

## ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی (۱) دهم از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱- **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم، بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. برای این آزمون‌ها در کنار سؤالات نکات مشاوره‌ای نوشتیم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کنند.

**ب) آزمون طبقه‌بندی نشده:** آزمون شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲- **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

**ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.

۳- **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴- **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی (۱) نیاز دارید، تنها در ۲۰ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذت‌ش را ببرید!



### بازم‌بندی درس ریاضی (۱)

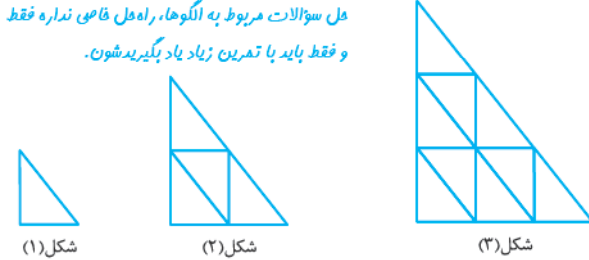
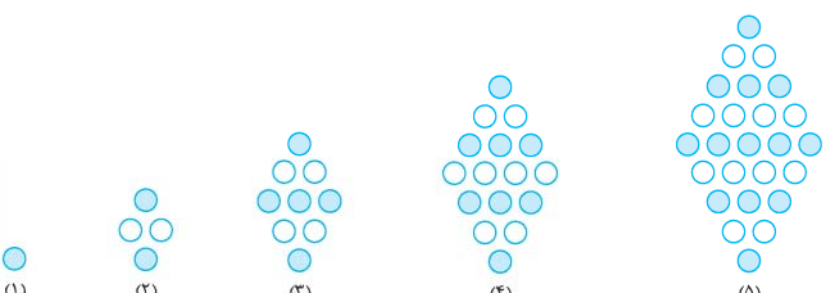
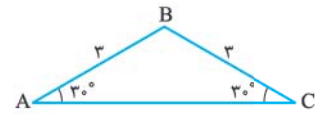
فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم
اول	۵ نمره	۱/۵ نمره
دوم	۵ نمره	۱/۵ نمره
سوم	۵ نمره	۲ نمره
چهارم	۵ نمره	۲ نمره
پنجم	—	۴ نمره
ششم	—	۴ نمره
هفتم	—	۵ نمره
جمع	۲۰ نمره	۲۰ نمره

## فهرست

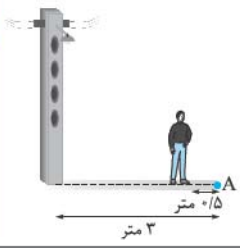
نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول	۳	۲۲
اول	۵	۲۳
اول	۶	۲۵
اول	۷	۲۶
دوم	۹	۲۷
دوم	۱۱	۲۸
دوم	۱۳	۲۹
دوم	۱۴	۳۱
دوم	۱۶	۳۱
دوم	۱۷	۳۳
دوم	۱۹	۳۴
دوم	۲۱	۳۵

۳۷

درس‌نامه توپ برای شب امتحان

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک و علوم تجربی	ریاضی (۱)
نمره	نوبت اول پایه دهم دوره متوسطه دوم			آزمون شماره ۱
۱	فصل اول			
۱	<p>فرض کنید <math>A</math> مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد.          الف) <math>A</math> را با نمایش اعضای آن بنویسید.          ب) <math>A</math> متناهی است یا نامتناهی؟          پ) یک زیرمجموعه متناهی از <math>A</math> بنویسید.          ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند <math>B</math> و <math>C</math> از <math>A</math> بنویسید؛ به طوری که <math>B \subseteq C</math> باشد.</p>			
۱	<p>فرض کنید <math>U</math> مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد. اگر <math>A = \{1, 3, 5, 7\}</math> و <math>B = \{2, 3, 5, 8, 9\}</math> باشد، مطلوب است:          الف) <math>B'</math> و <math>A'</math>          ب) <math>(A \cup B)'</math>          پ) <math>A - B'</math>          ت) <math>A - (A \cap B)</math></p>			
۱/۵	<p>الف) با توجه به الگوی مقابل، تعداد مثلث‌های کوچک در شکل دهم را به دست آورید.</p>  <p>ب) در الگوی زیر، اگر پارامتر مورد بررسی، تعداد دایره‌های رنگی هر شکل باشد، بگویید جمله یازدهم چند دایره رنگی دارد؟</p> 			
۱/۲۵	در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است، دنباله را مشخص کنید.			
۰/۷۵	بین ۳ و ۴۸، سه واسطه هندسی درج کنید. (قدرنسبت را منفی فرض کنید).			
	فصل دوم			
۱	<p>همیشه در این‌ها مسئله‌ها، فوتون ارتفاع مثلث رو رسم کنین تا مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد بشن و بتونین از روابط مثلثاتی مربوط استفاده کنین.</p> 			
۱	مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.			
۱	معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور $x$ ها $60^\circ$ است و از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد.			
۱	درستی تساوی‌های مقابل را بررسی کنید. الف) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ب) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = 2 \sin^2 \theta - 1$			
۱	اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $24^\circ$ را به دست آورید.			
	فصل سوم			
۲/۵	عبارت (الف) را تجزیه کنید و عبارت (ب) را تا حد امکان ساده کنید. الف) $x^6 - xy^3 + x^3y - y^6$ ب) $\frac{x^6 - a^6}{ax^3 - a^3x}$			
۲/۵	<p>حاصل کسره‌های مقابل را به دست آورید. (آن‌ها را به یک کسر تبدیل کنید).</p> <p>همیشه بهتره قبل از این‌که در جمع و تفریق کسرها، مخرج مشترک بگیرین، هر یک از کسرها رو تا حد امکان، ساده و مخرج آن‌ها را کویا کنین.</p> <p>الف) <math>\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}</math>      ب) <math>\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x^2-1}</math></p>			

شماره	نوبت اول پایه دهم دوره متوسطه دوم	رشته: ریاضی فیزیک و علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	ریاضی (۱)
<b>آزمون شماره ۱</b>					
<b>فصل چهارم</b>					
۲	معادلات روبه‌رو را به روش خواسته شده حل کنید. (فرمول کلی) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$ ب) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$ (تجزیه) $4x^2 - 12x + 8 = 0$ (الف)	۱۲			
۱/۵	نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ . محور $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور $x$ ها را در نقاط به طول ۲ و ۴ قطع کرده است. معادله سهمی را بنویسید.	۱۳			
۱	عبارت $A = \frac{(x-2)^2(-x+3)^y}{(2x-1)^f}$ را تعیین علامت کنید.	۱۴			
۱	نامعادله مقابل را حل کنید. $3 - \frac{2x-3}{x-2} \geq \frac{x-3}{2-x}$	۱۵			
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید			

