه می‌بینید.



۱ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز می‌کنیم؛

۲ به مرکز A کمانی رسم می‌کنیم؛

۳ (بدون تغییر طول دهانهٔ پرگار) به مرکز B کمانی رسم می‌کنیم؛

۴ این دو کمان همدیگر را در نقاط U و V قطع می‌کنند؛

۵ خطی که از U و V می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

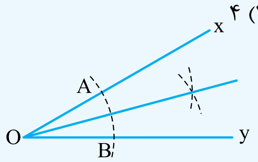
تست **برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۱۴، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ x باز کرده‌ایم. x کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

پاسخ (۴) برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به طول x، باید کمان‌هایی به طول بیش از $\frac{x}{۲}$ به مرکز A و B رسم کنیم. برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۱۴ باید کمان‌هایی به طول بیش از $\frac{۱۴}{۲}$ به مرکز دو سر پاره‌خط رسم کنیم. در بین گزینه‌ها فقط (۴) بیشتر از ۷ است.

تست **برای رسم نیمساز یک زاویه، حداقل به ترسیم چند کمان نیاز داریم؟**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

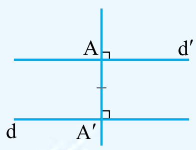


پاسخ (۳) کمان اول به شعاع دلخواه و به مرکز O رسم می‌شود تا نقطه‌های A و B به دست آیند. کمان‌های دوم و سوم با شعاع‌های برابر و به طولی بزرگ‌تر از نصف طول AB و به مرکزهای A و B رسم می‌شوند تا یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند. با وصل کردن این نقطه به O، نیمساز زاویهٔ xOy به دست می‌آید. بنابراین حداقل با ترسیم سه کمان می‌توان نقطه‌ای را یافت که با وصل‌کردن آن به نقطهٔ O در رأس، نیمساز زاویهٔ xOy به دست آید.

تست **در رسم خطی موازی با خط داده‌شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن، کدام‌یک از موارد زیر به کار نمی‌رود؟**

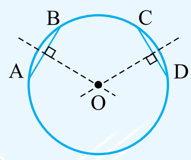
۱) دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.
۲) در صفحه، دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.
۳) از یک نقطه روی یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.
۴) از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.

پاسخ (۱) نقطهٔ A و خط d در صفحه را در نظر می‌گیریم. ابتدا از نقطهٔ A خطی بر d عمود کرده و نقطهٔ تقاطع را A' می‌نامیم. (۴) سپس از نقطهٔ A، خط d' را عمود بر AA' رسم می‌کنیم. (۳) دو خط d و d' هر دو بر خط AA' عمود هستند؛ بنابراین با هم موازی‌اند. (۲)
تنها از قضیهٔ بیان‌شده در (۱) استفاده نشده است.



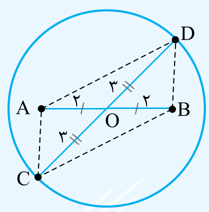
مثال **میدان یک شهر به صورت دایره است. می‌خواهیم مرکز آن را یافته و در آن‌جا مجسمه‌ای قرار دهیم. به کمک وسایل ترسیم و ترسیم‌های مقدماتی، مرکز این دایره را بیابید.**

پاسخ می‌دانیم که مرکز دایره روی عمودمنصف‌های وترهای آن قرار دارد. دو وتر دلخواه AB و CD را می‌کشیم و عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم، محل برخورد این عمودمنصف‌ها مرکز دایره را نشان می‌دهد.



مثال **با توجه به این‌که می‌دانیم چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند متوازی‌الاضلاع است، متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهایش ۴ و ۶ باشد.**

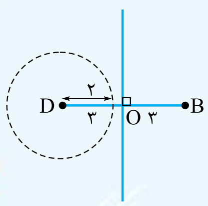
پاسخ ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز O (وسط AB) و شعاع ۳ رسم می‌کنیم. قطر دلخواه CD را نگاه کنید. با وصل‌کردن A، B، C و D به همدیگر، چهارضلعی به وجود می‌آید، قطرهایش منصف یکدیگرند پس متوازی‌الاضلاع است. اندازهٔ قطرهایش هم که ۴ و ۶ است.



تست **چند لوزی به طول ضلع ۲ و قطر کوچک ۶ می‌توان رسم کرد؟**

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ (۱) می‌دانیم که قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، پس ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ می‌کشیم و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. حالا دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف BD، جای دو رأس دیگر را تعیین می‌کند. اما دقت کنید که دایره‌ای به شعاع ۲ اصلاً نمی‌تواند این خط را قطع کند، پس با این اندازه‌ها لوزی قابل رسم نیست!



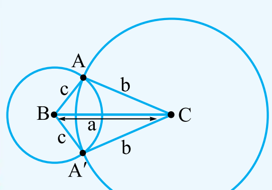
با داشتن (۱) طول قطر مربع، (۲) طول قطرهای لوزی، (۳) طول یک ضلع و طول قطر مستطیل (به شرط این‌که در فیثاغورس صدق کند)، این چهارضلعی‌ها به صورت منحصر به فرد، قابل رسم هستند.

ترسیم مثلث

به طور کلی برای رسم یک n ضلعی باید $2n-3$ جزء مستقل از آن n ضلعی را داشته باشیم. پس برای رسم یک مثلث باید سه جزء مستقل از هم معلوم باشد که حداقل یکی از این اجزاء باید جزء غیرزاویه‌ای باشد. در ترسیم مثلث از ترسیم‌های مقدماتی می‌توانید بدون بیان روش ترسیم استفاده کنید.

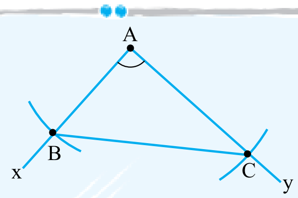
مثال **از مثلثی اندازهٔ سه ضلع آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.**

پاسخ فرض کنید طول اضلاع مثلث، a، b و c باشند. ابتدا پاره‌خط BC را به اندازهٔ a رسم می‌کنیم؛ سپس مرکز پرگار را روی رأس B قرار داده و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ c باز می‌کنیم و دایره‌ای رسم می‌کنیم. دایرهٔ دیگری نیز به مرکز C و شعاع b توسط پرگار رسم می‌نماییم، محل تلاقی این دو دایره نقطهٔ A را مشخص می‌کند.
دقت کنید که در شکل بالا دو مثلث همنهشت ایجاد شد؛ یعنی یک نوع مثلث رسم گردید.

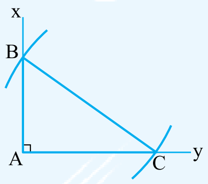


مثال **از مثلثی دو ضلع و زاویهٔ بین این دو ضلع معلوم است. مثلث را رسم کنید.**

پاسخ فرض کنید از مثلث ABC، اضلاع AB و AC و زاویهٔ A معلوم است. ابتدا زاویه‌ای مساوی زاویهٔ A رسم می‌نماییم؛ سپس به مرکز A دو دایره به شعاع‌های AB و AC رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در B و C قطع کند. B و C را به هم وصل می‌کنیم، مثلث ABC مثلث مطلوب است.



مثال **از مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر و یک ضلع معلوم است. مثلث را رسم کنید.**



پاسخ فرض کنید در مثلث ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، وتر BC و ضلع AB معلوم باشند. ابتدا زاویهٔ قائمهٔ A را رسم می‌کنیم. از A کمانی به اندازهٔ AB می‌زنیم تا Ax را در B قطع کند؛ سپس از B کمانی به اندازهٔ BC رسم می‌کنیم تا Ay را در C قطع نماید، مثلث ABC جواب مسئله است.

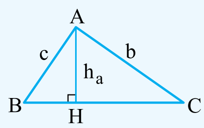
همان‌طور که در مسائل قبل مشاهده شد، با معلوماتی که دو مثلث برابر می‌شوند (ض‌زض، ض‌ض‌ض، زض‌ز، وتر و یک ضلع، وتر و یک زاویه) حداکثر یک نوع مثلث مشخص می‌شود.

مسائل مشکل‌تر در رسم مثلث

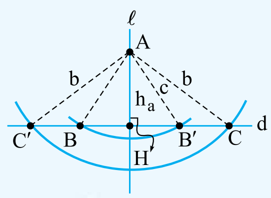
مسائل ترسیم مثلث و به طور کلی مسائل ترسیم هندسی، سخت‌ترین مسائل هندسه به شمار می‌روند و دارای تنوع بسیاری می‌باشند که در ادامه به تعدادی از این مسائل خواهیم پرداخت.

در مسائل پیش رو، به دلیل سخت‌ترشدن مسائل ترسیم، حتماً باید ابتدا مسئله را حل‌شده فرض کنیم تا اولاً تصویر درستی از آن‌چه قرار است رسم شود داشته باشیم و ثانیاً روابط موجود در شکل را بیابیم که در این‌گونه مسائل، حاصل این کار یافتن مثلثی درون مثلث مطلوب است که با اطلاعات موجود در شکل به راحتی قابل ترسیم است و مثلث اصلی بر روی آن بنا می‌شود.

مثال **از مثلث ABC اندازهٔ ضلع‌های $AB=c$ و $AC=b$ و طول ارتفاع $AH=h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.**

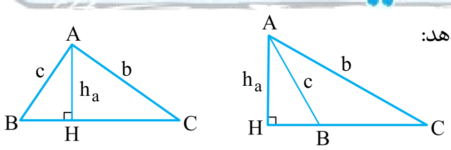


پاسخ ابتدا مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم مثلث ABC با اطلاعات مذکور به صورت مقابل رسم شده است. حال باید روش ایجاد چنین مثلثی را بیابیم.

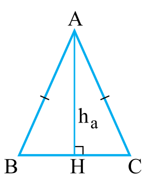


روش رسم: خط دلخواه d را در صفحه رسم می‌کنیم. از نقطهٔ H روی خط، خط ℓ را عمود بر d خارج می‌کنیم. از H کمانی به اندازهٔ h_a می‌زنیم تا ℓ را در A قطع کند؛ سپس به مرکز A دایره‌ای به شعاع c می‌زنیم تا d را در نقاط B و B' قطع نماید. به همین ترتیب به مرکز A و این بار به شعاع b دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در C و C' قطع کند. مطابق شکل روبه‌رو، چهار مثلث ABC، $AB'C'$، $AB'C$ و ABC' مثلث‌های مطلوب‌اند ولی چون $\overset{\Delta}{AB'C'}\cong\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ABC'}\cong\overset{\Delta}{AB'C}$، پس دو نوع مثلث ایجاد می‌شود که یک نوع، حاده‌الزاویه و نوع دیگر، منفرجه‌الزاویه است.

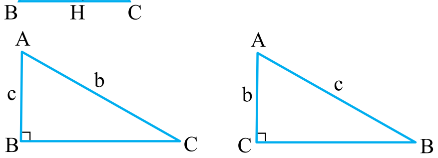
در مثال قبل با توجه به مقادیر مختلفی که b، c و h_a دارند، حالت‌های زیر می‌توانند رخ بدهند:



۱ (حالت کلی) اگر $b\neq c$ و $h_a<b,c$؛ دو نوع مثلث **حاده‌الزاویه** و **منفرجه‌الزاویه** ایجاد می‌شود.

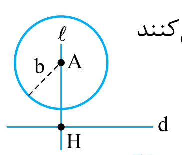


۲ اگر $h_a<b=c$؛ یک نوع مثلث **متساوی‌الساقین** ایجاد می‌شود.



(حالت $h_a=c$) (حالت $h_a=b$)

۳ اگر $b\neq c$ و $h_a=b$ یا $h_a=c$؛ یک نوع مثلث **قائم‌الزاویه** ایجاد می‌شود.



۴ اگر $h_a>b$ یا $h_a>c$؛ هیچ مثلثی تشکیل نمی‌شود؛ زیرا مطابق شکل، دایره‌هایی به شعاع b و c خط d را قطع نمی‌کنند یا به عبارتی دیگر، وتر هیچ‌گاه از ضلع قائمه کوچک‌تر نمی‌شود.

