مقدمهٔ ناشر

خیلیا برای فرار از درس ریاضی و خیلیا به عشق درس ریاضی رشته‌شون رو انتخاب می‌کنن. گروه اول همیشه در شگفت‌اند که این ریاضی مگه چی داره که بعضیا دیوانه‌وار عاشقشن و باهاش حال می‌کنن؟!

ولی گروه دوم، مثل خودِ شما که رشتشون ریاضیه بهتر از هر کس می‌دونین که «لذتی که در حل مسئله هست حتی در انتقام هم نیست!». اون لحظهٔ باشکوه، حس عجیبی به آدم می‌ده. همون لحظه که میگی «آهان! فهمیدم!». همون لحظهٔ کشف جواب! انگار با آرپی‌جی زدی وسط تانک دشمن. هر چی مسئله چغرتر و بدبدن‌تر، این حس قوی‌تر و لذت‌بخش‌تر.

نمی‌دونم توی اون لحظه کدوم محرک باعث می‌شه که چه بخشی از مغزمون دستور صادر کنه تا چه هورمونی از کجای بدنمون فوران کنه! ولی هر چی که هست معرکه است.

امیدواریم این کتاب براتون پر از این لحظه‌های ناب باشه و با خوندنش هم حسابی کیف کنید و هم توی کنکورها حسابی بترکونید.

برای به ثمر رسیدن این کتاب آدمای مهم و زیادی زحمت کشیدن. دم همتون گرم.

رسول جان و سروش جان، خسته نباشین! انصافن خوب کتابی شد. مصطفی جان، ممنون که از اول تا آخر خط کنارمون بودی.

زنده باد دوستای خستگی‌ناپذیرمون در واحد تألیف و تولید خیلی‌سبز و درود بر ویراستارای خوب و دقیقمون.

بروبچه‌های ریاضی، دم شما هم گرم

مواظب خودتون باشید!

تقدیم به همهٔ دانش‌آموزان و معلم‌های خوب ایران

مقدمهٔ مولفان

به کتاب گسسته خیلی‌سبز خوش آمدید.

نحوهٔ استفاده از کتاب:

(الف) اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمتان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمهٔ محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمتان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل‌کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، برنامه‌ریزی و اجرا کنید.

(ب) اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیهٔ ما این است که: (۱) اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. (۲) چیزهایی از درس‌نامه که مهم است را مشخص کنید، یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. (۳) یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. (۴) بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخنامهٔ کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌های تشریحی را بخوانید.

ساختار کتاب:

درس‌نامه:

(۱) در درس‌نامه آیکن‌های **نکته**، **تذکر** و **یادآوری** داریم:

نکته نشان‌دهندهٔ نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

تذکر نشان‌دهندهٔ یک اشارهٔ کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید.

یادآوری نشان‌دهندهٔ یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

(۲) در درس‌نامهٔ کتاب سعی کرده‌ایم از جدول، نمودار، دسته‌بندی و هر چیزی که باعث می‌شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول‌ها باید حسابی وقت بگذارید.

(۳) تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می‌کنیم بعد از این‌که درس‌نامهٔ هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست‌های درس‌نامه را حل کنید.

تست‌ها:

در انتخاب و طرح تست‌ها به تغییر فضای دفترچهٔ کنکور توجه ویژه‌ای شده است و حتماً با حل تمام تست‌های این کتاب تا حد زیادی با ذائقهٔ طراحان کنکور آشنا خواهید شد:

(۱) تست‌ها را با وسواس خیلی زیادی چیده‌ایم تا روند تسلط شما بر مطالب آسان‌تر شود، پس حتماً سعی کنید با همان ترتیب تست‌ها را حل کنید.

(۲) تمامی تمارین و مثال‌های کتاب درسی و کنکور سال‌های اخیر را در کتاب خواهید دید، حتماً توجه ویژه‌ای به آن‌ها داشته باشید.

۳ در انتهای هر کدام از فصل‌ها یک آزمون داریم. توصیهٔ شدید و اکید داریم که تا وقتی همهٔ مطالب فصل را خوب یاد نگرفته‌اید و تست‌های فصل را حل و دوره نکرده‌اید سراغ آزمون نروید.

۴ در آخر هر فصل تعدادی تست سری Z داریم که مخصوص دانش‌آموزان علاقه‌مند و البته برای آن‌هایی است که می‌خواهند در آزمون‌های آزمایشی و بعدترها در کنکور، درس ریاضی را صد بزنند.

پاسخ‌ها:

۱ در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در پاسخ‌ها نمادهای راه | I، راه | II و ... را داریم که نشان‌دهندهٔ روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در راه | I متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است.

۲ توصیهٔ ما برای استفاده از پاسخ‌نامه این است:

الف تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰تا).

ب درستی پاسخ‌ها را از روی پاسخ‌نامهٔ کلیدی بررسی کنید.

پ برگردید و سعی کنید تست‌هایی را که جواب نداده‌اید یا غلط زده‌اید دوباره حل کنید.

ت بروید سراغ پاسخ‌نامهٔ تشریحی، اول پاسخ تست‌هایی را که جواب نداده‌اید و یا غلط زده‌اید ببینید و بعد از این‌که این‌ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همهٔ پاسخ‌ها بیندازید. بررسی راه | I، راه | II، نکته ها و تذکر ها باعث می‌شود به همهٔ نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های درس مسلط شوید.