نمبره	ریاضی (۱)	رشته: ریاضی فیزیک و علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com														
ردیف	<b>آزمون شماره ۹</b>																	
نوبت دوم پایه دهم دوره متوسطه دوم																		
۱	اگر مجموعه شمارنده‌های (مقسوم‌علیه‌های) طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B بنامیم، مطلوب است: $n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$	۲	نوع هر دنباله را مشخص کرده و قدرنسبت آن را بنویسید.	۱														
۰/۵	۶, ۶, ۶, ۶, ... (پ)	۱, $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ (ب)	۷, ۲۸, ۱۱۲, ... (الف)															
۰/۷۵	اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد آن گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $135^\circ$ را به دست آورید.	۳																
۰/۷۵	علی می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است حساب کند. قد علی $1/5$ متر و طول سایه او در همان لحظه $0/5$ متر است. ارتفاع تیر برق چه قدر است؟ (انتهای سایه علی و تیر برق، نقطه A است.)	۴																
																		
۲	الف) اگر a مثبت و $\sqrt{a} < a$ باشد چه اعدادی می‌تواند باشد؟ ب) جاهای خالی را با اعداد صحیح مناسب پر کنید.	۵																
۰/۷۵	$4 < \sqrt{0} < 5, 0 < \sqrt{-17} < 0$	۶	معادله $(x-1)^2 = (3x+5)^2$ را به روش ریشه‌گیری حل کنید.															
۱/۲۵	تعداد ضربان قلب پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟	۷																
۰/۷۵	تابعی مثال بزنید که: الف) دامنه آن فقط شامل دو عضو باشد. ب) دامنه آن نامتناهی ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. پ) دامنه و برد آن نامتناهی باشد.	۸																
۰/۷۵	الف) تابع $f(x) = -3$ را با دامنه اعداد حقیقی رسم کنید و مقادیر $f(\sqrt{5})$ و $f(2)$ را به دست آورید. ب) نمودار تابع f را وقتی دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، رسم کنید.	۹																
۱	نمودار تابع مقابل را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$	۱۰																
۱/۵	یک شمع، ۱۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۲ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش می‌شود؟ جدول زیر را کامل کرده، یک ضابطه (فرمول) مناسب برای ارتفاع شمع (y) برحسب زمان (x) بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. این تابع خطی است یا غیرخطی؟ پس از چند ساعت از شروع سوختن شمع، ارتفاع به $7/5$ سانتی‌متر می‌رسد؟	۱۱																
	<table border="1" data-bbox="119 1400 391 1467"> <tr> <td>زمان x</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> </tr> <tr> <td>ارتفاع y</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	زمان x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارتفاع y									
زمان x	۰	۱	۲	۳	۴	۵												
ارتفاع y																		
۱/۵	یک آزمون شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای است. فردی قصد دارد به سؤالات به صورت تصادفی پاسخ دهد. به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر: الف) مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب بدهد؟ ب) بتواند سؤال را بدون جواب هم بگذارد؟	۱۲																
۲/۵	فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ : الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A چندتا است؟ ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A شامل ۵ چندتا است؟ پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A شامل ۵ و فاقد ۲ چندتا است؟	۱۳																
۲	با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند (پیشامد A)؟ احتمال وقوع A چه قدر است؟ ب) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند (پیشامد B)؟ احتمال وقوع B چه قدر است؟	۱۴																
۱	تاسی را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A، B و C را طوری تعریف کنید که: الف) A و B ناسازگار باشند. ب) A، B و C دوبه‌دو ناسازگار باشند.	۱۵																
۲	الف) اصطلاحات زیر را تعریف کنید. «علم آمار - نمونه تصادفی - متغیر کمتی پیوسته - متغیر کیفی ترتیبی» ب) نوع متغیرهای مقابل را تعیین کنید: «رنگ خودروها - میزان آلودگی هوا - فصل‌های سال - تعداد تصادفات یک خیابان»	۱۶																
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید																

# پاسخنامه تشریحی

ضرب یکی از  
رابطه‌ها در (-1) →  $\begin{cases} -a - 2d = -20 \\ a + 6d = 56 \end{cases}$

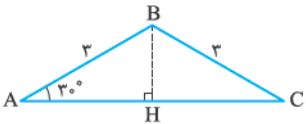
$4d = 36 \Rightarrow d = 9 \xrightarrow{\text{در یکی از روابط}} a + 2(9) = 20 \Rightarrow a = 2$

$3, \dots, 48 \Rightarrow a_5 = 48 \Rightarrow ar^4 = 48 \Rightarrow 3r^4 = 48 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} r = -2$

$3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \xrightarrow{\times(-2)} 12 \xrightarrow{\times(-2)} -24, 48$

۶- ابتدا خودمان ارتفاع وارد بر قاعده AC را رسم می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شود.



در مثلث ABH:  $\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{AH} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم محسوب می‌شود؛ لذا:

$AC = 2AH = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

مساحت:  $S_{ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{1 \times 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

شیب  $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ,  $A(-1, 2)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \sqrt{3}(x + 1) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2$

الف - A

$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

روش اول

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (1 - \sin x)(1 + \sin x) = \cos^2 x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

چون به یک رابطه درست رسیده‌ایم، لذا تساوی اولیه هم، همواره درست است.

سمت چپ تساوی  $= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

روش دوم

حال برای آن که بتوانیم از فرمول‌های خوانده شده استفاده کنیم صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج  $(1 - \sin x)$  یعنی در  $(1 + \sin x)$  ضرب می‌کنیم:

عبارت بالا:  $\frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$

سمت راست تساوی  $= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

سمت چپ تساوی (ب)  $= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$

$= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta = 2\sin^2 \theta - 1$  سمت راست تساوی

## آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

الف - A  $A = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$

(ب) این مجموعه نامتناهی است، چون انتهایی ندارد.

