



# ریاضی ۳

پایه دوازدهم  
رشته علوم تجربی

مؤلف  
علی اکبر طالبی

# فرمول بیس

# فرمول پایان

۸  
نمونه  
امتحانی

۷۶۰  
پرسش  
تشریحی

۸۰  
صفحه  
درسنامه



۱۰+

ساعت  
فیلم  
آموزشی  
ویژه  
شب  
امتحان



تهران، میدان انقلاب  
نیش بازار چه کتاب  
[www.gajmarket.com](http://www.gajmarket.com)

## پیشگفتار

### ن و القلم و ما یسطرون

توی سال دوازدهم، اولویت اصلی با تست زنی و کاملاً هم کار درستی، اما خب یه مشکلی وجود داره و چیزی نیست جز امتحان‌های مدارس (نیمسال اول) و امتحان‌های نهایی کشوری (نیمسال دوم)!

مدل و نحوه پاسخگویی به سؤالات تشریحی، کاملاً متفاوت از سؤال‌های تستیه و تمام کاری که توی این کتاب کردیم، همینه که ابتدا با یک آموزش ساده و کامل روی تمام تکنیک‌های امتحان‌های نهایی مسلط بشیم و بعدش با سیل عظیمی از سؤالات تشریحی مواجه میشین.

### در این کتاب...

۱. تمام مطالب کتاب تو درس نامه‌ها پوشش داده شده، پس درس نامه‌ها رو خوب بخون و تمام مثال‌هاش رو حل کن. در ضمن نکته‌ها و فرمول‌ها رو خوب به خاطر بسپار.
۲. تمام سؤالات امتحانات نهایی رو تو این کتاب گردآوری کردیم تا با نحوه سؤالات امتحان نهایی آشنا بشین.
۳. تمام تمرینات کتاب درسی مشابه‌سازی شده و یا نمونه اون رو به صورت امتحان نهایی آوردیم.
۴. تست‌های با علامت 🌟 ویژه دانش‌آموزان سخت‌کوش می‌باشد.
۵. برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب در شب امتحان، به فیلم‌های آموزشی ویژه شب امتحان که QR-code آن در ابتدای هر فصل اومده، مراجعه کن.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

علی اکبر طالبی

## فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
235 min	۱۱۴	۶ تا ۲۸
152 min	۱۳۰	۲۹ تا ۴۲
45 min	۱۴۰	۴۳ تا ۵۸
80 min	۱۴۶	۵۹ تا ۷۵
50 min	۱۵۸	۷۶ تا ۸۶
38 min	۱۶۷	۸۷ تا ۱۰۵
12 min	۱۷۹	۱۰۶ تا ۱۱۱

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

### بارم‌بندی درس ریاضی ۳

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۷	۲
دوم	۵	۲
سوم	۵	۲
چهارم	۳	۱
	-	۴
پنجم	-	۳/۵
ششم	-	۳/۵
هفتم	-	۲
جمع	۲۰	۲۰

### امتحان نهایی



آزمون ۱: خرداد ماه ۱۴۰۰	۱۸۶
آزمون ۲: شهریور ماه ۱۴۰۰	۱۸۷
آزمون ۳: دی ماه ۱۴۰۰	۱۸۸
آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۱	۱۹۰
آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۱	۱۹۱
آزمون ۶: دی ماه ۱۴۰۱	۱۹۲
آزمون ۷: خرداد ماه ۱۴۰۲	۱۹۴
آزمون ۸: شهریور ماه ۱۴۰۲	۱۹۶
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۸	۱۹۸

1

بخش



# درستامه

و سوالات تشریحی

## فصل اول

# تابع

فصل اول ریاضی ۳، در امتحان نوبت اول، ۷ نمره و در نوبت دوم، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۳ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون توابع چندجمله‌ای، توابع یکنوا و اکیداً یکنوا، ترکیب توابع، رسم نمودار به کمک انتقال، قرینه و ... وارون تابع و ویژگی‌های آن مطرح شده است.

بسته ۴



بسته ۲ و ۳



بسته ۱



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم  
شب  
امتحان

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

صفحه ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بسته اول



بسته اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نوایی به صورت درست یا نادرست و هم‌پنین تکمیل کردن جای خالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

## الف توابع چند جمله‌ای

توابعی را که ضابطه آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطه  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  اعداد حقیقی،  $a_n \neq 0$  و  $n \in \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌گوییم.

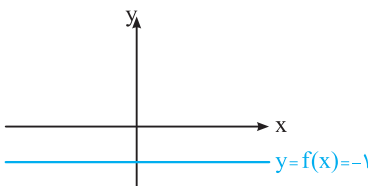
**نکته!** دامنه توابع چندجمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی، یعنی  $\mathbb{R}$  خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد، همواره برابر  $\mathbb{R}$  است.

**مثال** هریک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنه  $\mathbb{R}$  می‌باشند:  $f(x) = 2x^5 - 4x^3 - \frac{1}{4}x + 3$  و  $g(x) = -3x^2 + 5x + 1$ .  
 یک تابع چند جمله‌ای از درجه فرد ۵ است و در نتیجه برد تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

**یادآوری** با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به صورت یادآوری گفته می‌شود:

**۱** تابع چندجمله‌ای از درجه صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطه تابع ثابت به صورت  $f(x) = a$  است که در آن  $a$  یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به صورت یک خط به موازات محور  $x$  ها می‌باشد.

**مثال** نمودار تابع  $f(x) = -1$  به صورت مقابل است:



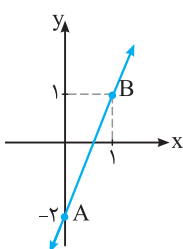
**۲** تابع چندجمله‌ای از درجه یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax + b$  می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطه دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

**مثال** تابع  $f(x) = 3x - 2$  یک تابع دو جمله‌ای از درجه اول است. برای رسم نمودار، دو نقطه دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0) - 2 = -2 \Rightarrow A(0, -2)$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1) - 2 = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

دو نقطه  $A$  و  $B$  را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.



**۳** تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ که ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $a \neq 0$  است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S(x = -\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a})$$

اگر  $a > 0$ ، سهمی رو به بالا و اگر  $a < 0$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط  $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.

**نکته!** برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

**سؤال** نمودار تابع درجه دوم به معادله  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  را رسم کنید.

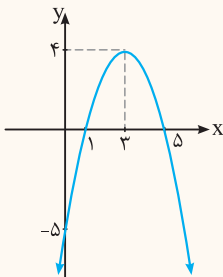
$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3 \Rightarrow y_s = f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$$

**پاسخ** ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = -5, y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

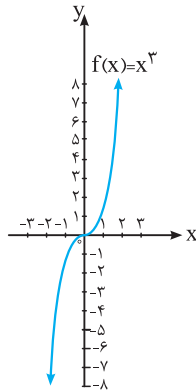


	S			
x	0	1	3	5
y	-5	0	4	0

علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یاد گرفته‌اید، نمودار  $y = x^3$  را نیز فقط کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

### تابع درجه ۳

x	f(x) = x <sup>3</sup>
-2	-8
-1	-1
-1/2	-1/8
0	0
1/2	1/8
1	1
2	8



تابع چندجمله‌ای با ضابطه  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ،  $a \neq 0$  یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر  $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعه اعداد حقیقی است. نمودار تابع  $y = x^3$  به کمک نقطه یابی به صورت مقابل است:

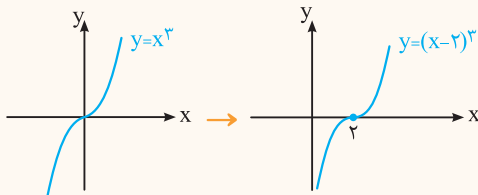
**نکته!** فقط نمودار توابعی به صورت  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به صورت  $y = a(x-b)^3 + c$  نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطه تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  به صورت  $y = (x+1)^3$  است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

**نکته!** فقط نمودار توابعی به صورت  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به صورت  $y = a(x-b)^3 + c$  نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطه تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  به صورت  $y = (x+1)^3$  است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

**سؤال** نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

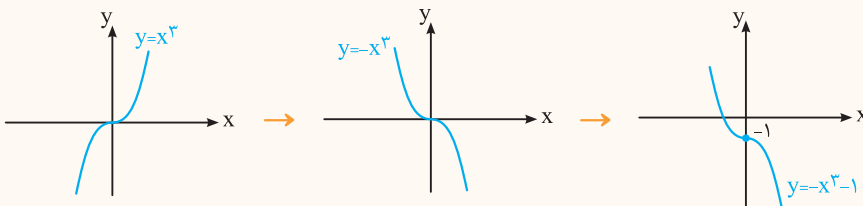
۲  $y = -x^3 - 1$

۱  $y = (x-2)^3$



**پاسخ ۱** اگر نمودار  $y = x^3$  را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع  $y = (x-2)^3$  به دست می‌آید.