و حرف آخر هم این‌که:

- اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم.
- وقتی پای کتاب گسسته وسط باشد، اول از همه باید از برادران نصری که زمینهٔ اولین همکاری مشترک ما را سال‌ها قبل در کتاب جامع گسسته فراهم کردند، تشکر ویژه داشته باشیم.
- تشکر فراوان از آقایان مهندس مصطفی کرمی، مهندس محمدحسین رحیمی و جناب مصطفی دیداری که این کتاب غنای ایده‌ها و تست‌هایش را مرهون سواد فوق‌العاده و زحمت این بزرگواران است.
- از مهندس نوید شاهی بزرگوار که در تمام مراحل کتاب با وسواس و دقت بی‌نظیرشان همراه ما بودند تشکر می‌کنیم.
- از محسن فراهانی دوست‌داشتنی بابت نظرات مفید و بهبود کیفیت کتاب متشکریم.
- از تمامی دوستان و همکارانمان در انتشارات خیلی‌سبز، خصوصاً سرکار خانم هدی ملک‌پور که زحمت پیگیری تمام امور این کتاب را داشتند، تشکر می‌کنیم.

@soroushmueeni @mathmohsenimanesh

فهرست

درس دوم عادکردن

اگر عدد صحیح b بر عدد صحیح و غیرصفر a بخش‌پذیر باشد، می‌نویسیم $a|b$ و می‌خوانیم (a، b را عاد می‌کند.)

وقتی b بر a بخش‌پذیر است، در تقسیم b بر a باقی‌مانده صفر می‌شود:

$$\begin{array}{r|l} b & a \\ \hline - & q \\ \circ & \end{array}$$

و در واقع b مضرب صحیحی از a است. می‌نویسیم: $b = aq$

پس عبارت‌های زیر معادل‌اند:

b مضرب صحیح a است.	b بر a بخش‌پذیر است.	$a\|b$	$\exists q \in \mathbb{Z}$ $b = aq$	a، b را عاد می‌کند. a، b را می‌شمارد.	a مقسوم‌علیه b است. a عامل b است. a شمارندهٔ b است.

مثلاً $-۲|۱۲$ یعنی ۱۲ بر -۲ بخش‌پذیر است (درست است، ۱۲ دقیقاً (-۶) برابر (-۲) است).

$۳|۱۰$ یعنی ۱۰ بر ۳ بخش‌پذیر است (خب غلط است، ۱۰ مضرب ۳ نیست).

مثال مقدار عدد صحیح x را در هر یک از روابط زیر پیدا کنید:

الف) $x|-۷$ ب) $۲x-۱|۲۰$ پ) $-۳|x$ و $x|۲۴$ ت) $۳^x|۲۷^۳$

پاسخ الف) -۷ بر x بخش‌پذیر است، x می‌تواند ±۱ یا ±۷ باشد و ۴ جواب صحیح دارد.

ب) ۲۰ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است، می‌دانیم $۲x-۱$ فرد است، پس باید ±۱ و ±۵ باشد و داریم: $۲x-۱=۱ \Rightarrow x=۱, ۲x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰$

$۲x-۱=۵ \Rightarrow x=۳, ۲x-۱=-۵ \Rightarrow x=-۲$

یعنی x می‌تواند صفر، ۱، -۲ یا ۳ باشد.

پ) x بر -۳ بخش‌پذیر است و ۲۴ به x می‌خورد؛ پس x مقسوم‌علیه ۲۴ است که به ۳ بخورد. پس ±۲۴، ±۱۲، ±۶ و ±۳ خوب هستند.

ت) $۲۷^۳=(۳^۳)^۳=۳^۹$. حالا $۳^x|۳^۹$ وقتی برقرار است که $۱ \le x \le ۹$، چون $۳^۹$ بر ۳^x بخش‌پذیر است، پس توان سمت چپ (x) باید کم‌تر یا مساوی ۹ باشد.

تذکر بد نیست به خاطر بسپارید که $a^n|a^m \Leftrightarrow n \le m$ (البته پایه‌های ۰، ۱ و -۱ را بگذارید کنار یعنی $a \ne ۰,۱,-۱$).

تست اگر $۶|x-۲$، آن‌گاه کم‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x کدام است؟

۱) ۱۰۶ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۰۴

پاسخ ۴ باید $x-۲$ مضرب ۶ باشد، پس داریم: $x-۲=۶k \Rightarrow x=۶k+۲$

و با دقت به این‌که $۹۶=۶\times۱۶$ است، حداقل عدد طبیعی سه‌رقمی x به ازای $k=۱۷$ به دست می‌آید که برابر $x=۶\times۱۷+۲=۱۰۴$ است.

ویژگی‌های عادکردن (۱)

در جدول زیر ابتدایی‌ترین ویژگی‌های عادکردن را به همراه توضیح و مثال ببینید:

بیان ریاضی خاصیت	توضیح	مثال
$\forall a \in \mathbb{Z} ; a\|a$	هر عدد صحیح بر خودش بخش‌پذیر است. (یواشکی اجازه می‌دهیم صفر بر صفر بخش‌پذیر باشد.)	همواره داریم: $x-۱\|x-۱$ ، $۷\|۷$
$\forall a \in \mathbb{Z} ; \pm۱\|a$	هر عدد صحیح بر ±۱ بخش‌پذیر است. (±۱ همهٔ اعداد را عاد می‌کنند.)	همواره $\pm۱\|۲x-۱$ یا $\pm۱\|n+۵$

