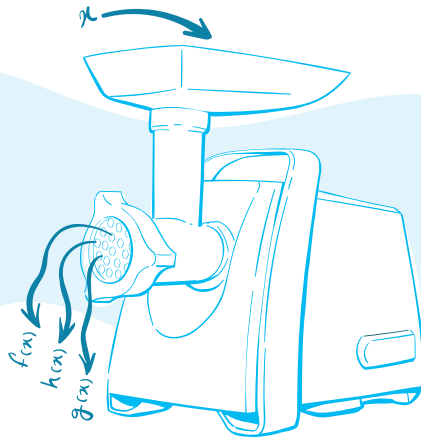


تابع

فصل اول



دروسنامه

توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک تابع چندجمله‌ای می‌نامند. اگر $a_n \neq 0$ باشد، چندجمله‌ای از درجه n است. دامنه تمام توابع چندجمله‌ای \mathbb{R} است. معروف‌ترین توابع چندجمله‌ای که با آن‌ها سروکار داریم در جدول زیر آمده‌اند.

نام تابع	درجه	ضابطه کلی، دامنه و برد	مثال
ثابت	۰	$f(x) = a$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \{a\}$	$f(x) = -2$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \{-2\}$
خطی غیر ثابت	۱	$f(x) = ax + b; a \neq 0$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$	$f(x) = -3x + 1$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$
درجه ۲	۲	$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$ $D_f = \mathbb{R}$, نقطه رأس: $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ $R_f = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty)$; $a > 0$ $R_f = (-\infty, f(-\frac{b}{2a})]$; $a < 0$	$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ نقطه رأس: $S(-1, 0)$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = [0, +\infty)$
درجه ۳	۳	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$	$f(x) = x^3 + 1$ $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}$

سؤال دانش‌پژوه (امیرحسین ذوالفقاری): آقا ببخشید به نظر می‌آید برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد که دامنه‌شون \mathbb{R} هست، همیشه \mathbb{R}

میشه! درسته؟

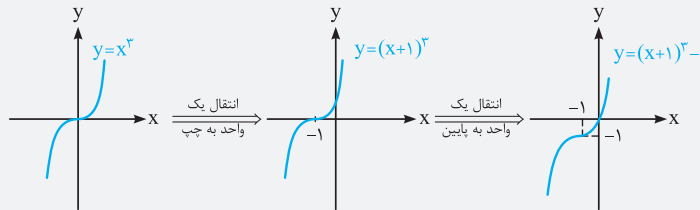
پاسخ آفرین به این نظریه! بله درسته.

مثال نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ را رسم کنید.

پاسخ برای استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

حال به کمک نمودار $y = x^3$ ، نمودار تابع حاصل را رسم می‌کنیم:



مثال اگر نمودار مقابل، مربوط به تابع $y = -(x+a)^3 + b$ باشد، a و b را بیابید.

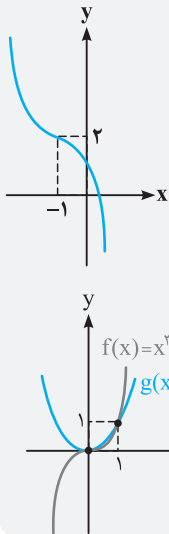
پاسخ با توجه به شکل، مشخص است که این نمودار از روی تابع $y = -x^3$ ساخته شده است، به این شکل که

تابع $y = -x^3$ ، ۱ واحد به چپ حرکت کرده است، پس $a = 1$. سپس این تابع ۲ واحد به بالا رفته است پس $b = 2$ می‌باشد.

رسم توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ در یک دستگاه: کتاب درسی توجه خاصی به نمودار این دو تابع،

به‌خصوص در فاصله (۰،۱) داشته است. همان‌طور که در سال دهم دیدید به‌زای $0 < x < 1$ ، $x^3 < x^2$ می‌باشد. (اگر یادتان باشد، هرچه توان x در این فاصله بیشتر می‌شد، مقدار آن کوچک‌تر می‌شد.) بنابراین نمودار تابع $f(x) = x^2$ در

فاصله (۰،۱) بالاتر از نمودار $g(x) = x^3$ قرار می‌گیرد. نمودار این دو تابع را در حالت کلی ببینید:



۱- تابع $y = x^3$ را ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال داده‌ایم. نمودار تابع حاصل از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۲- کدام گزینه در مورد توابع $f(x) = x^3 - 4$ و $g(x) = -(x+2)^3 + 1$ صحیح نیست؟

(۱) نمودار تابع $g(x)$ از ربع اول دستگاه مختصات عبور نمی‌کند. (۲) دامنه هر دو تابع یکسان است.

(۳) برد f با برد g یکسان نیست. (۴) نمودار تابع $f(x)$ از ربع دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

۳- در کدام یک از توابع چندجمله‌ای زیر، با قرینه‌کردن نمودار تابع نسبت به محور x ها و سپس با قرینه‌کردن نمودار حاصل نسبت به محور

y ها، به نمودار تابع اولیه می‌رسیم؟

- (۱) $y = (x-1)^3$ (۲) $y = (x+1)^3$ (۳) $y = x^3$ (۴) $y = x^2$

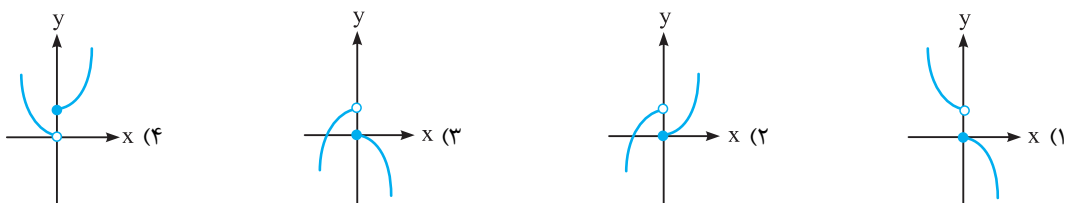
۴- نمودار تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

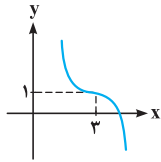
- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۵- اگر $f(x) = x^3 + 2$ و $g(x) = -(x - \frac{1}{3})^3 - \frac{28}{27}$ باشند، آن‌گاه نمودار تابع $(g+f)(x)$ از کدام ربع یا ربع‌های دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

- فقط چهارم (۱) فقط دوم (۲) اول و دوم (۳) سوم و چهارم (۴)

۶- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 & ; x \geq 0 \\ x^3 + 1 & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟





$$y = (x + 3)^3 + 1 \quad (۲)$$

$$y = (3 - x)^3 - 1 \quad (۴)$$

۷- ضابطه تابع مربوط به نمودار مقابل کدام است؟

$$y = (x - 3)^3 + 1 \quad (۱)$$

$$y = (3 - x)^3 + 1 \quad (۳)$$

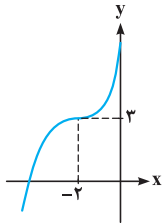
۸- اگر نمودار تابع $y = (x - a)^3 + b$ به صورت مقابل باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) -۵



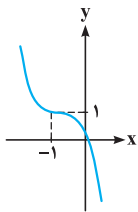
۹- اگر نمودار تابع $f(x) = (a - x)(x^2 + bx + c)$ به صورت مقابل باشد، $a + b + c$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) -۶

(۳) ۳

(۴) صفر



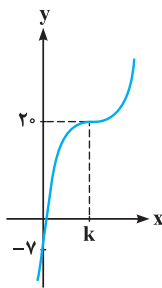
۱۰- اگر نمودار $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ به صورت مقابل باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۲۷

(۳) -۴

(۴) ۲۰



برگرفته از کتاب درسی

۱۱- در چه بازه‌ای نمودار $f(x) = x^3$ ، بالاتر از نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد؟

(۴) $(-\infty, 1)$

(۳) $(0, 1)$

(۲) $(1, +\infty)$

(۱) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

۱۲- در چه فاصله‌ای نمودار تابع $f(x) = x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x) = x|x|$ قرار می‌گیرد؟

(۴) $(0, 1)$

(۳) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

(۲) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

(۱) $(-1, 0) \cup (0, 1)$

۱۳- نمودار تابع $y = 3 - (x-1)^3$ خط $y = a^2x + b$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(۴) بیش از ۲

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) صفر

درسنامه ۲

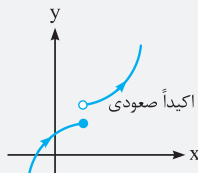
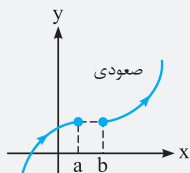
توابع صعودی و نزولی

تعریف: تابع f را صعودی می‌گوییم، اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ کاهش نیابند. یعنی به ازای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

در این تعریف اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (علامت \leq به $<$ تبدیل شود)، آن‌گاه تابع f را اکیداً صعودی می‌گوییم.

مثال



سؤال دانش‌پژوه (رها زنری): آقا فرق اون دوتا شکل اول، سمت چپ، چیه که یکی صعودیه و یکی اکیداً صعودیه؟

پاسخ بین، توی شکل سمت چپ با این که $a < b$ ولی $f(a) = f(b)$ ، همین کافیست که بگیریم تابع اکیداً صعودی نیست. بذار فعالیت رو راحت کنیم؛ فرق صعودی و اکیداً صعودی اینه که تابع صعودی می‌تونه دو یا چند نقطه هم عرض داشته باشه ولی اکیداً صعودی نمی‌تونه.

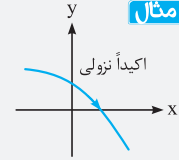
نکته هر تابع اکیداً صعودی، صعودی نیز می‌باشد.

طریقه شناخت توابع صعودی از روی نمودار: هرگاه در یک تابع پیوسته، از سمت چپ به راست روی نمودارها با فلش حرکت کنید و جهت حرکت فلش‌ها رو به پایین نباشد، (فلش‌ها در هر نقطه رو به بالا یا ثابت باشند) تابع صعودی است.

تعریف: تابع f را نزولی می‌گوییم، اگر با افزایش مقادیر x ، مقادیر y ها افزایش نیابند. یعنی به ازای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم:

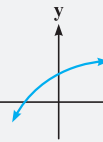
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

در این تعریف اگر $f(x_1) > f(x_2)$ شود (علامت \geq به $>$ تبدیل شود)، آن‌گاه تابع f را اکیداً نزولی می‌گوییم.

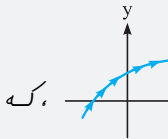


نکته هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز می‌باشد.

طریقه شناخت توابع نزولی از روی نمودار: هرگاه در یک تابع پیوسته، از سمت چپ به راست روی نمودارها با فلش حرکت نمایید و جهت حرکت فلش‌ها رو به بالا نباشد (رو به پایین یا ثابت باشد) تابع نزولی است.



