

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
190 min	۹۴	۶ تا ۵۰
105 min	۱۲۳	۶۹ تا ۵۱
126 min	۱۳۵	۷۰ تا ۹۱

فصل اول: آمار و احتمال

فصل دوم: الگوهای خطی

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

امتحان نهایی



بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۳

نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۵	۱۵	اول
۲	۵	تا صفحه ۶۰
۳/۵	-	صفحه ۶۰ به بعد
۹/۵	-	سوم
۲۰	۲۰	جمع

۱۵۴	آزمون ۱: شهریور ماه ۱۳۹۹
۱۵۵	آزمون ۲: دی ماه ۱۳۹۹
۱۵۶	آزمون ۳: خرداد ماه ۱۴۰۰
۱۵۸	آزمون ۴: شهریور ماه ۱۴۰۰
۱۵۹	آزمون ۵: دی ماه ۱۴۰۰
۱۶۰	آزمون ۶: خرداد ماه ۱۴۰۱
۱۶۲	آزمون ۷: شهریور ماه ۱۴۰۱
۱۶۳	آزمون ۸: دی ماه ۱۴۰۱
۱۶۴	آزمون ۹: خرداد ماه ۱۴۰۲
۱۶۶	آزمون ۱۰: شهریور ماه ۱۴۰۲
۱۶۸	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۱۰

۱

بخش



درستامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

آمار و احتمال

سلام بر دوستان خوبم در رشته انسانی، قبل از این که شروع به خواندن این فصل بکنید، بهتره به توضیحاتی رو بهتون بدم. اولین حرفم اینه که حتی اگه فکر می‌کنید درس‌ها رو خوب یاد گرفتین (در مدرسه یا آموزشگاه) بازم درسنامه‌های کتاب ما رو بخونید، چون امسال نگاه شما به دروس مختلف، بیش‌تر نگاه تستی هست و ممکنه بخوابین همون روش‌های تستی رو که یاد گرفتین توی امتحانات تشریحی پیاده کنید و در نتیجه نمره کامل بهتون داده نمیشه. این فصل کتاب، به نظرم مفهومی‌ترین و دشوارترین فصل برای همه دانش‌آموزانه، و بر عکس فصل‌های دیگه، تنوع سؤالاتش خیلی زیاده به همین دلیل ما هم همه جور سؤالی براتون طرح کردیم تا به راحتی از عهده امتحان نهایی بریباین. سهم این فصل در امتحان خرداد ماه، ۵ نمره می‌باشد که ۲ سوال اول اون به شکل جای خالی یا بررسی درستی یا نادرستی است.

توجه کنید که اگه فاکتوریل، ترتیب و ترکیب رو خوب یاد نگیرین، قطعاً توی مبحث احتمال به مشکل برمیخورین، چون این‌ها مقدمه احتمال هستن. در قسمت آخر این فصل هم، به قسمت از آمار اومده که ربطی به قسمت‌های قبلی نداره و بیش‌تر روی شاخص‌های مرکزی و پراکندگی بحث کرده که قبلاً هم خوندین. فقط گام‌های چرخه آمار به بحث جدیدی هست که خیلی هم راحتی.

بسته ۵



بسته‌های ۳ و ۴



بسته‌های ۱ و ۲



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

شمارش (اصل جمع و ضرب)

صفحه ۲ تا ۷ کتاب درسی

بسته اول



الف اصل جمع

- اگر فقط یک کار را بتوان به k یا m یا n حالت مختلف انجام داد آن‌گاه تعداد کل حالت‌های انجام این کار برابر است با: $k + m + \dots + n$
- دقت کنید که در این جا فقط می‌خواهیم یک عمل را به روش‌های مختلف انجام دهیم. ضمناً حرف «یا» در مسائل، نشان دهنده اصل جمع است.

سؤال علی می‌خواهد از تهران به مشهد سفر کند. او برای انجام این کار می‌تواند از یکی از ۳ نوع قطار لوکس، خوب و معمولی یا یکی از ۴ شرکت هواپیمایی یا یکی از ۸ تعاونی اتوبوس استفاده کند. در کل او به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟

مشابه کتاب درسی

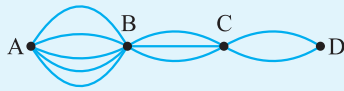
پاسخ علی فقط می‌خواهد یک عمل را انجام دهد و آن سفر از تهران به مشهد است پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

$$۱۵ = ۳ + ۴ + ۸ = \text{تعداد کل حالت‌ها}$$

ب اصل ضرب

حالا می‌خواهیم دو یا چند عمل مختلف را با هم یا پشت سر هم انجام دهیم. در این حالت تعداد روش‌های هر عمل را در هم ضرب می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان دهنده اصل ضرب است. پس الان تفات بین اصل ضرب و اصل جمع را متوجه شدید.

مثال فرض کنید علی ۳ جفت کفش، ۴ پیراهن و ۶ شلوار مختلف دارد؛ می‌خواهیم ببینیم او به چند حالت می‌تواند برای رفتن به مهمانی آماده شود. واضح است که چون او باید هر سه عمل پوشیدن کفش، پیراهن و شلوار را با هم انجام دهد لذا باید از اصل ضرب استفاده کنیم: $۳ \times ۴ \times ۶ = ۷۲$



سؤال با توجه به شکل مقابل، مریم می خواهد از شهر A به شهر D سفر کند و برگردد. به طوری که در مسیر برگشت از راه هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می تواند این رفت و برگشت را انجام دهد؟
(همه جاده ها دو طرفه فرض می شوند.)

مشابه امتحان نهایی

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد حالت های مسیر رفت} \\ \text{تعداد حالت های مسیر برگشت} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد حالت های رفت و برگشت} = 30 \times 8 = 240$$

$$30 = 5 \times 3 \times 2$$

$$8 = 1 \times 2 \times 4$$

پاسخ

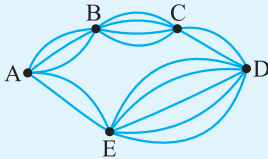
دقت کنید که در مسیر برگشت، از مسیری که در مسیر رفت استفاده کرده ایم مجاز به استفاده مجدد نیستیم یعنی از ۲ مسیر بین D و C یکی، از ۳ مسیر بین C و B یکی و از ۵ مسیر بین B و A هم یکی را حذف کرده ایم.

استفاده همزمان از اصل جمع و اصل ضرب

در بسیاری از سؤالات، باید از هر دو اصلی که خواندیم، استفاده کنیم. یکی از این سؤالات، مربوط به مسافرت از یک شهر به شهر دیگر است؛ سؤال دیگر مربوط به مسائل ترکیب است که جلوتر خواهید خواند. ضمناً دقت کنید در مسائل مربوط به شهرها اگر گفته نشد مسیرها یک طرفه هستند یا دوطرفه خودمان آن ها را دوطرفه فرض می کنیم. (البته در سؤالاتی که مسیر برگشت داریم این موضوع مهمه)

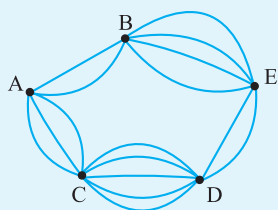
مشابه کتاب درسی

سؤال با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می توانیم از شهر A، به شهر D سفر کنیم؟



پاسخ برای رفتن از A به D دو حالت کلی وجود دارد. یکی مسیر بالا (مسیر ABCD) و دیگری مسیر پایین (مسیر AED): یعنی شخص می تواند یا از مسیر بالا استفاده کند یا از مسیر پایین و این حرف «یا» نشان می دهد که جواب های دو قسمت بالا و پایین را باید با هم جمع کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر بالا: تعداد حالت ها} = 3 \times 4 \times 2 = 24 \\ \text{مسیر پایین: تعداد حالت ها} = 2 \times 5 = 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اصل جمع}} \text{تعداد کل حالت ها} = 24 + 10 = 34$$



سؤال فردی می خواهد از شهر A به E برود و برگردد. به طوری که در مسیر برگشت از راهی که رفته مجدداً استفاده نکند به چند حالت می تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ چهار حالت مختلف برای رفت و برگشت از A به E وجود دارد:

$$\begin{array}{l} \text{حالت ۱: مسیر ABEBA} \Rightarrow 2 \times 4 \times 3 \times 1 = 24 \\ \text{حالت ۲: مسیر ABEDCA} \Rightarrow 2 \times 4 \times 2 \times 5 \times 3 = 240 \\ \text{حالت ۳: مسیر ACDEBA} \Rightarrow 2 \times 5 \times 2 \times 4 \times 2 = 240 \\ \text{حالت ۴: مسیر ACDEDCA} \Rightarrow 2 \times 5 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 = 360 \end{array}$$

$$\text{تعداد کل حالت ها} = 24 + 240 + 240 + 360 = 864$$

نکته! در آزمون‌های چندگزینه‌ای، اگر پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد، تعداد کل حالت‌های پاسخ‌گویی به آزمون، طبق اصل ضرب برابر می‌شود با:

تعداد سؤالات (تعداد گزینه‌ها)

تعداد سؤالات $(+1)$ (تعداد گزینه‌ها)

ولی اگر پاسخ‌گویی به هر سؤال، الزامی نباشد تعداد کل حالت‌ها برابر می‌شود با:

سؤال به یک آزمون ۳ گزینه‌ای که شامل ۱۰ سؤال است به چند حالت مختلف می‌توان جواب داد؟ (پاسخ گویی به همه سؤالات الزامی است). **کتاب درسی**

پاسخ طبق نکته گفته شده، خواهیم داشت:
اگر در متن سؤال، گفته شود پاسخ‌گویی به سؤالات الزامی نیست، جواب برابر با 4^1 خواهد شد.

نماد فاکتوریل (!)

• اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه حاصل $n!$ که آن را n فاکتوریل می‌خوانیم به صورت مقابل تعریف می‌شود:

• یعنی برای محاسبه فاکتوریل یک عدد طبیعی، باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش ضرب کنیم. مثلاً:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

توجه به یاد داشته باشید که $0! = 1$ و $1! = 1$ است.

تذکر گاهی لازم نیست فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم (مخصوصاً در کسرها)، در این مواقع بهتر است عدد بزرگ‌تر را تا آن جا باز کنیم که به عدد کوچک‌تر برسیم؛ توجه کنید که هر جا که متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل بگذاریم.

مثال $9!$ بزرگ‌تر از 7 است پس $9!$ را باز کردیم تا به $7!$ رسیدیم. \rightarrow توضیح $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 72$

مثال n بزرگ‌تر از $(n-2)$ است پس $n!$ را باز کردیم تا به $(n-2)!$ رسیدیم. \rightarrow توضیح $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$

مشابه امتحان نهایی

سؤال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۳ $\frac{6!}{3! \times 4!}$

۲ $\sqrt{0! - 1!} + 2! + 3!$

۱ $5! - 3!$

۱ $5! - 3! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1) = 120 - 6 = 114$

۲ $\sqrt{0! - 1!} + 2! + 3! = \sqrt{1 - 1} + (2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 0 + 2 + 6 = 8$

۳ $\frac{6!}{3! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{(3 \times 2 \times 1) \times 4!} = 5$

سؤال از معادله $(x^2 - 3x)! = 24$ مقدار یا مقادیر x را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم حاصل $4!$ برابر 24 می‌شود، پس عبارت داخل پرانتز را مساوی با 4 قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{تجزیه با اتحاد}} (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

سؤال مقدار n را از معادله $\frac{n!}{(n-2)!} = 20$ به دست آورید.