به کاری که در نکتهٔ بالا انجام دادیم، **بحث** در تعداد جواب‌های مسئلهٔ ترسیم گفته می‌شود.

تست **چند مثلث با اطلاعات $h_a=\sqrt{۳}$، $b=۲$ و $c=\frac{۳}{۲}$ می‌توان رسم کرد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ ۱ چون $h_a>c$، بنا بر حالت ۴ نکتهٔ قبل، هیچ مثلثی با این معلومات ایجاد نمی‌شود؛ بنابراین ۱ درست است.

تست در رسم مثلث ABC با معلومات $c = ۱۰$ ، $b = ۳$ و h_a ، دو نوع مثلث ایجاد شده است. h_a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

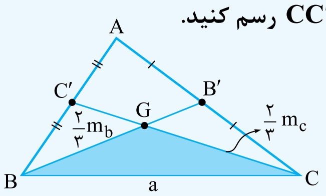
۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

پاسخ ۲ برای این‌که این مسئله ۲ جواب متمایز داشته باشد، باید $b \neq c$ و $h_a < b,c$ باشد، لذا داریم:

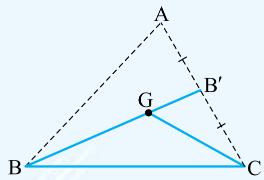
$$h_a < ۳ \ , \ h_a < ۱۰ \Rightarrow ۰ < h_a < ۳$$

که این بازه دارای ۲ مقدار صحیح است؛ یعنی $h_a = ۱$ یا $h_a = ۲$ می‌تواند باشد؛ پس ۲ درست است.

مثال مثلث ABC را با معلوم‌بودن اندازه‌های ضلع $BC = a$ و میانه‌های $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ رسم کنید.



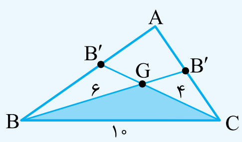
پاسخ ابتدا مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم (شکل مقابل). با توجه به این‌که میانه‌های مثلث یکدیگر را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کنند، در مثلث BGC داریم: $BG = \frac{۲}{۳}m_b$ ، $CG = \frac{۲}{۳}m_c$ و $BC = a$ ؛ بنابراین این مثلث با معلوم‌بودن اندازهٔ سه ضلعش قابل رسم است. حال به سراغ رسم مثلث ABC می‌رویم.



روش رسم: ابتدا مثلث BGC را با معلوم‌بودن سه ضلعش رسم می‌کنیم. میانهٔ BB' را نیز در امتداد BG می‌کشیم و از C به B' وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا رأس A مشخص شود. از A به B نیز وصل می‌کنیم، مثلث ABC تنها جواب مسئله است.

تست چند مثلث ABC با معلومات $BC = ۱۰$ ، $m_b = ۹$ و $m_c = ۶$ می‌توان ترسیم کرد؟

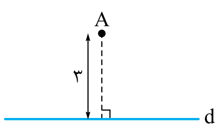
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار



پاسخ ۱ مطابق شکل داریم: $CG = \frac{۲}{۳}m_c = \frac{۲}{۳} \times ۶ = ۴$ ، $BG = \frac{۲}{۳}m_b = \frac{۲}{۳} \times ۹ = ۶$

پس اضلاع مثلث BGC ، ۴ ، ۶ و ۱۰ است در حالی که طبق نامساوی مثلثی این اتفاق غیرممکن است؛ زیرا: $۱۰ \not< ۶ + ۴$ و چون مثلث BGC با چنین اضلاعی وجود ندارد، لذا مثلث ABC نیز قابل رسم نیست؛ پس ۱ درست است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر با ۳ است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲- نقطهٔ A به فاصلهٔ $۴ - ۳x$ از خط d مفروض است. اگر فقط یک نقطه روی خط d وجود داشته باشد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ باشد، کدام گزینه در مورد x درست است؟

۱) $x = ۳$ ۲) $x > ۳$ ۳) $\frac{۴}{۳} < x < ۳$ ۴) $x < \frac{۴}{۳}$

۳- نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۷ باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴- از دو سر پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر، دو کمان به شعاع ۱۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. فاصلهٔ نقطهٔ M از پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۵- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $۱/۵$ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ $۳/۵$ باشد؟

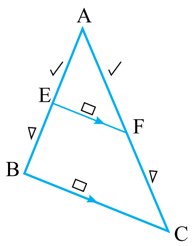
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۴x - ۸$ واحد از هم قرار دارند. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از هر کدام از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $x + ۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

درس ۲

قضیهٔ تالس



چند صد سال قبل از میلاد مسیح، یک آقایی به نام تالس، قضیهٔ مهمی را بیان کرد که هم در هندسه و هم در علوم دیگری مثل فیزیک، کلی کاربرد داشت.

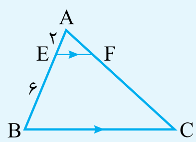
صورت کلی این قضیه در مثلث را بیان می‌کنیم:

در مثلث ABC اگر EF موازی BC باشد، داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

پس حواستان باشد که AE با AF، EB با FC، AB با AC و EF با BC متناسب‌اند، مثلاً اگر پرسیدند که $\frac{AE}{EB}$ چه می‌شود با خیال راحت می‌گویید: $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}$، فقط دقت کنید که EF وقتی وارد بازی می‌شود که $\frac{AE}{AB}$ یا $\frac{AF}{AC}$ را داشته باشیم که همان تعمیم قضیه به وجود بیاید!

مثال با توجه به شکل مقابل، نسبت‌های $\frac{AF}{FC}$، $\frac{FC}{AC}$ و $\frac{EF}{BC}$ را بیابید.

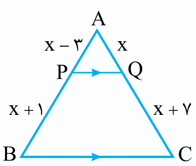


پاسخ دقت کن که $\boxed{AE \text{ و } AF}$، $\boxed{EB \text{ و } FC}$ و $\boxed{AB \text{ و } AC}$ متناسب‌اند، پس بنویسیم:

$$\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\quad,\quad \frac{FC}{AC}=\frac{EB}{AB}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}\quad,\quad \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

حضور دوتا خط موازی در یک شکل، باید ما را سریعاً یاد قضیهٔ تالس بیندازد و اگر خواستهٔ سؤال یک نسبت یا حاصل‌ضرب باشد، مثلاً $\frac{AE}{FE}$ و یا $AC.BD$، اولین حدسمان استفاده از قضیهٔ تالس است.

تست در شکل مقابل، اندازهٔ ضلع AB کدام است؟



۱) ۷
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

پاسخ (۲) خُب! توی شکل ۲ تا خط موازی می‌بینیم، پس برویم سراغ قضیهٔ مرحوم تالس:

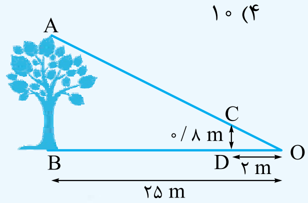
$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x-۳}{(x+۱)-(x-۳)}=\frac{x}{(x+۷)-x} \Rightarrow \frac{x-۳}{۴}=\frac{x}{۷}$$

$$\Rightarrow ۷x-۲۱=۴x \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=۷$$

ضلع AB هم که $۲x-۲$ است با معلوم‌شدن x داریم: $۲x-۲=۲(۷)-۲=۱۲$.

تست برای اندازه‌گیری ارتفاع یک درخت از تکه‌چوبی به طول $۸۰\ cm$ استفاده شده است، به گونه‌ای که سایهٔ درخت و تکه‌چوب در یک امتداد بوده و نوک سایه‌ها بر هم منطبق هستند. اگر سایهٔ درخت و تکه‌چوب به طور قائم به ترتیب ۲۵ و ۲ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

۱) ۸/۴
۲) ۹/۶
۳) ۱۲
۴) ۱۰

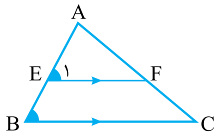


پاسخ (۴) درخت و تکه‌چوب هر دو بر سطح زمین عمود هستند و با هم موازی می‌باشند.

از آن‌جا که $CD \parallel AB$ است، با نوشتن تالس (جزء به کل) در مثلث AOB داریم:

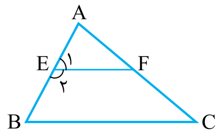
$$\frac{CD}{AB}=\frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{۰/۸}{AB}=\frac{۲}{۲۵} \Rightarrow AB=\frac{۲۵\times ۰/۸}{۲}=۱۰$$

در تست‌های این فصل حتماً خواهید دید که همیشه هم نمی‌آیند خیلی تابلو بگویند که این دو خط با هم موازی‌اند، در بسیاری از تست‌ها مانند شکل‌های زیر به صورت پنهانی این حرف را می‌زنند:



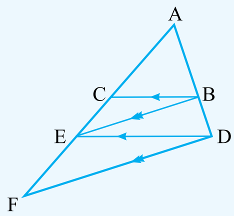
۱) می‌گویند که $\hat{E}_1 = \hat{B}$ است پس طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب معلوم می‌شود که $EF \parallel BC$ است.

۲) می‌گویند که $\hat{B}$ و $\hat{E}_2$ مکمل هم هستند. خُب یعنی $\hat{E}_1 = \hat{B}$ است و باز هم $EF \parallel BC$ می‌شود.



همیشه هم این‌جوری نیست که دوتا خط موازی ببینیم و یک تالس تابلو بنویسیم و به جواب برسیم، مثلاً در بعضی از مسائل ۲ جفت خط موازی داریم، پس باید ۲ بار قضیهٔ تالس را بنویسیم و سعی کنیم بین تناسب‌های ایجادشده یک ربطی بیابیم.
مثال زیر یک تمرین مهم کتاب درسی است که بارها سؤال کنکور بوده است، بیایید با هم حلش کنیم.

مثال **در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$. به کمک قضیهٔ تالس، ثابت کنید که AE واسطهٔ هندسی AF و AC است.**



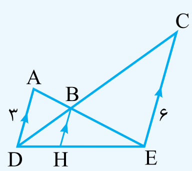
پاسخ اگر AE بخواهد واسطهٔ هندسی AF و AC باشد پس باید $AE^2 = AF \times AC$ شود. خُب! حکم مسئله به صورت حاصل‌ضرب است، اما ما می‌دانیم که هر تالس به ما یک تناسب می‌دهد که بعدش خودمان ضرب می‌کنیم و به چنین چیزی می‌رسیم. این حاصل‌ضرب‌ها را باید به تناسب تبدیل کنیم:

$$AE^2 = AF \times AC \Rightarrow AE \times AE = AF \times AC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AE}$$

خوب که نگاه کنید متوجه می‌شوید که با یک تالس، این تناسب ایجاد نمی‌شود، پس با توجه به این‌که ۲ جفت خط موازی داریم، ۲ تا قضیهٔ تالس را می‌نویسیم. البته در نوشتن تالس‌ها هم دقت کنید که می‌خواهیم $\frac{AE}{AF}$ و $\frac{AC}{AE}$ را داشته باشیم! به سراغ مثلث‌های ADE و ADF برویم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ADE} : BC \parallel DE \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \boxed{\dfrac{AB}{AD}} \\ \overset{\Delta}{ADF} : BE \parallel DF \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \boxed{\dfrac{AB}{AD}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC.AF$$

تست **در شکل مقابل، $AD \parallel BH \parallel CE$ است. اگر $AD = 3$ و $CE = 6$ باشد، اندازهٔ BH کدام است؟**



۱) $\frac{1}{2}$　　۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$　　۴) ۲

پاسخ ۴ سه‌تا خط موازی داریم ولی ۲ جفت خط موازی می‌توان از این ۳ تا جور کرد که ۲ تا قضیهٔ تالس بنویسیم، یکی برای AD و BH و یکی هم برای CE و BH:

$$\overset{\Delta}{ADE} : BH \parallel AD \Rightarrow \frac{BH}{AD} = \frac{EH}{ED} \Rightarrow \frac{BH}{3} = \frac{EH}{ED} \quad (1)$$