B = 4 = مجموعه مضرب‌های طبیعی یک‌رقمی عدد ۴ (پ)

B = {12, 16, 20, ...}, C = {8, 12, 16, 20, ...} (ت)

U = {1, 2, 3, ..., 9} -۲

الف)  $A' = U - A = \{1, 2, 3, \dots, 9\} - \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = U - B = \{1, 2, 3, \dots, 9\} - \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ب)  $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{2, 4, 6, 8, 9\} \cap \{1, 4, 6, 7\} = \{4, 6\}$

پ)  $A - B' = \{1, 2, 5, 7\} - \{1, 4, 6, 7\} = \{2, 5\}$

ت)  $A - (A \cap B) = \{1, 2, 5, 7\} - (\{1, 2, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8, 9\})$

$= \{1, 2, 5, 7\} - \{2, 5\} = \{1, 7\}$

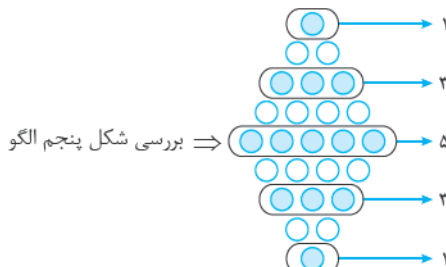
۲- الف) اگر تعداد مثلث‌های کوچک را به صورت یک دنباله بنویسیم خواهیم داشت:

1, 4, 9, ...

واضح است که جمله عمومی این دنباله (الگو) برابر  $a_n = n^2$  است؛ لذا در شکل دهم به تعداد

$a_{10} = 10^2 = 100$  مثلث کوچک خواهیم داشت.

(ب) در شکل‌های داده شده، برای دایره‌های سیاه ملاحظه می‌کنیم که شکل‌های (۱)، (۳)، (۵) و ... همگی دارای یک الگو و شکل‌های (۲)، (۴)، (۶) و ... دارای الگوی دیگری هستند. چون دایره‌های توپر (رنگی) در شکل یازدهم خواسته شده و ۱۱ فرد است، لذا کافی است شکل پنجم الگو را بررسی کنیم (چون ۵ هم فرد است).



تعداد دایره‌های سیاه  $= 5 + 3 + 1 + 3 + 1 = 13$

پس دیدیم که در شکل پنجم، از عدد ۵ شروع کردیم و ۲ تا ۲ تا کم کردیم تا از بالا و پایین به عدد ۱ رسیدیم. حال همین کار را برای شکل یازدهم انجام می‌دهیم. (دیگه نیازی نیست

شکل یازدهم رو بکشیم چون واقعاً لزومی نداره)

۱

۳

۵

۷

۹

جمع اعداد  $\rightarrow 61$  دایره‌های توپر در شکل یازدهم

۹

۷

۵

۳

۱

۴- منظور از مشخص کردن یک دنباله، یافتن جمله اول و قدرنسبت آن است؛ لذا:

$\begin{cases} a_4 = 20 \\ a_7 = 56 \end{cases} \xrightarrow{\text{جملات را با هم می‌کنیم}} \begin{cases} a + 3d = 20 \\ a + 6d = 56 \end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-r}{\lambda}\right) - rb = -r \Rightarrow rb = \frac{-r}{\lambda} + r \Rightarrow rb = \frac{r}{\lambda} \Rightarrow b = \frac{r}{\lambda}$$

معادله سه می

$$y = -\frac{r}{\lambda}x^2 + \frac{r}{\lambda}x + r$$

14

$A = \frac{(x-r)^r (-x+r)^r}{(rx-1)^r}$	x	$-\infty$	$\frac{1}{r}$	r	r	$+\infty$
$(rx-1)^r$ $\downarrow$ $x = \frac{1}{r}$	$(x-r)^r$	-	-	+	+	
	$(-x+r)^r$	+	+	+	-	
	$(rx-1)^r$	+	+	+	+	
A کل		-	-	+	+	-

تعریف نشده

15

$$r - \frac{rx-r}{x-r} \geq \frac{x-r}{r-x} \Rightarrow r - \frac{rx-r}{-(r-x)} - \frac{x-r}{r-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{r(r-x) + rx - r - x + r}{r-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x+6}{r-x} \geq 0$$

x	$-\infty$	r	r	$+\infty$
$-2x+6$	+	+	-	-
$r-x$	+	0	-	-
کل کسر	+	-	+	+

تعریف نشده

$\Rightarrow$  جواب =  $(-\infty, r) \cup [r, +\infty)$

9- می دانیم  $\cot \alpha$  عکس  $\tan \alpha$  است. لذا:

$$\cot 24^\circ = \frac{1}{\tan 24^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha=24^\circ} 1 + \tan^2 24^\circ = \frac{1}{\cos^2 24^\circ}$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{3}^2 = \frac{1}{\cos^2 24^\circ} \Rightarrow 4 = \frac{1}{\cos^2 24^\circ} \Rightarrow \cos^2 24^\circ = \frac{1}{4}$$

جذر  $\rightarrow \cos 24^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$  در ناحیه  $24^\circ$  سوم است.

می دانیم:  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 24^\circ = 1 - \cos^2 24^\circ$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin 24^\circ = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

در ناحیه سوم  $\sin$  منفی است.

$$\rightarrow \sin 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الف)  $x^r - xy^r + x^r y - y^r = x(x^r - y^r) + y(x^r - y^r)$  -10

$$= (x^r - y^r)(x + y) = (x - y)(x^r + xy + y^r)(x + y)$$

ب)  $\frac{x^r - a^r}{ax^r - a^r x} = \frac{(x^r)^r - (a^r)^r}{ax(x^r - a^r)} = \frac{(x^r - a^r)(x^r + x^r a^r + a^r)}{ax(x^r - a^r)} = \frac{x^r + x^r a^r + a^r}{ax}$

الف)  $\frac{r}{x-1} + \frac{r}{x+1} - \frac{r}{(x-1)(x+1)} = \frac{r(x+1) + r(x-1) - r}{(x-1)(x+1)}$  -11

$$= \frac{rx+r + rx-r - r}{(x-1)(x+1)} = \frac{rx-r}{(x-1)(x+1)} = \frac{r(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{r}{x+1}$$

ب)  $\frac{1}{\sqrt{x^r-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^r-1}} \times \frac{(\sqrt{x^r})^r + \sqrt{x^r} + 1}{(\sqrt{x^r})^r + \sqrt{x^r} + 1} = \frac{\sqrt{x^r} + \sqrt{x^r} + 1}{(\sqrt{x^r})^r - 1} = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x^r} + 1}{x^r - 1}$

اتحاد جاق و لاغر

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^r-1}} - \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x^r}}{x^r - 1} = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x^r} + 1}{x^r - 1} - \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x^r}}{x^r - 1} = \frac{1}{x^r - 1}$$

الف)  $f(x^2 - 1)2x + 8 = 0 \Rightarrow f(x^2 - 3x + 2) = 0$  اتحاد جمله مشترک فاکتوراز 4 -12

$$\Rightarrow f(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

ب)  $\frac{1}{r}x^2 - \frac{1}{r}x - \frac{r}{r} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{r}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{r}{r}\right)$

$$= \frac{1}{r^2} + 4 = \frac{4r^2 + 1}{r^2} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{r} \pm \sqrt{\frac{4r^2 + 1}{r^2}}}{2\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{r} \pm \frac{\sqrt{4r^2 + 1}}{r}}{\frac{2}{r}} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\frac{1}{r} + \frac{\sqrt{4r^2 + 1}}{r}}{\frac{2}{r}} = \frac{1 + \sqrt{4r^2 + 1}}{2} = r \\ x'' = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\sqrt{4r^2 + 1}}{r}}{\frac{2}{r}} = \frac{1 - \sqrt{4r^2 + 1}}{2} = -\frac{r}{r} \end{cases}$$