سؤال دانش‌پژوه (بهرام پهلپه): آقا بعضی شکل‌ها این طوره: x ، الان این شکل خودش دو طرف فلش داره، معلوم نیست که صعودیه یا نزولی؟



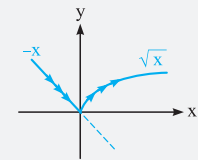
پاسخ آقای بهرام خان، دقت کن، من گفتم خودتون از چپ به راست فلش بزنید. پس شکل شما باید این طوری فلش بفرسه: x ، که مشرفه فلش‌ها از چپ به راست دارن مرتب رو به بالا میرن پس تابع صعودیه.

نکته اگر تابعی در قسمتی از دامنه‌اش ثابت باشد، در آن قسمت هم صعودی و هم نزولی است. در حالت کلی، تابع ثابت، تابعی هم صعودی و هم نزولی است.

نکته اگر تابع f بر دامنه‌اش فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، به آن یکتوا می‌گوییم. به همین ترتیب، اگر f بر دامنه‌اش فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، به آن اکیداً یکتوا می‌گوییم.

تذکر دقت کنید اگر تابعی در قسمتی از دامنه‌اش اکیداً صعودی و در قسمتی دیگر اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است یا به عبارتی اکیداً یکتوا نیست.

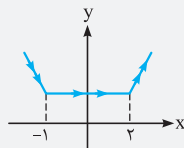
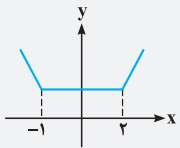
مثال وضعیت تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ را از لحاظ صعودی و نزولی بودن مشخص نمایید.



پاسخ ابتدا تابع داده‌شده را در بازه‌های مربوط رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که تابع به ازای $x \leq 0$ ، اکیداً نزولی و به ازای $x \geq 0$ ، اکیداً صعودی است. دقت کنید، با توجه به این‌که تابع در قسمتی از دامنه خود اکیداً نزولی و در قسمتی دیگر اکیداً صعودی است، این تابع اکیداً یکتوا نیست.

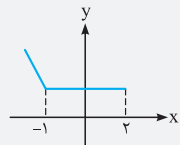
مثال با توجه به شکل مقابل، بزرگ‌ترین بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، اکیداً صعودی، نزولی یا اکیداً نزولی است را مشخص نمایید.



پاسخ با توجه به مطالب گفته شده، تابع فوق در بازه $(-\infty, 2]$ نزولی و در بازه $(-1, +\infty)$ صعودی است.

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آژار): آقا اشتباه نکردید! به نظر بزرگ‌ترین بازه نزولی بودن، $(-\infty, -1]$ و بزرگ‌ترین بازه صعودی بودن $(2, +\infty)$ میشن.

پاسخ نه خانم! گفتیم تابع ثابت هم صعودی و هم نزولیه. پس با توجه به شکل و فلش‌ها، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع نزولیه، به صورت شکل مقابل میشه. یعنی از $-\infty$ تا 2 . به همین ترتیب از -1 تا $+\infty$ تابع صعودیه. یعنی قسمت ثابت در هر دو جواب میار. هم چنین با توجه به مطالب گفته شده، تابع در بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $(2, +\infty)$ به ترتیب اکیداً نزولی و اکیداً صعودی است.

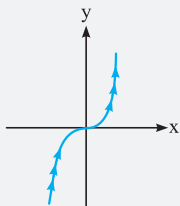


نکات

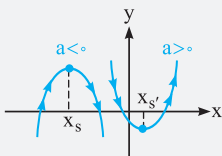
- ۱) مجموع دو تابع صعودی (اکیداً صعودی)، تابعی صعودی (اکیداً صعودی) است. همچنین مجموع یک تابع صعودی و یک تابع اکیداً صعودی نیز اکیداً صعودی است.
- ۲) مجموع دو تابع نزولی (اکیداً نزولی)، تابعی نزولی (اکیداً نزولی) است. همچنین مجموع یک تابع نزولی و یک تابع اکیداً نزولی نیز، اکیداً نزولی است.
- ۳) اگر تابع f ، تابعی صعودی (نزولی) باشد، آنگاه تابع $-f$ ، تابعی نزولی (صعودی) خواهد بود.
- مثال ۱) تابع $y = x^3 + x$ تابعی اکیداً صعودی است. زیرا $y_1 = x^3$ و $y_2 = x$ هر دو توابعی اکیداً صعودی هستند و لذا مجموع آنها نیز اکیداً صعودی است.
- مثال ۲) تابع $y = x^3$ تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین تابع $y = -x^3$ تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

بررسی یکنوایی توابع مهم که در کتاب درسی آمده‌اند:

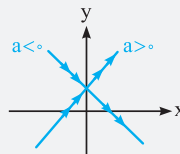
۱) توابع چندجمله‌ای مهم:



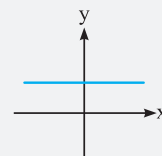
تابع $y = x^3$ تابعی اکیداً صعودی است.



تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، به شرط $a > 0$ ابتدا نزولی (در بازه $(-\infty, x_s]$) و سپس صعودی (در بازه $[x_s', +\infty)$) است. با شرط $a < 0$ این تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.



تابع خطی $y = ax + b$ با شرط $a > 0$ اکیداً صعودی و با شرط $a < 0$ اکیداً نزولی است.

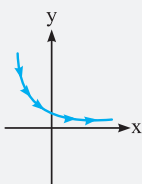


تابع ثابت $f(x) = a$ هم صعودی و هم نزولی است.

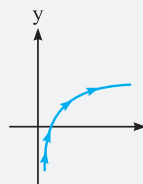
۲) توابع نمایی و لگاریتمی:



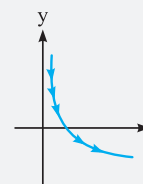
تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $a > 1$ ، اکیداً صعودی است.



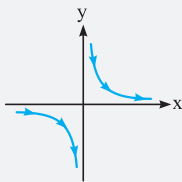
تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی است.



تابع $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$ ، اکیداً صعودی است.

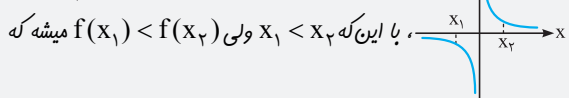


تابع $y = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی است.



۳) تابع کسری $y = \frac{1}{x}$: این تابع در هر یک از بازه‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ به صورت جداگانه نزولی است اما در کل دامنه‌اش، نه نزولی و نه صعودی است.

سؤال دانش‌پژوه (جلال شریف‌زاده): آقا چرا آخه؟



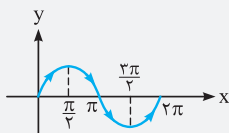
پاسخ بچه این جور که تو سؤال پرسیری من فکر کردم زلزله اومره! ببین تو شکل $x_1 < x_2$ ولی $f(x_1) < f(x_2)$ میشه که

این خلاف تعریف نزولی بودن. (یادتونه که برای نزولی بودن، با شرط $x_1 < x_2$ ، باید $f(x_1) \geq f(x_2)$ می‌شد.)

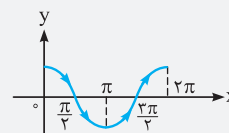
سؤال همون قبلی: آقا، پس قضیه فلش‌ها چی! مرتب رو به پایین هستن!

پاسخ پسر فوب، گفتیم آگه تابع پیوسته بود و فلش‌ها رو به پایین اون قضیه درسته. این‌جا هم تو بازه‌هایی که تابع پیوسته هست مثل $(0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0)$ اون قضیه درسته و می‌گیم تابع در فاصله $(0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0)$ نزولیه ولی در کل، نه صعودی نه نزولیه.

۴) توابع مثلثاتی:

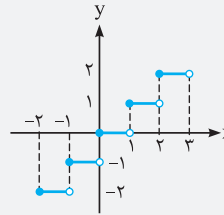


تابع $y = \sin x$ ، تابعی نوسانی است و مرتباً از نزولی به صعودی و صعودی به نزولی تغییر وضعیت می‌دهد. مثلاً در فاصله $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ اکیداً صعودی و در فاصله $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.



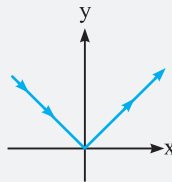
تابع $y = \cos x$ ، تابعی نوسانی است و مرتباً از نزولی به صعودی و برعکس تغییر وضعیت می‌دهد. مثلاً در فاصله $[0, \pi]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.

۵) تابع جزء صحیح:



تابع $y = [x]$ تابعی صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

۶) تابع قدر مطلق:

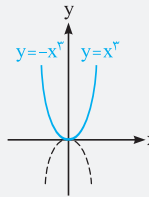


تابع $y = |x|$ در فاصله $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در فاصله $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. اما در \mathbb{R} نه صعودی و نه نزولی است.

نکته: برای رسم توابع شامل قدر مطلق، کافی است با توجه به ریشه عبارت داخل قدر مطلق، ابتدا آن را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس آن را رسم کنیم.

مثال: نمودار $f(x) = x^2 |x|$ را رسم کنید.

پاسخ:



$$f(x) = x^2 |x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot x & ; x \geq 0 \\ x^2 \cdot (-x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0 \\ -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$

تعیین صعودی یا نزولی بودن از روی زوج مرتبها: طبق تعریف اگر به ازای افزایش مقادیر x (مؤلفه‌های اول) مقادیر y (مؤلفه‌های دوم) مرتباً زیاد شوند، تابع اکیداً صعودی است و اگر کاهش نیابند صعودی است. به همین ترتیب نزولی و اکیداً نزولی تعریف می‌شوند. مثلاً:

$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\} \Rightarrow$ صعودی غیر اکید $5 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ مؤلفه‌های دوم

$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0)\} \Rightarrow$ اکیداً نزولی $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ مؤلفه‌های دوم

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \Rightarrow$ نه صعودی و نه نزولی است $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ مؤلفه‌های دوم

برگرفته از کتاب درسی

۱۴- تابع $f(x) = -\sin x$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

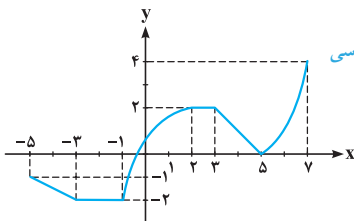
- (۱) $[0, \pi]$ (۲) $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (۳) $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ (۴) $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

برگرفته از کتاب درسی

۱۵- تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ در کدام بازه زیر صعودی است؟

- (۱) $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ (۲) $(\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3})$ (۳) $(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ (۴) $(\pi, 2\pi)$

• با توجه به نمودار تابع f که به صورت مقابل می‌باشد، به چهار سؤال زیر پاسخ دهید. برگرفته از کتاب درسی



۱۶- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $[4, 6]$ (۳) $[-3, 2]$ (۴) $[-3, 3]$

۱۷- اجتماع بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $[-1, 5]$ (۲) $[-1, 2] \cup [3, 5]$ (۳) $[-5, 3]$ (۴) $[-5, 5]$

۱۸- چند نقطه وجود دارد که تابع، قبل از آن نقطه اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹- چند نقطه با طول صحیح نامنفی وجود دارد که تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰- تابع $f(x) = \cos x$ مفروض است. در کدام بازه زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه، رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟

- (۱) $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ (۲) $(2\pi, 3\pi)$ (۳) $(\pi, 2\pi)$ (۴) $(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$

برگرفته از کتاب درسی

- ۲۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟
 الف) هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک است.
 ب) هر تابع یک به یک، حتماً اکیداً یکنوا است.
 پ) تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد، وجود ندارد.