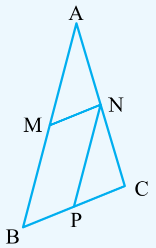
$$\overset{\Delta}{CDE} : BH \parallel CE \Rightarrow \frac{BH}{CE} = \frac{DH}{DE} \Rightarrow \frac{BH}{6} = \frac{DH}{DE} \quad (2)$$

به $\frac{EH}{ED}$ و $\frac{DH}{DE}$ دقت کنید! مخرج‌های یکسان ما را تشویق می‌کند که جمعشان کنیم: $\frac{EH}{ED} + \frac{DH}{DE} = \frac{EH + DH}{DE} = \frac{DE}{DE} = 1$

خیلی خوب شد، از شرِ ۲ تا نسبت خلاص شدیم و به عدد رسیدیم، پس طرفین تناسب‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

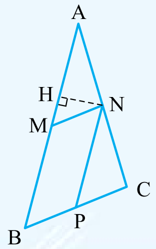
$$\frac{BH}{3} + \frac{BH}{6} = 1 \Rightarrow \frac{2BH + BH}{6} = 1 \Rightarrow \frac{3BH}{6} = 1 \Rightarrow BH = 2$$

تست در شکل مقابل، اگر مساحت مثلث AMN با مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB برابر باشد، نسبت $\frac{AN}{NC}$ برابر با کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ (۳) از نقطهٔ N عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{AMN}} = \frac{AM \times NH}{۲} \\ S_{MNPB} = BM \times NH \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{AMN}} = S_{MNPB}}$$

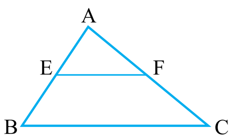
$$\frac{AM \times NH}{۲} = BM \times NH \Rightarrow \frac{AM}{۲} = BM \Rightarrow AM = ۲BM$$

با نوشتن تالس (جزء به جزء) در مثلث ABC داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{BM} = ۲$$

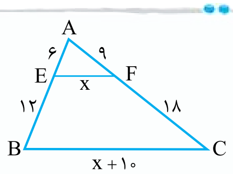
عکس قضیهٔ تالس

اگر خطی روی دو ضلع مثلثی، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

تست با توجه به شکل مقابل، اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟

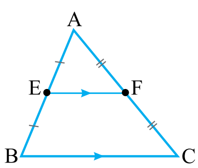


۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ (۲) با توجه به این‌که $\frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۱۸} = \frac{۶}{۱۲}$ است، پس $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$؛ یعنی EF روی دو ضلع AB و AC، ۴ پاره‌خط متناسب پدید آورده است که این کار فقط از دستِ یک خط موازی برمی‌آید، یعنی EF با BC موازی است، پس طبق خودِ قضیهٔ تالس داریم:

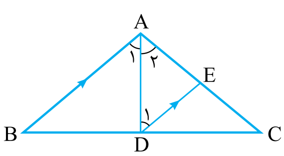
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۶}{۱۸} = \frac{x}{x+۱۰} \Rightarrow \frac{x}{x+۱۰} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳x = x+۱۰ \Rightarrow x = ۵$$

یک حالت خاص مهم: اگر وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل موازی ضلع سوم و نصف آن ضلع خواهد بود و اگر از وسط یک ضلع، موازی ضلعِ دیگر خطی بکشیم، این خط، ضلع سوم را در وسطش قطع می‌کند و باز هم پاره‌خط حاصل، نصف ضلعی است که با آن موازی بوده است.

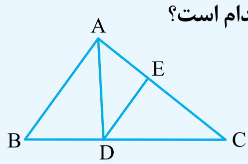


نیمساز وارد می‌شود!

نیمساز یک زاویه، دو زاویهٔ مساوی به وجود می‌آورد که تا وقتی این‌ها در کنار هم هستند به درد نمی‌خورند ولی وقتی یک خط موازی از پای نیمساز کشیده شود، داستان عوض می‌شود، مثلاً در شکل مقابل AD نیمساز است و DE موازی AB رسم شده است، در این صورت $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$ می‌شود و از قبل هم $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۲$ با هم برابر بوده‌اند پس $DE = AE$ می‌شود. یعنی حضور این خط موازی باعث می‌شود دو زاویهٔ برابر $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ در جای دیگری از مسئله دو ضلع مساوی به وجود بیاورند. از این ویژگی در سؤال‌های تالس و تشابه خیلی استفاده می‌شود که در همین فصل از کاربردهایش بیشتر خواهیم گفت.



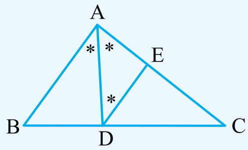
تست در شکل زیر $AB = ۲۱$ و $AC = ۲۸$ است. اگر AD نیمساز زاویهٔ A و $DE \parallel AB$ باشد، طول CE کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶
۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ ۲ قضیهٔ خطوط موازی و مورب به ما می‌گوید:

$DE \parallel AB$ و AD مورب $\Rightarrow A\hat{D}E = B\hat{A}D$



از طرفی می‌دانیم $D\hat{A}E = B\hat{A}D$، لذا نتیجه می‌گیریم:

$$D\hat{A}E = A\hat{D}E \Rightarrow AE = DE \qquad (۱)$$

حال با استفاده از قضیهٔ تالس (جزء به کل) در مثلث ACB داریم:

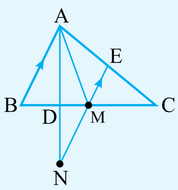
$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{۲۱} = \frac{CE}{۲۸} \Rightarrow DE = \frac{۳}{۴}CE \qquad (۲)$$

از طرفی بنا بر فرض مسئله داریم:

$$AC = ۲۸ \Rightarrow AE + CE = ۲۸ \xrightarrow{(۱)} DE + CE = ۲۸$$

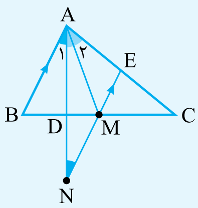
$$\xrightarrow{(۲)} \frac{۳}{۴}CE + CE = ۲۸ \Rightarrow \frac{۷}{۴}CE = ۲۸ \Rightarrow CE = ۱۶$$

تست **در شکل مقابل، AM میانه و AD نیمساز زاویهٔ A است. اگر $۴AB = ۳BC = ۲AC = ۱۲$ و $AB \parallel ME$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط ME کدام است؟**



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

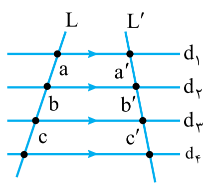
پاسخ ۲ نیمساز را که با خط موازی می‌بینید باید یادِ حرف‌های همین الان *بیفتید!* که گفتم $\hat{N} = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و در نتیجه مثلث AEN متساوی‌الساقین است و $EA = EN$ خواهد بود.



چون خط موازی از M وسط ضلع BC کشیده شده است پس E وسط ضلع AC است و ME هم نصف AB. خُب!
اگر E وسط AC است پس AE نصف AC است یعنی EN هم‌اندازهٔ نصف AC می‌شود، جالب شد! چون $MN = EN - EM$ است، که می‌شود: $MN = EN - EM = \frac{AC}{۲} - \frac{AB}{۲} = \frac{۶-۳}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$

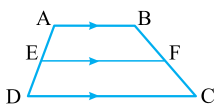
$AB = ۳$ و $BC = ۴$ و $AC = ۶$ بود!

حالت کلی قضیهٔ تالس: اگر چندتا خط موازی داشته باشیم و ۲ تا خط بیایند و این‌ها را قطع کنند، خط‌های موازی با دقت کامل روی این خط‌ها قطعات متناسب ایجاد می‌کنند، شکل را ببینید:



$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

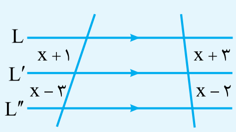
حالت کلی قضیهٔ تالس خیلی به کارمان نمی‌آید، اما یک حالت خاص آن که در ذوزنقه رخ می‌دهد، در تست‌ها کلی استفاده می‌شود. مثلاً ذوزنقهٔ ABCD را مانند شکل مقابل می‌کشند و می‌گویند EF با قاعده‌ها موازی است، یعنی سه‌تا خط موازی داریم که AD و BC آن‌ها را قطع کرده‌اند، پس می‌توانیم بگوییم:



$$AB \parallel EF \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{BF} = \frac{ED}{FC} \xrightarrow[\text{بنویسیم}]{\text{بهتر است}} \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

که البته عکس این موضوع هم درست است، یعنی اگر $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ باشد، EF با AB موازی است!

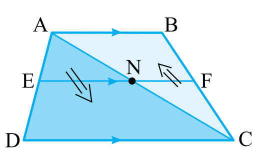
مثال **در شکل مقابل، x را بیابید.**



پاسخ با این همه توضیحی که خوانده‌اید، فقط بنویسیم که:

$$\frac{x+۱}{x-۳} = \frac{x+۳}{x-۲} \Rightarrow (x+۱)(x-۲) = (x+۳)(x-۳) \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = x^۲ - ۹ \Rightarrow -x-۲ = -۹ \Rightarrow x = ۷$$

در مسائل تالس در ذوزنقه یادتان باشد که با رسم قطر ذوزنقه دوتا مثلث ایجاد می‌شود و مسئله به تالس در مثلث تبدیل می‌شود که برای ما راحت‌تر است و زبانش را بهتر می‌دانیم:

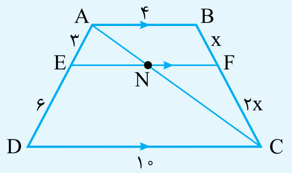


۱ $\overset{\Delta}{ADC} : EN \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \cdots$

۲ $\overset{\Delta}{ABC} : FN \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \cdots$

تست در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel CD)$، نقاط E و F بر روی ساق‌های AD و BC طوری قرار دارند که $EF \parallel AB$، $AE = ۳$ و $ED = ۶$. اگر $AB = ۴$ و $CD = ۱۰$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟

۱) ۶ ‏ ‏ ۲) ۵/۵ ‏ ‏ ۳) ۵ ‏ ‏ ۴) ۶/۵



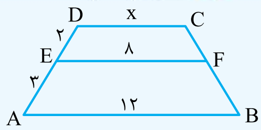
پاسخ ① با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} = \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ برقرار است پس اگر BF را x بنامیم، FC برابر $۲x$ است.

قرار شد که در مسائل ذوزنقه سریعاً قطر را بکشید! و قضیهٔ تالس‌ها را بنویسیم، *بسم الله*، این شما و این هم قضیهٔ تالس: $\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۹} = \frac{EN}{۱۰} \Rightarrow EN = \frac{۱۰}{۳}$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{CF}{CB} = \frac{FN}{AB} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x} = \frac{FN}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{FN}{۴} \Rightarrow FN = \frac{۸}{۳}$$

و در آخر از جمع‌کردن اندازه‌های EN و FN، اندازهٔ EF به دست می‌آید: $EF = \frac{۱۰}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱۸}{۳} = ۶$.

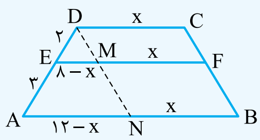
تست در شکل مقابل اگر $EF \parallel CD \parallel AB$ باشد، طول DC کدام است؟



۱) ۵ ‏ ‏ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$

۳) ۶ ‏ ‏ ۴) $\frac{۲۲}{۳}$

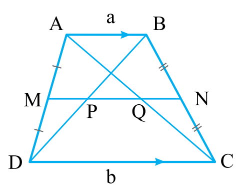
پاسخ ② از D به موازات CB رسم می‌کنیم.