پاسخ از $(n-2)$ بزرگ‌تر است، پس $n!$ را باز می‌کنیم تا به $(n-2)!$ برسیم:

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 20 \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{تجزیه با اتحاد}} (n-5)(n+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 & \checkmark \\ n = -4 & \times \end{cases}$$

پ مفهوم جایگشت

- جایگشت یعنی نحوه قرار گرفتن افراد یا اشیاء در کنار هم. مثلاً حروف a, b و c به شکل های زیر می توانند کنار هم قرار گیرند و کلمات ۳ حرفی بسازند: (بمعنی یا بی معنی بودن کلمات، در این مبحث، اصلاً مهم نیست.)
abc, acb, bac, bca, cab, cba
- به هر کدام از این ۶ کلمه که ساختیم یک جایگشت از حروف a, b و c می گوییم. ضمناً چون ۳ حرف a, b و c مختلف هستند تعداد جایگشت ها برابر می شود با:
 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

نکته! تعداد جایگشت های n شیء یا n فرد متمایز برابر با n! می باشد مثلاً تعداد جایگشت های مختلف که با حروف کلمه «TASNIM» می توان ساخت برابر با ۶! یا همان ۷۲۰ می باشد. توجه کنید اگر مثلاً گفته شود با حروف کلمه TASNIM چند کلمه ۳ حرفی می توان ساخت، دیگر نمی توان گفت جواب ۳! است، بلکه باید از روش پُر کردن خانه ها استفاده کنیم که بعد از سؤال زیر، این روش را توضیح می دهیم.

مشابه امتحان نهایی

سؤال چهار نفر دوست به چند حالت می توانند در یک صف قرار گیرند؟

۲۴ = ۴! : تعداد حالت ها

پاسخ طبق نکته گفته شده جواب برابر است با:

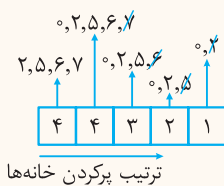
ساختن اعداد و کلمات در حالت کلی

معمولاً بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پُر کردن خانه ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرایط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح باشد باید ابتدا اولین خانه سمت راست را پُر کنیم سپس به سراغ پُر کردن اولین خانه سمت چپ می رویم و خانه ها را از چپ به راست پُر می کنیم. ضمناً توجه کنید اگر در متن سؤال ذکر شود تکرار ارقام یا حروف، مجاز نیست پس از پُر کردن هر خانه، باید یک حرف یا رقم استفاده شده در خانه قبلی را به دلخواه خط بزنیم. حالا دو تا سؤال حل می کنیم تا قضیه کاملاً برایتان جا بیفتد.

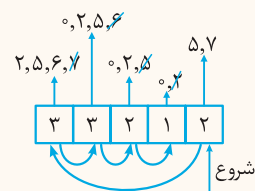
کتاب درسی - مشابه امتحان نهایی

سؤال با ارقام ۰، ۲، ۵، ۶ و ۷ بدون تکرار ارقام:

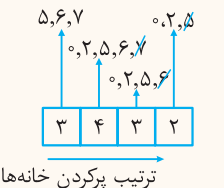
- چند عدد پنج رقمی می توان ساخت؟
- چند عدد پنج رقمی فرد می توان ساخت؟
- چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۵۰۰۰ می توان ساخت؟
- چند عدد پنج رقمی می توان ساخت که با ۲ شروع و به ۶ ختم شود؟



پاسخ ۱ شرط خاصی به جز تکراری نبودن ارقام ذکر نشده، پس خانه ها را از چپ به راست پُر می کنیم. فقط دقت کنید اولین خانه سمت چپ نمی تواند صفر باشد: (توجه کنید که پس از پُر کردن هر فونه، باید به دفعه یکی از ارقام استفاده شده در اون فونه رو خط بزنیم.)
 \Rightarrow تعداد عددها = $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$



۲ عددی فرد است که یکنانش فرد باشد. پس ابتدا اولین خانه سمت راست را پُر می کنیم سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می رویم: (ترتیب پُر کردن فونه ها رو با فلش هایی که زیر آن ها هست، مشخص کرده ایم.)
 \Rightarrow تعداد عددها = $3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 36$



۳ برای آن که عدد چهار رقمی مورد نظر، بزرگتر از ۵۰۰۰ باشد اولین رقم سمت چپ آن باید ۵ یا بیش تر باشد لذا پُر کردن خانه ها را از چپ به راست انجام می دهیم:
 \Rightarrow تعداد عددها = $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$



۴ ابتدا و انتهای اعداد خواسته شده، هر کدام فقط به ۱ حالت پُر می شوند: پس اول، این دو خانه را پُر می کنیم و بعد از آن، بقیه خانه ها را از چپ به راست پُر می کنیم:
 \Rightarrow تعداد عددها = $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

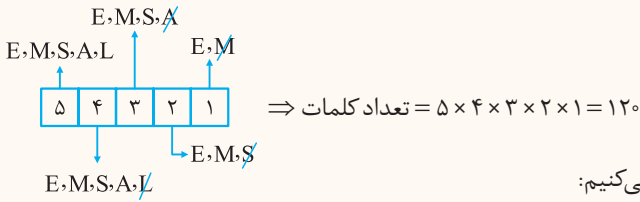
در تمام قسمت هایی که حل کردیم اگر گفته می شد تکرار ارقام مجاز است، دیگر هیچ رقمی را خط نمی زدیم.

کتاب درسی - مشابه امتحان نهایی

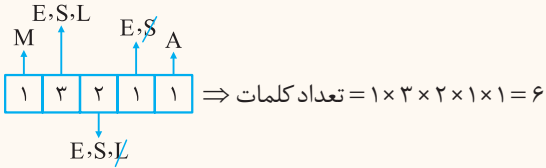
سؤال با حروف کلمه «EMSAL» و بدون تکرار حروف:

۱ چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت؟ ۲ چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با M شروع و به A ختم شود؟

پاسخ ۱ کلمه «EMSAL» پنج حرفی است، پس داریم:



۲ تکلیف مکان های اول و آخر مشخص است، پس به صورت زیر عمل می کنیم:



ساختن اعداد زوج یا مضرب ۵ وقتی رقم صفر هم وجود دارد

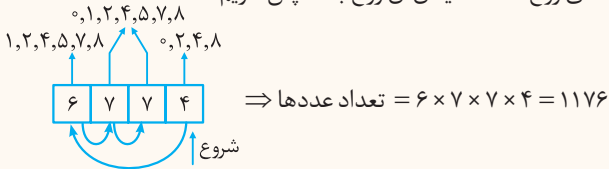
اگر صفر جزء ارقام داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. در یک حالت فرض می کنیم یکان صفر باشد و در حالت دیگر فرض می کنیم یکان صفر نباشد. سپس جواب های هر دو حالت را با هم جمع می کنیم. توجه کنید اگر گفته شود تکرار ارقام مجاز است نیازی نیست دو حالت جداگانه تشکیل دهیم و با یک حالت، مسئله حل می شود.

کتاب درسی - مشابه امتحان نهایی

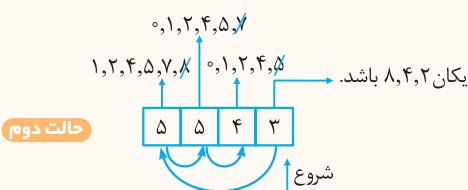
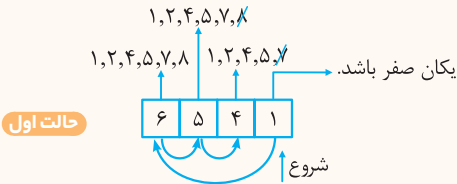
سؤال با ارقام ۸، ۷، ۵، ۴، ۲، ۱، ۰ چند عدد زوج چهاررقمی می توان ساخت به طوری که:

۱ تکرار ارقام مجاز باشد. ۲ تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ ۱ تکرار ارقام مجاز است، پس نیازی نیست دو حالت تشکیل دهیم؛ عددی زوج است که یکان آن زوج باشد پس داریم:



۲ تکرار ارقام غیرمجاز است، پس دو حالت در نظر می گیریم و جواب ها را با هم جمع می کنیم:



\Rightarrow تعداد کل اعداد = $120 + 300 = 420$

کنار هم قرار داشتن اشیا یا افراد خاص

فرض کنید می خواهیم کتاب های A، B، C، D و E را در یک قفسه کنار هم قرار بدهیم، به شرطی که کتاب های A و B همیشه کنار هم باشند. پس این دو کتاب را داخل یک کادر قرار می دهیم و این کادر را یک بسته بزرگ می نامیم:

۱ بسته کوچک
۳ بسته بزرگ

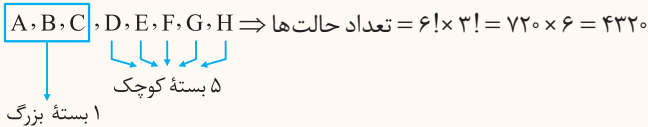
اکنون می توان گفت ۴ بسته داریم (۳ بسته کوچک و ۱ بسته بزرگ) که به ۴! حالت می توانند با هم جابه جا شوند. از طرفی در داخل بسته بزرگ، A و B خودشان هم می توانند با هم به ۲! حالت جابه جا شوند، لذا طبق اصل ضرب داریم:

$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

کنکور سراسری

سؤال ۳ دبیر ریاضی ۵ دبیر عربی به چند حالت می توانند عکس یادگاری بگیرند، به طوری که دبیران ریاضی، همیشه کنار هم باشند؟

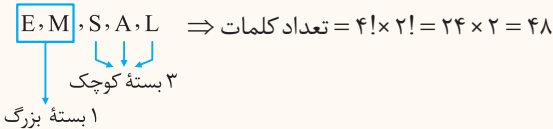
پاسخ دبیران ریاضی را به دلخواه A, B, C و دبیران عربی را D, E, F, G, H می نامیم و دبیران ریاضی را داخل یک کادر قرار می دهیم:



سؤال با حروف کلمه « EMSAL » و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که:

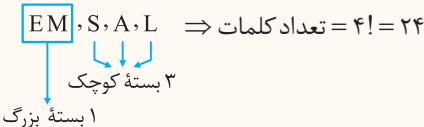
۱ در همه آن ها M و E کنار هم باشند؟
۲ در همه آن ها عبارت « EM » به همین شکل آمده باشد؟

پاسخ ۱ می خواهیم E و M در همه کلمات ساخته شده، کنار هم باشند، پس آن ها را در یک کادر قرار می دهیم و یک بسته بزرگ فرض می کنیم:



۲ این دفعه باید عبارت « EM » دقیقاً به همین شکل بیاید، یعنی E و M نمی توانند با هم جابه جا شوند، پس دیگر نباید جواب ۴! قسمت (۱) را

در ۲! ضرب کنیم: (یعنی الان ریگه کاری به داخل بسته بزرگ نداریم).