**۲** ابتدا نمودار  $y = x^3$  را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -x^3$  به دست آید. با انتقال نمودار  $y = -x^3$  به اندازه یک واحد به سمت پایین، نمودار  $y = -x^3 - 1$  رسم می‌شود:



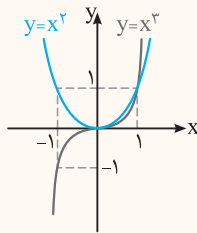
**تنگر: حواست باشه!** مقایسه نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین تر قرار می‌گیرد، از سؤالات امتحانی است.

**سؤال** نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  قرار می‌گیرد؟

**پاسخ** برای مقایسه نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می‌شوند را مشخص می‌کنیم. یعنی باید معادله  $x^2 = x^3$  را حل کنیم:

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

X	-1	0	1	2
$y = x^2$	1	0	1	4
$y = x^3$	-1	0	1	8



پس دو تابع در دو نقطه با طول های  $x = 1$  و  $x = 0$  برهم منطبق اند.

از دو نقطه کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می‌کنیم.

نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، در بازه  $(-\infty, 0)$  و  $(0, 1)$ ، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از

نمودار  $y = x^3$  قرار دارد و در بازه  $(1, +\infty)$ ، نمودار  $y = x^3$  بالاتر

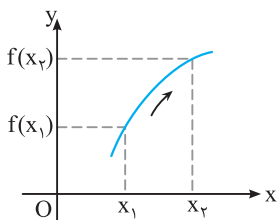
از نمودار  $y = x^2$  قرار دارد.

**در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیدا یکنوا را یاد می‌گیریم. توابعی را بررسی می‌کنیم که ابتدا نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می‌دهیم.**

## ب توابع اکیدا صعودی و نزولی

فرض کنیم  $A \subseteq D_f$  باشد؛

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

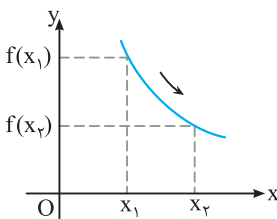


**تعریف** می‌گوییم تابع  $f$  روی  $A$  اکیدا صعودی است هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in A$  داشته باشیم:

در نمودار توابع اکیدا صعودی، وقتی روی محور  $x$  ها، از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار

همواره در حال بالا رفتن است.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



**تعریف** می‌گوییم  $f$  روی  $A$  اکیدا نزولی است، هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in A$  داشته باشیم:

در نمودار مقابل، وقتی مقدار  $x$  در دامنه  $f$  افزایش می‌یابد، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد. در واقع

نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.

**تعریف** به تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد، تابع اکیدا یکنوا می‌گوییم.

## توابع صعودی و نزولی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

**تعریف** تابع  $f$  روی  $A$  صعودی است اگر فقط اگر برای هر  $x_1, x_2 \in A$ :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

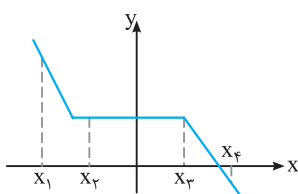
و تابع  $f$  روی  $A$  نزولی است اگر و تنها اگر برای هر  $x_1, x_2 \in A$ :

**مثال** در نمودار زیر، هر چه مقدار  $x$  در دامنه تابع  $f$  بیش تر می‌شود، مقدار  $y$  یا کاهش می‌یابد یا

ثابت می‌ماند. طبق تعریف، تابع  $f$ ، تابعی نزولی است.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$

**تعریف** به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.



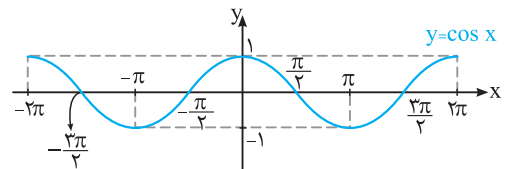
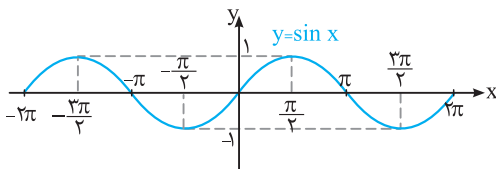
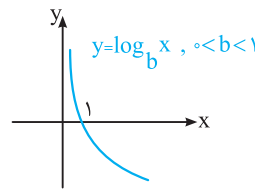
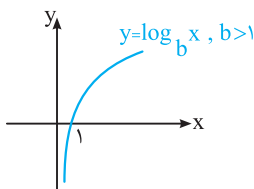
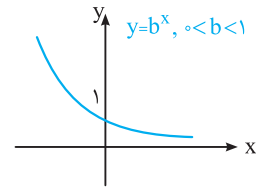
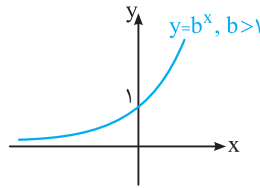
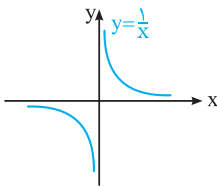
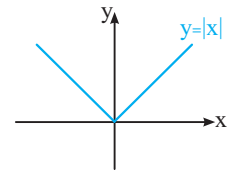
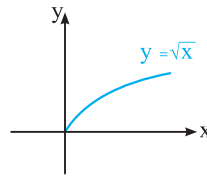
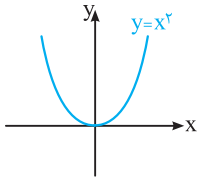
**تنگر: حواست باشه!** تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می‌شود.



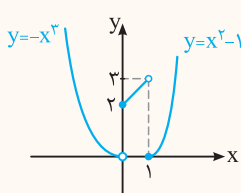
**تعریف** تابع  $f$  را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر  $x$  در این بازه، مقدار  $f$  ثابت باشد.

**نکته** با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

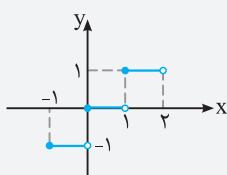
**یادآوری** در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:



**سؤال** نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 \leq x < 1 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$  را رسم کنید و مشخص کنید تابع  $f$  در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟



**پاسخ** با رسم سهمی  $y = x^2 - 1$  در بازه  $[1, +\infty)$ ، خط  $y = x + 2$  در بازه  $[0, 1)$  و تابع درجه سوم  $y = -x^3$  در بازه  $(-\infty, 0)$ ، نمودار تابع  $f$  به دست می‌آید.  
باتوجه به نمودار تابع  $f$ ، تابع  $f$  روی بازه  $(-\infty, 0)$ ، تابعی اکیداً نزولی، روی بازه  $[0, 1)$ ، تابعی اکیداً صعودی و در بازه  $[1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً یکنوا نیست.



**نکته** تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار

می‌تواند خطی به موازات محور  $x$ ‌ها باشد.