بیان ریاضی خاصیت	توضیح	مثال
$\forall a \in \mathbb{Z}\,;\, a \mid ۰$	صفر بر هر عدد صحیح بخش‌پذیر است. (همهٔ اعداد صفر را عاد می‌کنند.)	اگر رابطهٔ $a \mid n-۳$ همواره برقرار باشد $n=۳$ است.
اگر $a \mid -۱$ یا $a \mid ۱$، آن‌گاه $a=\pm۱$	عدد ۱ یا ۱− فقط بر ±۱ بخش‌پذیر است.	اگر $۲x-۳ \mid ۱$، آن‌گاه $۲x-۳=\pm۱$ و داریم: $x=۱$ یا ۲
$a \mid b \Rightarrow \pm a \mid \pm b$	علامت در بخش‌پذیری اثر ندارد.	از $a \mid ۱۴$ نتیجه می‌شود: $-a \mid ۱۴$ و $a \mid -۱۴$ و $-a \mid -۱۴$
اگر $a \mid b$، آن‌گاه $a \mid kb$ $(k \in \mathbb{Z})$	اگر b بر a بخش‌پذیر باشد، هر مضرب b نیز بر a بخش‌پذیر است.	از رابطهٔ $a \mid b$ نتیجه می‌گیریم: $a \mid ۷b$ یا $a \mid -۳b$
اگر $a \mid b$، آن‌گاه $a \mid b^n$ $(n \in \mathbb{N})$	سمت راست را می‌توانیم به توان دلخواه n برسانیم.	از رابطهٔ $۳ \mid b$ نتیجه می‌شود: $۳ \mid b^۲$ از رابطهٔ $x \mid ۴$ نتیجه می‌شود: $x \mid ۴^۳$
اگر $a \mid b$، آن‌گاه $ka \mid kb$ و برعکس $(k \neq ۰)$	قرارداد یا حذف ضریب غیرصفر برای دو طرف مجاز است.	از رابطهٔ $۵ \mid x$ نتیجه می‌شود: $۱۵ \mid ۳x$ (ضرب در ۳) از رابطهٔ $۱۶a \mid ۳۰b$ نتیجه می‌شود: $۸a \mid ۱۵b$ (تقسیم بر ۲)
اگر $a \mid b$، آن‌گاه $a^n \mid b^n$ $(n \in \mathbb{N})$	می‌توانیم برای دو طرف توان n قرار دهیم یا توان n را بزنیم.	از رابطهٔ $a \mid b^۲$ نتیجه می‌شود: $a^۳ \mid b^۶$ (به توان ۳) از رابطهٔ $۴x^۲ \mid y^۴$ نتیجه می‌شود $۲x \mid y^۲$ (توان ۲ را زدیم)
اگر $a \mid b$ و $b \neq ۰$، آن‌گاه $\lvert a \rvert \leq \lvert b \rvert$	اگر عدد غیرصفر b بر a بخش‌پذیر باشد، قدرمطلق b از a کم‌تر نیست.	از رابطهٔ $n^۳+۲ \mid n^۲+۲$ نتیجه می‌گیریم: $\lvert n^۳+۲ \rvert \leq n^۲+۲$
اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، آن‌گاه $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$	فقط زمانی که دو عدد یا با هم برابر باشند یا قرینهٔ هم باشند هر کدام دیگری را عاد می‌کند.	از $n+۱ \mid n^۲$ و $n^۲ \mid n+۱$ نتیجه می‌گیریم: $\lvert n+۱ \rvert = \lvert n^۲ \rvert$
$ab \mid c \Rightarrow a \mid c, b \mid c$	به جای سمت چپ می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم (لاغر کنیم).	از رابطهٔ $۶ \mid x$ نتیجه می‌شود $۲ \mid x$ و $۳ \mid x$. از رابطهٔ $a^۲ \mid x$ نتیجه می‌شود $a \mid x$.

تذکر هنوز چندتا ویژگی مانده که جلوتر خواهیم خواند.

مثال x را در هر یک از روابط زیر بیابید.

الف) $۰ \mid ۲x^۲-x-۱$ ب) $\forall x \in \mathbb{Z}\,;\, ۲x-۱ \mid n$ پ) $\forall n \in \mathbb{Z}\,;\, n \mid x^۲+۲x$ ت) $۲x+۱ \mid ۳x+۴ \,,\, ۳x+۴ \mid ۲x+۱$

پاسخ الف) $۲x^۲-x-۱$ باید صفر باشد، چون فقط صفر در رابطهٔ $۰ \mid k$ صدق می‌کند. پس $۲x^۲-x-۱=۰$ و در نتیجه: $x=۱$ یا $\frac{-۱}{۲}$

ب) چون هر n بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر شده پس $۲x-۱$ باید ±۱ باشد و داریم:

$$۲x-۱=۱ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$$
$$۲x-۱=-۱ \Rightarrow ۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

پس مقدار x حتماً صفر یا ۱ است.

پ) چون $x^۲+۲x$ بر هر عدد صحیح n بخش‌پذیر شده است، پس $x^۲+۲x$ صفر است:

$$x^۲+۲x=x(x+۲)=۰$$

و بنابراین $x=۰$ یا ۲−.

ت) $۳x+۴$ و $۲x+۱$ بر هم بخش‌پذیرند؛ پس باید مساوی یا قرینهٔ هم باشند:

$$۳x+۴=۲x+۱ \Rightarrow x=-۳$$
$$۳x+۴=-۲x-۱ \Rightarrow ۵x=-۵ \Rightarrow x=-۱$$

پس x باید ۱− یا ۳− باشد.

تست ۹ اگر $a \mid ۲۰$، کدام نتیجه درست نیست؟

۱) $a \mid ۶۰$ ۲) $a \mid ۴۰۰$ ۳) $۲۰-a \geq ۰$ است. ۴) $a \mid ۱۰$

پاسخ ۴ ۲۰ بر a بخش‌پذیر است؛ پس اولاً $\lvert a \rvert \leq ۲۰$ و ثانیاً هر مضرب ۲۰ و هر توان ۲۰ به a می‌خورد. پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ درست هستند و ۴ لزومی ندارد درست باشد. مثلاً $۲۰ \mid ۲۰$ اما $۲۰ \nmid ۱۰$.