یک در میان قرار گرفتن اشیاء دو گروه

فرض کنید دو گروه آدم یا شیء داشته باشیم که تعداد هر دو گروه برابر با n باشد و بخواهیم آن ها را یک در میان در یک صف قرار دهیم. تعداد کل حالت ها برابر می شود با: $n! \times n!$ (کاری به اثباتش نداشته باشیم لطفاً)

حالا فرض کنید گروه اول شامل n عضو و گروه دوم شامل m عضو باشند (m و n دو عدد طبیعی متوالی هستند)، در این صورت تعداد حالت هایی که اعضای دو گروه یک در میان در یک صف قرار بگیرند برابر است با: $n! \times m!$

سؤال ۴ پسر و ۴ دختر به چند حالت می توانند یک در میان در یک صف قرار بگیرند؟

پاسخ تعداد اعضای دو گروه با هم یکسان است، لذا: $2 \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1152$ تعداد حالت ها

سؤال ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب عربی متمایز را به چند حالت، به شکل یک در میان می توان داخل قفسه چید؟

پاسخ تعداد اعضای دو گروه با هم یکسان نیست، پس داریم: $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$ تعداد حالت ها

شمارش (اصل جمع و ضرب)

پرسش های تشریحی

بسته ۱

• درستی یا نادرستی جملات یا عبارت های زیر را تعیین کنید.

(خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۱. ساده شده عبارت $6! \div 2! = 6!$ برابر ۳! است.

۲. با حروف کلمه «MANZEL» و بدون تکرار، می توان به تعداد ۱۴۴ کلمه ۶ حرفی نوشت که در همه آن ها E, L, Z کنار هم باشند.

(خرداد ۱۴۰۱)

۳. حاصل $\frac{8!}{4!}$ برابر ۲! است.

• جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

(خرداد ۱۴۰۰، دی ۹۹، شهریور ۹۸)

۴. تعداد جایگشت های n تایی از n شیء متمایز برابر است.

(خرداد ۱۴۰۰)

۵. برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت = ۰! تعریف می کنیم.

۶. اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر

(خرداد ۱۴۰۰)

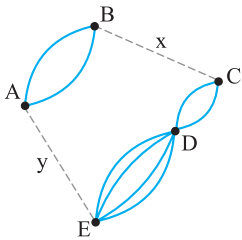
باشند، در کل آن عمل به طریق انجام پذیر است.

۷. مقدار $\frac{1!}{1!}$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۰)
۸. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۵ شیء متمایز را یک از آن ۵ شیء می نامیم. (شهریور ۱۴۰۰)
۹. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک تایی از آن n شیء می نامیم. (دی ۹۹ خارج از کشور)
۱۰. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت از آن ۷ شیء می نامیم. (دی ۱۴۰۰)
۱۱. حاصل $\frac{5!}{3!}$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۱ - مشابه شهریور ۱۴۰۲)
۱۲. تعداد جایگشت های مختلف ۴ کتاب متمایز می باشد. (دی ۱۴۰۱)

● گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۱۳. در یک کارخانه، نوعی خودرو در ۵ رنگ سفید، سیاه، زرد، نوک مدادی، آبی و ۳ مدل مختلف، ۴ حجم موتور متفاوت و ۲ نوع دنده دستی و اتومات تولید می شود. در این کارخانه چند نوع خودرو اتومات تولید می شود؟
- ۱۸۰ (۴) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۲) ۳۰ (۱)

۱۴. مطابق شکل، فردی می خواهد از شهر A به D سفر کند. اگر تعداد کل حالت های ممکن برابر ۲۰ باشد، تعداد



مسیرها از B به C و از A به E کدام است؟

$y = 3, x = 3$ (۱)

$y = 2, x = 3$ (۲)

$y = 2, x = 4$ (۳)

$y = 3, x = 4$ (۴)

۱۵. حاصل عبارت $A = \frac{9! + 10!}{9!}$ کدام است؟

۸ (۴) ۹ (۳) ۱۰ (۲) ۱۱ (۱)

۱۶. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۳ رقمی مضرب ۵ و بزرگ تر از ۶۰۰ می توان ساخت؟ (تکرار ارقام، غیرمجاز است.)

۸ (۴) ۱۰ (۳) ۱۲ (۲) ۱۸ (۱)

۱۷. ۷ نفر اعضای یک خانواده می خواهند عکس یادگاری بگیرند. اگر بخواهیم بین پدر و مادر، دقیقاً یک فرزند خاص قرار بگیرد، به این روش چند عکس یادگاری می توان گرفت؟

۳۰۰ (۴) ۲۸۰ (۳) ۲۴۰ (۲) ۲۲۰ (۱)

۱۸. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.) (مشابه شهریور ۱۴۰۰، شهریور ۹۸)
۱۹. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟ (دی ۹۹، مشابه خرداد ۹۹)
۲۰. ارقام ۱ تا ۹ (بدون تکرار ارقام) مفروض اند؛ با توجه به آن به سؤالات زیر پاسخ دهید. (دی ۹۷)

۲۰. چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

۲۱. چند عدد ۴ رقمی زوج می توان نوشت؟

- حروف کلمه «خورشید» را بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی)، در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (شهریور ۹۹، مشابه شهریور ۱۴۰۲)
۲۲. چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

۲۳. چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

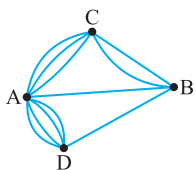
- حروف کلمه «مهرسان» را بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی)، در نظر بگیرید و به دو سؤال زیر پاسخ دهید.

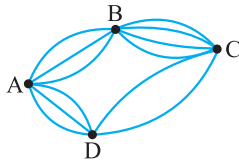
۲۴. چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت؟

۲۵. چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که با «م» شروع شوند؟

۲۶. می خواهیم از بین ۲ سبب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم. به چند طریق می توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟ (دی ۱۴۰۰)
۲۷. می خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون، یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)

۲۸. بین چهار شهر A، B، C، D مطابق شکل راه هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟ (مشابه شهریور ۱۴۰۲، خرداد ۱۴۰۰)





۲۹. مطابق شکل زیر، بین شهرهای A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (خرداد ۹۹)

● اگر برای مسافرت به یکی از شهرهای مشهد، شیراز یا اهواز بتوان از وسیله نقلیه سواری، اتوبوس یا هواپیما استفاده کرد، آن‌گاه به سؤالات زیر پاسخ دهید. (کتاب درسی)

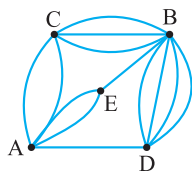
۳۰. تعداد راه‌های ممکن را برای انتخاب شهر و وسیله نقلیه پیدا کنید.

۳۱. نمودار درختی مربوط به انتخاب‌ها را رسم کنید.

● فرض کنید از تهران به کرج ۳ راه، از کرج به زنجان ۴ راه و از زنجان به تبریز ۲ راه وجود داشته باشد، حال به سؤالات زیر پاسخ دهید. (کتاب درسی)

۳۲. به چند طریق می‌توان از تهران و با عبور از کرج و زنجان، به تبریز رفت و برگشت؟

۳۳. به چند طریق می‌توان از تهران به تبریز رفت و برگشت به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از مسیرها، راه‌های رفت و برگشت یکی نباشند؟



(کتاب درسی)

● با توجه به نمودار، به سه سؤال زیر پاسخ دهید.

۳۴. به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم؟

۳۵. به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

۳۶. به چند طریق می‌توانیم بدون گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

۳۷. فردی می‌خواهد بداند به چند طریق با دو پیراهن به رنگ‌های «آبی - قرمز» و با سه شلوار به رنگ‌های «قهوه‌ای - مشکی - سرمه‌ای» می‌تواند لباس بپوشد. نمودار درختی حالت‌های مختلف انتخاب او را رسم کنید. (کتاب درسی)

۳۸. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سه آن‌ها را با هم بپوشد؟ (خرداد ۸۹)

۳۹. به چند طریق می‌توان به ۲ سؤال ۳ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری که هیچ سؤالی بی‌پاسخ نماند؟ (خرداد ۹۳)

۴۰. به چند طریق می‌توان به یک آزمون دو گزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد به طوری که: (کتاب درسی)

آ پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد. ب پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی نباشد.

۴۱. روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعده غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد، انتخاب کنیم؟ (خرداد ۹۲)

● حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (مشابه امتحان نهایی)

۴۲. $5! - 4!$ ۴۶. $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!}$ (خرداد ۹۰، مشابه خرداد ۸۹)

۴۳. $\frac{12!}{10!}$ ۴۷. $0! + 1! + 2! + 3!$

۴۴. $\frac{7!}{3! \times 5!}$ ۴۸. $4! + 2!$

۴۵. $\frac{3! + 5!}{6!}$ ۴۹. $\frac{10!}{6! \times 7!}$

۵۰. درستی یا نادرستی تساوی $1! + 3! + 4! = 8!$ را بررسی کنید. (خرداد ۹۲)

۵۱. اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار n را به دست آورید. (کنکور سراسری، مخصوص علاقمندان)

۵۲. با اعداد ۱، ۴، ۹ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت، به طوری که: (خرداد ۸۹)

آ تکرار ارقام مجاز باشد. ب تکرار ارقام مجاز نباشد.

۵۳. به چند طریق مختلف ۸ نفر می‌توانند برای تهیه بلیط سینما در یک صف بایستند؟ (کتاب درسی)

۵۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «کتاب» را بنویسید. (خرداد ۸۹)

۵۵. به چند طریق می‌توان کتاب‌های ریاضی، عربی، جغرافیا و تاریخ را کنار هم قرار داد؟ (خرداد ۹۰)

۵۶. با حروف الفبای فارسی چند کلمه سه حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت به طوری که: (کتاب درسی)

آ تکرار حروف مجاز باشد. ب تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۵۷. با حروف کلمه «سعادت» به چند راه مختلف می‌توان کلمات سه حرفی نوشت به طوری که:
- (مشابه امتحان نهایی) **آ** تکرار حروف مجاز باشد. **ب** تکرار حروف غیرمجاز باشد.
۵۸. با حروف کلمه «تهران» چند کلمه سه حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟
- (مشابه امتحان نهایی) **حروف کلمه «مهستان» را بدون تکرار حروف، در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.**
۵۹. چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت؟
۶۰. چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت که با حرف «س» شروع و به «ن» ختم شود؟
- (کتاب درسی) **حروف کلمه «TRIANGLE» را بدون تکرار حروف، در نظر بگیرید و به سه سؤال زیر پاسخ دهید.**
۶۱. چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت؟
۶۲. چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع شود؟
۶۳. چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع و به «E» ختم شود؟
- (مشابه امتحان نهایی) ۶۴. با ارقام ۱، ۰، ۵، ۹ و ۴ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت به طوری که:
- آ** تکرار مجاز باشد. **ب** تکرار غیرمجاز باشد.
- (مشابه امتحان نهایی) **ارقام ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸ (بدون تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به چهار سؤال زیر پاسخ دهید.**
۶۵. چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت؟
۶۶. چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟
۶۷. چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که با ۲ شروع شود؟
۶۸. چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که با ۳ شروع و به ۸ ختم شود؟
۶۹. دو رقم اول سمت چپ یک عدد پنج‌رقمی، مشخص است. چند راه ممکن برای ساختن آن عدد پنج‌رقمی وجود دارد؟ (ارقام می‌توانند تکراری باشند.)
- (تألیفی) ۷۰. با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶ و ۸ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ساخت، به طوری که:
- (شهریور ۹۰) **آ** آن عدد زوج باشد. **ب** رقم یکان آن عدد اول باشد.
- (مشابه امتحان نهایی، خرداد ۱۴۰۲) **ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷ (با تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به سه سؤال زیر پاسخ دهید.**
۷۱. چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟
۷۲. چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت؟
۷۳. چند عدد دورقمی فرد می‌توان نوشت؟
- (کتاب درسی) ۷۴. با ارقام ۱، ۰، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟
- (کتاب درسی) ۷۵. با ارقام ۲۰، ۳، ۴ و ۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر یا مساوی ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)
- (کتاب درسی) ۷۶. با اعداد ۱، ۰، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به طوری که:
- آ** عدد، مضرب ۵ بوده و تکرار مجاز باشد. **ب** عدد، زوج باشد و تکرار مجاز باشد.
- (کتاب درسی) ۷۷. با اعداد ۱، ۰، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که:
- آ** عدد، مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. **ب** عدد، زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.
- (خرداد ۹۰) **ارقام ۵، ۶، ۸ و ۷ را در نظر بگیرید و به دو سؤال زیر پاسخ دهید.**
۷۸. چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟
۷۹. چند عدد چهاررقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟
- (شهریور ۸۹) ۸۰. با ارقام ۵، ۳، ۸، ۲ و ۷ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی ساخت به طوری که:
- آ** آن عدد، زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. **ب** رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.
- (کتاب درسی) ۸۱. چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن‌ها، عددی اول باشد؟
۸۲. پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به صورت