۱) صفر (۲) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۲۲- تابع $f(x) = 3 - 2\sqrt{x}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) همواره مثبت (۴) همواره منفی

۲۳- وضعیت تابع $y = 2^{x-1}$ کدام است؟

۱) همواره صعودی (۲) همواره نزولی (۳) برای $x > 1$ صعودی و برای $x < 1$ نزولی (۴) برای $x > 1$ نزولی و برای $x < 1$ صعودی

۲۴- اگر $y = \left(\frac{m+2}{3}\right)^x$ تابعی نزولی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $0 < m < 1$ (۲) $0 \leq m \leq 1$ (۳) $-2 < m < 1$ (۴) $-2 \leq m \leq 1$

برگرفته از کتاب درسی

۲۵- کدام تابع زیر در دامنه خود، تابعی نزولی است؟

۱) $y = 5^x$ (۲) $y = \sqrt[3]{x}$ (۳) $y = -\log_{\frac{1}{5}} x$ (۴) $y = -\sqrt{x-3}$

برگرفته از کتاب درسی

۲۶- کدام گزینه در مورد تابع $y = \frac{1}{x}$ صحیح است؟

۱) در بازه $(0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است. (۲) در بازه $(0, +\infty)$ ، صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست. (۳) در بازه $(-\infty, 0)$ ، اکیداً نزولی است. (۴) در بازه $(-\infty, 0)$ ، نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

برگرفته از کتاب درسی

۲۷- چه تعداد از توابع زیر بیانگر تابعی اکیداً یکنوا می‌باشند؟

الف) $y = \sqrt[3]{-x}$ (ب) $y = \frac{1}{x}$ (پ) $y = x^3$ (ت) $y = |x|$
 ۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸- از بین توابع $f(x) = |x|$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $h(x) = -x^3$ و $i(x) = \log_{0.5} x$ ، تابعی که یک‌به‌یک و غیر یکنوا بوده را انتخاب کرده و آن را با تابعی که در کل \mathbb{R} نزولی می‌باشد، جمع کرده‌ایم. مقدار تابع حاصل به ازای $x = 2$ کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) $-7/5$ (۲) $-0/5$ (۳) -6 (۴) ۱

برگرفته از کتاب درسی

۲۹- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} -2x-3 & ; x \leq -4 \\ 3 & ; -4 < x < 2 \\ 3x-2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ صحیح نیست؟

۱) تابع در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. (۲) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است $[-4, -\infty)$ می‌باشد. (۳) طول بازه‌ای که تابع در آن ثابت می‌باشد، ۶ است. (۴) تابع در بازه $[1, 5]$ صعودی می‌باشد.

۳۰- تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 & ; x \geq 0 \\ x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ تابعی:

۱) اکیداً نزولی است. (۲) اکیداً صعودی است. (۳) غیر یکنوا ولی یک‌به‌یک است. (۴) غیر یکنوا و غیر یک‌به‌یک است.

۳۱- کدام یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x \leq 0 \\ \sqrt{x-1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ صحیح است؟

۱) تابع در دامنه f اکیداً صعودی است. (۲) تابع در دامنه f صعودی است. (۳) تابع در دامنه f اکیداً نزولی است.

۳۲- تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \cos x & ; \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

۱) نزولی است. (۲) صعودی است. (۳) غیر یکنوا ولی یک‌به‌یک است. (۴) غیر یکنوا و غیر یک‌به‌یک است.

ریاضی داخل ۹۱

۳۳- تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) منفی

۳۴- نمودار تابع $y = \frac{|x|}{x^2}$:

- (۱) اکیداً یکنوا است. (۲) در $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
(۳) در $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی و در $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. (۴) یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نیست.

برگرفته از کتاب درسی

۳۵- تابع $y = x|x|$:

- (۱) در فاصله $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی و در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است. (۲) در فاصله $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی و در $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی است.
(۳) در کل \mathbb{R} اکیداً صعودی است. (۴) در کل \mathbb{R} اکیداً نزولی است.

۳۶- اگر $f+g$ و $f-g$ توابعی صعودی در \mathbb{R} باشند، کدام تابع زیر نیز حتماً در \mathbb{R} صعودی است؟

- (۱) f (۲) g (۳) $-f$ (۴) $-g$

۳۷- تابع $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = x + |x|$ به ترتیب: ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) اکیداً صعودی و صعودی غیر اکید هستند. (۲) اکیداً صعودی و اکیداً صعودی هستند.
(۳) صعودی غیر اکید و اکیداً صعودی هستند. (۴) صعودی غیر اکید و صعودی غیر اکید هستند.

۳۸- اگر تابع $f(x) = x^2 + 6x - 7$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

- (۱) -3 (۲) 3 (۳) 1 (۴) صفر

۳۹- حدود a برای آن که تابع $y = (a-2)x^2 - x$ در فاصله $(1, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $a \geq \frac{5}{2}$ (۲) $2 < a \leq \frac{5}{2}$ (۳) $a < \frac{5}{2}$ (۴) $a > 2$

۴۰- اگر بازه $(-\infty, -1]$ بزرگترین بازه‌ای باشد که تابع $y = kx^2 + \frac{1}{k}x + c$ در آن اکیداً صعودی است، k کدام است؟

- (۱) 2 (۲) -2 (۳) ± 2 (۴) 1

۴۱- بزرگترین بازه‌ای که تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در آن صعودی می‌باشد، $[3, -\infty)$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(1, -6)$ (۲) $(-2, 12)$ (۳) $(-3, 12)$ (۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

۴۲- بازه $(2, +\infty)$ ، بزرگترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = ax^2 + 2x + 1$ در آن نزولی است. در این صورت نمودار f خط $y = x$ را در چند

نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۴۳- تابع $f = \{(a^2, b), (a+b, 2b-1), (2, a-1)\}$ تابعی هم صعودی و هم نزولی است. مجموع اعضای دامنه f ، کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 5 (۳) 7 (۴) 9

۴۴- اگر تابع $f = \{(-1, 3), (4, 8), (3, m^2-1), (5, 14)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $2 \leq |m| \leq 3$ (۲) $2 < |m| < 3$ (۳) $3 < |m| < 8$ (۴) $8 < |m| < 14$

۴۵- تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 6 \\ a \times 3^x & ; x \leq 1 \end{cases}$ به‌ازای چند مقدار صحیح a ، صعودی اکید است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) بی‌شمار

۴۶- تابع $f(x) = 2|x-4| + a(x+2)$ صعودی اکید است. حدود a کدام است؟

- (۱) $a > 4$ (۲) $a > -2$ (۳) $a > -4$ (۴) $a > 2$

تجربی داخل ۹۸

۴۷- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ ، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

تجربی خارج ۹۸

۴۸- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۴۹- در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

تجربی داخل ۹۷

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

۵۰- تابع f صعودی بوده و از مبدأ مختصات می‌گذرد. دامنه تابع g با ضابطه $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (۳) \mathbb{R} (۴) D_f

۵۱- تابع f ، صعودی اکید بوده و $f(2) = 0$ است. دامنه تعریف $y = \sqrt{(x+3)f(5-x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 2]$ (۲) $[-3, 3]$ (۳) $[3, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

۵۲- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < k \\ x^2+x & ; x \geq k \end{cases}$ صعودی اکید است. حداقل مقدار k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

درسنامه ۳

ترکیب دو تابع به صورت ضابطه‌ای

ترکیب دو تابع f و g به صورت $(f \circ g)(x)$ یا $f(g(x))$ ، یعنی این‌که در تابع $f(x)$ به جای همه x ها، $g(x)$ را قرار دهیم. مثلاً اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \stackrel{\text{به جای } x \text{ هادر تابع } f}{\text{قرار می‌دهیم.}}}{\frac{g(x) = x^2}{f(x^2)}} = 2(x^2) + 1 = 2x^2 + 1$$

به‌طور مشابه اگر بخواهیم $(g \circ f)(x)$ یا $g(f(x))$ را بیابیم، در تابع $g(x)$ ، به‌جای تمام x ها، $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \stackrel{\text{به جای } x \text{ هادر تابع } g}{\text{قرار می‌دهیم.}}}{\frac{f(x) = 2x+1}{g(2x+1)}} = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

تذکره! از این به بعد هر وقت صحبت از ترکیب دو تابع مثل $f(g(5))$ شد، سریع دوتا فلش می‌کشیم و ورودی و خروجی تابع‌های f و g را مشخص می‌کنیم. نگاه کنید:

$$f(g(5)) : \underset{\text{ورودی } g}{5} \xrightarrow{g} g(5) \xrightarrow{f} f(g(5))$$

ابتدای فلش‌ها یعنی ورودی و انتهای فلش‌ها یعنی خروجی تابعی که بالای فلش‌ها نوشته‌ایم.

سؤال دانش‌پژوه (اکرم مهتابی): آقا اجازه! یعنی الان $g(5)$ که اون وسط گیر کرده، هم انتهای فلش اولیه و هم ابتدای فلش دومی! قضیه چیه؟
پاسخ ببین قائم، به نکته خوبی اشاره کردی، $g(5)$ چون انتهای فلش اولی است میشه فروبی تابع g و چون ابتدای فلش دومی است میشه ورودی تابع f . یعنی در ترکیب دو تابع همواره فروبی تابع اولی به عنوان ورودی برای تابع بعدی مصوب می‌شه و باید هم‌تاً در دامنه اون تابع قرار داشته باشه وگرنه ترکیب دو تابع غلط میشه.