تست چند عدد صحیح n وجود دارد که هر سه رابطهٔ $n^3-16n \mid -1$ ، $n^3-16n \mid 0$ و $0 \mid n^3-16n$ برقرار باشد؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ ۳ همهٔ اعداد مثل n^3-16n بر ± 1 بخش‌پذیرند یا ± 1 همهٔ اعداد را عاد می‌کنند؛ پس اولی همواره درست است. همهٔ اعداد، صفر را عاد می‌کنند ($a \mid 0$ چون $a \times 0 = 0$) پس دومی هم همواره درست است. دو رابطهٔ اول به ازای هر عدد صحیح درست هستند، اما صفر فقط خودش را عاد می‌کند، چون داریم:

$$0 \mid a \Rightarrow 0 \times (\text{هر چیزی}) = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس از رابطهٔ $0 \mid n^3-16n$ نتیجه می‌گیریم:

$$n^3-16n=0 \Rightarrow n(n^2-16)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=4 \\ n=-4 \end{cases}$$

پس سه عدد صحیح وجود دارد.

بزرگ و کوچک کردن دو طرف

از کنار هم گذاشتن چند تا از ویژگی‌های بالا می‌توانیم این‌جوری بگوییم که: از رابطهٔ $a \mid b$، نتیجه می‌گیریم:

الف) هر مضرب b نیز بر a بخش‌پذیر است.

ب) b بر هر مقسوم‌علیه a بخش‌پذیر است.

پس اجازه داریم b را با ضرب‌کردن یا توان‌رساندن «بزرگ‌تر» و a را با تقسیم‌کردن یا برداشتن توان «کوچک‌تر» کنیم.

مثلاً از $x \mid 12$ نتیجه می‌شود: $x \mid 5 \cdot 12$، $x^3 \mid 12$، $x \mid 6$ و $x \mid 3$ و همچنین $\underbrace{4}_{\text{۱۲ را کوچک‌کردیم.}} \mid \underbrace{2x^3}_{\text{x را بزرگ‌کردیم.}}$

بدیهی است که عکس این کار درست نیست مثلاً از $4 \mid 12$ نمی‌شود نتیجه گرفت که $8 \mid 6$.

البته یادمان نرود که همیشه اجازه داریم هر دو طرف را با ضریب و توان، به یک اندازه بزرگ یا کوچک کنیم.

مثال اگر $a \mid b$، کدام روابط درست هستند؟

الف) $2a \mid b$ ب) $a \mid 2b$ پ) $-3a \mid 3b$ ت) $a^2 \mid b$

ث) $a \mid b^3$ ج) $a^2 \mid -b^2$ چ) $|a| \le |b|$ ح) $2a^2 \mid -6b^3$

پاسخ الف) و ت) نادرست هستند، چون اجازه نداریم طرف چپ را با ضریب و توان بزرگ‌تر کنیم. مثلاً $2 \mid 6$ درست است اما $2\times 2 \mid 6$ و $2^2 \mid 6$ نادرست هستند.

دقیقاً به همین دلیل، ب) و ث) درست هستند، چون اجازه داریم طرف راست را با ضریب یا توان چاق‌تر کنیم.

در پ) و ج) هر دو طرف را به یک اندازه بزرگ کردیم (ضریب‌ها و توان‌ها برابرند) و رابطه درست است. دقت کنید که علامت در بخش‌پذیری اثری ندارد. پس در حالت کلی از رابطهٔ $a \mid b$ می‌توانیم بنویسیم $\pm a^n \mid \pm b^n$ و $\pm ka \mid \pm kb$.

چ) به خاطر این‌که $b \neq 0$ را نیاورده، نادرست است. اگر $b = 0$ باشد، $|a| \le |b|$ لزوماً درست نیست. مثلاً $3 \mid 0$ اما $|3| \le |0|$ نیست.

ح) درست است. روند به دست آوردن (ح) را ببینید:

$$a \mid b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 \mid b^2 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} 2a^2 \mid 2b^2 \xrightarrow[\text{ضرب } -3b]{\text{طرف راست در}} 2a^2 \mid -6b^3$$

تست از رابطهٔ $x \mid 14$ کدام نتیجه نادرست است؟ $(x \neq 0)$

۱) $x^3 \mid 14$ ۲) $5x \mid 14$ ۳) $-2x \mid 28$ ۴) $x+1 \mid 15$

گزینهٔ ۴ سه گزینهٔ اول درست هستند.

در ۱) می‌گوییم x بر ۱۴ بخش‌پذیر است؛ پس هر توانِ x هم بر ۱۴ بخش‌پذیر است؛ یعنی $x^3 \mid 14$.

در ۲) چون x به ۱۴ می‌خورد، هر مضرب x هم به ۱۴ می‌خورد و نتیجهٔ $5x \mid 14$ درست است.

در ۳) x مضرب ۱۴ است؛ پس 2x مضرب ۲۸ است (دو طرف را ۲ برابر کردیم) و بنابراین $-2x$ هم مضرب ۲۸ است.

اما ۴) نادرست است. از بخش‌پذیری x بر ۱۴ نمی‌شود نتیجه گرفت $x+1$ به ۱۵ می‌خورد. (با $x = 28$ به راحتی نقض می‌شود.)

تذکر در حالت کلی از $a \mid b$ نمی‌شود نتیجه گرفت $a+c \mid b+c$.

تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد

اگر عدد N کوچک باشد، می‌توانیم مقسوم‌علیه‌ها را بگوییم و بشماریم. مثلاً ۱۴ دارای ۴ مقسوم‌علیه طبیعی است: ۱۴,۷,۲,۱ و هشت مقسوم‌علیه صحیح دارد: $\pm ۱ , \pm ۲ , \pm ۷ , \pm ۱۴$.

تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح همیشه دو برابر تعداد مقسوم‌علیه طبیعی است اما برای اعداد بزرگ‌تر، روشی وجود دارد که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی را سریع حساب کنیم:

مرحلهٔ ۱ عدد را تجزیه کنید.