تهران
ب

 می‌باشد که هر ستاره نمایش‌گر یک عدد غیرصفر است. در سری «ب» و در
- (کنکور سراسری) تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۸۳. یک اداره برای شماره کارت پرسنلی کارمندان خود از یک کد سه رقمی و ۲ حرف فارسی به شکل زیر استفاده می‌کند، با این شرط که اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد. تعداد راه‌های ممکن برای شماره کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید به شرطی که:

عدد عدد حرف حرف عدد
□ □ □ □ □

الف تکرار حروف و ارقام مجاز باشد.

ب تکرار حروف و ارقام مجاز نباشد.

● مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۲۰ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۲ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند حال به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(کتاب درسی)

۸۴. مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۰ نفر مشورت بگیرد؟

۸۵. اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشاوره بگیرد به شرط آن‌که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

(خرداد ۹۶)

● کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

۸۹. $10! = 10 \times 9!$

۸۸. $\frac{8!}{4!} = 2!$

۸۷. $3! \times 4 = 4!$

۸۶. $(3!)^2 = 9!$

(خرداد ۹۴)

● با در نظر گرفتن ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، به دو سؤال زیر پاسخ دهید.

۹۰. چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۹۱. چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که یکان آن ۲ باشد؟

(خرداد ۹۵)

۹۲. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد؟

(خرداد ۹۱)

۹۳. با حروف کلمه «روستا» و بدون تکرار، چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت؟ (بمعنی یا بی معنی)

(خرداد ۹۱)

۹۴. به چند راه مختلف، ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم عکس بگیرند؟

(دی ۱۴۰۱)

۹۵. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۳ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۹۶. علی ۳ کتاب علمی و ۴ کتاب داستانی دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش یک کتاب علمی و یک کتاب داستانی به دوستش هدیه دهد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

(شهریور ۱۴۰۱)

۹۷. با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

شمارش (تبدیل و ترکیب)

صفحه ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

بسته دوم



الف مسائل تبدیل

● اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شیء از آن‌ها را طوری انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم مهم باشد، (مثل شرکت در مسابقه، یا گرفتن پست و مقام) در این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $P(n, r)$ نشان داده و آن را تبدیل r شیء از n شیء می‌خوانیم که به صورت زیر حساب می‌شود:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

● البته همواره به جای استفاده از فرمول بالا، می‌توانیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. مگر این‌که در متن سؤال، خود $P(n, r)$ را مشاهده کنیم.

کتاب درسی

سؤال از بین ۸ نفر شرکت‌کننده در یک مسابقه تلویزیونی، به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟

پاسخ روش اول ترتیب جایزه دادن به ۳ نفر اول مهم است؛ پس از فرمول $P(n, r)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$



$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

روش دوم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم:

سؤال در معادله زیر، مقدار n را به دست آورید.

کتاب درسی

$$P(n, 3) = 4P(n, 2)$$

پاسخ به کمک فرمول، حاصل $P(n, 2)$ و $P(n, 3)$ را باز می‌کنیم:

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 4 \times \frac{n!}{(n-2)!} \xrightarrow{\text{ن! ها را از دو طرف ساده می‌کنیم.}} \frac{1}{(n-3)!} = 4 \times \frac{1}{(n-2)!}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n-2=4 \Rightarrow n=6$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 = \frac{4}{n-2} \xrightarrow{\text{ن! ها را ساده می‌کنیم.}} \frac{1}{(n-3)!} = \frac{4}{(n-2)(n-3)!} \xrightarrow{\text{را یک مرحله باز می‌کنیم.}} \frac{1}{(n-3)!} = \frac{4}{(n-2)(n-3)!}$$

ب مسائل ترکیب

اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شیء را از بین آن‌ها انتخاب کنیم به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد در این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و آن را ترکیب r شیء از n شیء می‌خوانیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

تذکر معمولاً از کلماتی مثل «دسته»، «گروه» و «تیم» متوجه می‌شویم که باید از ترکیب استفاده کنیم.

کتاب درسی

سؤال به چند حالت می‌توانیم ۵ کتاب را از بین ۹ کتاب برای هدیه دادن انتخاب کنیم؟

پاسخ در این جا پس از انتخاب ۵ کتاب، دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم مهم نیست؛ لذا از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{(9-5)! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 5!} = 126$$

سؤال در یک کیسه، ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد. با چشم بسته ۳ مهره خارج می‌کنیم؛ تعداد حالت‌های هر یک از قسمت‌های زیر را به دست آورید.

مشابه امتحان نهایی

- ۱ هر ۳ مهره، آبی باشند.
- ۲ هر ۳ مهره، قرمز باشند.
- ۳ هر ۳ مهره، هم‌رنگ باشند.
- ۴ حداقل ۲ مهره، آبی باشند.

پاسخ ۱ ۳ مهره آبی باید از بین ۳ مهره آبی موجود در کیسه، انتخاب شوند، لذا داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)! \times 3!} = \frac{3!}{1 \times 3!} = 1$$

۲ ۳ مهره قرمز باید از بین ۴ مهره قرمز انتخاب شوند، لذا داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 4$$

۳ مهره باید هم‌رنگ باشند، یعنی هر ۳ مهره آبی یا هر ۳ مهره قرمز باشند. این حرف «یا» یعنی این‌که باید از اصل جمع استفاده کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 1 + 4 = 5$$

۴ حداقل ۲ مهره باید آبی باشند؛ یعنی ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز داشته باشیم یا این‌که هر سه مهره آبی باشند. لذا هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{3}{3} = 3 \times 4 + 1 = 13$$

نکته ۱ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ ، چون در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا با هم مهم نیست مثلاً تعداد

زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ برابر است با: $\binom{5}{3} = 10$.

۲ برای یافتن تعداد پاره‌خط‌ها، تعداد مثلث‌ها، تعداد چهارضلعی‌ها و... از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. مثلاً با ۱۰ نقطه روی



نیم‌دایره مقابل می‌توانیم به تعداد $\binom{10}{3}$ مثلث بسازیم: $\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$

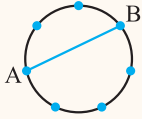
مشابه امتحان نهایی

سؤال با ۷ نقطه روی محیط یک دایره:

۱ چند وتر می توان ساخت؟ ۲ چند مثلث می توان ساخت؟

پاسخ ۱ وتر AB و وتر BA در شکل زیر، هیچ فرقی ندارد.

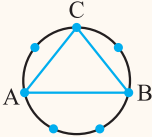
پس از فرمول ترکیب استفاده می کنیم. وتر دارای دو رأس ابتدایی و انتهایی است بنابراین:



$$\text{تعداد وترها} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$$

۲ مثلث ABC با مثلث BAC یا CAB هیچ فرقی ندارد.

پس از فرمول ترکیب استفاده می کنیم. ضمناً هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ لذا:



$$\text{تعداد مثلثها} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times (3 \times 2 \times 1)} = 35$$

کتاب درسی

سؤال تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ را به دست آورید.

$$\text{تعداد زیرمجموعه ها} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{(3 \times 2 \times 1) \times 4!} = 35$$

پاسخ

انتخاب اجباری

• فرض کنید بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم به طوری که k شیء بخصوص، حتماً انتخاب شوند. در این صورت تعداد حالت های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می باشد زیرا k شیء قبلاً انتخاب شده اند پس باید k را هم از r و هم از n کم کنیم. مثلاً فرض کنید از بین ۱۰ نفر می خواهیم یک گروه ۴ نفره تشکیل دهیم، به طوری که یک فرد به خصوص حتماً در گروه باشد، در این صورت تعداد حالت ها برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k} = \binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

• اگر بخواهیم k شیء بخصوص انتخاب نشوند، از فرمول $\binom{n-k}{r}$ استفاده می کنیم. در مثال قبل، فرض کنید بخواهیم یک فرد به خصوص اصلاً انتخاب

$$\binom{n-k}{r} = \binom{10-1}{4} = \binom{9}{4}$$

نشود، تعداد حالت ها برابر می شود با:

سؤال از بین ۵ نفر می خواهیم یک گروه ۳ نفره تشکیل دهیم به طوری که یک فرد به خصوص، حتماً در گروه باشد. به چند طریق می توانیم این کار را انجام دهیم؟

پاسخ یک انتخاب اجباری داریم؛ لذا $k = 2$ ، از طرفی $n = 5$ و $r = 3$ می باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت های انتخاب} = \binom{n-k}{r-k} = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

سؤال تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ به طوری که همه آن ها شامل e و f باشند را به دست آورید.

پاسخ دو انتخاب اجباری داریم لذا $k = 2$ ، از طرفی $n = 6$ و $r = 4$ می باشد پس خواهیم داشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه ها} = \binom{n-k}{r-k} = \binom{6-2}{4-2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6$$

سؤال تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ که فاقد عضوهای ۱ و ۲ باشند را به دست آورید.

پاسخ در این جا $k = 2$ است (چون دو عضو هستند که می خواهیم انتخاب نشوند) لذا داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه ها} = \binom{n-k}{r} = \binom{7-2}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

درستی یا نادرستی جملات یا عبارات‌های زیر را تعیین کنید.