$DCBN$ متوازی‌الاضلاع است و $DC = MF = NB = x$. در مثلث ADN، $EM \parallel AN$ است، با نوشتن تالس (از نوع جزء به کل) داریم: $\frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AN}$

بنابراین: $\frac{۲}{۵} = \frac{۸ - x}{۱۲ - x} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳}$

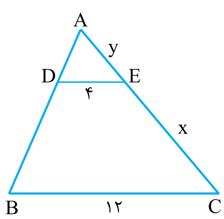
اگر نقاط M و N وسط‌های ساق‌های ذوزنقهٔ $ABCD$ باشند، داریم:



① $MN \parallel AB \parallel DC$ ‏ ‏ ② $MN = \frac{a + b}{۲}$ ‏ ‏ ③ $PQ = \frac{b - a}{۲}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

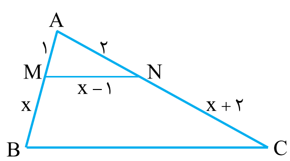
۲۲- در شکل مقابل اگر $DE \parallel BC$ و $AC = ۱۵$ باشند، $x - y$ کدام است؟



۱) ۵ ‏ ‏ ۲) ۸

۳) ۴ ‏ ‏ ۴) ۶

۲۳- در شکل مقابل اگر $MN \parallel BC$ باشد، طول BC کدام است؟



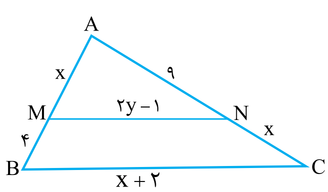
۱) ۳

۲) ۲

۳) ۶

۴) ۴

۲۴- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) ۶ و ۲/۹

۲) ۶ و $\frac{۱۳}{۲}$

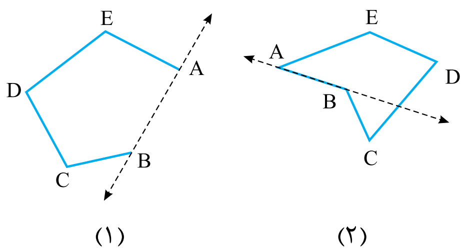
۳) ۲/۹ و ۶

۴) $\frac{۱۳}{۲}$ و ۶

فصل ۳ چندضلعی‌ها

درس ۱

چندضلعی‌ها



چندضلعی یا همان n ضلعی که تعریف نمی‌خواهد! همه بلدند، فقط یک تعریف جدید داریم.
به شکل‌های مقابل نگاه کنید. در هر دو شکل ضلع AB را ادامه می‌دهیم:
در شکل (۱) کل چندضلعی در یک طرف خط AB قرار گرفت ولی در شکل (۲) خط AB، چندضلعی را به دو قسمت تقسیم کرد که در طرفین این خط قرار گرفتند. به شکل (۱)، n ضلعی محدب و به شکل (۲)، n ضلعی مقعر گفته می‌شود.

بجز شرطی که در تعریف گفتیم، چندضلعی با داشتن هر کدام از شرایط زیر محدب است و اگر هر کدام از بین برود، مقعر می‌شود:

۱) هر یک از زوایای داخلی چندضلعی کم‌تر از 180° باشد.

۲) همهٔ قطرهای چندضلعی در داخل چندضلعی قرار بگیرند.

در چندضلعی‌ها، ۳ تا قضیهٔ مهم داریم:

۱) از هر رأس n ضلعی (چه محدب چه مقعر)، $n-3$ قطر عبور می‌کند و در نتیجه هر n ضلعی دارای $\frac{n(n-3)}{2}$ تا قطر است.

۲) مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی (چه محدب چه مقعر)، $(n-2)180^\circ$ است.

۳) مجموع زوایای خارجی n ضلعی محدب، 360° است.

تست **در یک n ضلعی محدب، از هر رأس $2n-9$ قطر عبور می‌کند. تعداد قطرهای این n ضلعی محدب کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ ۲ در شرایط عادی از هر رأس n ضلعی، $n-3$ قطر عبور می‌کند. خُب چه شده که این‌جا $2n-9$ تا عبور کرده؟ معلومه دیگه! یعنی $2n-9$ باید با $n-3$ برابر باشد، پس داریم:

$$2n-9=n-3 \Rightarrow n=6$$

پس تعداد کل قطرها برابر خواهد بود با:

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{6(6-3)}{2}=9$$

اگر به تعداد رأس‌های یک n ضلعی، یک واحد اضافه شود، به تعداد قطرهای آن $n-1$ قطر اضافه خواهد شد.

تست **اگر به رأس‌های یک n ضلعی، یک رأس دیگر بیفزاییم، تعداد قطرهایش ۲۱ تا بیشتر می‌شود. مجموع زوایای داخلی این n ضلعی کدام است؟**

۱) 360° ۲) 3600° ۳) 3780° ۴) 3420°

پاسخ ۲ اگر به رأس‌های n ضلعی، یک رأس دیگر بیفزاییم، $(n+1)$ ضلعی حاصل، $n-1$ قطر بیشتر دارد، پس $n-1=21$ بوده است و $n=22$ می‌شود، پس مجموع زوایای داخلی‌اش می‌شود:

$$(n-2)\times180^\circ=(22-2)\times180^\circ=20\times180^\circ=3600^\circ$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- ناحیهٔ محدود به یک چندضلعی در کدام حالت ممکن است مجموعهٔ محدب نباشد؟

۱) هر زاویهٔ داخلی کم‌تر از نیم‌صفحه است.

۲) برخی از قطرها درون چندضلعی قرار دارند.

۳) تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، عضو آن مجموعه باشد.

۴) سایر رئوس در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع منطبق است.

۲- در کدام حالت چهارضلعی مقعر است؟

۱) مجموع سه زاویه کم‌تر از زاویهٔ چهارم باشد. ۲) میانگین سه زاویهٔ داخلی برابر با 60° باشد.

۳) میانگین دو زاویهٔ داخلی کم‌تر از 90° باشد. ۴) تفاضل دو زاویه کم‌تر از مجموع دوتای دیگر باشد.

۳- در کدام چندضلعی، تعداد قطرها با تعداد ضلع‌ها برابر است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) پنج‌ضلعی ۲) شش‌ضلعی ۳) هفت‌ضلعی ۴) نه‌ضلعی

۴- از یکی از رئوس یک n ضلعی محدب ۹ قطر می‌گذرد. این ۹ قطر، n ضلعی را به چند مثلث تقسیم می‌کنند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۵- تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ واحد بیشتر است. تعداد قطرها کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

۶- مجموع تعداد اضلاع و اقطار یک چندضلعی محدب برابر ۲۱ است. تعداد پاره‌خط‌های گذرنده از هر رأس این چندضلعی کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷- اگر یک ضلع به یک ۱۰۰ ضلعی محدب اضافه کنیم تا ۱۰۱ ضلعی شود، به قطرهای آن چه تعداد اضافه می‌شود؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۱

۸- با اضافه‌کردن یک رأس به یک n ضلعی محدب، ۲۰ قطر به تعداد قطرهای آن اضافه می‌شود. n کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۴۲ ۴) ۳۸

۹- در یک ۵۰ ضلعی محدب، تعداد قطرها برابر با $۵۰ - ۲a$ است. تعداد قطرهای یک ۵۲ ضلعی محدب کدام است؟

۱) $a + ۱۰۴$ ۲) $۲a + ۵۱$ ۳) $۲a + ۵۰$ ۴) $۲a + ۴۹$

۱۰- در صدضلعی محدب، تعداد قطرهایی که از دو رأس غیرمجاور می‌گذرند، چندتا است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۳ ۴) ۱۹۴

۱۱- از سه رأس مجاور در یک ۲۰ ضلعی محدب، چند قطر می‌گذرد؟

۱) ۶۰ ۲) ۵۹ ۳) ۵۱ ۴) ۵۰

۱۲- در یک n ضلعی محدب، از هر رأس $۴n - ۲۴$ قطر می‌گذرد. تعداد قطرهای گذرنده از سه رأس مجاور آن کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۳- اگر مجموع قطرهای گذرا از سه رأس غیرمجاور در یک n ضلعی محدب برابر ۲۴ باشد، تعداد کل قطرهای n ضلعی کدام است؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۷۷ ۳) ۶۵ ۴) ۵۴

۱۴- اندازهٔ یکی از زوایای n ضلعی منتظم محدب ۱۵۰° است. n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۸ ۴) ۵

۱۵- اگر مجموع زاویه‌های داخلی یک $(n+k)$ ضلعی، ۱۴۴۰ درجه بیشتر از مجموع زاویه‌های داخلی یک $(n-k)$ ضلعی باشد، آن‌گاه مقدار k کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶- اگر مجموع زوایای داخلی یک ۲۰۰ ضلعی منتظم، A و مجموع زوایای داخلی یک ۲۰۰ ضلعی محدب که در آن هیچ دو زاویه‌ای با هم برابر نیستند، B باشد، کدام صحیح است؟

۱) $A = B$ ۲) $A > B$ ۳) $A < B$ ۴) $A < B$ یا $A > B$

۱۷- تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب ۲۰ است. مجموع زاویه‌های داخلی این چندضلعی چند درجه است؟

۱) ۱۶۲۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) ۱۰۸۰ ۴) ۹۰۰

۱۸- یک ۱۰ ضلعی محدب حداکثر چند زاویهٔ داخلی ۱۶۵° می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۱۹- در یک n ضلعی محدب، مجموع همهٔ زاویه‌های داخلی به‌جز یکی از آن‌ها، برابر با ۱۸۵۰ درجه است. n کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲

۲۰- در یک پنج‌ضلعی محدب، مجموع زاویه‌های خارجی آن چند درجه است؟

۱) ۲۷۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۴۰

۲۱- تعداد قطرهای گذرنده از دو رأس مجاور یک n ضلعی برابر با ۳۸ است. مجموع زاویه‌های خارجی این n ضلعی کدام است؟

۱) ۳۶۰۰° ۲) ۳۶۰° ۳) ۴۰۰° ۴) ۴۰۰۰°

۲۲- در یک چندضلعی منتظم، هر زاویهٔ داخلی، یازده برابر زاویهٔ خارجی آن است. تعداد قطرهای این چندضلعی کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۱۶۵ ۳) ۱۷۰ ۴) ۲۵۲

۲۳- اگر اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم برابر α و اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی m ضلعی منتظم برابر β باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\alpha=\beta$ ۲) $\alpha\neq\beta$ ۳) $\alpha=\frac{m}{n}\beta$ ۴) $\alpha=\frac{n}{m}\beta$

۲۴- اگر مجموع زاویه‌های خارجی یک n ضلعی محدب را با A_n و تعداد قطرهای آن را با D_n نمایش دهیم، کدام گزینه درست است؟

۱) $D_{۲۰۰}>D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰}>A_{۱۹۹}$ ۲) $D_{۲۰۰}<D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰}<A_{۱۹۹}$

۳) $D_{۲۰۰}<D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰}=A_{۱۹۹}$ ۴) $D_{۲۰۰}>D_{۱۹۹}\ ,\ A_{۲۰۰}=A_{۱۹۹}$

۲۵- یک ۹ ضلعی محدب، حداکثر چند زاویهٔ حادهٔ داخلی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۶- n ضلعی محدبی سه زاویهٔ ۶۰° دارد، آن‌گاه:

۱) n حتماً فرد است. ۲) n ضلعی منتظم است. ۳) n دقیقاً قابل تعیین است. ۴) همهٔ موارد

۲۷- تعداد اضلاع یک چندضلعی منتظم، $(۲m+۱)$ ضلع است. در این صورت این چندضلعی ....

۱) $(۲m+۱)$ محور تقارن دارد و مرکز تقارن ندارد. ۲) $۲m$ محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد.

۳) $(۲m+۱)$ محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد. ۴) محور تقارن ندارد ولی یک مرکز تقارن دارد.