الف)  $A\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$   $\rightarrow a(e)^r + b(e) + c = r \Rightarrow c = r$  -13

ب)  $B\left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$   $\rightarrow a(-r)^r + b(-r) + r = 0 \Rightarrow ra - rb = -r$

ج)  $C\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$   $\rightarrow a(r)^r + b(r) + r = 0 \Rightarrow 16a + rb = -r$

$$\times 2 \begin{cases} ra - rb = -r \\ 16a + rb = -r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ra - 2rb = -2 \\ 16a + rb = -r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a - rb = -2 \\ 16a + rb = -r \end{cases} \Rightarrow 2ra = -9 \Rightarrow a = \frac{-9}{2r} = \frac{-r}{2r}$$

◀ آزمون شماره ۹ (نوبت دوم) ▶

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6 \quad -1$$

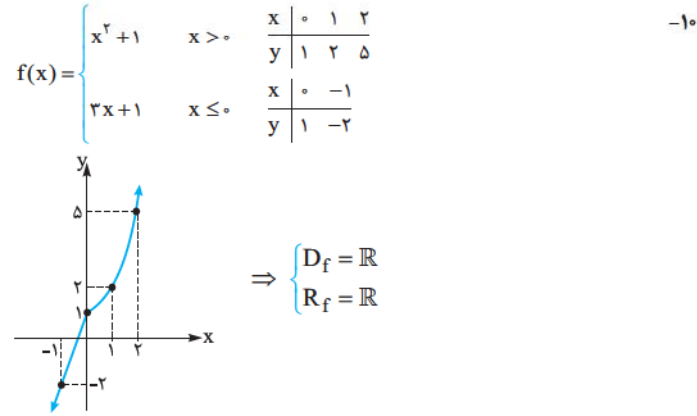
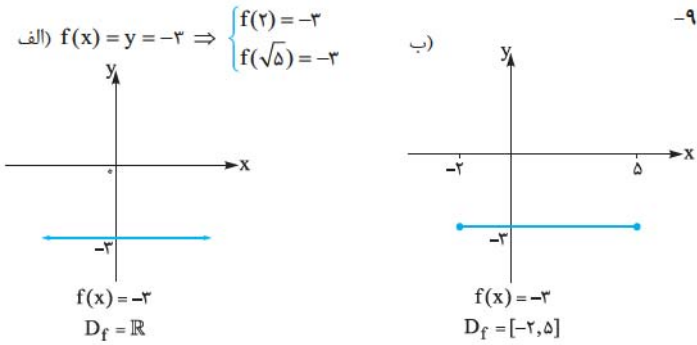
$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

البته می‌توانیم  $n(A \cup B)$  را به صورت زیر هم به دست آوریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 8 - 2 = 12$$



زمان x	0	1	2	3	4	5
ارتفاع y	1	0	8	6	4	2

این تابع خطی است، چون x ها به مقدار مساوی زیاد می شوند (یکی یکی) و y ها نیز به مقدار مساوی کاهش می یابند (۲ تا ۲ تا) حالا به کمک دو نقطه دلخواه از جدول، معادله خط را می نویسیم که همان ضابطه تابع است:

$A(0, 1), B(1, 0) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$   
 $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 0)$   
 $\Rightarrow y = -x + 1$  ضابطه تابع  
 $y = -x + 1 \xrightarrow{y=7/5} 7/5 = -x + 1$   
 $\Rightarrow 2x = 2/5 \Rightarrow x = 1/25$  ساعت

تعداد سوالات (تعداد گزینه ها) = تعداد حالت ها با فرض پاسخگویی به همه سوالات (الف)  
 $\Rightarrow 4^5 = 1024$   
 تعداد سوالات (تعداد گزینه ها) + 1 = تعداد حالت ها با فرض عدم اجبار برای (ب)  
 پاسخگویی به همه سوالات  
 $\Rightarrow 5^5 = 3125$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 الف) تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی (الف)  
 $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$   
 ب) تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی شامل ۵  
 $\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$   
 پ) تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی شامل ۵ و فاقد ۲  
 $\binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$

۱۴- الف)  $n(A) = 5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$   
 ج ه ا ن گ ر دی  
 ا ش ی

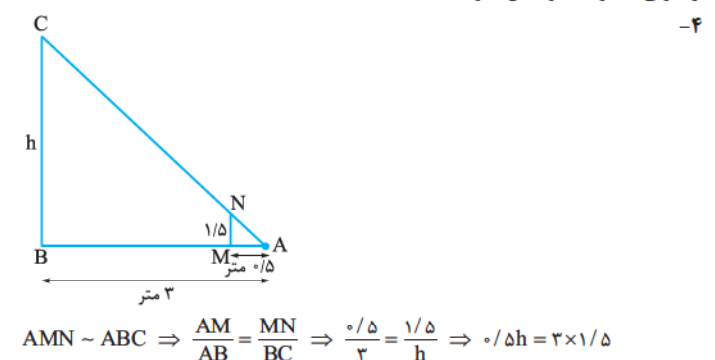
ضمناً تعداد کل کلمات ۸ حرفی که می توان با حروف داده شده ساخت برابر  $8! = 40320$   
 لذا احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:  
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2880}{40320} = \frac{1}{14}$

ب) ج ن ی  
 $n(B) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 3 = 7560$   
 $n(S) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 20160$   
 $\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7560}{20160}$

۲- الف) دنباله هندسی است؛ چون تمام جملات در عدد ثابت ۴ ضرب می شوند.  
 ب) دنباله هندسی است، چون تمام جملات در عدد ثابت  $\frac{-1}{3}$  ضرب می شوند:

پ) این دنباله شامل عدد ثابت ۶ است، پس هم حسابی است هم هندسی. اگر دنباله حسابی فرض شود، قدرنسبت آن صفر است. اگر دنباله هندسی فرض شود قدرنسبت آن ۱ است.  
 ت) دنباله حسابی است، چون همه جملات با (-۴) جمع می شوند:  $20, 16, 12, \dots$