۹۸. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه ۵ عضوی برابر ۱۵ است. (خرداد ۱۴۰۲)
۹۹. حاصل $P(n, 1)$ همواره برابر با n است.
۱۰۰. حاصل $P(n, n)$ همواره برابر با ۱ است.
۱۰۱. حاصل $P(n, 0)$ همواره برابر با n است.
۱۰۲. حاصل $\binom{n}{1}$ همواره برابر با n است.
۱۰۳. حاصل $\binom{n}{n}$ همواره برابر با ۱ است.
۱۰۴. حاصل $\binom{n}{0}$ همواره برابر با n است.
۱۰۵. حاصل $\binom{n}{n-1}$ همواره برابر با $(n-1)$ است.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۰۶. حاصل $C(5, 5)$ برابر می‌باشد. (مشابه خرداد ۱۴۰۰)
۱۰۷. به طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۹۹ خارج از کشور)
۱۰۸. حاصل $\binom{9}{6}$ برابر می‌باشد. (شهریور ۹۸)
۱۰۹. در انتخاب r شیء از بین n شیء، جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارند. (شهریور ۱۴۰۰)

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۱۱۰. با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟
- ۴۲ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۵۶ (۴)
۱۱۱. حاصل $P(2, 2)$ کدام است؟
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)
۱۱۲. از معادله $P(n, 1) = n^2 - 4n$ مقدار n^3 کدام است؟
- ۲۷ (۱) ۱۲۵ (۲) ۶۴ (۳) ۲۱۶ (۴)
۱۱۳. در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟ (سراسری ۹۹)
- ۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۷۵ (۳) ۸۴ (۴)
۱۱۴. با نقاط مقابل چند مثلث می‌توان ساخت؟
- ۶۳ (۱) ۴۸ (۲) ۵۲ (۳) ۷۲ (۴)
۱۱۵. تعداد زیرمجموعه‌های هفت عضوی مجموعه $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ شامل همه عددهای اول و فاقد اعداد مضرب ۴، کدام است؟
- ۸ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۱۱۶. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟ (خرداد ۹۹، مشابه شهریور ۹۸)
۱۱۷. مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند:

[A] یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند.

[B] یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند.

۱۱۸. از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۲ کتاب فیزیک متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌توان:
- [A] یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد.
- [B] یک کتاب ریاضی انتخاب کرد.

۱۱۹. به چند طریق می‌توان ۳ توپ هم‌رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)

۱۲۰. به چند طریق، از بین ۸ دوندۀ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند، به طوری که هیچ دو نفری هم‌زمان به خط پایان نرسند؟ (کتاب درسی)

۱۲۱. با حروف کلمه «ولایت» چند ترتیب چهارحرفی مختلف می توان ساخت؟ (بی معنی و با معنی) (شهریور ۹۰)
۱۲۲. به چند طریق می توان از بین ۹ فیلم مطرح در جشنواره، ۳ فیلم را به عنوان فیلم اول، دوم و سوم انتخاب نمود؟ (شهریور ۸۹)
۱۲۳. حسین ۶ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می تواند ۴ کتاب از آن ها را در یک قفسه کنار هم بچیند؟ (دی ۸۹)
۱۲۴. به چند طریق می توان از بین ۶ بازیکن ذخیره یک تیم فوتبال، ۳ نفر را به ترتیب برای پست های حمله، هافبک و دفاع وارد زمین کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)
۱۲۵. ۴ نفر به چند طریق می توانند روی ۶ صندلی قرار گیرند، اگر روی هر صندلی حداکثر یک نفر بتواند بنشیند؟
۱۲۶. تعداد جایگشت های (تبدیل های) ۲ حرفی از حروف کلمه «گلستان» را به دست آورید. (کتاب درسی)
۱۲۷. از یک گروه ۱۳ نفری دانش آموزی، به چند طریق می توان ۴ نفر را برای فعالیت های فوق برنامه مدرسه انتخاب کرد، به طوری که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود؟ (مشابه امتحان نهایی)
- با توجه به تساوی روبه رو به سؤالات زیر پاسخ دهید.**
۱۲۸. در تساوی فوق مقدار n را به دست آورید.
۱۲۹. حاصل $P(n+1, 3)$ را به ساده ترین شکل بنویسید.
- درستی روابط زیر را بررسی کنید.**
۱۳۰. $P(n, (n-1)) = n!$
۱۳۱. $\frac{P(n, n)}{n!} = P(n, 0)$
۱۳۲. $P(n+2, 4) = P(n, 3)$
۱۳۳. $P(n, 5) = 18P(n-2, 4)$
۱۳۴. در یک پرواز داخلی، ۴ صندلی خالی در هواپیما موجود است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می توان از بین آن ها ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری که:
- الف) ترتیب انتخاب این افراد مهم باشد. ب) ترتیب انتخاب افراد از روی فهرست مهم نباشد.
۱۳۵. بستنی فروشی ۱۰ طعم بستنی دارد. اگر یک بستنی قیفی با ۳ طعم مختلف بخواهیم و ترتیب قرار گرفتن طعم های مختلف مهم نباشد، چند انتخاب می توانیم داشته باشیم؟ اگر ترتیب قرار گرفتن طعم های مختلف مهم باشد، چند انتخاب خواهیم داشت؟ (مشابه خرداد ۸۹)
۱۳۶. به چند طریق می توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟ (شهریور ۸۹، مشابه دی ۸۹)
۱۳۷. چگونه می توان از بین ۸ مهره سفید و ۶ مهره آبی، ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری که:
- الف) هر سه مهره، سفید باشند. ب) هر سه مهره، هم رنگ باشند. ج) دو مهره، سفید و یک مهره، آبی باشد. (مشابه امتحان نهایی)
۱۳۸. ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می توان سه توپ با رنگ های متفاوت انتخاب کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)
۱۳۹. ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می توان سه توپ هم رنگ انتخاب کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)
۱۴۰. به چند طریق می توان از بین ۱۲ لامپ که ۴ تای آن ها معیوب است، ۳ لامپ را انتخاب کرد، به طوری که:
- الف) هر سه لامپ معیوب باشند. ب) دو تا سالم و یکی معیوب باشند. ج) فرقی بین سالم و معیوب نباشد. (مشابه امتحان نهایی)
۱۴۱. ۱۲ نفر اعضای یک تیم والیبال، ۷ نفر جوان و ۵ نفر نوجوان هستند. به چند طریق می توان ۶ نفر از بین آن ها انتخاب کرد، به طوری که:
- الف) ۴ نفر جوان و ۲ نفر نوجوان باشند. ب) محدودیتی در جوان و نوجوان بودن نداشته باشیم. (کتاب درسی)
۱۴۲. از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می توان سه نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟ (کتاب درسی)
۱۴۳. دانش آموزی باید از بین ۱۰ سؤال امتحانی دقیقاً به ۸ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ دادن به ۳ سؤال اول اجباری باشد، به چند طریق می تواند به سؤالات پاسخ دهد؟ (کتاب درسی)
۱۴۴. شش نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. مشخص کنید با این نقاط چند مثلث متفاوت می توان ساخت؟ (کتاب درسی)
۱۴۵. ۵ نقطه روی محیط یک دایره چند وتر می توان رسم کرد؟ (خرداد ۹۹)
۱۴۶. مجموعه ۸ عضوی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ (شهریور ۹۹، مشابه دی ۹۸، خرداد ۹۸)
- مقدار x را در دو سؤال زیر به دست آورید.**
۱۴۷. $2x + C(5, 2) = P(5, 3)$
۱۴۸. $x \times P(5, 2) = C(n, n)$
۱۴۹. مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد که همگی شامل اعداد ۶ و ۵ باشند؟ (خرداد ۹۶)
۱۵۰. مقدار n را از تساوی $P(n, 1) = 6$ به دست آورید.
۱۵۱. از میان ۵ ریاضیدان، ۳ فیزیکدان و ۴ شیمی دان به چند طریق می توانیم یک کمیته ۳ نفره علمی تشکیل دهیم؟ (خرداد ۹۶)

درستی تساوی‌های سه سؤال زیر را نشان دهید.

۱۵۲. $P(n, n-1) = P(n, n)$ (خرداد ۹۴) ۱۵۳. $P(6, 2) = 6C(5, 1)$ (خرداد ۹۳) ۱۵۴. $C(n, n) = C(n, 0)$ (خرداد ۹۲)

۱۵۵. از فهرست نام ۱۲ دانش‌آموز ۴ نام را برای بازدید از موزه به قید قرعه انتخاب می‌کنیم. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر را به دست آورید. (خرداد ۹۵)

۱۵۶. مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید:

الف) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل دو عضو b و c دارد؟

۱۵۷. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $\binom{5}{3}$ باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

احتمال (قسمت اول)

صفحه ۱۲ تا ۲۱ کتاب درسی

بسته سوم



الف پدیده‌های قطعی و تصادفی

تعریف پدیده‌هایی که می‌توان نتیجه آن‌ها را قبل از رخ دادن به طور حتمی مشخص کرد پدیده‌های قطعی نام دارند.

مثال می‌دانیم اگر یک لیوان آب را برگردانیم آب به سمت پایین می‌ریزد. پس این پدیده، قطعی است.

تعریف پدیده‌هایی که قبل از رخ دادن آن‌ها، نتوانیم نتیجه قطعی آن‌ها را معلوم کنیم پدیده‌های تصادفی یا آزمایش‌های تصادفی نام دارند.

مثال در پرتاب تاس نمی‌توانیم قبل از پرتاب، مشخص کنیم که دقیقاً چه عددی ظاهر می‌شود.

فضای نمونه یک آزمایش تصادفی

• گفتیم در هر پدیده تصادفی، نتیجه قطعی قبل از انجام آزمایش معلوم نیست ولی همه نتایج ممکن برای آن معلوم است که به مجموعه این نتایج، فضای نمونه می‌گوییم و آن را با S و تعداد اعضایش را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در پرتاب یک تاس خواهیم داشت: $n(S) = 6 \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

• ضمناً به هر یک از اعضای S یک برآمد می‌گوییم مثلاً در پرتاب یک تاس ۶ برآمد وجود دارد و یا در پرتاب یک سکه خواهیم داشت:

$$S = \{ر, پ\} \Rightarrow n(S) = 2$$

بنابراین در پرتاب یک سکه، دو برآمد وجود دارد.

تذکر مهم اگر یک آزمایش تصادفی را چند بار تکرار کنیم (مثلاً یک سکه رو پند بار پرتاب کنیم) یا اگر چند آزمایش تصادفی مختلف را با هم انجام دهیم (مثلاً

تاس و سکه رو با هم پرتاب کنیم) برای یافتن $n(S)$ باید تعداد اعضای فضای نمونه تک تک آزمایش‌ها را در هم ضرب کنیم. مثلاً اگر یک سکه را ۴ بار پرتاب

کنیم خواهیم داشت: $n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$

یا اگر یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر می‌شود با: $n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 2 \times 6^2 = 72$

تاس
تاس
سکه

نمودار درختی برای مشخص کردن فضای نمونه

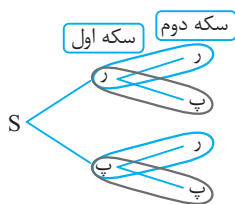
گاهی اوقات در امتحان نهایی از شما خواسته می‌شود که تمام عضوهای فضای نمونه را بنویسید، در این گونه مواقع

می‌توانید از نمودار درختی استفاده کنید. یعنی برای هر فرزند یا سکه ۲ حالت و برای هر تاس ۶ حالت در نظر بگیرید

و آن‌ها را شاخه‌بندی کنید.