مرحلهٔ ۲ به توان‌های تجزیه یک واحد اضافه کنید.

مرحلهٔ ۳ در هم ضرب کنید.

مثلاً تجزیهٔ عدد ۶۰ به صورت $۲^۲\times ۳^۱\times ۵^۱$ است؛ پس $(۲+۱)(۱+۱)(۱+۱)$ یعنی ۱۲ مقسوم‌علیه طبیعی دارد. منطق این روش را هم اگر بدانیم بد نیست: در هر مقسوم‌علیه ۶۰، توان ۲ می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ باشد، توان ۳ و ۵ هم صفر یا ۱ است. پس قیافهٔ مقسوم‌علیه ۶۰ به صورت $۲^{\text{۰ یا ۱ یا ۲}}\times ۳^{\text{۰ یا ۱}}\times ۵^{\text{۰ یا ۱}}$ است.

به زبان ریاضی: اگر تجزیهٔ N به صورت $P_۱^{\alpha_۱}P_۲^{\alpha_۲}\cdots P_k^{\alpha_k}$ باشد، N دارای $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$ مقسوم‌علیه طبیعی است.

مثال هر یک از اعداد زیر چند مقسوم‌علیه مثبت دارند؟ (P عدد اول دورقمی است.)

الف) ۴۸   ب) ۴۹   پ) ۵۱   ت) $۸P^۲$

پاسخ تجزیهٔ اعداد به ترتیب $۲^۴\times ۳^۱$ و $۷^۲$ و $۳^۱\times ۱۷^۱$ و $۲^۳\times P^۲$ است. پس به ترتیب $\underbrace{۲\times ۵}_{۱۰}$ و ۳ و $\underbrace{۲\times ۲}_{۴}$ و $\underbrace{۴\times ۳}_{۱۲}$ مقسوم‌علیه مثبت دارند.

تعداد مقسوم‌علیه‌های خاص

در بعضی سؤال‌ها، تعداد مقسوم‌علیه‌های خاصی را می‌خواهیم مثلاً تعداد مقسوم‌علیه‌هایی که مضرب ۳ باشند، فرد باشند و ... .

دوتا روش حل داریم:

۱ اگر بتوانیم خواستهٔ سؤال را به زبان عادکردن می‌نویسیم. مثلاً وقتی دنبال مقسوم‌علیه‌های زوج عدد ۵۰۰ هستیم $۵۰۰ \,|\, \underbrace{۲x}_{\text{مقسوم‌علیه زوج}}$ بعد دو طرف را به ۲ تقسیم می‌کنیم و داریم: $۲۵۰ \,|\, x$

و تعداد مقسوم‌علیه‌های ۲۵۰ را پیدا می‌کنیم (چون $۲۵۰ = ۲^۱\times ۵^۳$ جواب می‌شود ۲×۴ یعنی ۸).

مثال عدد ۳۰۰ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد که:

الف) مضرب ۴ باشند.

می‌نویسیم $۳۰۰ \,|\, ۴x$ پس $۷۵ \,|\, x$ و x می‌تواند هر مقسوم‌علیه ۷۵ باشد، چون $۷۵ = ۳^۱\times ۵^۲$ به تعداد $۶ = ۳\times ۲$ جواب داریم.

ب) مضرب ۲۵ باشند.

از رابطهٔ $۳۰۰ \,|\, ۲۵x$ داریم $۱۲ \,|\, x$؛ پس تعداد جواب‌های x همان تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۲ است:

$۱۲ = ۲^۲\times ۳^۱ \Rightarrow ۳\times ۲ = ۶$

۲ می‌توانیم خواستهٔ سؤال را در تجزیهٔ مقسوم‌علیه‌ها بیاوریم. مثلاً گفتیم قیافهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۶۰ به صورت $۲^{\text{۰ یا ۱ یا ۲}}\times ۳^{\text{۰ یا ۱}}\times ۵^{\text{۰ یا ۱}}$ است. حالا اگر سؤال مقسوم‌علیه مضرب ۳ بخواهد، باید توان ۳ حتماً ۱ باشد؛ یعنی $۲^{\text{۰ یا ۱ یا ۲}}\times ۳^۱\times ۵^{\text{۰ یا ۱}}$ و ۳×۲ حالت داریم.

مثال عدد $۲^۳\times ۳^۲\times ۵^۱\times ۷^۱$ چند مقسوم‌علیه صحیح دارد که:

الف) فرد و مضرب ۷ باشند؟   ب) مضرب ۳ باشند اما مضرب ۵ نباشند؟   پ) مضرب ۱۲ باشند اما مضرب ۷ نباشند؟

پاسخ تیپ مقسوم‌علیه‌های این عدد به صورت $۲^{\text{۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳}}\times ۳^{\text{۰ یا ۱ یا ۲}}\times ۰^{\text{۰ یا ۱}}\times ۷^{\text{۰ یا ۱}}$ است.

در الف) مقسوم‌علیه فرد و مضرب ۷ حتماً باید $۲^۰$ و $۷^۱$ را داشته باشد یعنی $۲^۰\times ۳^{\text{۰ یا ۱ یا ۲}}\times ۵^{\text{۰ یا ۱}}\times ۷^۱$ است و $۶ = ۲\times ۳$ حالت دارد و چون سؤال گفته صحیح، هم + و هم - قبول است یعنی جواب می‌شود ۱۲.

در ب) مقسوم‌علیه مضرب ۳ که مضرب ۵ نیست حتماً $۳^{\text{۱ یا ۲}}$ را دارد و $۵^۰$ را هم دارد؛ پس می‌شود $۲^{\text{۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳}}\times ۳^{\text{۱ یا ۲}}\times ۵^۰\times ۷^{\text{۰ یا ۱}}$ و $۱۶ = ۲\times ۲\times ۴$ حالت داریم که چون صحیح است جواب می‌شود ۳۲تا.