۳-  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=135^\circ} \cos^2 135^\circ = 1 - \sin^2 135^\circ$   
 $\Rightarrow \cos^2 135^\circ = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  چنانچه  $\cos 135^\circ = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$   
 زاویه  $135^\circ$  در ربع دوم است، پس کسینوس آن منفی است؛ لذا جواب  $-\sqrt{\frac{1}{2}}$  را قبول می کنیم.  
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$  (ضمناً  $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ )  
 $\cot \alpha = -1$  از طرفی کتانژانت، برعکس تانژانت است؛ لذا:



۵- الف) چون a مثبت است و  $a^2 < a^1$  شده، پس نتیجه می گیریم که  $a > 1$  است.  
 ب)  $4 < \sqrt{0} < 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲، چون فرجه ۲ است.}} 16 < 0 < 25$   
 پس به جای  $\bigcirc$  هر عددی بین ۱۶ و ۲۵ می توان قرار داد؛ مثل ۲۰.  
 $\bigcirc < \sqrt{-17} < \square \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \bigcirc^2 < -17 < \square^2$   
 در جاهای خالی باید دو عدد صحیح متوالی و مناسب قرار دهیم، اگر  $\bigcirc = -2$  و  $\square = -3$   
 فرض شود، نامساوی بالا، درست می شود:  $-27 < -17 < -8 \Rightarrow (-2)^2 < -17 < (-3)^2$

۶-  $\begin{cases} x - 1 = 3x + 5 \Rightarrow 2x = -6 \\ \Rightarrow x = -3 \\ x - 1 = -3x - 5 \Rightarrow 4x = -4 \\ \Rightarrow x = -1 \end{cases}$   
 $(x-1)^2 = (3x+5)^2$  از طرفین چنانچه می گیریم  $x - 1 = \pm(3x + 5)$

۷-  $y > 110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110 \xrightarrow{\times 8} 15x^2 - 240x + 1600 > 880$   
 $\Rightarrow 15x^2 - 240x + 720 > 0 \xrightarrow{+15} x^2 - 16x + 48 > 0$

x	-∞	4	12	+∞
$x - 12$	-	-	+	
$x - 4$		-	+	+
کل عبارت		+	-	+

$\Rightarrow$  مجموعه جواب  $= (-\infty, 4) \cup (12, +\infty)$   
 ولی زمان نمی تواند منفی باشد، پس مجموعه جواب برابر خواهد بود با:  
 مجموعه جواب  $= [0, 4) \cup (12, +\infty)$

۸- الف)  $\begin{cases} f: \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 + 2 \end{cases}$  ب)  $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2 \end{cases}$  پ)  $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$



۱۵-  $A \rightarrow$  آمدن عدد زوج  $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$   
 الف)  $B \rightarrow$  آمدن عدد فرد

ب)  $A = \{1, 2\}$  ,  $B = \{3, 4\}$  ,  $C = \{5, 6\}$   
 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$  ,  $A \cap C = \emptyset$  ,  $B \cap C = \emptyset$

۱۶- علم آمار: مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

نمونه تصادفی بخشی (زیرمجموعه‌ای) از جامعه آماری است که برای مطالعه انتخاب می‌کنیم. متغیر کمی پیوسته: متغیری کمی است که می‌تواند مقادیر اعشاری را نیز به خود بگیرد؛ یعنی اگر دو مقدار  $a$  و  $b$  را بتواند اختیار کند، آن‌گاه هر مقداری بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. متغیر کیفی ترتیبی: نوعی متغیر کیفی است که ذاتاً دارای ترتیب می‌باشد؛ مانند مراحل رشد انسان (نوزادی، کودکی، نوجوانی، جوانی و ...).

ب) رنگ خودروها  $\leftarrow$  کیفی اسمی / میزان آلودگی هوا  $\leftarrow$  کمی پیوسته  
 فصول سال  $\leftarrow$  کیفی ترتیبی / تعداد تصادفات یک خیابان  $\leftarrow$  کمی گسسته

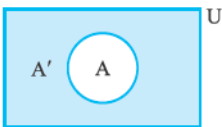
# درس نامه توپ برای شب امتحان

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه، یک عدد حسابی باشد (حتی یک عدد حسابی خیلی بزرگ) به آن مجموعه، متناهی می‌گوییم؛ مثلاً مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$ ، رقمی، متناهی است و یا مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول آب (با آن که تعداد مولکول‌ها بسیار زیاد هستند) متناهی است ولی مجموعه‌هایی مثل  $\mathbb{N}$ ،  $\mathbb{W}$ ،  $\mathbb{Z}$ ،  $\mathbb{Q}$ ،  $\mathbb{R}$  و یا بازه‌هایی مثل  $(1, 2)$  و  $[3, \infty)$  نامتناهی‌اند.

## متمم یک مجموعه

اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد، (مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث ما را شامل می‌شود). آن‌گاه به مجموعه  $A' = U - A$  متمم مجموعه  $A$  می‌گوییم. یعنی  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.



**نکته:** روابط زیر را حتماً حفظ کنید. (البته به کمک رسم نمودار هم می‌توان آن‌ها را اثبات کرد. (شماره‌های ۹۰، ۸۰، ۷ و ۱۰ فیلی موم هستن.)

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| 1) $\emptyset' = U$           | 2) $U' = \emptyset$                      |
| 3) $A \cup A' = U$            | 4) $A \cap A' = \emptyset$               |
| 5) $A - A' = A$               | 6) $A' - A = A'$                         |
| 7) $(A')' = A$                | 8) $(A \cup B)' = A' \cap B'$            |
| 9) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | 10) $A \cap B' = A - B = A - (A \cap B)$ |

**مثال الف:** اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد، مجموعه‌های  $N'$ ،  $W'$ ،  $Z'$ ،  $\emptyset'$  و  $(N \cup W)'$  را به دست آورید. (جواب‌ها را روی محور نمایش دهید).

**مثال ب:** اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد، علاوه بر قسمت الف) حاصل  $\mathbb{R}$  را نیز تعیین کنید. (جواب‌ها را روی محور نمایش دهید.) (مشابه کار در کلاس صفحه ۹)

**حل الف:**  $N' = Z - N = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$W' = Z - W = \{\dots, -2, -1\}$

$Z' = \emptyset$ ،  $\emptyset' = Z$

$(N \cup W)' = N' \cap W' = \{\dots, -2, -1, 0\} \cap \{\dots, -2, -1\} = \{\dots, -2, -1\}$

**ب:**  $N' = \mathbb{R} - N$

اعداد طبیعی را توخالی می‌کنیم

$W' = \mathbb{R} - W$

اعداد حسابی را توخالی می‌کنیم

$\Rightarrow (N \cup W)' = N' \cap W' = \mathbb{R} - W$

محور پایینی

$Z' = \mathbb{R} - Z$ ،  $R' = \emptyset$ ،  $\emptyset' = \mathbb{R}$

**دو مجموعه جدا از هم:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند که اشتراک آن‌ها  $\emptyset$  باشد، اصطلاحاً می‌گوییم جدا از هم می‌باشند.