**مثال** تابع  $y = [x]$  که نمودار آن به صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

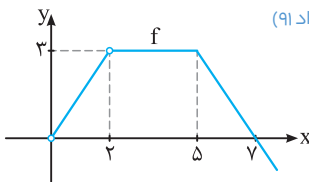
**• درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.**

۱. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.
۲. دامنه توابع چندجمله‌ای برابر  $\mathbb{R}$  است.
۳. تابع  $y = -x^3 + 2$  در دامنه تعریفش صعودی است.
۴. تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  در دامنه اش اکیداً نزولی است.
۵. تابع  $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$  یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.
۶. برد تابع  $f(x) = 4x^3 + x - 1$  برابر  $\mathbb{R}$  است.
۷. تابع  $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x$  یک تابع چندجمله‌ای نیست.
۸. تابع  $f(x) = \sin x + 5x$  یک تابع چندجمله‌ای است.
۹. تابع  $f(x) = |x|$  در تمام دامنه اش صعودی است.
۱۰. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست.
۱۱. تابع  $y = (\frac{1}{4})^x$  در دامنه خود یک تابع اکیداً نزولی است.
۱۲. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.
۱۳. تابع  $y = \sqrt{2}x - x^2$  یک تابع درجه دوم است.
۱۴. تابع  $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است.
۱۵. تابع  $y = 2^x - 2$  صعودی است.

- (دی ۹۷، خرداد ۹۹)  
(شهریور ۱۴۰۰)  
(شهریور ۹۸)  
(شهریور ۱۴۰۰)  
(دی ۱۴۰۰)  
(خرداد ۹۹ خارج)  
(دی ۹۹ خارج)  
(خرداد ۹۹ خارج)  
(دی ۹۹ خارج)  
(شهریور ۱۴۰۰ خارج)  
(خرداد ۱۴۰۲)  
(خرداد ۱۴۰۱)  
(خرداد ۱۴۰۱)  
(خرداد ۱۴۰۱ خارج)

**• در سؤال‌های ۱۶ تا ۲۱، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.**

۱۶. توابع اکیداً یکنوا، همواره ..... هستند.
۱۷. در بازه  $(0, 1)$ ، نمودار تابع  $y = x^3$ ، ..... نمودار تابع  $y = x^2$  قرار دارد.
۱۸. تابع  $y = (x + 1)^3$  در دامنه تعریف خود ..... (صعودی - نزولی) است.
۱۹. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع ..... نامیده می‌شود.
۲۰. تابع  $y = 2^x$  در دامنه تعریف خود ..... (اکیداً صعودی - اکیداً نزولی) است.
۲۱. تابع  $f$  با نمودار مقابل در بازه ..... اکیداً صعودی و در بازه  $(2, 5]$ ، ..... است. (خرداد ۹۱)



(مشابه کاردرکلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

**۲۲. ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.**

$y = (x + 1)^3 - 1$ <input type="checkbox"/>	$y = (x - 1)^3 + 2$ <input type="checkbox"/>	$y = -x^3 - 1$ <input type="checkbox"/>	$y = x^3 + 1$ <input type="checkbox"/>
(۴)	(۳)	(۲)	(۱)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

● نمودار توابع سوالات ۲۳ تا ۲۷ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

۲۷.  $y = -(x-1)^3 - 1$

۲۵.  $y = (x+2)^3 - 1$

۲۳.  $y = x^3 - 1$

۲۶.  $y = (x-1)^3 + 2$

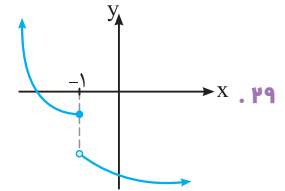
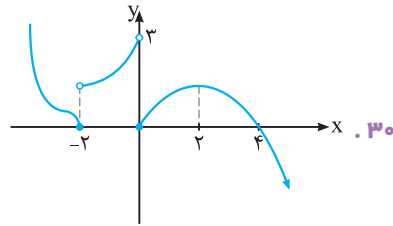
۲۴.  $y = -x^3 - 2$

۲۸. نمودار توابع  $y = x^3$  و  $y = x^2$  را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین تر است؟

(فعالیت صفحه ۴ کتاب درسی)

● در هر کدام از توابع سوالات ۲۹ و ۳۰، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۸ کتاب درسی)



۳۱. روی بازه  $[0, 2]$  نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه  $[0, 1]$  اکیداً صعودی و روی بازه  $[1, 2]$  اکیداً نزولی باشد.

۳۲. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

(مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۳۳. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۳۴. ضابطه تابعی را بنویسید که در دامنه خود غیریکنوا باشد.

● نمودار توابع سوالات ۳۵ تا ۴۱ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

۳۹.  $f(x) = -x^3 + 2$

۳۵.  $f(x) = -x^2 + 4x$

۴۰.  $f(x) = x^2 |x|$

۳۶.  $f(x) = x + |x|$

۴۱.  $f(x) = \cos x, x \in [-\pi, 2\pi]$

۳۷.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

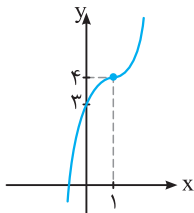
۳۸.  $f(x) = \frac{1}{x}$

۴۲. نمودار هر یک از توابع  $y = \log_b x$  و  $y = b^x$  را در حالت‌های  $b > 1$  و  $0 < b < 1$  رسم کنید و در هر حالت نوع یکنوایی تابع را مشخص کنید.

هم چنین با رسم توابع  $y = 2^x - 2$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ ، نوع یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

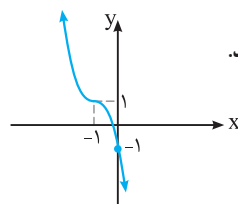
(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۴۳. تابع  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ -x-1 & x \leq 0 \end{cases}$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  چقدر است؟



۴۴. نمودار تابع  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  را رسم کنید.

۴۵. نمودار تابع  $y = a(x-b)^3 + c$  به صورت مقابل است. مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص کنید.



۴۶. نمودار تابع  $f(x) = a(x+b)^3 + c$  به صورت مقابل است. اگر  $g(x) = b(x-a)^3 + c$  باشد، مقدار  $g(2)$  را به دست آورید.

۴۷. نمودار  $f(x) = x^3$  را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $g$  حاصل شود.

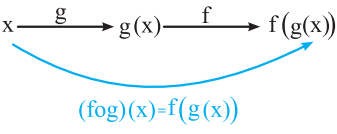
نمودار توابع  $f$  و  $g$  با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

در این قسمت از دو تابع  $f$  و  $g$  تابع جدیدی می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطه تابع مرکب، مقدار عددی و دامنه تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

**ترکیب توابع**

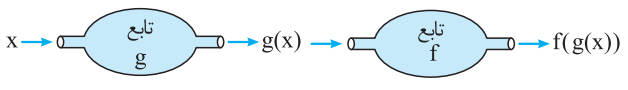
**تعریف** ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  تابعی است که آن را با نماد  $f \circ g$  نشان می‌دهیم (بخوانید اف اچ جی) و به صورت  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  یا  $f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$  تعریف می‌کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به صورت مقابل است:



**مراحل ساخت تابع fog:**

- 1  $x$  باید در دامنه  $g$  باشد. در مرحله اول،  $x$  ورودی و  $g(x)$  خروجی است.
- 2  $g(x)$  باید در دامنه  $f$  باشد. در مرحله دوم،  $g(x)$  ورودی و  $f(g(x))$  خروجی است.



**نکته!** برای به دست آوردن ضابطه  $(f \circ g)(x)$ ، در تابع  $f$  به جای  $x$  ضابطه  $g(x)$  را قرار می‌دهیم.

**سؤال** اگر  $f(x) = 3x - 2$  و  $g(x) = 4x - 5$  دو تابع باشند، ضابطه هر یک از توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را مشخص کنید.