۲۸- اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر یک پنج‌ضلعی منتظم که از یک رأس آن می‌گذرند کدام است؟

۱) ۲۴° ۲) ۳۶° ۳) ۳۰° ۴) ۴۵°

۲۹- یک n ضلعی منتظم دارای ۹۰ قطر است. کوچک‌ترین زاویهٔ بین یک ضلع و یک قطر این n ضلعی، چند درجه از زاویهٔ بین دو قطر متوالی بیشتر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) صفر

سری [Z]

۳۰- در یک ۷ ضلعی محدب، هیچ سه قطری همرس نیستند. تعداد نقاط برخورد قطرهای ۷ ضلعی کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۳ ۳) ۳۸ ۴) ۳۶

۳۱- از هر ۴ رأس متوالی در یک ده‌ضلعی محدب، در مجموع چند قطر متمایز می‌گذرد؟

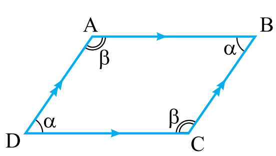
۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

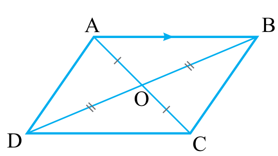
۳۲- در یک n ضلعی محدب، کوچک‌ترین زاویه ۱۲۰° و بزرگ‌ترین زاویه ۱۶۰° است. اگر زاویه‌های داخلی این n ضلعی تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۹

درس ۲
متوازی‌الاضلاع‌ها

متوازی‌الاضلاع (پدر خانواده)





می‌دانیم که متوازی‌الاضلاع (همان‌طور که از اسمش مشخص است)، چهارضلعی‌ای است که هر دو ضلع مقابل آن موازی‌اند. متوازی‌الاضلاع ۴ تا ویژگی مهم دارد:

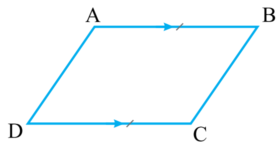
۱) اضلاع مقابلش با هم مساوی‌اند؛ یعنی $AB=DC$ و $AD=BC$.

۲) زوایای مقابلش با هم مساوی‌اند؛ یعنی $\hat{A}=\hat{C}=\beta$ و $\hat{B}=\hat{D}=\alpha$.

۳) زوایای مجاورش مکمل‌اند؛ یعنی $\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$ و به عبارتی $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$ است.

۴) قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

و عکس این‌ها هم برقرار است، یعنی:



۱ اگر در چهارضلعی $ABCD$، هر دو ضلع مقابل مساوی باشند $\Leftarrow$ $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

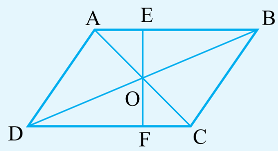
۲ اگر در چهارضلعی $ABCD$، هر دو زاویهٔ مقابل مساوی باشند $\Leftarrow$ $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

۳ اگر در چهارضلعی $ABCD$، زوایای مجاور مکمل باشند $\Leftarrow$ $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

۴ در چهارضلعی $ABCD$، اگر قطرها یکدیگر را نصف کنند $\Leftarrow$ $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

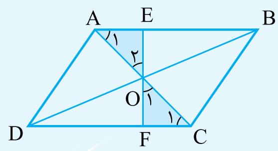
اگر دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی، با هم مساوی و موازی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال **در شکل مقابل، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید $OE = OF$.**



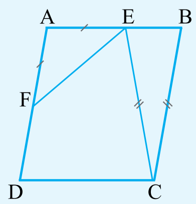
پاسخ چون $AB \parallel CD$ است پس $\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ می‌شود و چون در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس $AO = OC$ است.

در نتیجه در مثلث‌های AEO و OFC داریم:



$$\begin{cases} AO = OC \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \quad (\text{متقابل به رأس}) \\ \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{زض}]{\text{بنا بر حالت}} \overset{\Delta}{AOE} \cong \overset{\Delta}{OFC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} OE = OF$$

تست **در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. اگر $AE = AF$، $CE = BC$ و $F\hat{E}C = ۶۰^\circ$ باشد، بزرگ‌ترین زاویهٔ متوازی‌الاضلاع چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌اش است؟**



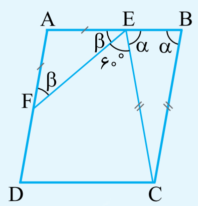
۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۷}$

۴) ۲

پاسخ ۲ زوایا را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم، زاویهٔ A مکمل زاویهٔ B است، پس $\hat{A} = ۱۸۰^\circ - \alpha$ خواهد بود، حالا برای β و α، ۲ تا معادله داریم:



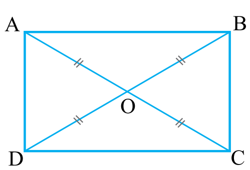
۱ در نقطهٔ $E: \alpha + \beta + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۲۰^\circ$

۲ در مثلث $AFE: \hat{A} + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow (۱۸۰^\circ - \alpha) + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲\beta$

در نتیجه داریم: $\beta + (۲\beta) = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \beta = ۴۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۸۰^\circ$

پس زوایای متوازی‌الاضلاع ۸۰° و ۱۰۰° هستند، که نسبتشان برابر است با: $\frac{۱۰۰}{۸۰} = \frac{۵}{۴}$.

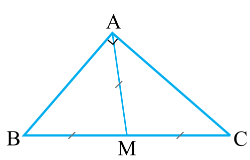
مستطیل



مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که هر چهار زاویه‌اش قائمه‌اند و علاوه بر ۴ ویژگی موجود در متوازی‌الاضلاع، یک ویژگی دیگر هم دارد:

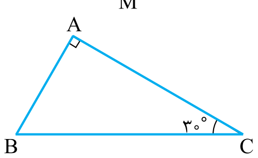
«قطرهای مستطیل با هم برابرند» و در نتیجه $OA = OB = OC = OD$ است. عکس این موضوع هم درست است. یعنی:

اگر در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ قطرها با هم برابر باشند، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است.

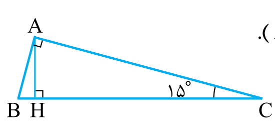


با استفاده از ویژگی‌های مستطیل می‌توان ثابت کرد که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. یعنی در شکل زیر میانهٔ AM نصف وترِ BC است و یا به عبارتی $AM = BM = MC$.

نتایج حاصل از این نکته هم بسیار مهم‌اند، نگاه کنید:



۱ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است ($AB = \frac{BC}{۲}$).



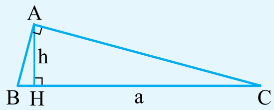
۲ اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، یک زاویهٔ ۱۵° داشته باشیم، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر می‌شود ($AH = \frac{۱}{۴}BC$).

عکس این نکته و نتایجش نیز برقرارند.

تست مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث، چند درجه است؟ *(خارج تجربی ۹۳)*

۱) ۱۵ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۳۰

پاسخ (۱) اگر اندازهٔ ارتفاع AH را h و اندازهٔ وتر BC را a در نظر بگیریم، سؤال می‌گوید که مساحت مثلث برابر با $\frac{a^۲}{۸}$ است، حالا فرمول مساحت را بنویسیم و ببینیم که چه می‌شود:



$$S=\frac{۱}{۲}h.a=\frac{a^۲}{۸}\Rightarrow h=\frac{a}{۴}$$

پس ارتفاع وارد بر وتر شده $\frac{۱}{۴}$ وتر، در نتیجه یک زاویهٔ ۱۵° داشته‌ایم.

لوزی

چهارضلعی‌ای که هر چهارضلعش با هم برابر باشند، لوزی است. لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است. در واقع لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاورش با هم برابرند، پس لوزی هم ۴ ویژگی متوازی‌الاضلاع را دارد و هم یک چیزهایی بیشتر! ویژگی‌های بیشتر این‌ها هستند:

(۱) قطرهای لوزی نیمساز زاویه‌های آن هستند.

(۲) قطرهای لوزی بر یکدیگر عمودند. (در واقع چون از قبل می‌دانستیم یکدیگر را نصف می‌کنند، عمودمنصف هم هستند.)

عکس این‌ها هم درست است؛ یعنی:

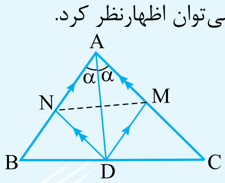
(۱) اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطری نیمساز یک زاویه باشد، ABCD لوزی است.

(۲) اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطرها بر هم عمود باشند، ABCD لوزی است.

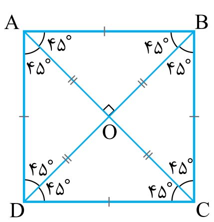
تست در مثلث ABC از نقطهٔ D، محل تلاقی نیمساز داخلی زاویهٔ A با ضلع BC، خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا اضلاع را در M و N قطع کنند. AD و MN نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) فقط بر هم عمود ۲) فقط منصف هم ۳) عمودمنصف هم ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ (۳) چهارضلعی AMDN متوازی‌الاضلاع است. قطر AD هم که از قبل نیمساز زاویهٔ A بوده است، پس با متوازی‌الاضلاعی روبه‌رو هستیم که قطرش نیمساز زاویه‌اش شده، پس در واقع چهارضلعی لوزی است، در لوزی هم که قطرها عمودمنصف یکدیگرند.



مربع هم لوزی است هم مستطیل، پس تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع و لوزی و مستطیل را دارد.

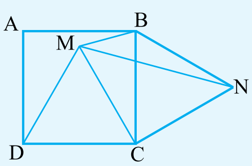


رابطهٔ این چهارضلعی‌ها این‌جوری است:

متوازی‌الاضلاع: (۴ تا ویژگی)
- (۱) نه لوزی نه مستطیل (۴ تا ویژگی)
- (۲) مستطیل (۱+۴ ویژگی)
- (۳) لوزی (۲+۴ ویژگی)

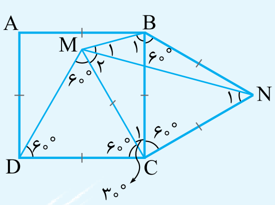
مستطیل و لوزی $\xrightarrow{\text{این دوتا با هم}}$ مربع (تمام ویژگی‌ها)

تست در شکل مقابل ABCD مربع و دو مثلث MDC و NBC متساوی‌الاضلاع هستند. زاویهٔ BMN چند درجه است؟



۱) ۱۵ ۲) ۲۲/۵
۳) ۳۰ ۴) ۴۵

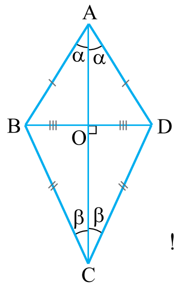
پاسخ (۳) تمام اضلاع مربع و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با هم برابرند. پس مثلث CBM متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأسش یعنی $\widehat{C}_۱$ برابر است با $۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ$، پس $\widehat{B}_۱=\widehat{M}_۱+\widehat{M}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$.



حالا دقت کنید که ما $\widehat{M}_۱$ را می‌خواهیم ولی مجموع $\widehat{M}_۲$ و $\widehat{M}_۱$ را داریم، پس به سراغ مثلث متساوی‌الساقین CMN می‌رویم که زاویهٔ رأسش ۹۰° است، پس $\widehat{M}_۲=\widehat{N}_۱=۴۵^\circ$ است و داریم:

$$\widehat{M}_۱+\widehat{M}_۲=۷۵^\circ\Rightarrow\widehat{M}_۱+۴۵^\circ=۷۵^\circ\Rightarrow\widehat{M}_۱=۳۰^\circ$$

شبه‌لوزی (کایت)



به شکل روبه‌رو نگاه کنید! $AB = AD$ و $CB = CD$ است، این شکل که شبیه لوزی است، ۳ ویژگی شبیه لوزی دارد:

۱) قطرها بر هم عمودند.

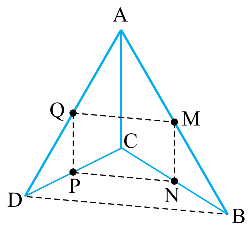
۲) زاویه‌های بین دو ضلع مساوی توسط قطرشان نصف می‌شوند.

۳) قطری که نیمساز است، قطر دیگر را نصف می‌کند.