تجربی داخل ۸۱

مثال اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ راه اول:

$$\begin{aligned} (g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right) &= g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \stackrel{\text{به جای } x, \text{ قرار می‌دهیم.}}}{\frac{f(x) = \sin x}{g\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}} = g\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \stackrel{\text{به جای } x, \text{ قرار می‌دهیم.}}}{\frac{g(x) = x\sqrt{1-x^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

راه دوم: سریع دوتا فلش می‌کشیم و کار را ادامه می‌دهیم:

$$\frac{\pi}{4} \xrightarrow{f(x) = \sin x} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{g(x) = x\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \stackrel{\text{طبق محاسبه فوق}}{=} \frac{1}{2}$$

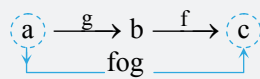
مثال ۱۰۰۰ در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & ; x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & ; x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $(f \circ f)(\frac{3}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ چون تابع f دوضابطه‌ای است، باید حواسمان باشد که ورودی تابع f ، در شرط کدام ضابطه، صدق می‌کند ($x < 1$ یا $x \geq 1$)؟ بنابراین:

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{f(x) = 2x - \frac{3}{4}} 2(\frac{3}{2}) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

ترکیب دو تابع از روی زوج مرتبها

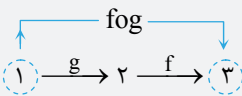


اگر $(a, b) \in g$ و $(b, c) \in f$ باشد و بخواهیم $f \circ g$ را بسازیم، سریع دوتا فلش به صورت مقابل رسم می‌کنیم:

در این صورت زوج مرتب (a, c) عضو تابع $f \circ g$ خواهد بود. در حقیقت فقط ابتدا و انتهای مسیر مهم است. مثل جابه‌جایی در فیزیک!

سؤال دانش‌پژوه (لیلا سیام): آقا اجازه، چرا اول تابع g رو روی فلش گذاشتین؟

پاسخ بین دو تابع $f \circ g$ فب اول عدد وارد تابع g میشه و بعد وارد تابع f میشه. مثلاً آگه تابع $g \circ f$ رو می‌فواستیم اول تابع f رو روی فلش قرار می‌داریم و بعد تابع g رو.



مثال ۱۰۰۰ اگر $f = \{(2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 4)\}$ باشد، تابع $f \circ g$ را بنویسید.

پاسخ $\Rightarrow f \circ g = \{(1, 3)\}$

۴ نمی‌تواند وارد تابع f شود چون در دامنه f قرار ندارد. $2 \xrightarrow{g} 4$

مثال ۱۰۰۰ اگر $f = \{(5, 2), (0, 3), (4, 5), (1, 6)\}$ و $g(x) = x - \sqrt{x+2}$ باشد، از رابطه $f(g(a)) + g(f(5)) = 5$ عدد a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ ابتدا $g(f(5))$ را حساب کرده و در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$g(f(5)) = \frac{(5, 2) \in f}{5 \xrightarrow{f} 2} g(2) = \frac{g(x) = x - \sqrt{x+2}}{2 - \sqrt{2+2}} = 2 - \sqrt{2+2} = 2 - \sqrt{4} = 2 - 2 = 0 \quad (*)$$

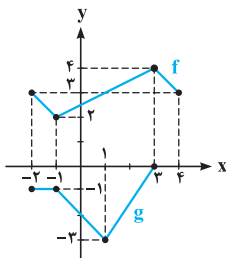
بنابراین:

$$f(g(a)) + g(f(5)) = 5 \xrightarrow{(*)} f(g(a)) + 0 = 5 \Rightarrow f(g(a)) = 5$$

از طرفی با توجه به تابع f می‌دانیم $f(4) = 5$. پس داریم:

$$\begin{cases} f(g(a)) = 5 \\ f(4) = 5 \end{cases} \Rightarrow g(a) = 4 \xrightarrow{g(x) = x - \sqrt{x+2}} a - \sqrt{a+2} = 4$$

به جای حل کردن معادله فوق، کافی است گزینه‌ها را به جای a در معادله فوق قرار دهیم که در این صورت $a = 7$ جواب است.



۵۳- با توجه به نمودار توابع f و g ، حاصل $\frac{(f \circ g)(-1) + (g \circ f)(-2)}{(f \circ f)(3)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) صفر (۴) $-\frac{3}{2}$

۵۴- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 5), (1, 0), (4, 1)\}$ باشد، تابع $f \circ g - g \circ f$ کدام است؟

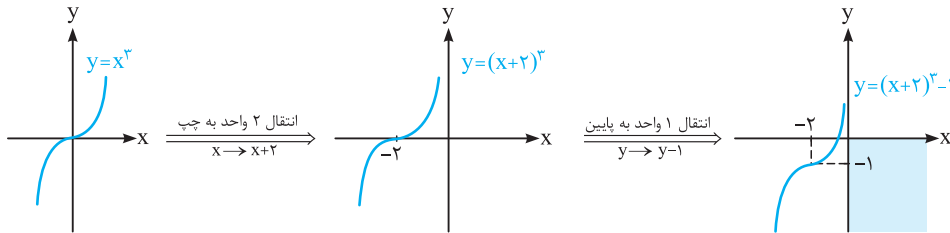
- (۱) $\{(1, -2), (1, -2)\}$ (۲) $\{(1, -2)\}$ (۳) $\{(-2, 1)\}$ (۴) $\{(2, 5), (1, -2)\}$

۵۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{x, 2x-1 \mid x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

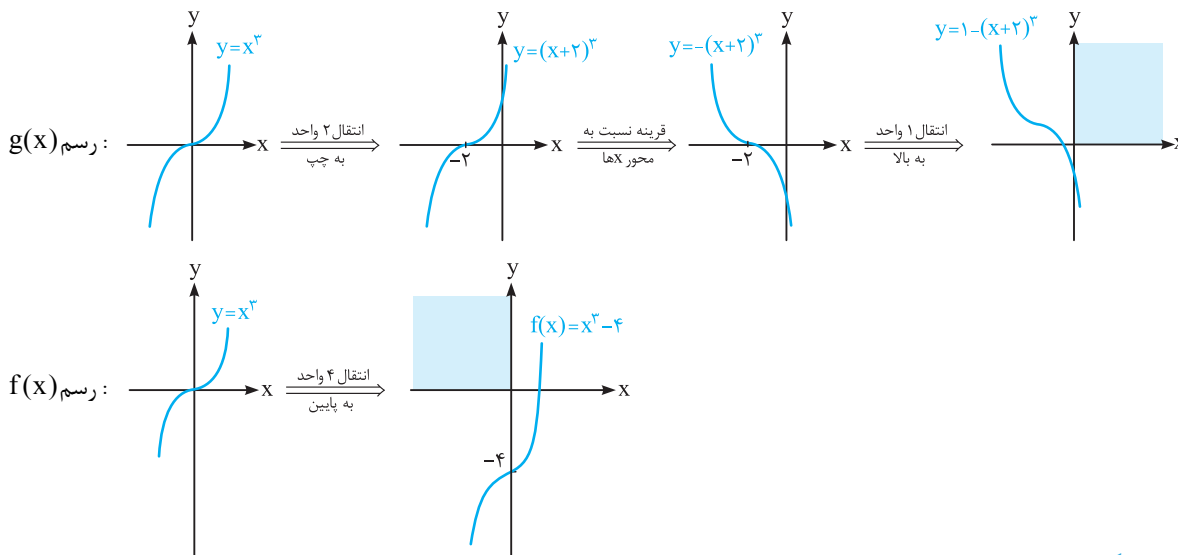
پاسخ تشریحی

۴ ۱



۳ ۲

دامنه تمام توابع چندجمله‌ای IR است. هم‌چنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجه فرد برابر IR می‌باشد. پس گزینه (۲) صحیح و گزینه (۳) نادرست است. با رسم توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌توان درستی گزینه‌های (۱) و (۴) را نیز نشان داد:



بررسی گزینه‌ها: ۳ ۳

$$۱) y = (x - 1)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Xها}} y = -(x - 1)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Yها}} y = -(-x - 1)^3 \Rightarrow y = (x + 1)^3 \quad \times$$

$$۲) y = (x + 1)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Xها}} y = -(x + 1)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Yها}} y = -(-x + 1)^3 \Rightarrow y = (x - 1)^3 \quad \times$$

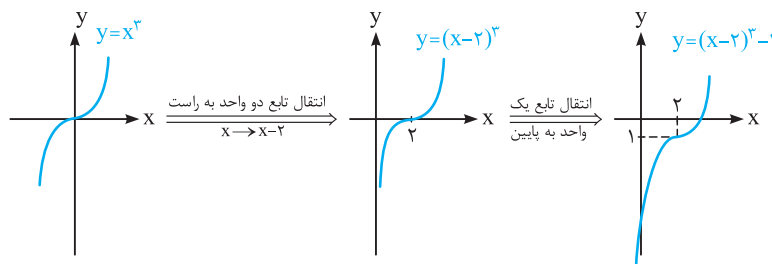
$$۳) y = x^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Xها}} y = -x^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Yها}} y = -(-x)^3 \Rightarrow y = x^3 \quad \checkmark$$

$$۴) y = x^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Xها}} y = -x^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Yها}} y = -(-x)^3 \Rightarrow y = -x^3 \quad \times$$

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

۲ ۴

حال به کمک نمودار $y = x^3$ تابع موردنظر را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است، این نمودار از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) = -\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{28}{27} + x^3 + 2 = -\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}\right) - \frac{28}{27} + x^3 + 2$$

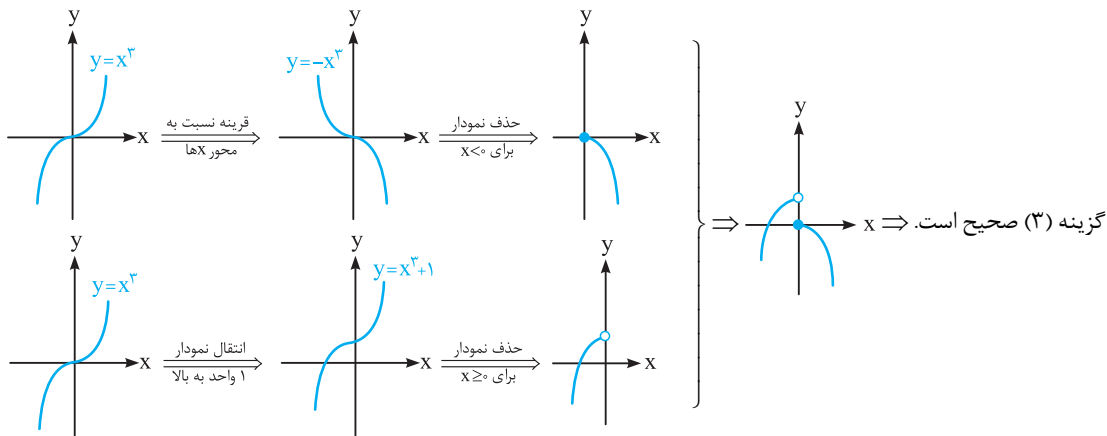
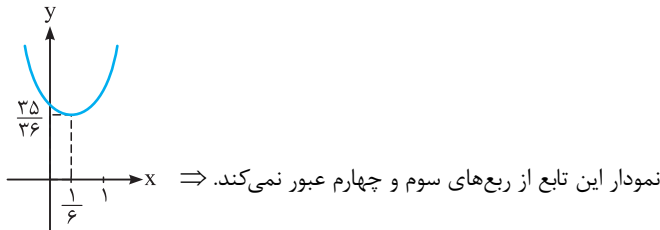
۴ ۵

$$= -x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} - \frac{28}{27} + x^3 + 2 = x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