**پاسخ** اگر در ضابطه تابع  $f$  به جای  $x$ ،  $g(x)$  قرار دهیم، ضابطه تابع  $(f \circ g)(x)$  مشخص می‌شود:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 5) = 3(4x - 5) - 2 = 12x - 15 - 2 = 12x - 17$$

هم‌چنین با قرار دادن  $f(x)$  به جای  $x$  در ضابطه تابع  $g$ ، ضابطه تابع  $(g \circ f)(x)$  مشخص می‌شود:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) - 5 = 12x - 8 - 5 = 12x - 13$$

**نکته!** همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطه  $f \circ g$  و  $g \circ f$  لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی  $f \circ g$  و  $g \circ f$  یکسان شوند.

**سؤال** اگر  $f(x) = x^2 - 5x + 2$  و  $g(x) = 2x - 1$  باشند، جواب‌های معادله  $(f \circ g)(x) = -4$  را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

**پاسخ** ضابطه تابع  $f \circ g$  را به دست می‌آوریم و آن را مساوی  $-4$  قرار می‌دهیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2$$

$$(f \circ g)(x) = -4 \Rightarrow (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2 = -4$$

$$A^2 - 5A + 2 = -4 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$$

با فرض  $A = 2x - 1$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

**تلاشگر: حواست باشه!** اینکه ضابطه دو تابع  $f$  و  $g$  را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی  $f \circ g$  یا  $g \circ f$  را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

**سؤال** اگر  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  دو تابع باشند، مقدار عددی  $(fog)(-3)$  و  $(gof)(4)$  را به دست آورید.

**پاسخ** مقدار عددی  $(fog)(-3)$  برابر  $f(g(-3))$  است. ابتدا مقدار  $g(-3)$  را با قرار دادن عدد  $-3$  به جای  $x$  در ضابطه  $g$  به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(-3) = \frac{-3}{-3+1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(g(-3)) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

حال باید در ضابطه  $f$  به جای  $x$ ،  $\frac{3}{2}$  قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow (fog)(-3) = 2$$

برای به دست آوردن مقدار  $(gof)(4)$ ، یعنی  $g(f(4))$  ابتدا مقدار  $f(4)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f(4) = \sqrt{2 \times 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow g(f(4)) = g(3)$$

حال باید مقدار  $g(3)$  را از ضابطه  $g(x)$  به دست بیاوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow g(f(4)) = g(3) = \frac{3}{4}$$

**سؤال** اگر  $f = \{(2, -1), (1, 4), (3, 0), (5, 2)\}$  و  $g = \{(4, 2), (3, 1), (2, 1), (1, 6)\}$  دو تابع باشند، هر یک از توابع  $gog$  و  $fog$  را به صورت

**مشابه تمرین 1 کتاب درسی**

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

**پاسخ** برای مشخص کردن تابع  $fog$ ، ابتدا تابع روی  $g$  اثر می‌کند:

$$\left. \begin{array}{ll} 4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 & 3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 \\ (fog)(4) = -1 & (fog)(3) = 4 \\ 2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 & 1 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \\ (fog)(2) = 4 & (fog)(1) \text{ وجود ندارد} \end{array} \right\} \Rightarrow fog = \{(4, -1), (3, 4), (2, 4)\}$$

برای مشخص کردن تابع  $gog$ ، داریم:

$$(gog)(4) = g(g(4)) = g(2) = 1 \Rightarrow (4, 1) \in gog, (gog)(3) = g(g(3)) = g(1) = 6 \Rightarrow (3, 6) \in gog$$

$$(gog)(2) = g(g(2)) = g(1) = 6 \Rightarrow (2, 6) \in gog, (gog)(1) = g(g(1)) = g(6) \text{ تعریف نشده}$$

$$gog = \{(4, 1), (3, 6), (2, 6)\}$$

بنابراین:

**سؤال** تابع  $h(x) = (x^3 - 1)^2$  را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دوروش).

**پاسخ روش اول** تابع  $y = x^3$  را به عنوان تابع  $g(x)$  در نظر می‌گیریم و با قرار دادن  $x$  به جای  $x^3$ ، تابع حاصل را  $f(x)$  در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3, f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3 - 1)^2$$

**روش دوم** تابع  $y = x^3 - 1$  را به عنوان تابع  $g(x)$  در نظر می‌گیریم و با قرار دادن  $x$  به جای  $x^3 - 1$ ، تابع حاصل را  $f(x)$  در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3 - 1, f(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^2$$

### دامنه تابع مرکب

برای محاسبه دامنه تابع  $gof$  دوروش وجود دارد:

**روش اول** تابع  $gof(x)$  را تشکیل دهیم و دامنه تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطه تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

**سؤال** اگر  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  باشد، دامنه تابع  $fog$  را به دست آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$$

**پاسخ**

$$D_{fog} = [0, +\infty), x \geq 0 \Rightarrow (fog)(x) = x$$

دامنه تابع  $y = (\sqrt{x})^2$  مجموعه  $[0, +\infty)$  است، بنابراین:

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای  $(\sqrt{x})^2$ ،  $x$  بنویسیم، ضابطه تابع به صورت  $(fog)(x) = x$  درمی‌آید که دامنه آن برابر  $\mathbb{R}$  خواهد بود.

بنابراین ضروری است که ابتدا دامنه تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

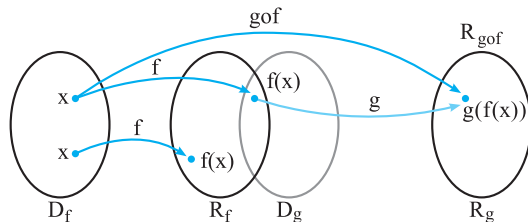
**تلنگر: حواست باشه**

تعیین دامنه ترکیب دو تابع، یکی از سوالات پرتکرار امتحان نهایی است.

**روش دوم** دامنه تابع مرکب  $g \circ f$ ، مجموعه  $x$  هایی است که همزمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱ در دامنه  $f$  قرار داشته باشد.

۲  $f(x)$  در دامنه  $g$  قرار داشته باشد.



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین دامنه تابع  $g \circ f$  را می توان به صورت مقابل نوشت:

**توجه** اگر  $f(x)$  در دامنه تابع  $g$  وجود نداشته باشد، آن گاه مقدار  $g(f(x))$  تعریف نشده است.

**نکته** برای به دست آوردن دامنه تابع  $f \circ g$ :

- ۱ دامنه توابع  $f$  و  $g$  را به دست می آوریم.
- ۲ شرط  $x \in D_f$  را که معمولاً یک نامعادله است، حل می کنیم و جواب آن را به دست می آوریم.
- ۳ باید از دامنه  $g$  و جوابی که از مرحله ۲ به دست می آید اشتراک بگیریم.

**سؤال** اگر  $f(x) = \frac{x-1}{2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-2}$  دو تابع باشند. آن گاه:

- ۱ دامنه تابع  $g \circ f$  را به کمک تعریف به دست آورید.
- ۲ مقدار تابع  $f \circ g$  را به ازای  $x = 11$  به دست آورید.

**پاسخ** ۱ دامنه تابع درجه اول  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است. برای به دست آوردن دامنه تابع رادیکالی  $g$ ، داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2} \geq 2\}$$

طبق تعریف، دامنه تابع  $g \circ f$  به صورت مقابل است:

$$\frac{x-1}{2} \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5, +\infty)$$

۲ مقدار تابع  $f \circ g$  به ازای  $x = 11$ ، برابر  $f(g(11))$  است:

$$g(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow g(11) = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow f(g(11)) = f(3) = \frac{3-1}{2} = 1$$

**تلنگر: حواست باشه**

یکی از تمرینات کتاب درسی که سؤال امتحان نهایی نیز از آن مطرح شده است، به دست آوردن ضابطه  $g(x)$  با در اختیار داشتن ضابطه توابع  $f(g(x))$  و  $f(x)$  است.