مثال اگر بخواهیم فضای نمونه مربوط به پرتاب ۲ سکه را رسم کنیم، به شکل مقابل خواهد بود:

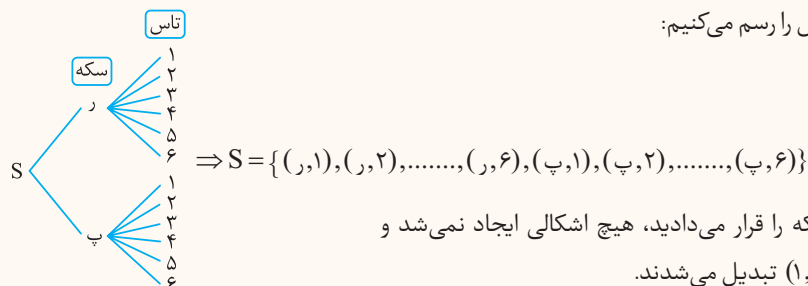
$$\Rightarrow S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$



کتاب درسی

سؤال یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. به کمک نمودار درختی، فضای نمونه را به طور کامل بنویسید.

پاسخ ما به دلخواه اول شاخه‌های سکه و سپس تاس را رسم می‌کنیم:



البته اگر در نمودار درختی، اول تاس و سپس سکه را قرار می‌دادید، هیچ اشکالی ایجاد نمی‌شد و

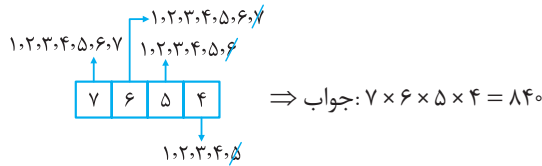
زوج مرتب‌ها به شکل $(پ, ۱), (پ, ۲), \dots, (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), \dots, (ر, ۶)$ تبدیل می‌شدند.

۴
بخش

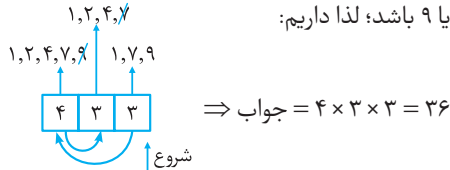


پاسخنامه

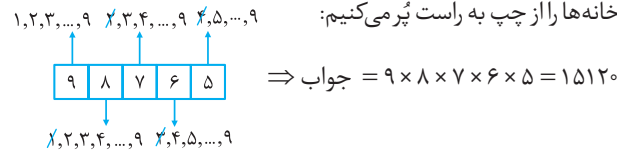
۱۸ | چهار تا خانه رسم می‌کنیم، تنها شرط سوال این است که تکرار رقم‌ها مجاز نیست پس بعد از پُر کردن هر خانه، یکی از ارقام استفاده شده در خانه قبلی را خط می‌زنیم (مهم نیست کدوم رقم رو خط بزنینم).



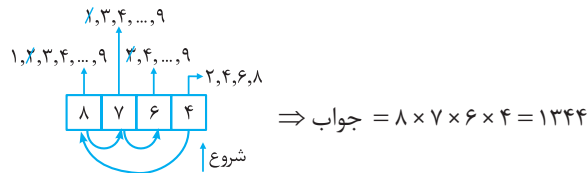
۱۹ | سه تا خانه رسم می‌کنیم، عدد حاصل باید فرد باشد، پس یکنانش فقط می‌تواند ۱ یا ۷ یا ۹ باشد؛ لذا داریم:



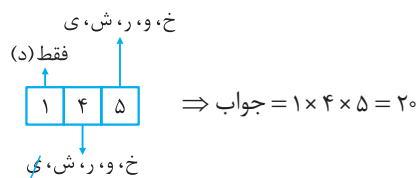
۲۰ | می‌خواهیم عدد ۵ رقمی بسازیم و تکرار ارقام هم مجاز نیست؛ لذا خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم:



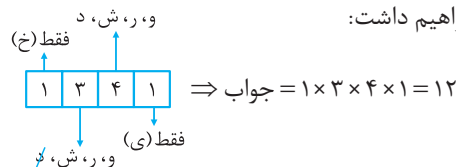
۲۱ | یکان عدد باید زوج باشد، یعنی می‌تواند ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد:



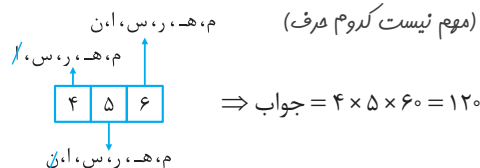
۲۲ | سه تا خانه رسم می‌کنیم، خانه آخر فقط به ۱ حالت می‌تواند پُر شود (با حرف «د»); در کلمات فارسی، خانه‌ها را از راست به چپ پُر می‌کنیم:



۲۳ | چهار تا خانه رسم می‌کنیم، تکلیف خانه‌های ابتدایی و انتهایی معلوم است. لذا خواهیم داشت:



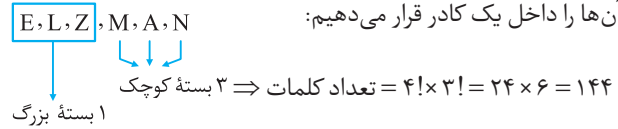
۲۴ | «مهرسان» کلمه‌ای فارسی است، پس پُر کردن خانه‌ها را از راست به چپ انجام می‌دهیم. پس از پُر کردن هر خانه، یکی از حروف استفاده شده را حذف می‌کنیم. (مهم نیست کدوم حرف)



۱ | نادرست است؛ زیرا:

$$\begin{cases} 6! = 720 \\ 2! = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$
 ولی $3!$ برابر ۶ است، پس این جمله نادرست است.

۲ | درست است؛ زیرا می‌خواهیم E, L و Z کنار هم باشند، پس آن‌ها را داخل یک کادر قرار می‌دهیم:



۳ | نادرست است؛ زیرا:

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

۱	۵	۴	$n!$
۱	۷	۶	$m \times n$
۹	۹	۸	جایگشت
۲۰	۱۱	۱۰	۷ تایی
		۴	۱۲

۱۳ | گزینه (۲)

فقط انومات حجم موتورها مدل‌های مختلف رنگ‌های مختلف
 $5 \times 3 \times 4 \times 1 = 60$ = تعداد کل حالت‌ها

۱۴ | گزینه (۲)

مسیر ABCD: $2 \times x \times 2 = 4x$

مسیر AED: $y \times 4 = 4y$

$4x + 4y = 20 \Rightarrow$ طبق اصل جمع

فقط اعداد گزینه (۲) در معادله بالا صدق می‌کنند؛ یعنی اگر $x = 3$ و $y = 2$ باشد، به رابطه $20 = 20$ می‌رسیم.

۱۵ | گزینه (۱)

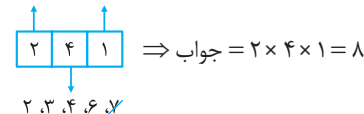
عدد $10!$ را یک مرحله باز می‌کنیم یعنی آن را به شکل $10 \times 9!$ می‌نویسیم:

از $9!$ فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{9! + 10 \times 9!}{9!} = \frac{9!(1+10)}{9!} = 11$$

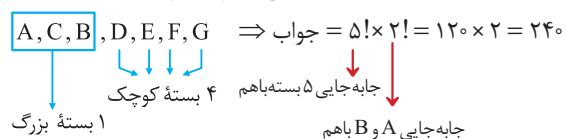
۱۶ | گزینه (۴)

یکان باید ۵ باشد. ضمناً صدگان باید ۶ یا ۷ باشد، پس داریم:



۱۷ | گزینه (۲)

پدر و مادر را با A و B و فرزند خاص را C می‌نامیم. داریم:



طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

$$24 \times 24 = 576$$

۳۳ | مسیره‌های رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند سؤال قبل می‌باشد:

$$24 = 2 \times 4 \times 3 = \text{تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز}$$

چون گفته شده مسیره‌های رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیره‌هایی

که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند:

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



حال طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

$$\times (\text{تعداد حالات مسیره رفت}) = \text{تعداد کل راه‌های انتخابی}$$

$$144 = 24 \times 6 = (\text{تعداد حالات مسیره برگشت})$$

۳۴ | برای رفتن از A به B سه مسیره کلی وجود دارد:

$$(1) \text{ مسیره } A \rightarrow C \rightarrow B$$

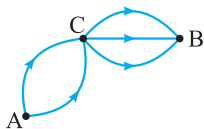
یا

$$(2) \text{ مسیره } A \rightarrow D \rightarrow B$$

یا

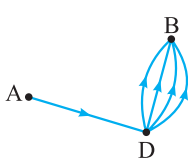
$$(3) \text{ مسیره } A \rightarrow E \rightarrow B$$

مسیره (۱): مطابق شکل می‌توانیم ابتدا از شهر A به C و سپس از C به B برویم. ملاحظه می‌شود که از A به C دو مسیره



مختلف و از C به B سه مسیره متمایز وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $6 = 2 \times 3$ طریق انجام می‌گیرد.

مسیره (۲): ابتدا از A به D و سپس از D به B می‌رویم. ملاحظه می‌شود



که از A به D فقط یک مسیره و از D به B چهار مسیره وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $4 = 1 \times 4$ طریق انجام می‌گیرد.

در مسیره (۳) نیز خواهیم داشت:

$$2 = 2 \times 1 = \text{تعداد حالاتها} \Rightarrow$$

چون برای رفتن از شهر A به شهر B فقط می‌توانیم یکی از ۳ مسیره (۱)، (۲) یا (۳) را در نظر بگیریم (به کلمه «یا» در ابتدای پاسخ توجه کنید که نشان‌دهنده

اصل جمع است.)، لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$12 = 2 + 4 + 6 = \text{تعداد کل حالاتها برای رفتن از A به B}$$

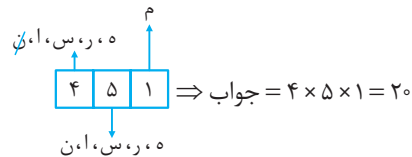
۳۵ | می‌خواهیم حتماً از شهر C عبور کنیم پس فقط مسیره $A \rightarrow C \rightarrow B$

را خواهیم داشت:

$$6 = 2 \times 3 = \text{تعداد حالاتها}$$

۲۵ | ابتدا خانه سمت راست را پُر می‌کنیم که فقط ۱ حالت دارد (حرف م)

سپس خانه وسط به ۵ حالت پُر خواهد شد (پون ریگه نمی‌توانیم از «ق» استفاده کنیم.) و در نهایت خانه سمت چپ به ۴ حالت پُر می‌شود، چون یکی از حروف خانه وسط را باید حذف کنیم (ما به دلخواه حرف «ن» رو حذف کردیم).