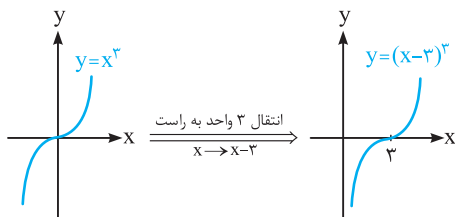
برای رسم این تابع نقطه رأس آن را می‌یابیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{1}{3}}{2(1)} = \frac{1}{6}, \quad y_S = \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{1}{36} - \frac{1}{18} + 1 = \frac{35}{36}$$

پس نمودار تابع به صورت مقابل است:

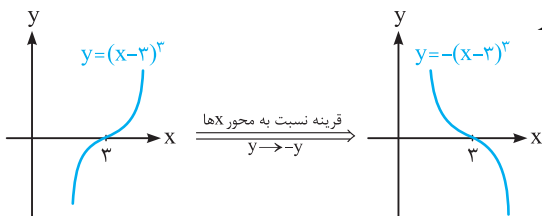


۳ ۶

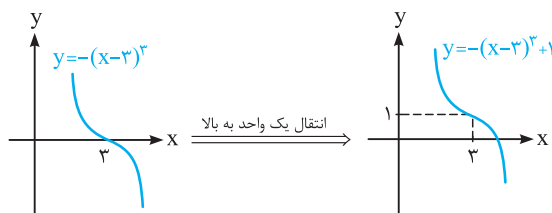


با توجه به نمودار داده‌شده و گزینه‌ها، مشخص است که نمودار داده‌شده مربوط به یک تابع درجه ۳ می‌باشد. مشخص است که نمودار اولیه $y = x^3$ ۳ واحد به راست انتقال یافته است. داریم:

۳ ۷



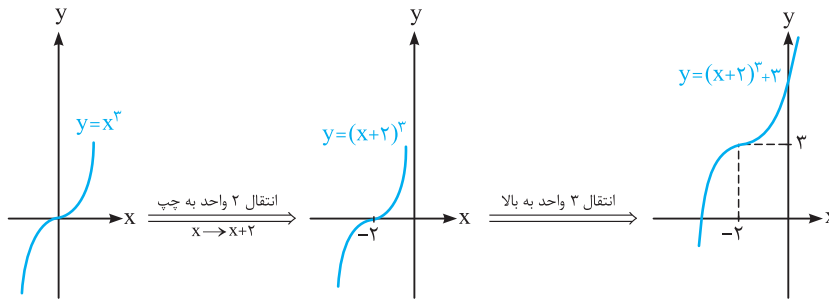
هم‌چنین با توجه به نمودار داده‌شده مشخص است که تابع نسبت به محور Xها قرینه شده است:



در نهایت نمودار یک واحد به بالا برده شده است:

می‌دانیم $-(x-3)^3 = (3-x)^3$ پس ضابطه داده شده در گزینه (۳) صحیح است.

نمودار تابع داده شده از انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به اندازه دو واحد به چپ و سه واحد به بالا حاصل شده است:



با مقایسه $y = (x-a)^3 + b$ و $y = (x+2)^3 + 3$ نتیجه می‌گیریم: $b = 3$ و $a = -2$ بنابراین $a + b = (-2) + 3 = 1$.

با توجه به نمودار، مشخص است که نمودار داده شده مربوط به تابع $y = -(x+1)^3 + 1$ می‌باشد. داریم:

$$y = -(x+1)^3 + 1 = -(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 1 = -x^3 - 3x^2 - 3x \Rightarrow y = -x(x^2 + 3x + 3)$$

با مقایسه y با $f(x) = (a-x)(x^2 + bx + c)$ و برابر قرار دادن ضرایب متناظر داریم:

$$a = 0, b = 3, c = 3 \Rightarrow a + b + c = 0 + 3 + 3 = 6$$

با توجه به نمودار داده شده مشخص است که $f(0) = -7$. پس:

$$f(0) = -7 \Rightarrow -7 = 0^3 - 9(0)^2 + a(0) + b \Rightarrow b = -7 \Rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + ax - 7$$

از طرفی با توجه به شکل داده شده مشخص است که نمودار به صورت $y = (x-k)^3 + 20$ می‌باشد. داریم:

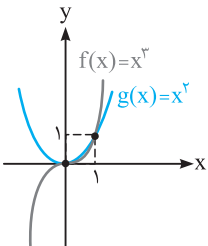
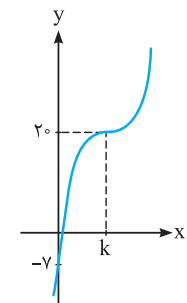
$$y = (x-k)^3 + 20 \Rightarrow y = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 + 20$$

تمام ضرایب دو تابع $f(x)$ و y باید با هم برابر باشند پس:

$$-k^3 + 20 = -7 \Rightarrow -k^3 = -27 \Rightarrow k^3 = 27 \Rightarrow k = 3$$

$$3k^2 = a \xrightarrow{k=3} a = 3(3)^2 = 27 \Rightarrow a + b = 27 + (-7) = 20$$

کافی است نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنیم:



با توجه به نمودار مشخص است که نمودار $f(x)$ فقط به ازای $x > 1$ ، بالاتر از نمودار $g(x)$ قرار دارد. \Rightarrow

یادآوری برای رسم توابع شامل قدرمطلق، بهتر است با توجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق آن را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای نوشته و سپس آن را رسم نماییم.

$$g(x) = x|x| \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x(x) & ; x \geq 0 \\ x(-x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

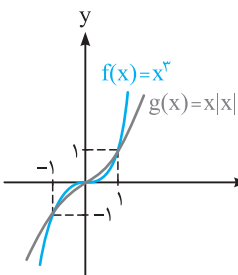
$x=0$: ریشه عبارت داخل قدرمطلق

می‌دانیم به ازای $0 < x < 1$ ، $x^2 > x^3$ ، هم‌چنین به ازای $-1 < x < 0$ داریم:

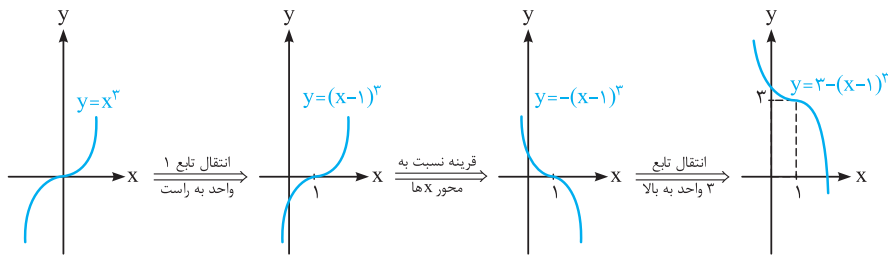
$$-1 < x < 0 \xrightarrow{x \times x^2} -x^2 < x^3 < 0 \Rightarrow \text{قرار می‌گیرد} -x^2 \text{ نمودار از نمودار } x^3$$

پس با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مشخص است که در بازه‌های $(0, 1)$ و $(-\infty, -1)$ نمودار $f(x)$

پایین‌تر از $g(x)$ قرار دارد.



۳ ۱۳



خط $y = a^2x + b$ خطی با شیب نامنفی است که فرم کلی آن به صورت x می‌باشد. در هر حالت، این خطوط و تابع فوق، تنها یک نقطه برخورد با یکدیگر دارند.

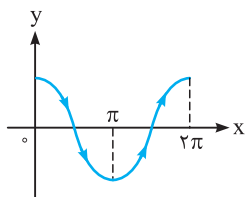
با رسم نمودار $f(x) = -\sin x$ و استفاده از فلش‌ها، بازه یا بازه‌های اکیداً صعودی را می‌یابیم: ۳ ۱۴



با توجه به گزینه‌ها مشخص است که تابع در بازه $[-\pi, -\frac{\pi}{3}]$ اکیداً صعودی است.

نمودار تابع $y = \cos x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است: ۳ ۱۵

بنابراین تابع $y = \cos x$ در فاصله $(0, \pi)$ نزولی و در فاصله $(\pi, 2\pi)$ صعودی است. نمودار تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ با انتقال تابع $y = \cos x$ به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به راست حاصل می‌شود. پس ابتدا و انتهای بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد نیز به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به راست حرکت می‌کند:



$$\begin{cases} \text{سر بازه: } \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \\ \text{انتهای بازه: } 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{بازه صعودی بودن: } (\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3})$$

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع در آن صعودی می‌باشد $[-3, 3]$ است. ۴ ۱۶

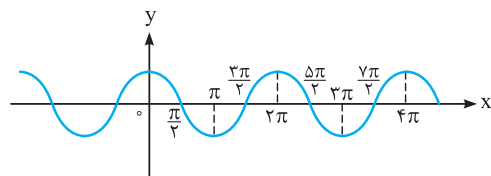
سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالازاره): آقا اشتباه نکردید! جواب $[-1, 2]$ همیشه!؟

پاسخ در هر دو! معلومه فوب درسامه رو نفونری. پسر دقت کن در بازه $[-1, 2]$ تابع اکیداً صعودی هست. از ما بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع توی اون صعودی هست رو فواسته. در این حالت باید باهایی که تابع ثابت هم هست جزء جواب باشه. پس بزرگ‌ترین بازه صعودی $[-3, 3]$ میشه. تو در واقع بزرگ‌ترین بازه‌ای رو پیدا کردی که تابع توش اکیداً صعودیه.