**محاسبه  $g(x)$  با در اختیار داشتن  $f(g(x))$  و  $f(x)$**

اگر  $f(g(x))$  و  $f(x)$  معلوم باشند و  $g(x)$  را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطه تابع  $f$ ،  $f(g(x))$  را به دست می آوریم و سپس آن را با ضابطه  $f(g(x))$  داده شده برابر قرار می دهیم و از این تساوی ضابطه  $g(x)$  را تعیین می کنیم.

**مشابه تمرین ۳ کتاب درسی**

**سؤال** اگر  $f(g(x)) = 2x$  و  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  باشد، ضابطه  $g(x)$  را مشخص کنید.

**پاسخ** از ضابطه  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ،  $f(g(x)) = 2x$  را به دست می آوریم:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1}, f(g(x)) = 2x \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{2x}{1}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2xg(x) - 2x \Rightarrow g(x) - 2xg(x) = -2x \Rightarrow g(x)(1-2x) = -2x \Rightarrow g(x) = \frac{-2x}{1-2x}$$

ترکیب توابع

● کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

۴۸. اگر  $f(7) = 5$  و  $g(4) = 7$ ، آن گاه  $(f \circ g)(4) = 5$

۴۹. اگر  $f(x) = 2x - 3$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ، آن گاه  $(f \circ g)(1) = f(1)$

۵۰. اگر  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه تابع  $g \circ f$  تهی است.

۵۱. اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sin x$  باشند، آن گاه  $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$  خواهد بود.

۵۲. اگر  $f$  تابعی با دامنه  $D_f$  و برد  $R_f$  و  $g$  تابعی با دامنه  $D_g$  و برد  $R_g$  باشد، آن گاه شرط تشکیل تابع  $f \circ g$  آن است که  $D_f \cap R_g \neq \emptyset$  باشد.

۵۳. برای دو تابع  $f$  و  $g$  که  $f \neq g$ ، تساوی  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  هیچ وقت برقرار نیست.

● در سؤالات ۵۴ تا ۵۸، در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۵۴. اگر  $f(x) = 3x - 1$  و  $g(x) = x^2 + 1$  باشد، مقدار  $(f \circ g)(1)$  برابر ..... است.

۵۵. دامنه تابع ..... برابر  $\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$  است.

۵۶. تابع  $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$  به صورت ترکیب دو تابع  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  و  $g(x) = \dots$  است.

۵۷. اگر  $f(3) = 7$  و  $g(-1) = 3$  باشد، آن گاه  $(f \circ g)(-1)$  برابر ..... است.

۵۸. اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = 2x - 1$  باشد، آن گاه  $(f \circ g)(5)$  برابر ..... است.

(دی ۹۷)

(دی ۱۴۰۱ خارج)

(شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۵۹. اگر  $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, -1), (0, 2)\}$  و  $g = \{(4, -2), (-1, 5), (2, 1), (3, 0)\}$  دو تابع باشند، توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

۶۰. اگر  $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ ، تابع  $f \circ g$  را در صورت وجود بنویسید.

(شهریور ۱۴۰۰)

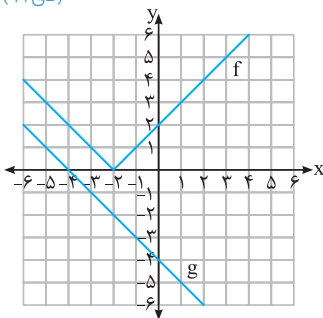
● با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

$x$	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲

۶۱.  $(g \circ f)(1)$

۶۲.  $(f \circ (f + g))(0)$

(دی ۹۹)



(مشابه تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

● با توجه به نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  به دو سؤال زیر پاسخ دهید:

۶۳. مقدار  $(f \circ g)(-1)$  را محاسبه کنید.

۶۴. اگر  $g(3t - 1) = 0$ ، آن گاه مقدار  $t$  را به دست آورید.

۶۵. با توجه به نمودار توابع  $f$  و  $g$ ، هریک از مقادیر زیر را به دست آورید.

پ  $(g \circ f)(4)$

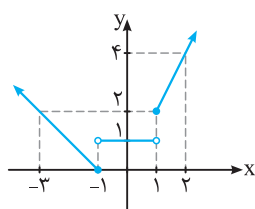
ب  $(g \circ f)(0)$

ا  $(f \circ g)(2)$

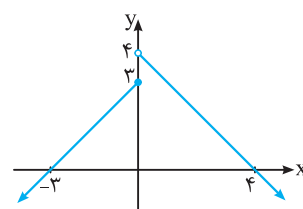
ج  $(g \circ g)(5)$

ث  $(f \circ f)(-4)$

ت  $(f \circ g)(-1)$



نمودار تابع  $g$



نمودار تابع  $f$

۴  
بخش



پاسخنامه

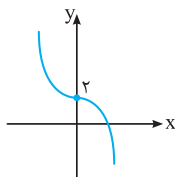


۱ | درست

۲ | درست

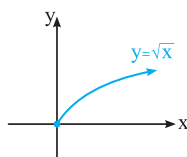
۳ | نادرست

نمودار تابع  $y = -x^2 + 2$  به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ | نادرست

نمودار  $y = \sqrt{x}$  به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است.


 ۵ | درست، زیرا بزرگ‌ترین توان  $x$  برابر ۳ است.

۶ | درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد برابر  $\mathbb{R}$  است.  $f$  یک تابع سه‌جمله‌ای از درجه ۳ است و در نتیجه برد آن برابر  $\mathbb{R}$  است.

۷ | نادرست

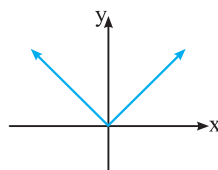
$y$  تابع سه‌جمله‌ای از درجه ۵ است.

۸ | نادرست

عبارت  $\sin x$  در ضابطه تابع چندجمله‌ای وجود ندارد.

۹ | نادرست

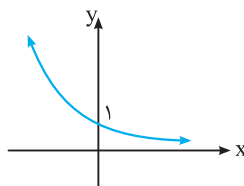
نمودار  $y = |x|$  به صورت مقابل است. تابع در بازه  $[-\infty, 0]$  نزولی و در بازه  $[0, +\infty)$  صعودی است و در نتیجه تابع روی  $\mathbb{R}$ ، یکنوا نیست.



۱۰ | نادرست

۱۱ | درست

نمودار تابع نمایی  $y = (\frac{1}{3})^x$  با توجه به اینکه پایه عددی بین ۰ و ۱ است، تابعی اکیداً نزولی است.



۱۲ | درست

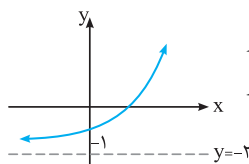
تمام توابع ثابت، جواب می‌باشند. ( $y = 1$ ،  $y = 2$ ، ...)

۱۳ | درست

۱۴ | درست

۱۵ | درست

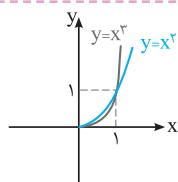
تابع نمایی وقتی که پایه بزرگ‌تر از یک باشد، تابعی اکیداً صعودی است و در نتیجه با انتقال آن به سمت پایین نیز اکیداً صعودی باقی می‌ماند.