در پ) مقسوم‌علیه مضرب ۱۲ و غیر مضرب ۷، باید $۲^۲\times ۳^۱$ را داشته باشد و $۷^۰$ داشته باشد؛ پس تجزیه‌اش $۲^{\text{۲ یا ۳}}\times ۳^{\text{۱ یا ۲}}\times ۵^{\text{۰ یا ۱}}\times ۷^۰$ است پس تعداد حالت‌ها $۸ = ۲\times ۲\times ۲$ تا است و در اعداد صحیح ۱۶ حالت دارد.

تست ۶ عدد ۴۵۰۰ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد که مضرب زوج ۹ باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

پاسخ ۴ a را مقسوم‌علیه ۴۵۰۰ می‌گیریم؛ یعنی ۴۵۰۰ بر آن بخش‌پذیر است یا $a \mid ۴۵۰۰$. از طرفی a، مضرب ۹ است؛ یعنی $a = ۹k$ است و چون مضرب زوج ۹ است؛ یعنی $a = ۹(۲k) = ۱۸k$؛ پس $۱۸k \mid ۴۵۰۰$. $۱۸ \neq ۰$. پس می‌توانیم دو طرف را به ۱۸ ساده کنیم: $k \mid ۲۵۰$.

پس k باید مقسوم‌علیه ۲۵۰ باشد؛ یعنی: $k = ۱,۲,۵,۱۰,۲۵,۵۰,۱۲۵,۲۵۰$

به ازای هر k دقیقاً یک a به دست می‌آید؛ پس a، ۸ مقدار می‌تواند داشته باشد.

ویژگی‌های عادکردن (۲)

این ویژگی‌ها کمی پیشرفته‌تر هستند و در حل تست‌ها هم بیشتر دیده می‌شوند:

بیان ریاضی خاصیت	توضیح	مثال
$a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (قانون تعدی)	اگر اولی دومی را عاد کند و دومی هم سومی را عاد کند اولی، سومی را عاد می‌کند.	• از $n \mid ۶$ و $a \mid n$ نتیجه می‌گیریم: $a \mid ۶$ • از $x \mid ۱۵$ نتیجه می‌شود: $۳ \mid x$ (چون $۳ \mid ۱۵$) • از $a \mid ۱۰$ نتیجه می‌گیریم: $a \mid ۴۰$ (چون $۱۰ \mid ۴۰$)
اگر $a \mid b$ و $a \mid c$، آن‌گاه $a \mid mb + nc$ (قانون ترکیب خطی)	سمت چپ را ثابت نگه می‌داریم و سمت راست‌ها را در هر عدد دلخواه صحیح ضرب و بعد آن‌ها را جمع کنیم.	• از $a \mid b$ و $a \mid a$ نتیجه می‌گیریم: $a \mid ۷a - ۵b$ • از $n \mid ۲x - ۱$ و $n \mid ۳x + ۱$ نتیجه می‌گیریم: • $n \mid ۵(۲x - ۱) + ۴(۳x + ۱)$
اگر $a \mid b$ و $c \mid d$، آن‌گاه $ac \mid bd$	دو طرف رابطهٔ عادکردن را می‌توان ضرب کرد.	• از $۲ \mid x$ و $۳ \mid y$ نتیجه می‌گیریم: $۶ \mid xy$ • از روابط $m \mid ۴$ و $n \mid ۵$ نتیجه می‌شود: $۵m \mid ۴n$
اگر $a \mid bc$ و دو عدد a و b عامل مشترک ندارند، آن‌گاه: $a \mid c$	اگر ضرب b و c به a می‌خورد اما b با a هیچ مشترک نداشته باشد، حتماً c به a می‌خورد.	• از $۵ \mid ۷x$ نتیجه می‌شود: $۵ \mid x$ • از $۲۷ \mid ۱۱(n - ۱)$ نتیجه می‌گیریم: $۲۷ \mid n - ۱$

تست ۷ از رابطه‌های $a \mid b$ و $a \mid c$ کدام نتیجه درست نیست؟

۱) $a^2 \mid ۳bc$ ۲) $a^2 \mid b^2 - c^2$ ۳) $a \mid ۵a - ۲bc$ ۴) $a^3 \mid bc$

پاسخ ۴ دیدیم که می‌توانیم دو رابطهٔ عادکردن را در هم ضرب کنیم؛ پس از روابط $a \mid b$ و $a \mid c$ نتیجه می‌شود $a^2 \mid b \times c$ و با توجه به قانون ضرب در طرف راست، می‌توان گفت $a^2 \mid ۳bc$ و ۱ درست است اما ۴ تأیید نمی‌شود. چون ما به a^2 رسیدیم نه a^3 و بزرگ‌کردن طرف چپ درست نیست.

مثال نقض: از $۲ \mid ۱۴$ و $۲ \mid ۱۰$ نتیجه نمی‌شود $۲^3 \mid ۱۴ \times ۱۰$ پس جواب ۴ است.

دلیل درستی ۲ و ۳ را هم ببینید:

۳) فرض سؤال: $a \mid c$، می‌دانیم: $a \mid a$ $\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a \mid mc + na \xrightarrow[n=5]{m=-2b} a \mid -۲bc + ۵a$

۲) $a \mid b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 \mid b^2$ ، $a \mid c \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 \mid c^2$ $\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a^2 \mid mb^2 + nc^2 \xrightarrow[n=-c]{m=1} a^2 \mid b^2 - c^3$

تست ۸ از برقراری دو رابطهٔ $b \mid n^2 + n$ و $na^2 \mid b$، کدام نتیجه‌گیری ممکن است نادرست باشد؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) $a^3 \mid n + ۱$ ۲) $a^2 \mid n + ۱$ ۳) $a \mid n + ۱$ ۴) $a \mid n^2 + ۲n + ۱$

پاسخ ۱ طبق قانون تعدی داریم: $na^2 \mid b, b \mid n^2 + n \xrightarrow{\text{قانون تعدی}} na^2 \mid n^2 + n \xrightarrow[n \neq 0]{\div n} a^2 \mid n + ۱$ ۲

به جای a^2 می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن (مثل a) را قرار دهیم؛ پس $a \mid n + ۱$ (۳).