۲۶ | چون فقط باید یکی از میوه‌ها را انتخاب کنیم، از اصل جمع

$$9 = 2 + 3 + 4 = \text{تعداد حالاتها استفاده می‌کنیم:}$$

۲۷ | باید از اصل جمع استفاده کنیم، چون خودروی انتخابی یا باید

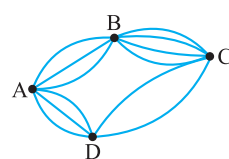
سواری باشد یا وانت یا کامیون، لذا داریم:

$$28 = 6 + 12 + 10 = \text{تعداد حالاتها}$$

۲۸ | برای رفتن از C به D به طوری که از B عبور نکنیم، فقط باید مسیره

CAD را طی کرد؛ لذا خواهیم داشت:

$$12 = 3 \times 4 = \text{تعداد حالاتها}$$



$$\text{مسیره } ABC : 3 \times 4 = 12$$

$$\text{مسیره } ADC : 3 \times 2 = 6$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 12 + 6 = 18$$

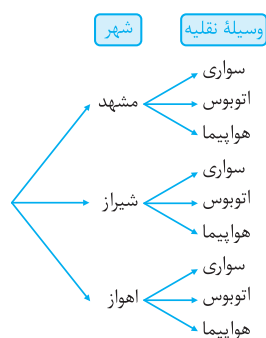
۳۰ | طبق اطلاعات مسئله برای انتخاب شهر ۳ گزینه وجود دارد (مشهد،

شیراز یا اهواز) و برای انتخاب وسیله نقلیه نیز ۳ گزینه موجود است (سواری، اتوبوس یا هواپیما) بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب‌های این دو عمل در هم ضرب می‌شوند:

$$9 = 3 \times 3 = \text{تعداد راه‌های ممکن برای سفر}$$

۳۱ | می‌توانیم، با یک تقسیم‌بندی مناسب (نمودار درختی) حالت‌های

مختلف انتخاب را نمایش دهیم:



۳۲ | تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



تعداد راه‌های ممکن برای برگشتن از تبریز به تهران:



۴۲ | $5! - 4! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 120 - 24 = 96$

از حل این مسئله نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی:

$$\begin{cases} a! + b! \neq (a + b)! \\ a! - b! \neq (a - b)! \end{cases}$$

به عنوان مثال نمی‌توان گفت که حاصل $3! + 4!$ برابر $(3 + 4)!$ یعنی $7!$ است، زیرا اگر حاصل این دو عبارت را جداگانه محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 3! + 4! = (3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 + 24 = 30 \\ 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \end{cases} \Rightarrow 3! + 4! \neq 7!$$

۴۳ | $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$

۴۴ | $\frac{7!}{3! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{(3 \times 2 \times 1) \times 5!} = \frac{7 \times 6}{6} = 7$

۴۵ | $\frac{3! + 5!}{6!} = \frac{(3 \times 2 \times 1) + (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6 + 120}{720} = \frac{126}{720} = \frac{7}{40}$

۴۶ | $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{(2 \times 1) \times 7 \times 6!} = \frac{8}{2} = 4$

۴۷ | $0! + 1! + 2! + 3! = 1 + 1 + (2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 10$

۴۸ | $4! + 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (2 \times 1) = 24 + 2 = 26$

۴۹ | $\frac{10!}{6! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = 1$

۵۰ | $\begin{cases} 1! + 3! + 4! = 1 + 6 + 24 = 31 \\ 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320 \end{cases}$
پس رابطه داده شده، نادرست است.

۵۱ | روش اول | $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \frac{(n-1)!}{(n+1) \times n \times (n-1)!} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} (n+1)n = 6$

$\Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (n+3)(n-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} n+3=0 \\ n-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-3 < 0 \text{ (غ ق)} \\ n=2 \text{ (ق ق)} \end{cases}$

چون n باید عددی طبیعی باشد، پس جواب $n = -3$ غیرقابل قبول است.

۳۶ | می‌خواهیم از شهر C عبور نکنیم پس دو مسیر $A \rightarrow E \rightarrow B$ و $A \rightarrow D \rightarrow B$ را خواهیم داشت:

$A \rightarrow E \rightarrow B$: تعداد حالت‌ها: $2 \times 1 = 2$

$A \rightarrow D \rightarrow B$: تعداد حالت‌ها: $1 \times 4 = 4$

\Rightarrow تعداد کل حالت‌ها $= 2 + 4 = 6$

۳۷ | این فرد برای انتخاب پیراهن به ۲ طریق و برای انتخاب شلوار به ۳ طریق می‌تواند عمل کند، لذا طبق اصل ضرب کلاً به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌تواند لباس بپوشد.

شلوار

پیراهن

- قهوه‌ای
- مشکی
- سرمه‌ای
- قهوه‌ای
- مشکی
- سرمه‌ای

۳۸ | طبق اصل شمارش، تعداد انتخاب‌های حالت‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم: $4 \times 3 \times 2 = 24$

۳۹ | ۲ سؤال وجود دارد که برای هر کدام از آن‌ها ۳ گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات $= 3 \times 3 = 9$

۴۰ | آ پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال، شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. یعنی جواب دادن به سؤال ۱ دو حالت دارد، جواب دادن به سؤال ۲ نیز دو حالت دارد، ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{20 \text{ بار}} = 2^{20}$

ب) چون پاسخ‌گویی به سؤالات الزامی نیست. پس برای هر سؤال انتخاب داریم، یعنی به عنوان مثال برای جواب دادن به سؤال اول می‌توانیم گزینه «الف» و «ب» را انتخاب کنیم و یا می‌توانیم اصلاً به سؤال پاسخ ندهیم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن عبارت است از:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{20 \text{ بار}} = 3^{20}$

در این‌گونه مسائل که یک کار مشابه را به دفعات زیاد تکرار می‌کنیم راه کوتاه‌تری برای پیدا کردن تعداد حالت‌ها وجود دارد؟

پاسخ | بله که وجود دارد ... به تذکر زیر فوب دقت کن:

اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(k, 2, 3, \dots, 1)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله با هم برابر و مساوی n باشد، آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌های ممکن برابر با n^k است.

۴۱ | یک فرد می‌تواند هر سه کار را با هم انجام دهد. یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم: $2 \times 4 \times 3 = 24$

تعداد کلمات مورد نظر:

$$\boxed{30} \quad \boxed{31} \quad \boxed{32} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{جواب} = 32 \times 31 \times 30$$

علت این‌که پُر کردن خانه‌ها را از سمت راست شروع کردیم، این است که کلمات فارسی از راست به چپ نوشته می‌شوند. (البته آکه از سمت چپ هم شروع کنید به همین جواب‌ها فواید رسید.)

۵۷ | آ | چون کلمات سه حرفی می‌خواهیم لذا ۳ خانه در نظر می‌گیریم و چون تکرار حروف مجاز است، خانه‌ها به صورت زیر پُر می‌شوند:

س، ع، ا، د، ت

$$\boxed{5} \quad \boxed{5} \quad \boxed{5} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

یعنی به عنوان مثال اگر در خانه سمت راست از حرف «س» شروع کردیم در بقیه خانه‌ها نیز می‌توانیم از آن استفاده کنیم. (دقت کنید که بی‌معنی بودن کلمه ساقط شده مهم نیست.)

بیشتر پُر کردن فونته‌ها رو از سمت راست شروع کردید؟



پاسخ | تو این مسئله چون محدودیتی برای کلمات ۳ حرفی مورد نظر وجود ندارد از هر طرف که فواید می‌توانیم فونته‌ها رو پُر کنیم ولی در کلمات فارسی همیشه بهتر اینه که از سمت راست، جاهای خالی رو پُر کنیم.

ب | چون تکرار حروف مجاز نمی‌باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} \text{س، ع، ا، د، ت} & \text{س، ع، ا، د، ت} & \text{س، ع، ا، د، ت} \\ \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

یعنی اگر در خانه اول (سمت راست) مثلاً از حرف «س» استفاده کردیم دیگر در خانه بعدی نمی‌توان آن را به کار برد (پس ۳ حرف باقی می‌ماند) و اگر در خانه دوم مثلاً از حرف «ع» استفاده کردیم در خانه سوم دیگر مجاز به استفاده از آن نیستیم (پس ۳ حرف باقی می‌ماند).

۵۸ | چون کلمه مورد نظر سه حرفی است، پس سه خانه در نظر می‌گیریم و چون شروع کلمه باید با حرف نقطه‌دار باشد، خانه سمت راست به دو طریق می‌تواند پُر شود (هروف «ت» یا «ن»). از طرفی تکرار حروف غیرمجاز است پس خانه وسط به ۴ حالت پُر می‌شود چون باید یکی از حروف «ت» و «ن» را که در خانه اول استفاده شده خط بزینیم (ما «ت» رو خط بزینیم).

$$\begin{array}{ccc} \text{ت، ه، ر، ا، ن} & \text{ت، ه، ر، ا، ن} & \text{ت، ه، ر، ا، ن} \\ \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{2} \end{array}$$

$$\text{تعداد کلمات مطلوب} = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

۵۹ | چون کلمه چهار حرفی می‌خواهیم پس چهار خانه می‌کشیم:

$$\boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5} \quad \boxed{6}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کلمات مورد نظر} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

روش دوم | در معادله $(n+1)(n) = 6$ به جای حل این معادله درجه دوم به روش دلنا می‌توان گفت که چون $(n+1)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) هستند، پس عدد ۶ را نیز به صورت دو عدد متوالی می‌نویسیم:

$$(n+1) \times n = 3 \times 2 \Rightarrow n = 2$$

۵۲ | آ | چون عدد مورد نظر سه رقمی است، سه جای خالی می‌کشیم. طبق صورت مسئله چهار عدد به ما داده شده و تکرار ارقام نیز مجاز است، پس هر جای خالی (خانه) به چهار طریق می‌تواند پُر شود که بنابه اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب در یکدیگر ضرب می‌شوند:

هر یک از ارقام ۱، ۴، ۹، ۲

$$\boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \Rightarrow \text{تعداد اعداد مطلوب} = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

فلش‌های روی مربع‌ها، ترتیب پر شدن خانه‌ها را نشان می‌دهند.

ب | ابتدا سه خانه می‌کشیم. رقم سمت چپ (صدگان) به چهار طریق مختلف می‌تواند پُر شود. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقم دهگان (خانه وسط) می‌تواند به سه طریق پُر شود، زیرا از رقمی که در خانه اول استفاده کردیم دیگر نمی‌توانیم در خانه وسطی استفاده نماییم. در نهایت در خانه سمت راست (رقم یکان) فقط می‌توانیم از دو رقم استفاده کنیم؛ پس خواهیم داشت:

۱، ۴، ۹، ۲ ۴، ۹، ۲

$$\boxed{4} \quad \boxed{3} \quad \boxed{2} \Rightarrow \text{تعداد اعداد مطلوب} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

۱، ۴، ۹، ۲

۵۳ | چون برای قرار گرفتن در یک صف، ترتیب مهم است، لذا با

یک مسئله ترتیب مواجه هستیم. می‌دانیم تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$ ، لذا تعداد جایگشت‌های ۸ نفر برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالت‌های ممکن} = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

۵۴ | چون در کلمه «کتاب» حروف تکراری وجود ندارد و این کلمه ۴ حرفی است، لذا خواهیم نوشت:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۵۵ | تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شیء مختلف در کنار هم برابر است با $n!$ ؛ لذا تعداد حالت‌های قرار گرفتن این ۴ کتاب کنار هم برابر است با:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۵۶ | آ | اگر تکرار حروف مجاز باشد، هر یک از سه خانه زیر می‌توانند به ۳۲ طریق مختلف پُر شوند.

هر یک از ۳۲ حرف الفبای فارسی

تعداد کلمات مورد نظر:

$$\boxed{32} \quad \boxed{32} \quad \boxed{32} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{جواب} = 32 \times 32 \times 32 = (32)^3$$

ب | وقتی گفته می‌شود تکرار غیرمجاز است، به آن معنا است که وقتی خانه سمت راست می‌تواند با هر یک از ۳۲ انتخاب پُر شود، خانه بعدی با ۳۱ انتخاب و خانه آخر با ۳۰ انتخاب پُر می‌شود.