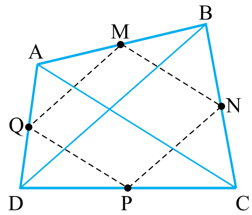
اگر فصل یک را خوب خوانده باشید، سریعاً می‌گویید که AC عمودمنصف BD است زیرا $AB = AD$ و $CB = CD$!

پاره‌خط‌های میانگین در چهارضلعی‌ها

دوتا چهارضلعی رسم کنید که یکی محدب باشد و یکی نباشد و وسط‌های اضلاعش را متوالیاً به هم وصل کنید، این‌جوری:



مقعر



محدب

در هر دو شکل، چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است (اگر اهل کلاس‌گذاشتن هستید، بدانید که اسمش متوازی‌الاضلاعِ وارینیون است!) به این دلیل که در آن‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}:\begin{cases}M \ \text{وسط}\ AB\\ N\ \text{وسط}\ BC\end{cases} \Rightarrow MN \overset{\parallel}{=} \dfrac{AC}{۲}\\[2ex] \overset{\Delta}{ADC}:\begin{cases}Q\ \text{وسط}\ AD\\ P\ \text{وسط}\ DC\end{cases} \Rightarrow PQ \overset{\parallel}{=} \dfrac{AC}{۲}\end{array}\right\} MN \overset{\parallel}{=} PQ$$

یعنی اضلاع مقابلش مساوی و موازی‌اند و دقت کنید که:

«اضلاع متوازی‌الاضلاع حاصل، موازی و نصف قطرهای چهارضلعی اولیه‌اند.»

خُب! این موضوع نشان می‌دهد که:

۱) اگر قطرهای چهارضلعی $ABCD$ مساوی باشند $\Leftarrow$ $MNPQ$ لوزی است.

۲) اگر قطرهای چهارضلعی $ABCD$ عمود بر هم باشند $\Leftarrow$ $MNPQ$ مستطیل است.

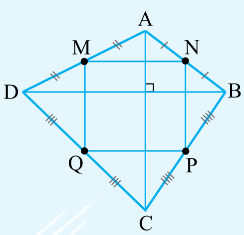
۳) اگر قطرهای چهارضلعی $ABCD$ عمود بر هم و مساوی هم باشند $\Leftarrow$ $MNPQ$ مربع است.

محیط متوازی‌الاضلاع حاصل برابر است با مجموع قطرهای چهارضلعی اولیه. (چرا؟)

مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل، همواره نصف مساحت چهارضلعی اولیه است. (چراشو هم بعدن می‌فهمید!)

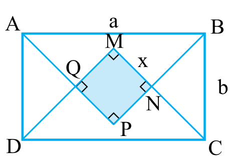
تست **از به هم وصل‌کردن وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی، مربع ایجاد شده است. این چهارضلعی لزوماً ....**

۱) محدب است.
۲) مربع است.
۳) دارای قطرهای مساوی و عمود بر هم است.
۴) هر سه گزینه



پاسخ ۳ برای مربع‌شدن متوازی‌الاضلاع حاصل، باید قطرهای چهارضلعی اولیه مساوی و عمود بر هم باشند ولی ممکن است که برخی از دانش‌آموزان فکر کنند که تنها چهارضلعی‌ای که دارای قطرهای مساوی و عمود بر هم است، مربع است. اما این حدس غلط است! چهارضلعی روبه‌رو را نگاه کنید، قطرهایش با هم مساوی‌اند و عمود بر هم هستند ولی مربع نیست. شکل حاصل از اتصال وسط‌های ضلع‌هایش هم واضح است که مربع است!

بررسی یک تمرین مهم کتاب درسی

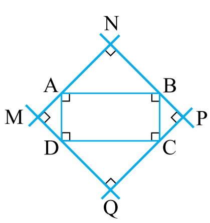


اگر نیمسازهای داخلی یک مستطیل را رسم کنید، یک مربع به وجود می‌آید که اندازهٔ ضلع مربع برابر است با:

$$x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\text{طول} - \text{عرض}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)$$

پس نسبت مساحت‌هایشان هم می‌شود:

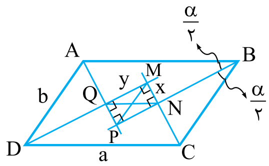
$$\frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)\right)^۲}{ab} = \frac{(a-b)^۲}{۲ab}$$



حالا اگر نیمسازهای خارجی زوایای یک مستطیل را رسم کنیم، مربعی به ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$ به وجود می‌آید، این شکل:

به عنوان یک حالت کلی‌تر هم می‌توان گفت که از برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل به وجود می‌آید که اگر زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع را α در نظر بگیریم، طول و عرض مستطیل حاصل می‌شود:

$$\frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}}=\frac{(a-b)^۲}{۲ab}\quad,\quad\begin{cases}x=(a-b)\sin\frac{\alpha}{۲}\\ y=(a-b)\cos\frac{\alpha}{۲}\end{cases}$$



و اگر این را هم بدانید که قطرهای مستطیل MNPQ موازی ضلع‌های ABCD اند، خیلی بیشتر از کتاب درسی بلدید!

تست **در مستطیلی به اندازهٔ اضلاع ۴ و ۹ واحد، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟** *(خارج ریاضی ۹۰)*

۱) ۱۲/۵ ۲) ۱۳/۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

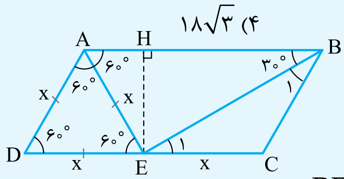
پاسخ (۱) ضلع مربع حاصل برابر با $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=(۹-۴)\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، پس مساحتش می‌شود:

$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{۲۵\times۲}{۴}=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$$

تست **در یک متوازی‌الاضلاع با زاویهٔ ۶۰ درجه، نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور ضلع بزرگ، روی ضلع دیگر آن متقاطع‌اند. اگر محیط این متوازی‌الاضلاع $۱۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟** *(سراسری تجربی ۹۷)*

۱) $۹\sqrt{۳}$ ۲) ۱۸ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$

پاسخ (۳) مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است، پس:



$$AD=AE=DE=x$$

در مثلث BHE، $\hat{E}=۶۰^\circ$ است، یعنی $\hat{E}_۱=۳۰^\circ$ است. BE نیمساز زاویهٔ B است، در مثلث BEC داریم:

$$\hat{E}_۱=\hat{B}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow BC=CE=x$$

(**دقت کنید!** $AD=x$ بود. چون ABCD متوازی‌الاضلاع است، داریم: $AD=BC=x$)

محیط متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با:

$$۲(x+۲x)=۶x=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲\sqrt{۳}$$

در مثلث AHE، EH مقابل به زاویهٔ ۶۰° و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

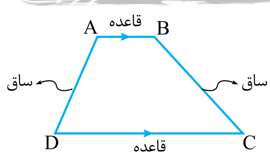
$$EH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۲\sqrt{۳}=۳$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر می‌شود با:

$$S=EH\times DC=۳\times۴\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}$$

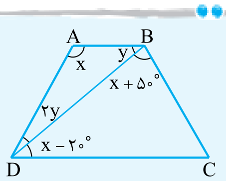
ذوزنقه

ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی‌اند. به ضلع‌های موازی، قاعده و به دوتای دیگر ساق گفته می‌شود.



ویژگی مهم موجود در ذوزنقه این است که $AB \parallel DC$ است، پس داریم: $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

تست **در ذوزنقهٔ ABCD شکل مقابل، $AB \parallel DC$ است. زاویهٔ C کدام است؟**



۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۶۰°

پاسخ (۱) خُب گفتیم که تنها ویژگی به‌دردبخور ذوزنقه این است که:

$$\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\Rightarrow x+(۲y+x-۲۰^\circ)=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲x+۲y=۲۰۰^\circ\Rightarrow x+y=۱۰۰^\circ$$

از طرفی در مثلث ABD، مجموع زوایای داخلی ۱۸۰° است، پس می‌توان گفت که:

$$\underbrace{(x+y)}_{۱۰۰^\circ}+۲y=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲y=۸۰^\circ\Rightarrow y=۴۰^\circ\Rightarrow x=۱۰۰^\circ-۴۰^\circ=۶۰^\circ$$

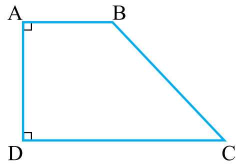
حالا برای به دست آوردن زاویهٔ C، اندازهٔ مکملش یعنی $\hat{B}$ را می‌یابیم:

$$\hat{B}=\underbrace{y+x}_{۱۰۰^\circ}+۵۰^\circ=۱۵۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{B}=۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=۳۰^\circ$$

راحت‌تر هم می‌توانستیم زاویهٔ C را به دست آوریم:

$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\underbrace{y+x}_{۱۰۰^\circ}+۵۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow۱۵۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۳۰^\circ$$

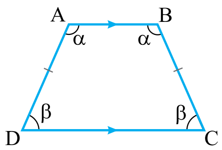
در بین ذوزنقه‌ها، ۲ مدل از بقیه معروف‌تر و برای طراحان تست محبوب‌تر هستند، نگاه کنید:



۱ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، که در آن یکی از ساق‌ها به قاعده‌ها عمود است.

با توجه به شکل به AD ساق قائم گفته می‌شود، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه هیچ ویژگی خاصی ندارد.

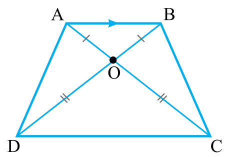
فقط باید با اسم و شکلش آشنا باشیم.



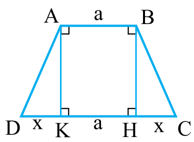
۲ اگر در ذوزنقهٔ $ABCD$ ساق‌ها با هم برابر باشند، به ذوزنقهٔ حاصل، متساوی‌الساقین گفته می‌شود. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ۴ تا ویژگی مهم دارد:

الف) زاویه‌های پای ساق (مجاور به یک قاعده) با هم برابرند؛ یعنی $\hat{A}=\hat{B}=\alpha$ و $\hat{D}=\hat{C}=\beta$.

ب) قطرها با هم برابرند. $(AC=BD)$



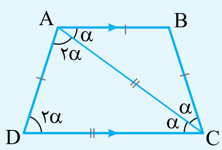
پ) قطرها که همدیگر را در O قطع می‌کنند، ۲ تا مثلث متساوی‌الساقین به رأس O به وجود می‌آورند؛ یعنی $OA=OB$ و $OD=OC$.



ت) اگر ارتفاع ذوزنقه را از رأس‌های A و B بکشیم، مثلث‌های ADK و BHC کپی هم هستند.

تست در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ داریم: $AC=CD$ و $AD=AB=BC$. زاویهٔ D چند درجه است؟

۱) ۳۰° ۲) ۳۶° ۳) ۶۰° ۴) ۷۲°



پاسخ ۴ چون $BA=BC$ است، پس داریم: $B\hat{A}C=B\hat{C}A=\alpha$

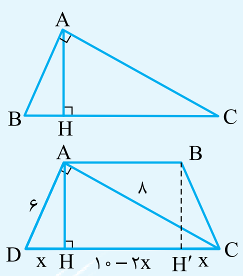
از طرفی چون $AB \parallel DC$ است، زاویهٔ ACD هم برابر α می‌شود. حالا چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است، پس $\hat{D}=\hat{C}=۲\alpha$. در مثلث متساوی‌الساقین ADC هم داریم: $CA=CD \Rightarrow C\hat{A}D=C\hat{D}A=۲\alpha$

در همین مثلث باید مجموع زوایای داخلی ۱۸۰° باشد، بنویسیم و α را بیابیم:

$$\alpha+۲\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۶^\circ \Rightarrow \hat{D}=۲\alpha=۷۲^\circ$$

تست در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر، عمود بر ساق است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟ *(خارج ریاضی ۹۱)*

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲



پاسخ ۱ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه را بلدیم!

$$AB^{۲}=BH\times BC$$

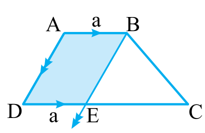
در ذوزنقهٔ مقابل داریم:

$$۶^{۲}=x\times ۱۰ \Rightarrow x=۳/۶$$

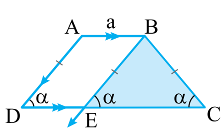
بنابراین طول قاعدهٔ کوچک ذوزنقه برابر است با:

$$۱۰-۲x=۱۰-۲(۳/۶)=۲/۸$$

یک ایدهٔ بسیار مهم



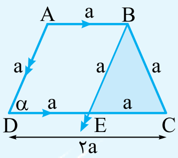
اگر در ذوزنقهٔ $ABCD$ از رأس B، خطی موازی ساق AD رسم کنیم تا DC را در E قطع کند، چهارضلعی $ABED$ متوازی‌الاضلاع است و از تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع‌ها می‌شود در آن استفاده کرد.