سمت راست را می‌توانیم به توان دلخواه طبیعی (مثل ۲) برسانیم؛ پس: $a \mid n + ۱ \Rightarrow a \mid (n + ۱)^2 \Rightarrow a \mid n^2 + ۲n + ۱$ ۴

چراکه نمی‌توانیم طرف چپ را بزرگ‌تر کنیم، البته می‌شود مثال نقض هم زد: $a = ۲, n = ۳, b = ۱۲$!

استفاده از ترکیب خطی در مسائل پارامتری

فرض کنید که $\alpha \mid ۲n-۱$ و $\alpha \mid ۳n+۱$، برای پیداکردن α باید n را از بین ببریم. با استفاده از ترکیب خطی می‌نویسیم $\alpha \mid x(۳n+۱)+y(۲n-۱)$ و برای x و y اعدادی را انتخاب می‌کنیم که n حذف شود. این‌طوری: $\alpha \mid \underbrace{۲}_{x}(۳n+۱)\underbrace{-۳}_{y}(۲n-۱)$

پس $\alpha \mid ۵$ و در نتیجه α می‌تواند ±۱ یا ±۵ باشد. (می‌توانستیم این‌شکلی هم بگوییم که $۳n+۱$ را در ۲ و $۲n-۱$ را در ۳ ضرب می‌کنیم و بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.)

مثلاً اگر رابطه‌ای به شکل $n-۳ \mid ۲n+۱$ داشته باشیم، خودمان می‌نویسیم $n-۳ \mid n-۳$ و بعد با کمک ترکیب خطی، n را از طرف راست حذف می‌کنیم. ببینید:

$$n-۳ \mid x(n-۳)+y(۲n+۱) \xrightarrow[y=۱]{x=-۲} n-۳ \mid ۷ \Rightarrow n-۳=\pm۱,\pm۷ \Rightarrow n=۱۰ \text{ یا } -۴ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۴$$

تست دو عدد $n^۲+۱$ و $۲n^۲+۶n+۳$ به ازای برخی از مقادیر n بر k بخش‌پذیرند. مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۹   ۳) ۷   ۴) ۱

پاسخ ۱ دو عبارت داده‌شده بر k بخش‌پذیرند (k آن‌ها را عاد می‌کند.)؛ پس از ویژگی ترکیب خطی داریم:

$$\begin{cases} k \mid n^۲+۱ \\ k \mid ۲n^۲+۶n+۳ \end{cases} \Rightarrow k \mid ۲n^۲+۶n+۳-۲(n^۲+۱)=۶n+۱$$

(سمت راست پایینی را منهای دو برابر سمت راست بالایی می‌کنیم.)

دوباره:

$$\begin{cases} k \mid ۶n+۱ \xrightarrow{\times n} k \mid ۶n^۲+n \\ k \mid n^۲+۱ \xrightarrow{\times ۶} k \mid ۶n^۲+۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} k \mid n-۶$$

دوباره داریم:

$$\begin{cases} k \mid n-۶ \xrightarrow{\times ۶} k \mid ۶n-۳۶ \\ k \mid ۶n+۱ \end{cases}$$

با کم‌کردن سمت راست دو رابطه $k \mid -۳۶-۱=-۳۷$.

k مقسوم‌علیه ۳۷ است؛ پس بزرگ‌ترین مقدار k، برابر ۳۷ است که مجموع ارقام آن برابر ۱۰ است.

استفاده از ریشه در رابطهٔ $n-k \mid f(n)$

اگر در طرف چپ عبارت درجهٔ اول باشد، می‌توانیم ریشهٔ آن را محاسبه کنیم و در طرف راست قرار دهیم.

مثلاً در همین رابطهٔ $n-۳ \mid ۲n+۱$، ریشهٔ سمت چپ $n=۳$ است و با قراردادن آن در سمت راست داریم: $n-۳ \mid \underbrace{۲\times۳+۱}_{۷}$

و کار تمام می‌شود.

مثال n را از روابط زیر بیابید.

الف) $n-۱ \mid n^۲+۲n+۵$ ب) $n+۲ \mid n^۲-۳$

پاسخ الف) ریشهٔ سمت چپ $n=۱$ است و در سمت راست قرار می‌دهیم و داریم: $n-۱ \mid ۸$

پس $n-۱$ می‌تواند ±۱، ±۲، ±۴ و ±۸ باشد.

ب) ریشهٔ سمت چپ $n=-۲$ است و با قراردادن آن در طرف راست داریم: $n+۲ \mid ۱$

پس: $n+۲=\pm۱$

تست چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار $y=x+\dfrac{۳x-۱}{x-۲}$ وجود دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ ۴ باید x و y صحیح باشند، پس باید $x-۲ \mid ۳x-۱$ و داریم:

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سمت چپ ۲ است.}} x-۲ \mid ۳(۲)-۱=۵ \Rightarrow x-۲=\pm۱,\pm۵ \Rightarrow x=۳,۱,۷,-۳$$

پس ۴ نقطه با مختصات صحیح داریم.

به مختصات این نقطه‌ها دقت کنید:

$$(-۳,\underbrace{-۳+\frac{-۱۰}{-۵}}_{-۱}),(۳,\underbrace{۳+\frac{۸}{۱}}_{۱۱}),(۷,\underbrace{۷+\frac{۲۰}{۵}}_{۱۱}),(۱,\underbrace{۱+\frac{۲}{-۱}}_{-۱})$$

اگر ریشه غیرصحیح باشد

اگر ریشهٔ سمت چپ غیرصحیح باشد، باز هم می‌توانیم آن را در راست قرار دهیم. ببینید:

۱) ریشه را قرار می‌دهیم.