## فصل: مجموعه، الگو و دنباله



مجموعه‌های مهم در ریاضیات عبارت‌اند از:

اعداد حسابی  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد طبیعی  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

اعداد صحیح  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ، گویا  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعدادی که نتوانیم آن‌ها را به صورت نسبت {مجموعه اعداد گنگ  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  دو عدد صحیح بنویسیم مانند  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$ ،  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ،  $\dots$ }

اعداد حقیقی:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

رابطه بین مجموعه‌های بالا به صورت  $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  می‌باشد.

**مثال:** حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۲)

**الف)**  $(Z \cup W) \cap Q$       **ب)**  $(W - N) \cup Z$

**حل:** می‌دانیم اگر  $A \subset B$  باشد، آن‌گاه:  $A \cap B = A$  و  $A \cup B = B$  در نتیجه خواهیم داشت:

**الف)**  $(Z \cup W) \cap Q = Z \cap Q = Z$ ،      **ب)**  $(W - N) \cup Z = \{0\} \cup Z = Z$

### بازه‌ها

۴ نوع بازه برای نمایش مجموعه‌هایی وجود دارد که همگی آن‌ها زیرمجموعه  $\mathbb{R}$  هستند:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$  بازه بسته  $[a, b]$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$  بازه نیم‌باز  $[a, b)$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$  بازه نیم‌باز  $(a, b]$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$  بازه باز  $(a, b)$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

**نکته:** هر مجموعه مثل  $\mathbb{R} - \{a\}$  را می‌توانیم به صورت  $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$  نیز نمایش دهیم. مثلاً  $\mathbb{R} - \{2\}$  برابر است با  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ .

**مثال:** با فرض آن که  $A = (-\infty, -4)$ ،  $B = [-5, 6]$  و  $C = [0, +\infty)$  حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

(مشابه کار در کلاس صفحه ۵)

**الف)**  $(A \cup B) \cap C$       **ب)**  $(A - B) \cup C$

**حل:**

**الف)**  $A \cup B = (-\infty, 6] \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (-\infty, 6] \cap [0, +\infty) = [0, 6]$

برای محاسبه  $A - B$  باید عضوهای مشترک  $A$  و  $B$  را از  $A$  حذف کرده، آن‌چه از  $A$  باقی می‌ماند  $A - B$  است. به عبارت دیگر  $A - B = A - (A \cap B)$ .

**ب)**  $A - B = (-\infty, -5) \Rightarrow (A - B) \cup C = (-\infty, -5) \cup [0, +\infty)$

جواب به دست آمده را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت.

### تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

در حالت کلی تعداد اعضای مجموعه  $A \cup B$  از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

منظور از  $n$  تعداد اعضا می‌باشد.

دقت کنید اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، آن‌گاه  $n(A \cap B) = 0$  خواهد بود. ضمناً مجموعه  $A \cap B$  شامل عضوایی است که هم در  $A$  و هم در  $B$  باشند ولی  $A \cup B$  شامل عضوایی است که حداقل در یکی از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  قرار دارند. (یا  $A$  یا  $B$  یا هر دو)

**مثال:** در یک گروه، ۳۱ نفر حضور دارند، ۱۸ نفر آن‌ها به فوتبال و ۷ نفر به والیبال علاقه دارند، اگر ۴ نفر هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه‌مند باشند، چند نفر حداقل به یکی از ورزش‌های فوتبال یا والیبال علاقه دارند؟

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱)

**حل:**  $A$  را مجموعه علاقه‌مندان به فوتبال و  $B$  را مجموعه علاقه‌مندان به والیبال می‌نامیم؛ لذا  $n(A \cap B) = 4$  و  $n(B) = 7$ ،  $n(A) = 18$  می‌نامیم؛

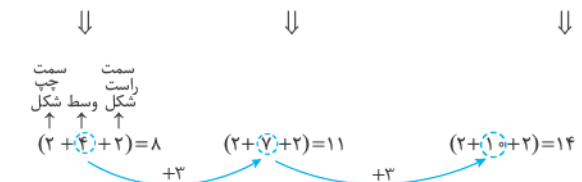
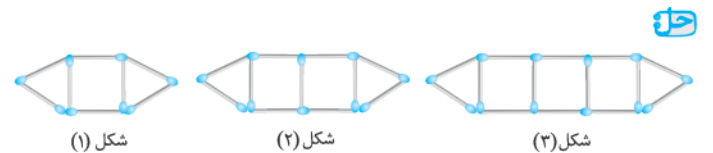
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 18 + 7 - 4 = 21$$

### الگو

در این بخش معمولاً چند شکل دنباله‌دار (مرتبط با هم) به ما داده می‌شود و باید با توجه به نظمی که در شکل‌ها می‌بینیم، نحوه تکمیل شدن شکل‌ها را بررسی کنیم تا قانون مربوط به آن الگو را کشف کنیم. در نهایت باید بتوانیم جمله عمومی الگو را بنویسیم. به کمک این جمله عمومی، می‌توانیم مقدار هر جمله دلخواه از الگو را به دست آوریم.

(جمله عمومی را با  $a_n, b_n, c_n, t_n, \dots$  نمایش می‌دهیم.)

**مثال:** با توجه به شکل‌های زیر، جمله عمومی  $(a_n)$  الگو را به دست آورده (یعنی شکل  $n$ ام چند چوب‌کبریت دارد). سپس مشخص کنید شکل دهم چند چوب‌کبریت دارد؟ (مقدار  $a_1$  چه قدر است؟)



ملاحظه می‌کنید که ۲ها در تمام شکل‌ها ثابت‌اند ولی اعداد وسط ۳ تا ۳ تا زیاد می‌شوند.

لذا: جمله عمومی،  $a_n = [2 + (3n - 1) + 2] = 3n + 5$  همیشه اعداد طبیعی را اختیار می‌کند. اگر در  $a_n = 3n + 5$  به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳ را قرار دهیم به جواب‌های ۸، ۱۱، ۱۴ می‌رسیم. (همان تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل‌های اول، دوم و سوم)

حال برای محاسبه  $a_8$  کافی است به جای  $n$  عدد ۸ را قرار دهیم:  $a_8 = 3n + 5 = \frac{(n-1)}{3} \rightarrow a_8 = 3(8) + 5 = 29$  تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل دهم:

**الگوی خطی:** در مثال قبل دیدید که اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۳ بود. به این گونه الگوها که اختلاف هر دو جمله متوالی آن‌ها، عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌گوییم و جمله عمومی آن‌ها  $a_n = kn + p$  می‌باشد. ( $k, p \in \mathbb{R}$ )

شماره جملات	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...
مقدار جملات	۸	۱۱	۱۴	...
		+۳	+۳	

ضمناً اختلاف هر دو جمله متوالی، ضریب  $n$  می‌باشد. در مثال قبلی دیدید که  $a_n = 3n + 5$  بود و تعداد چوب‌کبریت‌ها نیز ۳ تا ۳ تا زیاد شدند.