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی می‌باشد، $[-5, -1]$ است. هم‌چنین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی می‌باشد، $[-3, 3]$ است، بنابراین اجتماع این دو بازه، $[-5, 3]$ می‌شود. ۳ ۱۷

با توجه به نمودار تنها در $x = 5$ است که نمودار تابع، قبل از این نقطه اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی می‌باشد. دقت کنید، در نقاط دیگر مثلاً $x = -3$ قبل از آن تابع اکیداً نزولی است اما بعد از آن ثابت است. ۲ ۱۸

تابع قبل از $x = 2$ صعودی و بعد از آن ثابت می‌باشد. چون تابع ثابت، تابعی نزولی نیز محسوب می‌شود. پس $x = 2$ جواب است. هم‌چنین قبل از $x = 3$ تابع ثابت و بعد از آن نزولی است. چون تابع ثابت، می‌تواند صعودی هم محسوب شود، پس $x = 3$ نیز جواب است. ۳ ۱۹



نمودار $f(x) = \cos x$ به صورت مقابل است: ۲ ۲۰

رابطه داده‌شده بیانگر این است که در کدام بازه، تابع اکیداً نزولی می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها بازه $(2\pi, 3\pi)$ جواب است.

بررسی گزاره‌ها:

۲ ۲۱

الف) هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک‌به‌یک است، زیرا داریم:

به‌ازای هیچ x_1 و x_2 متمایزی $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ نمی‌شود $f: x_1 < x_2 \Rightarrow f$ اکیداً صعودی

به‌ازای هیچ x_1 و x_2 متمایزی $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f: x_1 < x_2 \Rightarrow f$ اکیداً نزولی

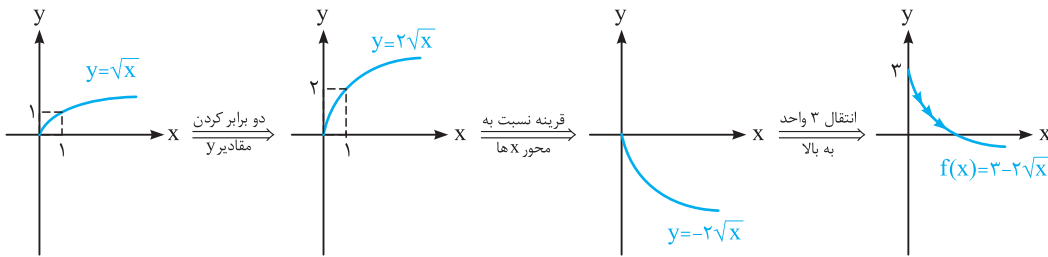
پس الف) صحیح است.

ب) این گزاره الزاماً صحیح نیست. مثلاً اگر نمودار f به صورت x باشد، این تابع یک‌به‌یک است، ولی اکیداً یکنوا نیست. زیرا در فاصله $(-1, 1)$ اکیداً نزولی و در فاصله $[1, 3]$ اکیداً صعودی است.

پ) تابع ثابت تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد. پس این گزینه نادرست است. دقت کنید اگر بیان می‌شد «تابعی که هم اکیداً صعودی و هم اکیداً نزولی باشد، وجود ندارد.» آن‌گاه این گزاره صحیح بود.

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

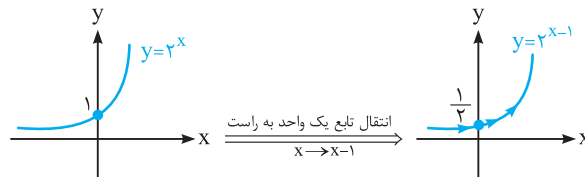
۲ ۲۲



با توجه به نمودار مشخص است که تابع فوق اکیداً نزولی می‌باشد.

تابع $y = 2^{x-1}$ را از روی تابع $y = 2^x$ رسم می‌کنیم:

۱ ۲۳



همان‌طور که از نمودار مشخص است، این تابع همواره صعودی است.

می‌دانیم تابع $y = a^x$ به‌ازای $1 \leq a \leq \infty$ نزولی است.

۴ ۲۴

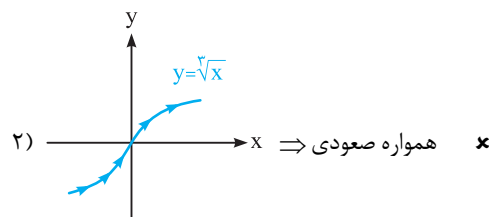
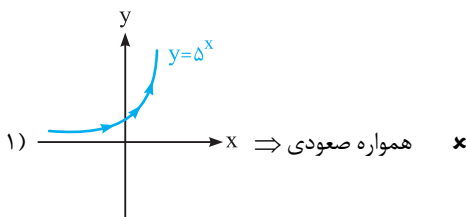
سؤال) دانش‌پژوه (ویدر همیمان): آقا نباید $1 < a < \infty$ باشد؟

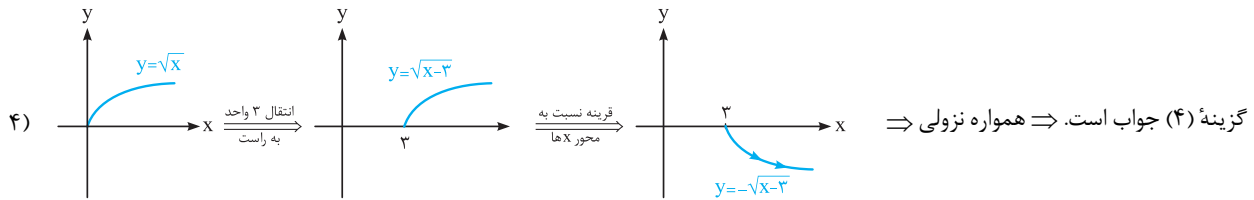
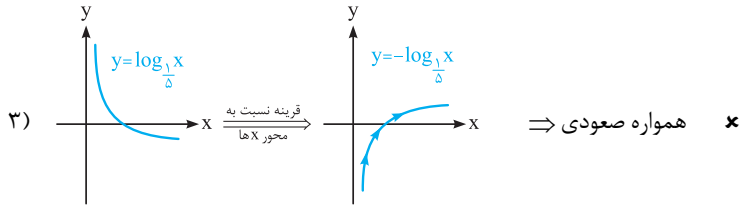
پاسخ) ببین آگه بفواهیم تابع اکیداً نزولی باشد هرسته؛ ولی وقتی $a = 1$ یا $a = \infty$ تابع به تابعی ثابت تبدیل می‌شه که هم نزولی و هم صعودیه.

$$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{m+2}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq m+2 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq m \leq 1$$

بررسی گزینه‌ها:

۴ ۲۵





۲۶ $y = \frac{1}{x}$ نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ به صورت مقابل است: همان‌طور که از نمودار مشخص است این تابع در بازه‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی است. پس گزینه (۳) صحیح است.

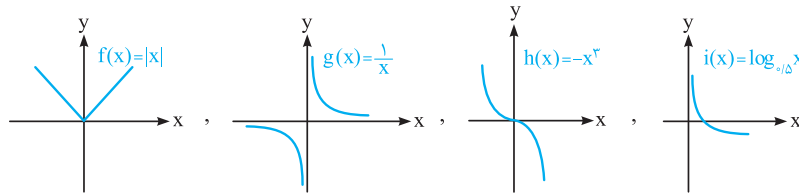
۲۷ بررسی توابع داده‌شده: الف) نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ به صورت می‌باشد. پس نمودار $y = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ به صورت بوده و اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی) است.

ب) نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ به صورت می‌باشد. این تابع برخلاف ظاهرش که به نظر اکیداً نزولی می‌رسد، اکیداً نزولی نیست. زیرا با توجه به شکل $x_1 < x_2$ می‌باشد، ولی $f(x_1) < f(x_2)$ است (در حالی که باید $f(x_1) > f(x_2)$ می‌شد). پس این تابع در دامنه‌اش یکنوا نیست.

پ) نمودار $y = x^3$ به صورت (تابع لُر) می‌باشد که اکیداً صعودی و در نتیجه اکیداً یکنواست.

ت) نمودار $y = |x|$ به صورت می‌باشد که مشخص است اکیداً یکنوا نیست. (ابتدا نزولی و سپس صعودی است).

پس دو تابع از توابع فوق، اکیداً یکنوا بودند. نمودار توابع داده شده به صورت زیر هستند:



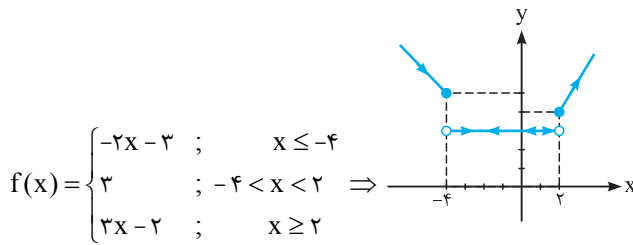
یکنوا و نزولی در فاصله $(0, +\infty)$ \Rightarrow یکنوا و نزولی \Rightarrow یک‌به‌یک ولی غیریکنوا \Rightarrow غیریک‌به‌یک و غیریکنوا

بنابراین توابع مورد نظر $g(x) = \frac{1}{x}$ (یک‌به‌یک و غیریکنوا) و $h(x) = -x^3$ (در کل \mathbb{R} نزولی) هستند. داریم:

$$h(x) + g(x) = -x^3 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x=2} \text{حاصل} = -2^3 + \frac{1}{2} = -8 + 0.5 = -7.5$$

۲ ۲۹

ابتدا نمودار تابع را رسم کرده و سپس گزینه‌ها را بررسی می‌نماییم:



بررسی گزینه‌ها:

(۱) با توجه به نمودار، مشخص است که تابع در فاصله $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

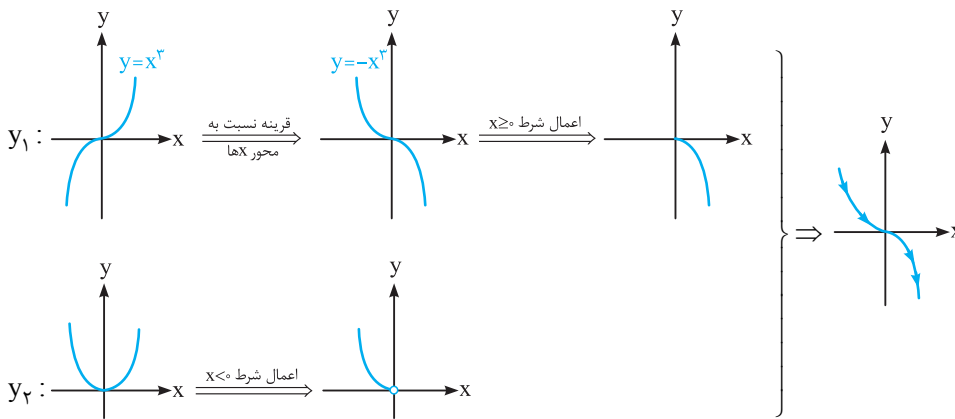
(۲) با توجه به نمودار، تابع در بازه $[-\infty, -4]$ اکیداً نزولی است. اما در بازه $(-\infty, 2)$ نزولی می‌باشد. پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است $(-\infty, 2)$ می‌باشد و این گزینه نادرست است.