۱۶ | یکنوا

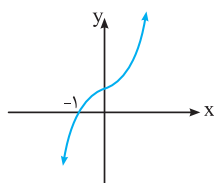
۱۷ | پایین

نمودار توابع  $y = x^3$  و  $y = x^2$  در بازه  $(0, 1)$  به صورت مقابل است:



۱۸ | صعودی

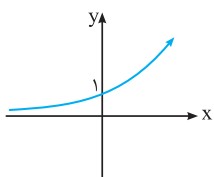
نمودار تابع  $y = (x+1)^3$  به صورت مقابل است:



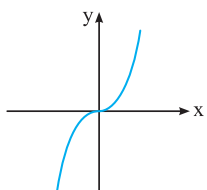
۱۹ | ثابت

۲۰ | اکیداً صعودی

نمودار تابع  $y = 2^x$  به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:


 ۲۱ |  $(0, 2)$ ،  $(5, +\infty)$ ، ثابت

۲۲ | آ اگر نمودار  $y = x^3$  که به صورت مقابل می‌باشد را به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار  $y = x^3 + 1$  به دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال یافته نمودار  $y = x^3$  به اندازه یک واحد به سمت بالا است.

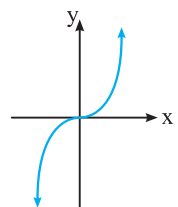


ب) اگر نمودار  $y = x^3$  را ابتدا نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = -x^3 - 1$  به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار  $y = -x^3 - 1$  می‌باشد.

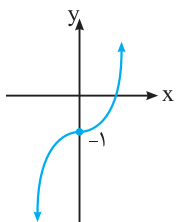
پ) اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  می‌باشد.

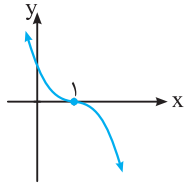
ت) اگر نمودار  $y = x^3$  را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = (x+1)^3 - 1$  به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار  $y = (x+1)^3 - 1$  می‌باشد.

• نمودار تابع  $y = x^3$  به صورت مقابل است:

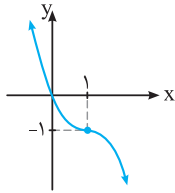


۲۳ | اگر نمودار  $y = x^3$  را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = x^3 - 1$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.





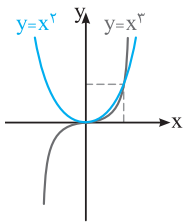
با قرینه کردن نمودار  $y = (x-1)^3$  نسبت به محور  $x$  ها، نمودار  $y = -(x-1)^3$  به دست می‌آید:



نمودار  $y = -(x-1)^3$  را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار  $y = -(x-1)^3 - 1$  به دست آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

۲۸ | در بازه  $(-\infty, 0)$ ،  $x^2$  عددی مثبت و  $x^3$  عددی منفی است.

پس در بازه  $(-\infty, 0)$ ، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  است. در  $x = 0$  و  $x = 1$ ، مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازه  $(0, 1)$ ،  $x^2$  بیش‌تر از  $x^3$  است و در نتیجه نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  قرار می‌گیرد و برای  $x \in (1, +\infty)$ ، مقادیر  $x^3$  بیش‌تر از مقادیر  $x^2$  است و در نتیجه نمودار  $y = x^3$  بالاتر از نمودار  $y = x^2$  قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:



• فرض کنیم  $A \subseteq D_f$  باشد. تابع  $f$  روی  $A$  اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  صعودی است، هرگاه:

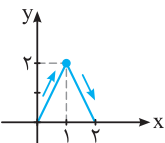
$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

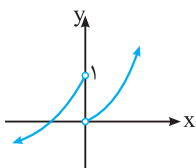
۲۹ | با توجه به شکل و با افزایش  $x$ ، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی است.

۳۰ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های  $(-\infty, -2)$  و  $[2, +\infty)$ ، اکیداً نزولی و در بازه‌های  $(-2, 0)$  و  $[0, 2]$ ، تابعی اکیداً صعودی است.

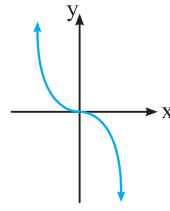


۳۱ | اگر نمودار  $f$  به صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار  $f$  در بازه  $[0, 1]$  در حال صعود و در بازه  $[1, 2]$  در حال نزول است.

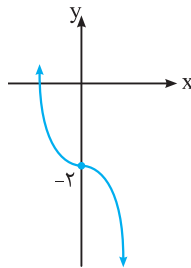
۳۲ | اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه  $f$  روی بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی است ولی در  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نمی‌باشد.



برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیریوسته را رسم کنیم.

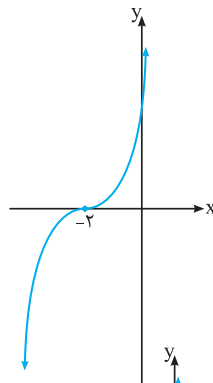


۲۴ | ابتدا نمودار  $y = x^3$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -x^3$  به دست آید:

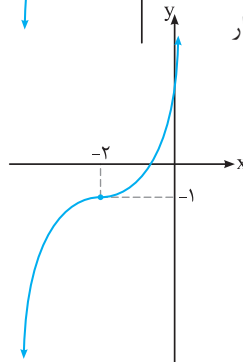


با انتقال نمودار  $y = -x^3$  به اندازه دو واحد به سمت پایین، نمودار  $y = -x^3 - 2$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

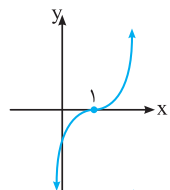
۲۵ | با انتقال نمودار  $y = x^3$  به اندازه ۲ واحد به سمت چپ، نمودار  $y = (x+2)^3$  به دست می‌آید:



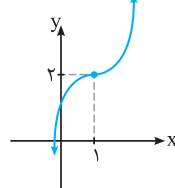
نمودار  $y = (x+2)^3$  را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار  $y = (x+2)^3 - 1$  به دست آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.



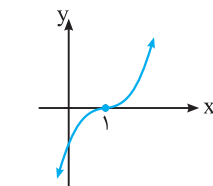
۲۶ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3$  به دست می‌آید:

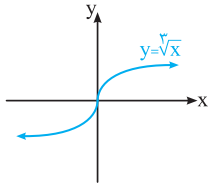


با انتقال نمودار  $y = (x-1)^3$  به اندازه دو واحد به سمت بالا نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  است.

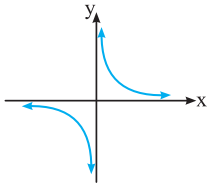


۲۷ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3$  به دست می‌آید:

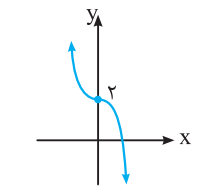




۳۷ | نمودار تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  به صورت مقابل است:  
با توجه به نمودار، تابع روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است.



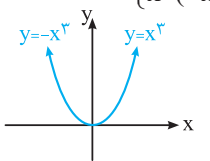
۳۸ | نمودار تابع گویای  $y = \frac{1}{x}$  به صورت مقابل است:  
تابع در بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً نزولی است. ولی تابع روی  $\mathbb{R}$  غیریکنوا است.



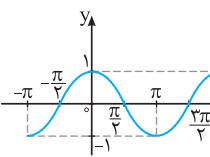
۳۹ | نمودار تابع  $y = -x^3 + 2$  به صورت مقابل است:  
تابع روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی است.

۴۰ | ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x^2 |x| = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$



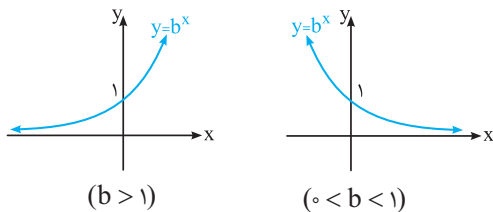
نمودار تابع به صورت مقابل است:  
تابع در بازه  $[-\infty, 0]$ ، اکیداً نزولی و روی بازه  $[0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است.



۴۱ | نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  به صورت مقابل است:

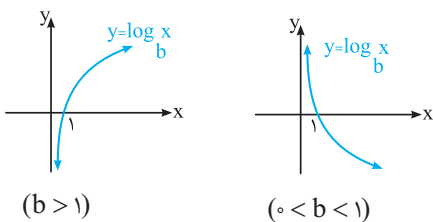
با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های  $[-\pi, 0]$  و  $[\pi, 2\pi]$  اکیداً صعودی و در بازه  $[0, \pi]$ ، اکیداً نزولی است. تابع روی بازه  $[-\pi, 2\pi]$  غیریکنوا است.