۶۵ | چون کلمه سه حرفی مورد نظر است، لذا سه خانه می‌کشیم. خانه اول (سمت راست) فقط با یک حالت پُر می‌شود (حرف «س») و خانه آخر (سمت چپ) نیز فقط به یک طریق پُر می‌شود (حرف «ن») و خانه وسط به چهار طریق می‌تواند پُر شود (یکی از هروف ۴، ۵، ۶، ۷). پس خواهیم داشت:

حرف «س» حرف «ن»

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ 1 & 4 & 1 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مورد نظر} = 1 \times 4 \times 1 = 4$$

۶۱ | پنج خانه می‌کشیم و دقت می‌کنیم که از هر حرف فقط یک بار می‌توان استفاده کرد (تکرار هروف غیرمجاز). یعنی خواهیم داشت:

یکی از ۸ حرف کلمه

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & & & & & \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & \\ \downarrow & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

یکی از ۷ حرف کلمه

$$\Rightarrow 6720 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \text{تعداد کلمات ۵ حرفی}$$

۶۲ | چهار خانه می‌کشیم. برای حرف سمت چپ فقط یک حالت داریم (حرف T) و برای بقیه خانه‌ها به صورت زیر، انتخاب خواهیم داشت:

فقط T

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & & & \\ 1 & 7 & 6 & 5 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مورد نظر} = 1 \times 7 \times 6 \times 5 = 210$$

۶۳ | خانه‌های اول و آخر هر کدام فقط به یک طریق پُر می‌شوند (هر کدام یک حالت دارند) و می‌توان چنین نوشت: فقط E فقط T

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & & & \uparrow \\ 1 & 6 & 5 & 1 \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مورد نظر} = 1 \times 6 \times 5 \times 1 = 30$$

۶۴ | چون عدد مورد نظر پنج رقمی است، پس پنج خانه در نظر می‌گیریم. چون در این مسئله محدودیتی نداریم (شرطی مانند زوج بودن، فرد بودن و غیره در صورت مسئله ذکر نشده). پس پُر کردن خانه‌ها را از خانه سمت چپ شروع می‌کنیم. می‌دانیم این خانه نمی‌تواند با صفر شروع شود (اعداد با صفر شروع نمیشوند). پس به ۴ طریق می‌تواند پُر شود ولی خانه‌های بعدی، همگی می‌توانند به ۵ طریق پُر شوند (پون تکرار مجاز و از صفر در نمونه‌های رنگی می‌توانیم استفاده کنیم).

تعداد اعداد مطلوب:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \Rightarrow 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 2500$$

۶۵ | پنج خانه را در نظر می‌گیریم. خانه سمت چپ همان‌طور که گفته شد می‌تواند به ۴ طریق پُر شود و چون تکرار مجاز نیست خانه بعدی می‌تواند به ۴ طریق پُر شود (عددی که با اون، نمونه سمت چپ رو پرکریم هرف میشه). به همین ترتیب در هر مرحله، یک عدد باید حذف شود:

تعداد اعداد مطلوب:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

۶۵ | چون عدد مورد نظر پنج رقمی است، پنج خانه می‌کشیم که به صورت زیر پُر می‌شوند.

تعداد اعداد مورد نظر:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

دقت کنید که در هر مرحله، از تعداد انتخاب‌ها یکی کم شده است (زیرا تکرار مجاز نیست).

۶۶ | برای عدد سه رقمی مطلوب، سه خانه در نظر می‌گیریم:

تعداد اعداد مطلوب: $5 \times 4 \times 3 = 60$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \\ 5 & 4 & 3 \end{array}$$

۶۷ | چون عدد چهار رقمی است، پس چهار خانه می‌کشیم. خانه سمت چپ طبق صورت مسئله فقط به یک حالت پُر می‌شود (عدد ۲) و بقیه خانه‌ها به صورت زیر پُر می‌شوند:

تعداد اعداد مورد نظر: $1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & & & \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

۶۸ | برای عدد سه رقمی مذکور، سه خانه می‌کشیم خانه سمت چپ فقط می‌تواند به یک حالت پُر شود (عدد سه) خانه سمت راست (یکان) نیز فقط می‌تواند به یک حالت پُر شود (عدد هشت) پس برای خانه وسط سه انتخاب خواهیم داشت (یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶) یعنی می‌توان نوشت:

فقط عدد ۸ فقط عدد ۳

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 1 \times 3 \times 1 = 3 = \text{تعداد اعداد مورد نظر}$$

یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶

۶۹ | چون عدد پنج رقمی می‌خواهیم پنج خانه می‌کشیم. دو خانه سمت چپ هر کدام فقط به یک حالت امکان پُر شدن دارند، زیرا هر یک از این دو خانه قبلاً با یک عدد پُر شده است. سه خانه باقی مانده هر کدام به ۱۰ حالت مختلف می‌توانند پُر شوند (اعداد ۰ تا ۹)؛ لذا می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \\ 1 & 1 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

اصل ضرب $\rightarrow 1000 = 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 = \text{تعداد اعداد مورد نظر}$

اگر در صورت مسئله ذکر می‌شد که تکرار غیرمجاز است، سه خانه سمت راست (سه رقم راست عدد) به صورت زیر پُر می‌شدند:

اصل ضرب $\rightarrow 336 = 1 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 = \text{تعداد اعداد مورد نظر}$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \\ 1 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{array}$$

۷۰ | برای زوج بودن عدد سه رقمی مورد نظر، ۲ انتخاب برای یکان داریم (عدد ۶ یا ۸)، پس:

۸، ۶ ۷، ۵، ۳ ۸، ۷، ۶، ۵، ۳

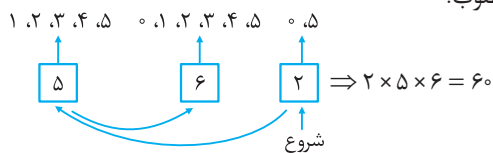
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ 4 & 3 & 2 \end{array}$$

شروع

$$\Rightarrow 24 = 4 \times 3 \times 2 = \text{تعداد اعداد مورد نظر}$$

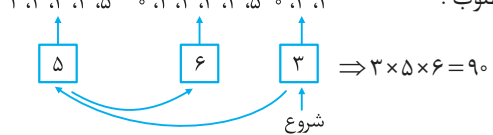
۷۶ | آ می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. پس خانه سمت راست به دو طریق یعنی با ۰ یا ۵ پُر می‌شود و چون تکرار ارقام مجاز است خانه سمت چپ به ۵ طریق پُر می‌شود، زیرا صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند) و در نهایت خانه وسط به ۶ حالت پُر می‌شود، چون می‌توانیم از تمام ارقام برای پُر کردنش استفاده کنیم:

تعداد اعداد مطلوب:



ب) عدد مورد نظر باید زوج باشد پس رقم یکان (سمت راست) می‌تواند با یکی از اعداد ۰، ۲ یا ۴ پر شود که سه حالت می‌باشد و چون تکرار مجاز است، خانه سمت چپ به ۵ حالت پُر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد؛ پس داریم:

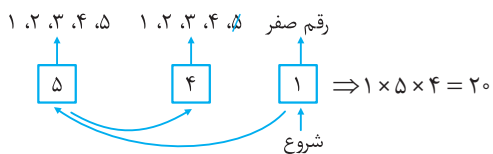
تعداد اعداد مطلوب:



۷۷ | آ می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید هر یک از این حالت‌ها را جداگانه بررسی کنیم:

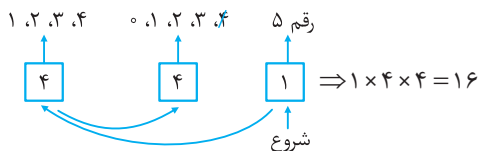
حالت اول: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانه سمت راست فقط عدد

صفر می‌تواند باشد، پس به یک حالت پُر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه سمت چپ به ۵ طریق و خانه وسط به ۴ طریق پُر می‌شود (از هر رقم فقط یک بار می‌توان استفاده کرد).



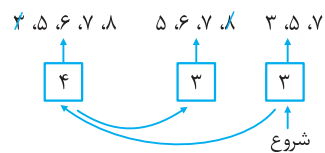
حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد: در این حالت خانه سمت راست فقط با عدد ۵

پُر می‌شود (حالت ۱) و چون تکرار غیرمجاز است خانه سمت چپ به ۴ حالت پُر می‌شود (پهن ۵ و صفر نمیتونن در این فونو قرار بگیرن) و خانه وسط به ۴ طریق می‌تواند پر شود (چون از بین ۶ عدد داده شده دو عدد در خانه سمت چپ و راست قرار گرفته‌اند). پس داریم:



طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد مورد نظر عبارت است از: $20 + 16 = 36$

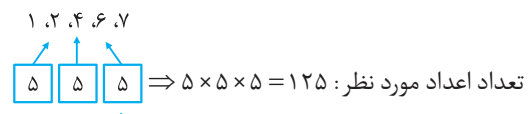
ب) برای اول بودن یکان نیز ۳ انتخاب داریم (اعداد ۳، ۵، ۷ یا ۹)، پس:



تعداد اعداد مورد نظر: 36

۷۱ | چون عدد مطلوب سه‌رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون تکرار

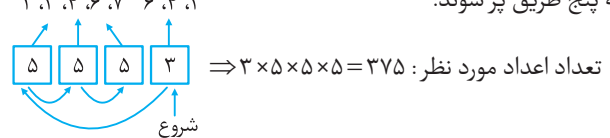
مجاز است هر خانه می‌تواند به پنج طریق پُر شود، بنابراین داریم:



۷۲ | چون عدد مطلوب، چهاررقمی است، پس چهار خانه می‌کشیم.

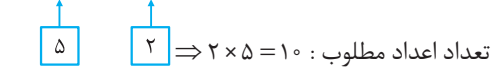
خانه سمت راست (یکان) فقط می‌تواند با ارقام ۲، ۴ یا ۶ پر شود (پس حالت داریم). ولی چون تکرار مجاز است خانه‌های دیگر هر کدام می‌توانند

به پنج طریق پر شوند:



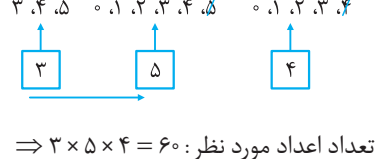
۷۳ | عدد مورد نظر دو رقمی است، پس دو خانه در نظر می‌گیریم. در خانه

سمت راست (یکان) فقط می‌توانیم از اعداد ۱ و ۷ استفاده کنیم (پهن عدد باید فرد باشد). ولی در خانه سمت چپ از هر کدام از پنج عدد داده شده می‌توانیم استفاده کنیم (تکرار مجاز است):



۷۴ | سه خانه در نظر می‌گیریم. چون عدد مورد نظر باید بزرگ‌تر از ۳۰۰

باشد، در خانه سمت چپ (صدگان) می‌توانیم فقط از اعداد ۳، ۴ یا ۵ استفاده کنیم (حالت ۳) و چون تکرار غیرمجاز است، خانه‌های بعدی به پنج حالت و چهار حالت پُر می‌شوند.



۷۵ | دقت کنید که عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ رقم سمت چپش

نمی‌تواند ۱ یا صفر باشد ولی می‌تواند ۲ یا بیش‌تر باشد (پهن در این حالت‌ها اعداد بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ ساخته میشوند). ولی خانه‌های (۲)، (۳) و (۴) هیچ محدودیتی ندارند و هر کدام می‌توانند به ۵ طریق پر شوند (همه رقم‌ها میتونن استفاده بشن). لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