حالا اگر ذوزنقهٔ $ABCD$ متساوی‌الساقین باشد، مثلث BEC هم متساوی‌الساقین می‌شود، به شکل خوب نگاه کنید:

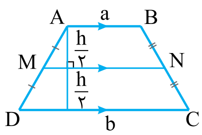
تست **در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قاعدهٔ کوچک برابر با هر ساق و قاعدهٔ بزرگ دو برابر هر یک از آن‌هاست. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ این ذوزنقه چند درجه است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۷۲ ۴) ۶۰



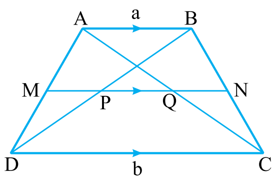
پاسخ **(۴)** طبق فرض $AD = AB = BC = a$ و $DC = ۲a$ است. از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا DC را در E قطع کند، مطابق شکل، تمام اضلاع مثلث BEC برابر می‌شوند. چون $DE = AB = a$ و در نتیجه EC هم برابر با a می‌شود، پس مثلث BEC متساوی‌الاضلاع بوده و تمام زوایایش ۶۰° هستند، یعنی $\hat{C} = ۶۰^\circ$ است.

پاره‌خط میانگین (میان‌خط) ذوزنقه



اگر در ذوزنقهٔ دلخواه ABC، وسط ساق‌ها را به هم وصل کنیم به پاره‌خط حاصل، پاره‌خط میانگین ذوزنقه گفته می‌شود، زیرا $MN = \frac{a+b}{۲}$ است و البته طبق اطلاعاتی که از فصل ۲ داریم معلوم است که $DC \parallel MN \parallel AB$.

MN نه‌تنها ساق را نصف می‌کند، بلکه ارتفاع ذوزنقه را هم نصف می‌کند.



برای اثبات می‌توانید قطر AC را رسم کنید و دو بار قضیهٔ تالس را استفاده کنید.

اگر قطرها را هم رسم کنیم، داریم:

۱) $PQ = \frac{b-a}{۲}$ ۲) $QN = MP = \frac{AB}{۲}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۳- در متوازی‌الاضلاع کدام گزینه درست نیست؟

۱) مرکز تقارن، نقطهٔ تلاقی دو قطر است.
۲) زوایای مجاور مکمل‌اند.
۳) فاصلهٔ دو ضلع روبه‌رو ثابت است.
۴) خطی که وسط دو ضلع روبه‌رو را به هم وصل می‌کند، محور تقارن است.

۳۴- کدام گزینه یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

۱) چهارضلعی‌ای که قطرهایش عمودمنصف یکدیگر باشند.
۲) چهارضلعی‌ای که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.
۳) چهارضلعی‌ای که زوایای روبه‌روی آن مساوی باشند.
۴) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.

۳۵- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، تعریف لوزی نیست؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که اضلاعش با هم برابر باشند.
۲) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند.
۳) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش نیمساز زوایا باشند.
۴) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش بر هم عمودند.

۳۶- با کدام شرط یک چهارضلعی لزوماً متوازی‌الاضلاع نیست؟

۱) اگر دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی مساوی و موازی باشند.
۲) اگر دربارهٔ سه زاویهٔ چهارضلعی بدانیم، زاویه‌های مجاور دوبه‌دو مکمل‌اند.
۳) اگر قطرها با هم برابر باشند.
۴) اگر همهٔ زاویه‌های داخلی قائمه باشند.

۳۷- کدام‌یک از گزینه‌ها تعریف صحیحی از لوزی بیان نمی‌کند؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاورش با هم برابر باشند.
۲) چهارضلعی‌ای که اضلاعش با هم برابر باشند و حتماً محدب باشد.
۳) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش نیمساز زاویه‌ها باشند.
۴) مربعی که فشرده شده باشد.

۳۸- کدام چهارضلعی الزاماً یک مربع است؟

۱) مستطیلی که بر دایره محیط می‌شود.
۲) لوزی‌ای که بر دایره محیط می‌شود.
۳) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که اقطارش عمودمنصف هم باشند.
۴) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش عمودمنصف هم باشند.

۳۹- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.
۲) اگر در یک چهارضلعی قطرها با یکدیگر برابر باشند، چهارضلعی مستطیل است.
۳) اگر در یک چهارضلعی قطرها بر هم عمود باشند، چهارضلعی لوزی است.
۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع برابر باشند، چهارضلعی مربع است.

فصل ۴

تجسم فضایی

درس ۱

خط، نقطه و صفحه

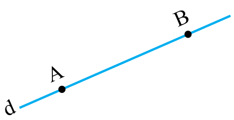
فضا یعنی همه‌جا! اتاقی که در آن نشسته‌اید و دارید با لذت هندسه می‌خوانید قسمتی از فضا است. البته چون ما نمی‌توانیم در کتاب‌ها، «همه‌جا» را رسم کنیم! مجبوریم برای فضا، کلاس یا اتاق را مثال بزنیم. می‌بینید که فضا را به صورت علمی تعریف نکردیم چون نمی‌شد که تعریف کنیم، فضا جزء مفاهیم اولیهٔ هندسه است و غیرقابل‌تعریف.

صفحه چیست؟ صفحه هم یک مفهوم اولیه است؛ فقط می‌شود توضیحش داد، تعریف علمی ندارد. میز مطالعه‌تان را در نظر بگیرید و آن را از چهار طرف ادامه دهید، با این کار کل دنیا به دو قسمت تقسیم می‌شود، به مرز بین آن دو قسمت صفحه گفته می‌شود، صفحه را هم با یک متوازی‌الاضلاع نشان می‌دهیم و با P، Q، R و ... نام‌گذاری می‌کنیم. صفحه ضخامت ندارد پس در دنیای واقعی، صفحه وجود خارجی ندارد.

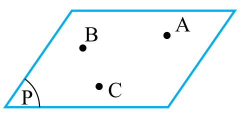
خط را هم که بلدید! از هر دو طرف نامحدود است و فقط طول دارد.

در فضا، بی‌شمار صفحه وجود دارد و در هر صفحه‌ای بی‌شمار خط داریم و روی هر خط بی‌شمار نقطه وجود دارد.

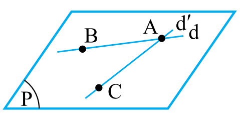
مشخص‌کردن خط و صفحه در فضا



برای مشخص‌کردن یک خط در فضا به دو نقطه از آن خط احتیاج داریم، به همین دلیل گاهی به جای خط d می‌گوییم خط AB، چون از نقاط A و B فقط یک خط عبور می‌کند.

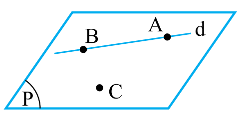


برای مشخص‌کردن یک صفحه در فضا هم، به سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط از آن صفحه احتیاج داریم، یا به عبارتی از سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط در فضا فقط یک صفحه عبور می‌کند. البته ممکن است که به جای سه‌تا نقطه، حالت‌های زیر را بگویند که مفهومش همان سه نقطه است:

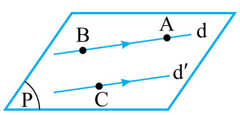


۱ دو خط متقاطع: یعنی از دو خط متقاطع در فضا فقط یک صفحه عبور می‌کند.

۲ یک خط و یک نقطه خارج آن:



۳ دو خط موازی و غیرمنطبق:



تست **در کدام‌یک از حالت‌های زیر همواره می‌توان یک صفحهٔ یکتا رسم کرد؟**

۱) با داشتن سه نقطه
۲) با داشتن دو خط
۳) با داشتن یک نقطه و یک خط
۴) با داشتن دو ضلع متمایز یک متوازی‌الاضلاع

پاسخ ۴ مثال نقض ۱، ۲ و ۳ را ببینید!

۱ اگر سه نقطهٔ متمایز روی یک خط باشند، بی‌شمار صفحه می‌توان رسم کرد.

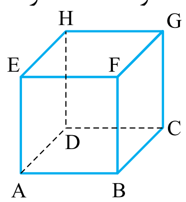
۲ اگر دو خط متنافر باشند، صفحه‌ای قابل رسم نیست.

۳ اگر نقطه روی خط قرار داشته باشد، بی‌شمار صفحه قابل رسم است.

دو ضلع متمایز یک متوازی‌الاضلاع یا موازی‌اند یا متقاطع و در هر کدام از این دو حالت، یک صفحهٔ یکتا قابل رسم است.

حالت‌های مختلف دو خط در فضا

در هندسهٔ مسطحه (یعنی روی صفحه) می‌گفتیم که یا دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند که می‌شوند متقاطع و اگر کاری با هم نداشتند و همدیگر را قطع نمی‌کردند، موازی می‌شدند! اما توی فضا، کمی داستان فرق دارد. EH و FB را در مکعب زیر نگاه کنید، نه همدیگر را قطع می‌کنند و نه شبیه موازی‌ها هستند! این‌ها انگار از هم نفرت دارند، به خاطر همین به این حالت دو خط در فضا، می‌گویند: متنافر. مثلاً HG و AE متنافرند. متنافرهای دیگر این شکل را خودتان بیابید و *حال کنید*. پس در فضا دو خط دارای سه حالت هستند:



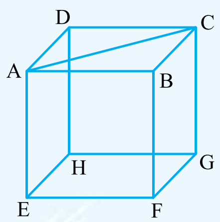
۱ **متقاطع** } صفحه‌ای وجود دارد که از آن‌ها می‌گذرد.
۲ **موازی** }

۳ **متنافر** ← هیچ صفحه‌ای نمی‌توان یافت که شامل هر دو خط باشد.

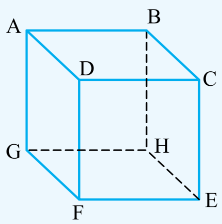
تست در یک مکعب، قطر یکی از وجه‌های آن با چند یال مکعب متنافر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ ۲ مطابق شکل مقابل، قطر AC، با یال‌های BF، DH، GH، EF، FG و EH متنافر است.

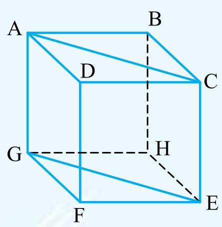


تست مکعب شکل زیر را در نظر بگیرید. تعداد یال‌های موازی با صفحهٔ گذرنده از دو قطر AC و GE کدام است؟



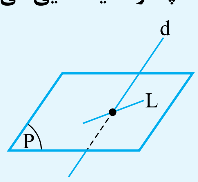
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ ۲ می‌دانیم اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم موازی‌اند؛ لذا بنا بر آن‌چه در شکل مشاهده می‌کنیم، یال‌های BH و DF با صفحهٔ گذرنده از قطرهای AC و GE موازی هستند.

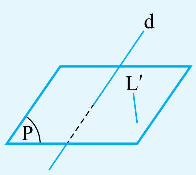


مثال خط d با صفحهٔ P متقاطع است. خط‌های موجود در صفحهٔ P نسبت به خط d چه وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟

پاسخ دو حالت ممکن است رخ بدهد:

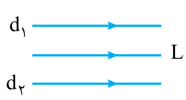


۱ متقاطع



۲ متنافر

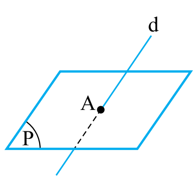
در صفحه و فضا اگر خط L با خطوط d_1 و d_2 موازی باشد، d_1 و d_2 با هم موازی‌اند.