۴۲ | نمودار تابع نمایی  $y = b^x$  به صورت زیر است:



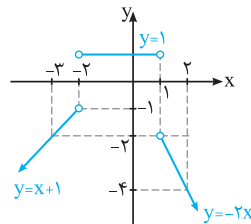
در حالت  $b > 1$ ، تابع  $y = b^x$  روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی و در حالت  $0 < b < 1$ ، تابع  $y = b^x$ ، اکیداً نزولی است.

نمودار تابع لگاریتمی  $y = \log_b x$  به صورت زیر است:

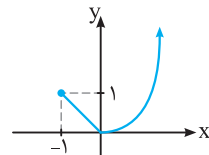


۳۳ | برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای  $f$ ، باید خط  $y = x + 1$  را در محدوده  $(-\infty, -2)$ ، خط  $y = 1$  را در محدوده  $(-2, 1)$  و خط  $y = -2x$  را در محدوده  $(1, +\infty)$  رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

$x$	$-3$	$-2$	$x$	$-2$	$1$	$x$	$1$	$2$
$y = x + 1$	$-2$	$-1$	$y = 1$	$1$	$1$	$y = -2x$	$-2$	$-4$



با توجه به نمودار، تابع در بازه  $(-\infty, -2)$ ، تابعی اکیداً صعودی، در بازه  $(-2, 1)$ ، تابعی ثابت و در بازه  $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.



۳۴ | نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطه آن را می‌نویسیم:

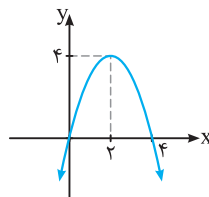
$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

۳۵ | برای رسم نمودار  $y = -x^2 + 4x$ ، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \Rightarrow y_S = -(2)^2 + 4(2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$



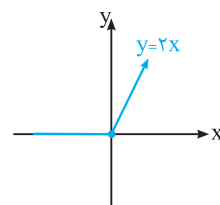
با توجه به نمودار، تابع در بازه  $(-\infty, 2]$  اکیداً صعودی و تابع در بازه  $[2, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

۳۶ | با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq 0 \\ x + (-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

با رسم تابع ثابت  $y = 0$  برای  $x < 0$  و نیم خط  $y = 2x$  برای  $x \geq 0$ ، نمودار تابع  $f$  رسم می‌شود:



نمودار  $f$  در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی و در بازه  $(-\infty, 0]$ ، هم صعودی و هم نزولی است ( $f$  تابع ثابت است). تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, +\infty)$  صعودی است.

# ۳

بخش سوم

# امتحان نهایی



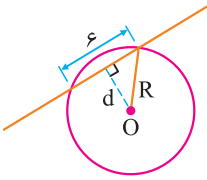


ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۱: خرداد ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (آ) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. (ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک تر خواهد شد.	۰/۵
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (آ) بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر ..... است. (ب) شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر ..... است.	۰/۵
۳	با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۴	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد؛ (ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (ب) مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.	۱/۲۵
۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.	۱
۶	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	۱
۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (آ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{ 3x+1 }$ (پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$	۲
۸	برای تابع $f$ در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ . با توجه به شکل، مختصات نقاط $B$ و $C$ را بیابید.	۱
۹	با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع $f$ در نقطه $A$ ، نشان دهید که تابع $f$ در نقطه $A$ مشتق پذیر نیست.	۱

۱/۵	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>ب) <math>f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}</math> ، <math>g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3</math></p>	۱۰
۱/۵	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله <math>h(t) = -5t^2 + 40t</math> به دست می‌آید؛</p> <p>آ) سرعت متوسط جسم را در بازه <math>[5, 8]</math> به دست آورید.</p> <p>ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم <math>35 \text{ m/s}</math> است.</p>	۱۱
۱/۵	<p>اگر نقطه <math>(2, 1)</math>، نقطه اکسترمم نسبی تابع <math>f(x) = x^3 + bx^2 + d</math> باشد، مقادیر <math>b</math> و <math>d</math> را به دست آورید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.</p>	۱۳
۱/۵	<p>کانون‌های یک بیضی نقاط <math>(1, 3)</math> و <math>(1, -5)</math> است.</p> <p>آ) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.</p> <p>ب) اگر <math>a = 6</math> باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. (<math>a</math> اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)</p>	۱۴
۱/۵	<p>مرکز دایره‌ای، نقطه <math>O(2, -3)</math> است. این دایره روی خط <math>3x - 4y + 2 = 0</math> و تری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.</p>	۱۵
		
۲	<p>اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر <math>8\%</math> و نوزاد دختر <math>3\%</math> باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟</p>	۱۶
۲۰	<p>★ موفق و مؤید باشید. ★</p>	



ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۲: شهریور ۱۴۰۰

نمره	سؤالات امتحانی	ردیف															
۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) دامنه توابع چندجمله‌ای برابر <math>\mathbb{R}</math> است.</p> <p>ب) دو تابع با ضابطه‌های <math>f(x) = x^3</math> و <math>g(x) = \sqrt[3]{x}</math> وارون یکدیگرند.</p> <p>پ) تابع با ضابطه <math>f(x) = \sqrt{x}</math> در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.</p>	۱															
۰/۷۵	<p>نمودار تابع با ضابطه <math>f(x) = x^2 - 2x + 1</math> را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور <math>x</math> ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.</p>	۲															
۱/۵	<p>با توجه به جدول مقابل، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-۱</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td>۰</td> <td>-۱</td> <td>۲</td> <td>-۵</td> </tr> <tr> <td><math>g(x)</math></td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>-۲</td> </tr> </table> <p>آ) <math>(g \circ f)(1)</math></p> <p>ب) <math>(f \circ (f + g))(0)</math></p>	$x$	-۱	۰	۱	۲	$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵	$g(x)$	۲	۳	۴	-۲	۳
$x$	-۱	۰	۱	۲													
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵													
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲													
۱	<p>معادله یک تابع سینوسی <math>y = a \sin(bx) + c</math> را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دوره تناوب آن <math>8\pi</math> است.</p>	۴															
۱	<p>مثلثی با مساحت <math>8\sqrt{2}</math> سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟</p>	۵															
۱	<p>حاصل عبارت <math>2x \cos x \cos x \sin x</math> را به ازای <math>x = 7/5^\circ</math> محاسبه نمایید.</p>	۶															

گاج

۵

صدا  
تثانی  
امتحانی

۳

ریاضی

حسین اسفینی  
یوسف داستان

فرمول

لیسنس

مادریه  
رایگان

# فرمول پیدا

در این کتابچه، سوالات  
امتحان نهایی چند سال  
اخیر، به دقت تیپ بندی  
شده و در سنامه‌های عالی  
برای آن ارائه شده است.  
هم‌چنین توجه ویژه‌ای به  
مفاهیم و تمرینات کتاب  
درسی شده و پاسخ‌های  
کامل تشریحی منطبق با  
پاسخ نامه امتحانات نهایی  
برای سوالات نوشته ایم.  
با مطالعه این کتابچه، با  
آمادگی کامل سر جلسه  
امتحان حاضر شوید!