(۳) طول بازه ثابت، $2 - (-4) = 6$ می‌باشد.

(۴) با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ صعودی می‌باشد. پس در بازه $[1, 5]$ نیز صعودی است.

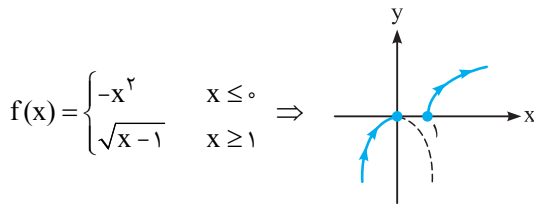
توابع $y_1 = -x^3$ و $y_2 = x^2$ را رسم کرده و سپس آن‌ها را در بازه‌های خواسته شده، برش می‌زنیم:

۱ ۳۰



نمودار فوق بیانگر تابعی اکیداً نزولی است.

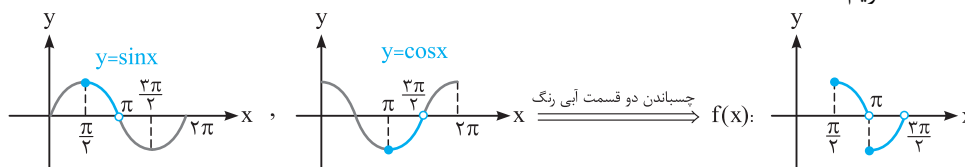
۳ ۳۱



با توجه به نمودار مشخص است که تابع f در دامنه تعریف خود، تابعی صعودی است. اما چون $f(0) = f(1) = 0$ ، پس تابع طبق تعریف، اکیداً صعودی نبوده و تنها صعودی است.

۳ ۳۲

راحت‌ترین کار برای رسم تابع $f(x)$ ، رسم توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ و بریدن قسمت‌های موردنظر و رسم آن‌ها در یک دستگاه است. داریم:

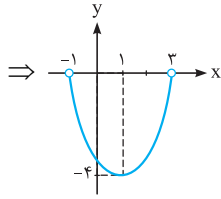


با توجه به نمودار، مشخص است که تابع $f(x)$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ نزولی و در بازه $[\pi, \frac{3\pi}{4}]$ صعودی است، پس یکنوا نیست. هم‌چنین مشخص است که این تابع یک‌به‌یک است (هیچ خطی موازی محور x نمی‌توان یافت که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نماید). پس گزینه (۳) صحیح است.

ابتدا دامنه تابع را به صورت مرتب‌تر یافته و سپس تابع را در دامنه داده شده رسم می‌کنیم.

۴ ۳۳

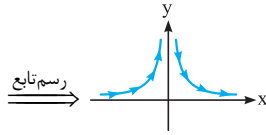
$$D_f : |x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3, f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$



با توجه به این‌که نمودار تابع در فاصله $(-1, 3)$ زیر محور x ها قرار دارد، این تابع در دامنه خود همواره منفی است.

۲ ۳۴

$$y = \frac{|x|}{x^2} = \begin{cases} \frac{x}{x^2} & ; x > 0 \\ \frac{-x}{x^2} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ -\frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

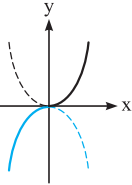


این تابع در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی می‌باشد.

۲ ۳۵

بهترین روش برای معلوم کردن وضعیت توابع شامل قدرمطلق، نوشتن آن‌ها به صورت چندضابطه‌ای و رسم آن‌ها می‌باشد. داریم:

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار فوق، مشخص است که $y = x|x|$ در کل دامنه‌اش (\mathbb{R}) تابعی اکیداً صعودی می‌باشد.

۲ ۳۶

می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است. پس: $(f+g) + (g-f) = 2g$ تابعی صعودی است.

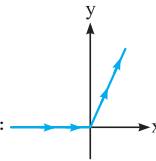
صعودی صعودی صعودی

دقت کنید که ضرب کردن عددی مثبت در ضابطه یک تابع یکنوا تأثیری در یکنوایی آن ندارد.

۱ ۳۷

تابع $f(x) = x + [x]$ از مجموع دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = x$ حاصل شده است. تابع $y_1 = [x]$ تابعی صعودی (غیر اکید) و تابع $y_2 = x$ تابعی اکیداً صعودی هستند. طبق نکات درسنامه می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی و اکیداً صعودی یک تابع اکیداً صعودی است، پس $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. برای مشخص کردن وضعیت تابع $g(x) = x + |x|$ بهتر است از رسم استفاده کنیم، زیرا تابع $y = |x|$ تابعی نه صعودی و نه نزولی است و از نکات درسنامه نمی‌توان به نتیجه خاصی رسید:

$$g(x) = x + |x| \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x+x & ; x \geq 0 \\ x-x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



با توجه به شکل مشخص است که $g(x)$ تابعی صعودی (غیر اکید) است. بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۱ ۳۸

در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با توجه به علامت a دو حالت زیر را داریم:

الف $a > 0$:

$x = -\frac{b}{2a}$

$\Rightarrow \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right], \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است. در آن اکیداً نزولی است.

ب $a < 0$:

$x = -\frac{b}{2a}$

$\Rightarrow \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right], \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است. در آن اکیداً صعودی است.

با توجه به نکته فوق، چون در تابع $f(x) = x^2 + 6x - 7$ ، $a = 1 > 0$ می‌باشد، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، به صورت $\left(-\infty, -\frac{6}{2}\right] = (-\infty, -3]$ می‌باشد. پس بیشترین مقدار a ، برابر -3 است.

دقت کنید برای این که تابع $y = (a-2)x^2 - x$ در فاصله $[1, +\infty)$ صعودی باشد، باید ضریب x^2 (در این جا $a-2$) مثبت باشد، پس:

$$a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (I)$$

همچنین نقطهٔ رأس سهمی نباید در بازه $(1, +\infty)$ باشد، پس $-\frac{b}{2a} \leq 1$:

$$\frac{1}{2(a-2)} \leq 1 \xrightarrow{a>2} 2(a-2) \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{5}{2} \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $a \geq \frac{5}{2}$ می‌رسیم.

ابتدا طول نقطهٔ رأس تابع را می‌یابیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2k} = -\frac{1}{k^2}$$

با توجه به بازهٔ داده شده، داریم:

$$-\frac{1}{k^2} = -1 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

اما طبق نکتهٔ بیان شده در تست‌های قبل می‌دانیم اگر $a < 0$ باشد، تابع در بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی خواهد بود. پس تنها $k = -1$ قابل قبول است.

یکسری بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در آن صعودی (نزولی) باشد، نقطهٔ رأس می‌باشد. پس ابتدا طول نقطهٔ رأس را می‌یابیم:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین بازهٔ صعودی است } (-\infty, 3]} -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a$$

دقت کنید؛ چون تابع در بازه $(-\infty, 3]$ صعودی می‌باشد، پس فرم کلی آن به صورت \cup می‌باشد و لذا $a < 0$ است. پس تنها گزینهٔ (۲) با توجه به رابطهٔ $b = -6a$ و شرط $a < 0$ ، می‌تواند جواب باشد.

چون $[2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $y = ax^2 + 2x + 1$ در آن نزولی می‌باشد، پس:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{\text{با توجه به ضابطهٔ تابع}} \frac{-2}{2(a)} \xrightarrow{\text{بازه } [2, +\infty)} 2 \Rightarrow \frac{-2}{2a} = 2 \Rightarrow -2 = 4a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

اگر a مثبت به دست می‌آمد، مسأله جواب نداشت، زیرا حالت (الف) نکتهٔ بیان شده در تست‌های قبل رخ می‌داد که در $[2, +\infty)$ نمی‌تواند نزولی باشد!

در ادامه تعداد نقاط برخورد سهمی f با خط $y = x$ را می‌خواهیم، لذا باید معادلهٔ $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$ax^2 + 2x + 1 = x \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله، ۲ جواب متمایز دارد.}$$

بنابراین سهمی در $y = x$ نقطه، خط $y = x$ را قطع می‌کند.

چون تابع f تابعی هم صعودی و هم نزولی می‌باشد، پس f تابع ثابت است. در تابع ثابت تمام مقادیر برد، یکسان هستند. پس داریم:

$$b = 2b - 1 \Rightarrow b = 1, a - 1 = b \xrightarrow{b=1} a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow D_f = \{2^2, 2+1, 2\} = \{4, 3, 2\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای دامنه} = 2+3+4 = 9$$

با توجه به این که f تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-1 < 3 < 4 \Rightarrow f(-1) < f(3) < f(4) \Rightarrow 3 < m^2 - 1 < 8 \Rightarrow 4 < m^2 < 9 \Rightarrow 2 < |m| < 3$$

دقت کنید؛ اگر یک تابع چندضابطه‌ای، صعودی اکید باشد، حتماً باید در تمام زیربازه‌های موجود، ضابطه‌های تعریف شده، خود صعودی اکید باشند.

با توجه به این امر، اگر $a \leq 0$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ پایین صعودی اکید نیست. پس $a > 0$.

همچنین حداکثر مقدار ضابطهٔ پایین باید از حداقل مقدار ضابطهٔ بالا کم‌تر باشد. می‌دانیم حداقل مقدار $\sqrt[3]{x}$ به ازای $x \geq 6$ ، برابر $\sqrt[3]{6}$ می‌باشد. همچنین حداکثر مقدار $a \times 3^x$ در بازهٔ $x \leq 1$ به ازای $x = 1$ حاصل می‌شود. پس داریم:

$$a \times 3^1 < \sqrt[3]{6} \Rightarrow 3a < \sqrt[3]{6} \Rightarrow a < \frac{\sqrt[3]{6}}{3}$$

با توجه به دو شرط $a > 0$ و $a < \frac{\sqrt[3]{6}}{3}$ ، نتیجه می‌گیریم که هیچ مقدار صحیحی برای a یافت نمی‌شود.

ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

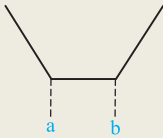
$$f(x) = \begin{cases} 2(x-4) + a(x+2) & ; x \geq 4 \\ 2(4-x) + a(x+2) & ; x < 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (2+a)x + 2a - 8 & ; x \geq 4 \\ (a-2)x + 2a + 8 & ; x < 4 \end{cases}$$

اگر تابع دوضابطه‌ای f صعودی اکید باشد، هر یک از ضابطه‌ها باید بیانگر تابعی صعودی اکید در آن ضابطه باشند. می‌دانیم توابع خطی صعودی اکید هستند، اگر شیب خط مثبت باشد. پس:

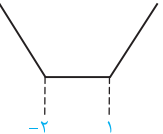
$$\begin{cases} 2+a > 0 \Rightarrow a > -2 \\ a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a > 2$$

۴۷

نکته نمودار $f(x) = |x-a| + |x-b|$ (معروف به نمودار گلدانی) با فرض $a < b$ به صورت مقابل است. در واقع a و b ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلقها هستند.