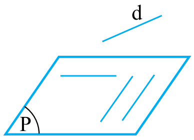
حالت‌های مختلف خط و صفحه

خط و صفحه سه حالت می‌توانند داشته باشند:

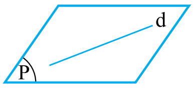
۱ **متقاطع**: در این صورت خط و صفحه در یک نقطه مشترک‌اند. حالت خاص مهمی که می‌تواند رخ دهد این است که خط d بر صفحهٔ P عمود باشد.



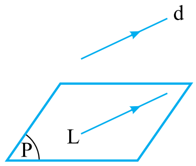
۲ **موازی**: اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، با هم موازی‌اند. در این صورت خط d با بی‌شمار خط از صفحهٔ P موازی است، نه با همهٔ خط‌های صفحهٔ P.



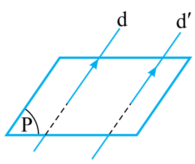
۳ **منطبق**: اگر صفحه از خط عبور کند یا به عبارتی خط و صفحه در بی‌شمار نقطه مشترک باشند، خط بر صفحه منطبق است.

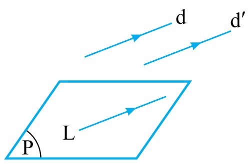


اگر صفحهٔ P شامل خطی باشد که با خط d موازی است، خط d با صفحهٔ P موازی خواهد بود.



این نکته نشان می‌دهد که اگر دو خط d و d' با خط L از صفحهٔ P موازی باشند، d و d' با هم موازی‌اند و یک نتیجهٔ مهم دیگر هم می‌توان گرفت که اگر صفحهٔ P یکی از دو خط موازی d و d' را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

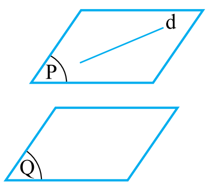




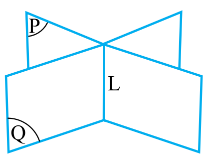
حالت‌های مختلف دو صفحه

دو صفحه در فضا یکی از دو حالت زیر را دارند:

۱ **موازی**: دو صفحه اگر نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، در این صورت موازی‌اند. در این حالت هر خطی از یکی از صفحه‌ها (مثلاً خط d از صفحهٔ P) با صفحهٔ دیگر (یعنی Q) موازی است.



۲ **متقاطع**: اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، متقاطع‌اند. خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

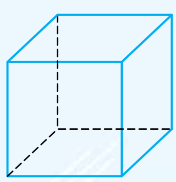


تست در یک مکعب به ترتیب چند جفت وجه موازی و چند جفت وجه متقاطع وجود دارد؟

۱) ۳ - ۱۰ ۲) ۳ - ۱۲ ۳) ۴ - ۱۰ ۴) ۴ - ۱۲

پاسخ ۲ در هر مکعب مطابق شکل زیر، هر وجه با یک وجه موازی و با ۴ وجه متقاطع است.

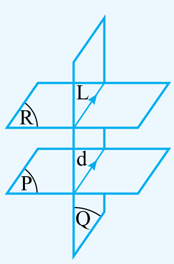
بنابراین $\frac{۶\times۱}{۲}=۳$ جفت وجه موازی و $\frac{۶\times۴}{۲}=۱۲$ جفت وجه متقاطع در یک مکعب وجود دارد.



تست صفحه‌های P، Q و R مفروض‌اند. اگر فصل مشترک P و Q خط d و فصل مشترک R و Q خط L باشد و نیز $d \parallel L$، کدام مورد دربارهٔ فصل مشترک صفحه‌های P و R درست است؟

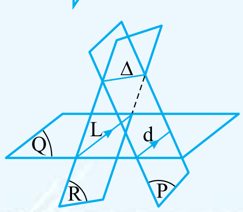
۱) این صفحه‌ها، فصل مشترک ندارند.
۲) حتماً وجود دارد و موازی d و L است.
۳) اگر وجود داشته باشد، موازی d و L است.
۴) d و L را قطع می‌کند.

پاسخ ۳ مثل همهٔ صفحات دیگر، صفحات P و R هم دو حالت می‌توانند داشته باشند:



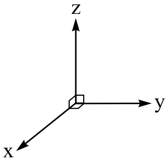
۱ P و R موازی باشند: در این صورت همان‌طور که از شکل مشخص است، L و d موازی‌اند ولی صفحات P و R فصل مشترک ندارند.

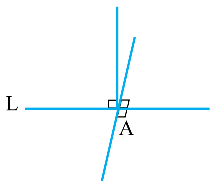
۲ P و R متقاطع باشند: فصل مشترک این دو صفحه را Δ بنامیم، در این صورت چون L و d با هم موازی‌اند، اگر خط Δ یکی از دو خط L و d را قطع کند باید دیگری را هم قطع کند، پس خط Δ دارای دو نقطهٔ مشترک با صفحهٔ Q می‌شود؛ یعنی Δ بر Q منطبق می‌شود که این خلاف فرض است. حالا این‌قدر *علمی‌بازی درنیاریم* هم معلوم است که Δ با d و L موازی است!



تعامد

فضا مثل صفحه نیست! در فضا در یک نقطه از خط می‌توان بی‌شمار خط عمود بر آن خط رسم کرد، مثل دستگاه مختصات سه‌بعدی که در مرکز دستگاه، محور zها و yها بر محور x عمودند.

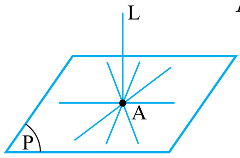




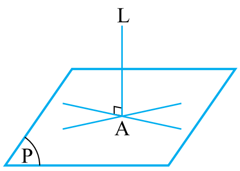
پایهٔ نیمکتتان را نگاه کنید، بر کف کلاس عمود است. از لحاظ هندسی خط L را بر صفحهٔ P عمود می‌نامیم، در صورتی که:

① صفحهٔ P را در نقطه‌ای مانند A قطع کند.

② بر تمام خطوط صفحهٔ P که از نقطهٔ A عبور می‌کنند، عمود باشد.



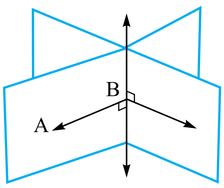
راستش را بخواهید، لازم نیست چک کنیم که خط L بر تمام خطوط گذرنده از نقطهٔ A عمود باشد، بلکه اگر خط L فقط بر دو خط متقاطع از صفحهٔ P عمود باشد، کافی است تا نتیجه بگیریم که خط L بر صفحهٔ P عمود است.



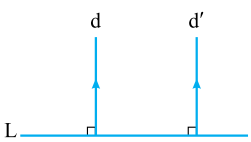
اگر خط L بر صفحهٔ P عمود باشد، بر تمام خطوط صفحهٔ P عمود است.

دو صفحهٔ عمود بر هم

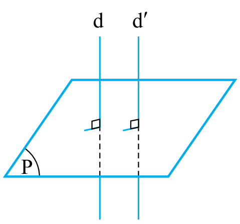
اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر کدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است.



در هندسهٔ معمولی خودمان که در صفحه بود، اگر دو خط d و d′ بر خط L عمود بودند، می‌توانستیم نتیجه بگیریم که d و d′ موازی‌اند، حالا شبیه‌های این قضیه در هندسهٔ فضایی را با هم می‌بینیم:

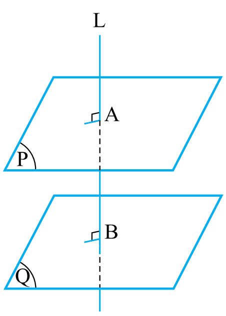


① اگر خطوط d و d′ موازی باشند و خط d بر صفحهٔ P عمود باشد، d′ نیز بر صفحهٔ P عمود خواهد بود.



② اگر خطوط d و d′ بر صفحهٔ P عمود باشند، d و d′ موازی‌اند.

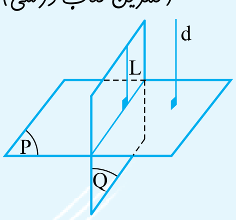
③ دو صفحهٔ عمود بر یک خط با هم موازی‌اند، یعنی در شکل مقابل چون صفحات P و Q بر خط L عمودند، پس P و Q موازی‌اند.



مثال **دو صفحهٔ P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحهٔ P عمود است. این خط نسبت به صفحهٔ Q چه وضعی دارد؟**

(تمرین کتاب درسی)

پاسخ چون صفحهٔ Q بر صفحهٔ P عمود است، پس خطی مانند L در صفحهٔ Q وجود دارد که بر صفحهٔ P عمود باشد. خُب وقتی d و L هر دو بر صفحهٔ P عمودند، موازی هم هستند. پس d با خطی از صفحهٔ Q موازی است، پس با صفحهٔ Q موازی خواهد بود.



تست دو صفحهٔ P و P' بر هم عمودند. در این صورت کدام مورد همواره صحیح است؟

۱) هر خط موازی با P بر P' عمود است.

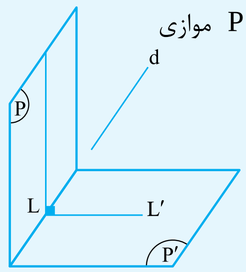
۲) هم در صفحهٔ P و هم در صفحهٔ P' یک خط وجود دارد که بر صفحهٔ دیگر عمود باشد.

۳) صفحهٔ P بر تمام خطوط صفحهٔ P' عمود است.

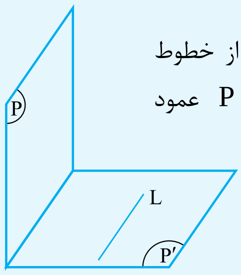
۴) هر خط عمود بر فصل مشترک P و P'، منطبق بر P یا P' است.

پاسخ ۲ ۲ تعریف دو صفحهٔ عمود بر هم است، اما گزینه‌های دیگر چرا غلطاند، بررسی می‌کنیم:

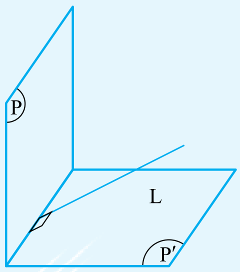
۱ مطابق شکل خط d با صفحهٔ P موازی است و بر P' هم عمود نیست!



۳ خُب مطابق شکل، L یکی از خطوط صفحهٔ P' است که نه تنها بر P عمود نیست بلکه موازی P هم است.

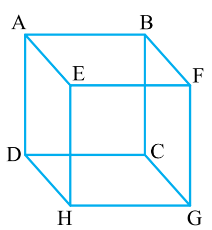


۴ خط L بر فصل مشترک P و P' عمود است ولی نه در P است و نه در P'.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- در مکعب مقابل، تعداد یال‌های موازی با AB و متنافر با BF کدام است؟



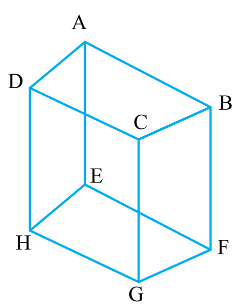
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲- با توجه به منشور زیر، چند مورد از موارد زیر درست است؟



الف) یال FG با یال AD متنافر است. **ب) یال EF با یال CD موازی است.**

پ) یال AD با یال EF متنافر است. **ت) یال BC با یال EH متنافر است.**

ث) صفحهٔ BCGF با صفحهٔ ABCD متقاطع است.

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۳- چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف) از هر دو نقطه در فضا، فقط یک خط می‌گذرد.

ب) از هر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط در فضا، فقط یک صفحه می‌گذرد.

پ) از هر خط در فضا، فقط یک صفحه به موازات آن می‌توان رسم کرد.

ت) از دو خط متقاطع در فضا، فقط یک صفحه می‌گذرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