تهران، میدان انقلاب  
نیش بازار چه کتاب

[www.gajmarket.com](http://www.gajmarket.com)



# فهرست

فصل اول ۳ تابع

فصل دوم ۱۸ مثلثات

فصل سوم ۲۷ حد در بی نهایت و حد بی نهایت

فصل چهارم ۳۵ مشتق

فصل پنجم ۵۵ کاربرد مشتق

فصل ششم ۶۶ هندسه

فصل هفتم ۸۱ احتمال

# فصل تابع

## بسته ۱ توابع چندجمله‌ای

**تمرین ۱** جای خالی یا صحیح و غلط از تعریف توابع چندجمله‌ای (تابع درجه سوم) و مفاهیم آن می‌دهند. پس به مفاهیم زیر توجه کنید:

**تابع چندجمله‌ای درجه  $n$ :** هر تابع به صورت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  را که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  اعداد حقیقی و  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_n \neq 0$  است، یک تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌نامیم. دامنه این توابع، مجموعه اعداد حقیقی است. (شهریور ۱۴۰۰)

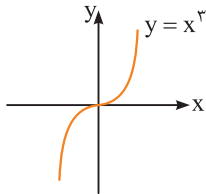
**مثال** تابع  $y = \sqrt{3}x^2 - \pi x + 1$  یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ است. (شهریور ۱۴۰۰)

**مثال** تابع  $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$  یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است. زیرا اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به صورت  $y = -6x^3 + 2x + 1$  درمی‌آید. (دی ۱۴۰۱)

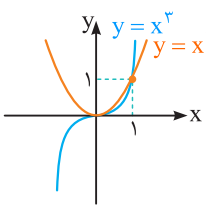
**نکته** تابع ثابت و تابع خطی مثال‌هایی از تابع چندجمله‌ای و به ترتیب با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

### تابع درجه سوم

تابع چندجمله‌ای  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) یک تابع درجه ۳ است که دامنه و برد آن  $\mathbb{R}$  است و نمودار مهم‌ترین آن‌ها یعنی  $y = x^3$  به صورت مقابل است:



**نکته** مقایسه رفتار تابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$ :



با توجه به نمودار مقابل، در بازه‌های  $x < 0$  و  $0 < x < 1$  نمودار  $y = x^2$  بالاتر از  $y = x^3$  و در بازه  $x > 1$  نمودار  $y = x^3$  بالاتر از  $y = x^2$  قرار دارد.

### ایستگاه مثال

آیا نمودار تابع  $y = x^2$  در بازه  $(0, 1)$  پایین‌تر از نمودار تابع  $y = x^3$  است؟ (دی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱)

**پاسخ** با توجه به نکته فوق جواب «خیر» است.

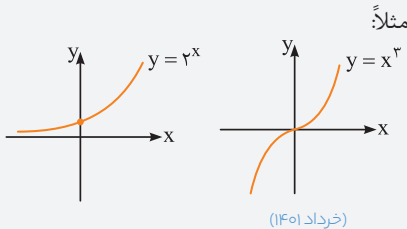
تذکره ۱ جای خالی یا صحیح و غلط از مفاهیم صعودی و نزولی می‌دهند. پس جملات زیر را خوب

به خاطر بسپارید.

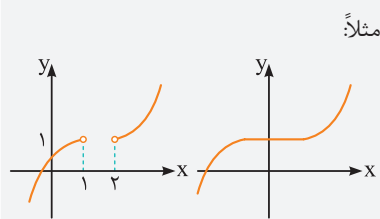
تعریف

اگر  $x_2 > x_1$  داشته باشیم:

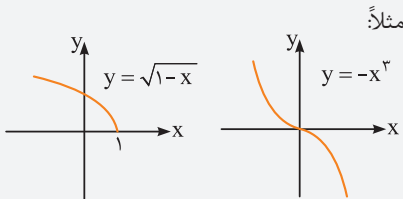
$f(x_2) > f(x_1)$ ، آن‌گاه  $f$  اکیداً صعودی است.



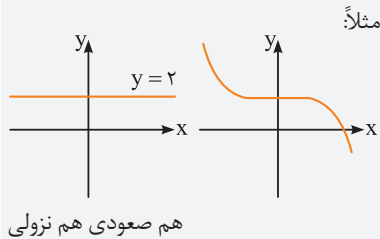
$f(x_2) \geq f(x_1)$ ، آن‌گاه  $f$  صعودی است.



$f(x_2) < f(x_1)$ ، آن‌گاه  $f$  اکیداً نزولی است.



$f(x_2) \leq f(x_1)$ ، آن‌گاه  $f$  نزولی است.



۱ به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

۲ به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

۳ توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند.

۴ توابع یکنوا، همواره اکیداً یکنوا نمی‌باشند! مثلاً نمودار

روبه‌رو صعودی بوده لذا یکنوا است. اما چون در بازه  $[a, b]$ ،

مقدار تابع ثابت است، پس این تابع اکیداً یکنوا نمی‌باشد. پس

توابع یکنوا ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم نباشند.

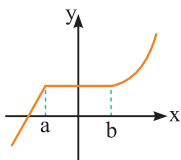
۵ توابع ثابت،  $f(x) = a$  در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی هستند. چون  $a$  هر عدد حقیقی می‌تواند

باشد، لذا بی‌شمار تابع ثابت و در نتیجه بی‌شمار تابع هم صعودی و هم نزولی داریم. (خرداد ۹۹ و ۱۴۰۲)

۶ هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. (شهریور ۹۹) ولی هر تابع یکنوا ممکن است یک به یک باشد،

شاید هم یک به یک نباشد! پس جمله «هر تابع یکنوا، یک به یک است» غلط است. (دی ۱۴۰۱)

(دی ۹۹ خارج)

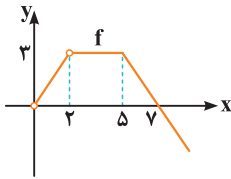


بررسی کنیم.

روش حل

با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه موردنظر را از جهت صعودی یا نزولی بودن می‌نویسیم.

مثال

در نمودار مقابل  $f$  در بازه  $(0, 2)$  اکیداً صعودی ودر بازه  $(5, +\infty)$  اکیداً نزولی و در بازه  $[2, 5)$  ثابت (هم صعودی و

هم نزولی) است.

(خرداد ۹۱)

ضابطه  $f$  را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن  $f$  را بررسی کنیم.

روش حل

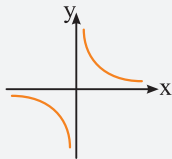
با توجه به ضابطه  $f$ ، نمودار را رسم کرده و با توجه به نمودار، صعودی یا نزولی بودن  $f$ 

در بازه‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

## ایستگاه مثال

۱. آیا  $y = \frac{1}{x}$  در دامنه‌اش یکنوا است؟

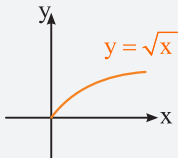
(شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ خیر، نمودار  $y = \frac{1}{x}$  به صورت مقابل است. با این‌که تابعدر بازه‌های  $(0, +\infty)$  و  $(-\infty, 0)$  نزولی و لذا در این بازه‌ها یکنوا است ولی

در کل دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی بوده و یکنوا نمی‌باشد!

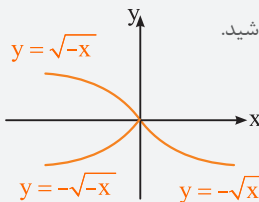
۲. آیا  $y = \sqrt{x}$  در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟

(شهریور ۱۴۰۰)

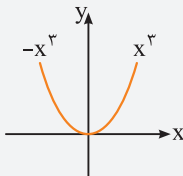


پاسخ خیر، با توجه به نمودار زیر، این تابع اکیداً صعودی است.

نمودارهای مهم زیر را به خاطر داشته باشید.

۳. تابع  $|x| \cdot x^2 = y$  در بازه  $[-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر  $a$  را بیابید.

(کتاب درسی)



پاسخ با توجه به حضور قدرمطلق، تابع دوضابطه‌ای به صورت

$$y = \begin{cases} x^2(x) = x^3, & x \geq 0 \\ x^2(-x) = -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به شکل مشخص است که تابع در بازه  $[-\infty, a]$  که حداکثر  $a$  برابر

۰ است، نزولی می‌باشد.