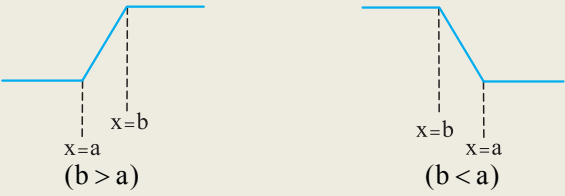


با توجه به نکته فوق، نمودار تابع $f(x) = |x+2| + |x-1|$ به صورت مقابل خواهد شد. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع مذکور در بازه $(-\infty, -2)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه اکیداً نزولی می‌باشد.



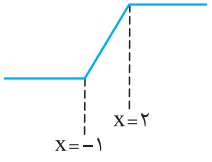
۴۸

نکته نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به یکی از دو شکل زیر است:



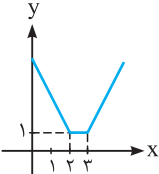
با توجه به نکته فوق، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع در فاصله $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.



۴۹

$$f(x) = |x-2| + |x-3| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2+x-3 & ; x \geq 3 \\ x-2-(x-3) & ; 2 \leq x < 3 \\ -(x-2)-(x-3) & ; x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-5 & ; x \geq 3 \\ 1 & ; 2 \leq x < 3 \\ -2x+5 & ; x < 2 \end{cases}$$


پس مشخص شد که تابع به‌ازای $x < 2$ با ضابطه $-2x+5$ اکیداً نزولی می‌باشد. برای به دست آوردن نقاط مشترک با $g(x) = 2x^2 - x - 10$ معادله $2x^2 - x - 10 = -2x + 5$ را با شرط $x < 2$ حل می‌کنیم:

$$2x^2 - x - 10 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 1 - 4(2)(-15) = 121} x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 11}{4} \Rightarrow x = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ یا } x = \frac{-12}{4} = -3$$

با توجه به شرط $x < 2$ ، تنها جواب $x = -3$ قابل قبول می‌باشد و گزینه (۱) جواب تست است.

۴ ۵۰

چون تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $f(0) = 0$ و چون تابع صعودی است به ازای $x \geq 0$ ، $f(x) \geq 0$ و به ازای $x < 0$ ، $f(x) \leq 0$ می‌شود. داریم:

$x \in D_f$	۰	
x	-	+
f(x)	-	+
xf(x)	+	+

پس با توجه به جدول تعیین علامت می‌توان گفت عبارت زیر رادیکال به ازای تمام $x \in D_f$ ، همواره نامنفی

است. پس دامنه تابع $g(x)$ با دامنه تابع $f(x)$ برابر است.

سوال دانش‌پژوه (رادرین بابایی): آقا ببخشید مگه به ازای تمام x ها، عبارت زیر رادیکال نامنفی نشد؟! پس $D_g = \mathbb{R}$ می‌شه.

پاسخ درود بر \mathbb{R} ! بین دانش‌پژوه! درسته ما جدول تعیین علامت کشیدیم و همه‌پی به همه‌پی پیش رفت ولی دقت کن تمام این موارد به ازای $x \in D_f$ درسته. یعنی آگه جاهایی باشه که $f(x)$ تعریف نشده باشه، اون وقت توی اون جاها $xf(x)$ هم تعریف نشده است. پس در اصل صمیمت کلی ما روی D_f هست نه \mathbb{R} .

۲ ۵۱

تابع $f(x)$ تابعی صعودی بوده و $f(2) = 0$ می‌باشد. بنابراین به ازای $x > 2$ ، $f(x)$ مثبت و به ازای $x < 2$ ، $f(x)$ منفی می‌باشد. با توجه به صعودی بودن f ، دو حالت زیر را برای $f(5-x)$ داریم:

$$(1) : f(5-x) > 0 \xrightarrow{f(2)=0} f(5-x) > f(2) \xrightarrow{\text{صعودی } f} 5-x > 2 \Rightarrow x < 3$$

$$(2) : f(5-x) < 0 \xrightarrow{f(2)=0} f(5-x) < f(2) \xrightarrow{\text{صعودی } f} 5-x < 2 \Rightarrow x > 3$$

دقت کنید به ازای $x = 3$ ، $f(5-x) = f(2) = 0$ می‌شود. حال به کمک جدول تعیین علامت، علامت عبارت زیر رادیکال را می‌یابیم:

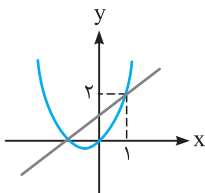
x	-۳		۳
x+۳	-	+	+
f(5-x)	+	+	-
(x+۳)f(5-x)	-	+	-

جواب

با توجه به جدول تعیین علامت فوق، مشخص است که تابع y تنها در بازه $[-3, 3]$ تعریف شده است.

۴ ۵۲

رأس سهمی $y = x^2 + x$ ، $x = -\frac{1}{2}$ می‌باشد. داریم:



با توجه به شکل مقابل، اگر $k \geq 1$ باشد، $f(x)$ صعودی اکید خواهد شد. پس کم‌ترین (حداقل) مقدار برای k ، عدد ۱ می‌باشد.

۲ ۵۳

با توجه به نمودار توابع f و g داریم:

$$\left. \begin{aligned} (f \circ g)(-1) &= f(g(-1)) = f(-1) = 2 \\ (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(3) = 0 \\ (f \circ f)(3) &= f(f(3)) = f(4) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{(f \circ g)(-1) + (g \circ f)(-2)}{(f \circ f)(3)} = \frac{2+0}{3} = \frac{2}{3}$$

ابتدا توابع $f \circ f$ و $g \circ f$ را جداگانه به دست می‌آوریم:

۲ ۵۴

$$f \circ f : \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \\ 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} f(4) \end{cases} \Rightarrow f \circ f = \{(1, 3), (2, 4)\} \quad (*)$$

وجود ندارد: $f(4)$

$$g \circ f : \begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 5 \\ 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} g(3) \text{ وجود ندارد} \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 1 \end{cases} \Rightarrow g \circ f = \{(1, 5), (3, 1)\} \quad (**)$$

$$D_{f \circ g} = D_{f \circ f} \cap D_{g \circ f} = \{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$$

حال دامنه تابع $f \circ g - g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

در نتیجه تابع $f \circ g - g \circ f$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(f \circ g - g \circ f)(1) = (f \circ f)(1) - (g \circ f)(1) \stackrel{(**), (*)}{=} 3 - 5 = -2 \Rightarrow f \circ g - g \circ f = \{(1, -2)\}$$

با توجه به مجموعه A ، تابع f را به صورت زوج مرتبی به دست می آوریم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow f = \{(x, 2x - 1) \mid x \in A\} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

حال تابع $f(f(x))$ یا همان $(fof)(x)$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1 \\ 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 5 \\ 3 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 9 \Rightarrow fof = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\} \\ 4 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} f(7) \text{ وجود ندارد} \\ 5 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} f(9) \text{ وجود ندارد} \end{array} \right.$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی است.

$$f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}, g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$$

$$(4, 1) \in \text{gof} \Rightarrow g(f(4)) = 1 \xrightarrow[\substack{\text{با توجه به تابع } f \\ (4, 5) \in f \Rightarrow f(4) = 5}]{\text{مقایسه با زوج مرتب های تابع } g} g(5) = 1 \Rightarrow (5, 1) \in g$$

$$(b, 1) = (5, 1) \Rightarrow b = 5$$

با توجه به زوج های مرتب موجود در تابع g می توان نتیجه گرفت:

$$g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (5, 1)\} \quad (*)$$

و تابع g برابر می شود با:

$$(4, 2) \in \text{fog} \Rightarrow f(g(4)) = 2 : 4 \xrightarrow{g} g(4) \xrightarrow{f} 2$$

از طرفی داریم:

با توجه به تعریف تابع fog ، $x = 4$ باید عضو دامنه تابع g (یعنی عضو $D_g = \{1, 3, a, 5\}$) باشد. پس باید $a = 4$ باشد و در نتیجه $(a, b) = (4, 5)$.

$$g(f(a)) = 5 \Rightarrow (f(a), 5) \in g \xrightarrow[\text{مرتبه های تابع } g]{\text{مقایسه با زوج}} (f(a), 5) = (6, 5) \Rightarrow f(a) = 6$$

از طرفی با توجه به آن که ضابطه تابع $f(x)$ داده شده است، $f(a)$ را یافته و برابر ۶ قرار می دهیم:

$$f(a) = 6 \xrightarrow{f(x) = x + \sqrt{x}} a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow \sqrt{a} = 6 - a \xrightarrow[\substack{\text{به توان } 2 \\ 6 - a \geq 0}]{\text{توان } 2} a = (6 - a)^2 \Rightarrow a = 36 + a^2 - 12a \Rightarrow a^2 - 12a + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 4)(a - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 9 \text{ (غلقق)} \end{cases}$$

$a = 9$ غیرقابل قبول است زیرا به ازای آن تساوی $a + \sqrt{a} = 6$ برقرار نمی شود، پس $a = 4$ است.

برای یافتن جواب معادله $a + \sqrt{a} = 6$ کافی است از گزینه ها کمک بگیریم. فقط گزینه (۴) یعنی عدد ۴ در معادله صدق می کند.

$$4 + \sqrt{4} = 6 \Rightarrow 4 + 2 = 6 \Rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark$$

پس همین گزینه جواب است و نیازی به حل معادله نیست!

راه اول:

$$g(f(a)) = 3 \Rightarrow (f(a), 3) \in g \xrightarrow[\text{مرتبه های تابع } g]{\text{مقایسه با زوج مرتب های تابع } g} (f(a), 3) = (-2, 3) \Rightarrow f(a) = -2 \quad (*)$$

حال با توجه به ضابطه f ، $f(a)$ را یافته و برابر -2 قرار می دهیم:

معادله جواب ندارد. $\Rightarrow f(a) = \sqrt{a} = -2$ (*)
منفی نامنفی

$$\text{توان } 2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

راه دوم (روش تستی): بعد از آن که فهمیدیم $f(a) = -2$ ، کافی است اعداد داده شده در گزینه ها را در تابع f با توجه به شرط دامنه قرار داده

و ببینیم جواب کدامشان -2 می شود که گزینه (۱) صحیح است:

$$\text{ضابطه پایینی } f \Rightarrow -\sqrt{-(-4)} = -\sqrt{4} = -2 \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه (۱): } a = -4 < 0 \Rightarrow \text{گزینه (۱)}$$