**مثال:** در یک الگوی خطی، جملات سوم و بیستم به ترتیب ۲ و ۳۶ هستند.

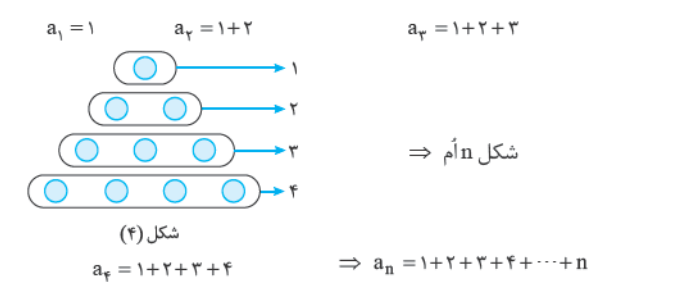
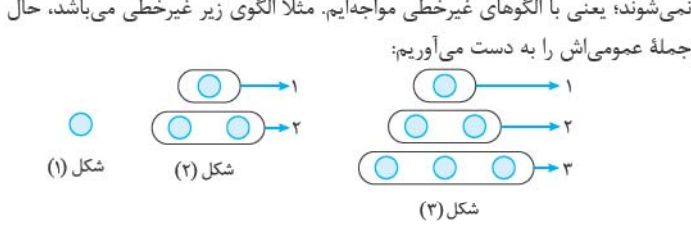
جمله عمومی الگو را به دست آورید. (مشابه مثال صفحه ۱۶)

**حل:** جمله عمومی را به صورت  $a_n = kn + p$  در نظر می‌گیریم. (یا می‌توانید به صورت  $t_n = an + b$  فرض کنید.)

$$\begin{aligned} a_3 = 2 &\Rightarrow k(3) + p = 2 \\ a_{20} = 36 &\Rightarrow k(20) + p = 36 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 3k + p = 2 \\ 20k + p = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} k = 2, p = -4$$

پس جمله عمومی این الگو برابر  $a_n = 2n - 4$  می‌باشد. (بعداً می‌بینید که الگوهای فیزی، همان دنباله حسابی هستند.)

**الگوهای غیرخطی:** گاهی اوقات جملات یک الگو با یک مقدار ثابت، زیاد یا کم نمی‌شوند؛ یعنی با الگوهای غیرخطی مواجه‌ایم. مثلاً الگوی زیر غیرخطی می‌باشد، حال جمله عمومی‌اش را به دست می‌آوریم:



ضمناً به عنوان یک فرمول رابطه  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  را حفظ کنید، پس در این مثال می‌توان گفت:

پس الگوی فوق، خطی نیست زیرا در  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$  توان ۲ هم برای  $n$  وجود دارد.

### دنباله

اگر یک سری از اعداد به طور متوالی پشت سر هم قرار گیرند، یک دنباله ایجاد می‌شود. پس اعداد مربوط به الگوها هم دنباله محسوب می‌شوند. به هر یک از این اعداد، جملات دنباله می‌گوییم. البته دقت کنید که در امتحانات مدارس همیشه شکل به شما داده نمی‌شود، گاهی اوقات چند جمله اول دنباله داده می‌شود و باید جمله عمومی آن را حدس بزنید.

**مثال:** در هر قسمت، سه جمله بعدی دنباله را نوشته و جمله عمومی آن را حدس بزنید:

(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۹)

**الف)**  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$

**ب)**  $0/1, 0/01, 0/001, \dots$

**پ)**  $-1, 8, -27, 64, \dots$

**الف)**  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \dots$

جمله عمومی دنباله:

**ب)**  $0/1, 0/01, 0/001, 0/0001, 0/00001, 0/000001, 0/0000001, \dots$

یا  $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$

جمله عمومی دنباله:

**پ)**  $-1, 8, -27, 64, \dots$

جملات را می‌توان این‌جوری فرض کرد:  $(-1)^3, 2^3, -(3)^3, 4^3, -(5)^3, 6^3, -(7)^3, \dots$



### دنباله هندسی

در این دنباله تمام جملات در یک عدد ثابت به نام قدرنسبت ضرب می‌شوند. مانند  $2, 6, 18, \dots$  قدرنسبت دنباله هندسی را معمولاً با  $r$  یا  $q$  نمایش می‌دهیم و برابر است با نسبت جملات متوالی. البته برای سادگی قدرنسبت را از رابطه  $r = \frac{a_2}{a_1}$  به دست می‌آوریم. برای یافتن جمله عمومی به جدول زیر دقت کنید.

جملات	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$	$a_n$
بازشده جملات	$a$	$a \cdot r$	$a \cdot r^2$	$a \cdot r^3$	$\dots$	$a \cdot r^{n-1}$
		$\times r$	$\times r$	$\times r$	$\dots$	$\times r$

پس جمله عمومی دنباله هندسی  $a_n = ar^{n-1}$  یا  $a_n = a \cdot q^{n-1}$  است؛ لذا خیلی سریع می‌توان گفت:  $a_{10} = a \cdot r^9$ ,  $a_{100} = a \cdot r^{99}$ ,  $a_{1000} = a \cdot r^{999}$ .

**مثال:** در دنباله زیر، جمله عمومی و جمله هشتم را به دست آورید. کدام جمله این دنباله برابر  $-40$  است؟  $5, -10, 20, \dots$

**حل:** جمله عمومی:  $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$ ,  $a_n = ar^{n-1} = 5 \times (-2)^{n-1}$

$\xrightarrow{n=8} a_8 = 5 \times (-2)^{8-1} = 5 \times (-2)^7 = -640$

$a_n = 5 \times (-2)^{n-1} \xrightarrow{a_n = -40} -40 = 5 \times (-2)^{n-1} \Rightarrow -8 = (-2)^{n-1}$

$\Rightarrow (-2)^2 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n-1 = 2 \Rightarrow n = 3$

**نکته:** در سؤالاتی که دو جمله دلخواه از دنباله هندسی به ما داده می‌شود هر یک از آن‌ها را با توجه به جمله عمومی باز کرده سپس طرفین دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم تا  $r$  پیدا شود. با جای‌گذاری  $r$  در یکی از روابط  $a$  هم پیدا می‌شود. (همیشه بهتره رابطه‌ای که توان در اون بزرگ‌تره رو در ردیف بالا قرار بدین.)

**مثال:** در یک دنباله هندسی، جملات سوم و ششم به ترتیب ۱۵ و ۴۰۵ است. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۲۶)

**حل:**  $a_3 = 15 \Rightarrow ar^2 = 15$   $a_6 = 405 \Rightarrow ar^5 = 405$   $\xrightarrow{\text{تقسیم روابط}} \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{405}{15}$

$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3$

$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } ar^2 = 15} a \times 3^2 = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{9}$   
 $\Rightarrow a_n = ar^{n-1} = \frac{15}{9} \times 3^{n-1}$

**نکته:** واسطه هندسی بین اعداد  $x$  و  $y$  برابر است با  $\pm \sqrt{xy}$  (به واسطه هندسی مثبت و به  $-\sqrt{xy}$  واسطه هندسی منفی می‌گوییم)؛ یعنی اعداد  $(x, +\sqrt{xy}, y)$  و  $(x, -\sqrt{xy}, y)$  تشکیل، ۲ دنباله هندسی می‌دهند؛ مثلاً واسطه هندسی مثبت بین ۴ و ۱۶ برابر است با:  $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$  ضمناً گاهی اوقات، باید چند واسطه هندسی بین دو عدد قرار دهیم که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم.

**مثال:** بین دو عدد  $-5$  و  $160$  چهار واسطه هندسی قرار دهید. (جمله اول  $-5$  است.) (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۲۶)

**حل:**  $-5, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad 160$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 جمله اول  $a$   $a_4$   
 $a_4 = 160 \Rightarrow ar^3 = 160 \xrightarrow{(a=-5)} -5 \times r^3 = 160$

$\Rightarrow r^3 = \frac{160}{-5} = -32 \Rightarrow r^3 = (-2)^3 \Rightarrow r = -2$

$\times(-2) \quad \times(-2) \quad \times(-2) \quad \times(-2)$   
 $-5, 10, -20, 40, -80, 160$

ملاحظه می‌کنید که اولاً علامت‌ها یک در میان  $(-)$  و  $(+)$  هستند، پس فعلاً  $(-1)^n$  را برای علامت‌ها در نظر می‌گیریم، ثانیاً شماره هر جمله به توان ۳ رسیده است؛ یعنی مثلاً در جمله چهارم، ۴ به توان ۳ رسیده پس در جمله  $n$ ،  $n$  به توان ۳ می‌رسد ( $n^3$ ) حال خواهیم داشت:

$a_n = (-1)^n \times n^3$

### دنباله حسابی

دنباله‌ای است که در آن، به تمام جملات مقداری ثابت اضافه یا از تمام جملات مقداری ثابت کم می‌شود؛ مانند دنباله  $1, 3, 5, 7, \dots$  یا  $10, 7, 4, \dots$  (همان الگوهای خطی هستند که خواندیم). به این عدد ثابت قدرنسبت می‌گوییم و معمولاً با  $d$  نمایش می‌دهیم. (در مثال اول  $d=2$  و در بعدی  $d=-3$  بود.) اگر جمله اول را با  $a$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

جملات	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$	$a_n$
بازشده جملات	$a$	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$\dots$	$a+(n-1)d$
		$+d$	$+d$	$+d$	$\dots$	$+d$

پس جمله عمومی (جمله  $n$ ام) دنباله حسابی به صورت  $a_n = a + (n-1)d$  می‌باشد. (به جای  $a$  و  $a_n$  می‌توانید از  $t_1$  و  $t_n$  هم استفاده کنید.) پس خیلی سریع می‌توان گفت:  $a_{10} = a + 9d$ ,  $a_{100} = a + 99d$ ,  $a_{1000} = a + 999d$

**مثال:** جمله عمومی دنباله زیر را به دست آورده و به کمک آن  $a_7$  و  $a_{10}$  را محاسبه کنید. کدام جمله از این دنباله برابر ۲۰۰ است؟  $-6, -4, -2, \dots$

**حل:** در دنباله حسابی، هر دو جمله متوالی را که از هم کم کنیم،  $d$  به دست می‌آید ولی راحت‌تر است که از  $a_7 - a_1 = d$  استفاده کنیم:

$d = a_7 - a_1 = (-4) - (-6) = 2$

جمله عمومی  $a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{a=-6, d=2} a_n = -6 + (n-1)(2) = -6 + 2n - 2 = 2n - 8$

$\xrightarrow{n=10} a_{10} = 2(10) - 8 = 12$

$\xrightarrow{n=200} a_{200} = 2(200) - 8 = 392$

$a_n = 2n - 8 \xrightarrow{a_n = 200} 200 = 2n - 8 \Rightarrow 2n = 208 \Rightarrow n = 104$

پس جمله صد و چهارم برابر با ۲۰۰ می‌باشد.

**مثال:** در یک دنباله حسابی جملات سوم و نهم به ترتیب ۱۱ و ۲۳ هستند. جمله عمومی را به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۶)

**حل:**  $\begin{cases} a_3 = 11 \\ a_9 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 11 \\ a + 8d = 23 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 7, d = 2$

$a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{a=7, d=2} a_n = 7 + (n-1) \times 2 = 7 + 2n - 2 = 2n + 5$

**نکته:** واسطه حسابی بین دو عدد  $x$  و  $y$  برابر است با  $\frac{x+y}{2}$ ، یعنی اعداد  $(x, \frac{x+y}{2}, y)$  یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. مثلاً واسطه حسابی بین  $-1$  و  $5$  برابر است با:  $\frac{-1+5}{2} = 2$ . ضمناً در بعضی از سؤالات از شما خواسته می‌شود بین دو عدد  $x$  و  $y$  چند عدد دیگر (چند واسطه حسابی) طوری قرار دهید که تمامی این اعداد، تشکیل دنباله حسابی دهند که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم. (برای این کار یک فرمول وجود دارد ولی چون کتاب نگفته ما هم نمی‌گیریم.)

**مثال:** بین دو عدد  $3$  و  $27$  پنج عدد طوری قرار دهید که با این دو عدد، تشکیل دنباله حسابی دهند. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۲۳)

**حل:**  $3, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad 27$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 جمله اول  $a$   $a_6$   $a_7$   
 $a_7 = 27 \Rightarrow a + 6d = 27 \xrightarrow{a=3} 3 + 6d = 27 \Rightarrow 6d = 24 \Rightarrow d = 4$

$+4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4$   
 $3, 7, 11, 15, 19, 23, 27$   
 واسطه‌های حسابی