۲) کسر را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

۳) صورت کسر را می‌گیریم.

۴) جواب‌های به دست آمده را در رابطهٔ اولیه امتحان می‌کنیم.

مثلاً برای به دست آوردن nهای صحیح که $2n+1 \mid n^2-1$، داریم:

پس $n=-\frac{1}{2}$ را در راست قرار می‌دهیم: $2n+1 \mid (-\frac{1}{2})^2-1=-\frac{3}{4}$. کسر نیازی به ساده‌کردن ندارد، پس:

$$2n+1=0$$

$$2n+1 \mid 3 \begin{cases} 2n+1=\pm 1 \Rightarrow n=0, n=-1 \\ 2n+1=\pm 3 \Rightarrow n=1, n=-2 \end{cases}$$

صبر کنید کار تمام نشده است. جواب‌ها باید کنترل شوند:

$n=-1 \Rightarrow 2(-1)+1 \mid (-1)^2-1$ ✓ $\qquad n=0 \Rightarrow 2(0)+1 \mid 0^2-1$ ✓

$n=-2 \Rightarrow 2(-2)+1 \mid (-2)^2-1$ ✓ $\qquad n=1 \Rightarrow 2(1)+1 \mid 1^2-1$ ✓

پس هر ۴تا قبول هستند. (ولی همیشه این‌جوری نیست.)

یک تیپ ویژه • فرض کنید می‌دانیم $7 \mid 3k-2$ و می‌خواهیم این رابطه را به صورت $49 \mid \cdots$ درآوریم. دو راه به نظر می‌رسد:

الف) به توان ۲ برسانیم، $7^2 \mid (3k-2)^2$؛ یعنی $49 \mid 9k^2-12k+4$.

ب) در ۷ ضرب کنیم، $7\times 7 \mid 7(3k-2)$؛ پس $49 \mid 21k-14$.

و مثلاً از جمع این‌ها داریم: $49 \mid 9k^2+9k-10$

حالا چون $49 \mid 49$، می‌توان نوشت: $49 \mid 9k^2+9k+39$

به نتیجه نگاه کنید ... عبارت $9k^2+9k+39$ خیلی هم شبیه $3k-2$ نیست. چون کتاب درسی یک تمرین از این مدل دارد، بد نیست در ذهن بسپارید که با استفاده از روابط $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$، $a \mid b \Rightarrow ka \mid kb$ و $a \mid b \xrightarrow{a \mid d} a \mid b+d$ می‌توانیم از روی یک رابطهٔ عادکردن، روابط جدید و عجیبی بسازیم.

مثال از رابطهٔ $5 \mid 3k+1$ کدام نتایج درست هستند؟

الف) $25 \mid 9k^2+6k+51$ $\qquad$ ب) $25 \mid 9k^2+21k+6$ $\qquad$ پ) $5 \mid 12k^2+7k+1$

پاسخ اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم: $25 \mid 9k^2+6k+1$، راستی می‌شود فقط طرف راست را به توان ۲ برسانیم: $5 \mid 9k^2+6k+1$ و اگر

در ۵ ضرب کنیم: $25 \mid 15k+5$

و اگر طرف راست را k برابر کنیم: $5 \mid 3k^2+k$

حالا رابطهٔ ب) از جمع طرف‌های راست به صورت $25 \mid 9k^2+6k+1+15k+5$ به دست می‌آید.

برای رابطهٔ الف) هم داریم $25 \mid 50$ و بنابراین $25 \mid 9k^2+6k+1+50$.

در مورد رابطهٔ پ) هم می‌توان گفت: $5 \mid 9k^2+6k+1+3k^2+k$

پس هر سه رابطه درست هستند.

تست اگر $7 \mid 5k+1$، آن‌گاه عدد $60k^2+42k+6$ همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۴۲ $\qquad$ ۲) ۲۸ $\qquad$ ۳) ۲۱ $\qquad$ ۴) ۷۰

پاسخ **راه I** از $5k+1$ باید به این عدد برسیم:

$(5k+1)^2=25k^2+10k+1$ (سمت‌راست به توان ۲)

$k(5k+1)=5k^2+k$ (سمت‌راست را می‌شود در k ضرب‌کرد.)

$2(5k+1)=10k+2$

مجموع این عددها | ۷

حالا از جمع این‌ها داریم: $7 \mid 30k^2+21k+3$ و دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم: $7 \mid 30k^2+21k+3 \xrightarrow{\times 2} 14 \mid 60k^2+42k+6$

حالا دقت کنید که طرف راست، مضرب ۳ هم هست، پس این عدد بر 3×14 یعنی ۴۲ بخش‌پذیر است.

راه II اگر $60k^2+42k+6$ را تجزیه کنیم، داریم: $6\,\overbrace{(5k+1)}^{\text{مضرب ۷}}(2k+1)=$ مضرب ۴۲

تذکر موافقید که در این تست عددگذاری راه خوبی نیست؟

بخش‌پذیری در حضور اعداد اول

حتماً یادتان هست که عدد اول، عددی طبیعی و بیشتر از یک است که فقط بر خودش و ۱ بخش‌پذیر است؛

مثلاً ۲، ۳، ۵، ۷ و ... اعداد اول هستند. اگر P اول باشد چند نتیجهٔ مهم در عادکردن می‌توانیم بگیریم.

الف) از رابطهٔ $a \mid P$ نتیجه می‌شود $a=\pm P$ یا $a=\pm 1$ (مثلاً از $a \mid 7$ نتیجه می‌شود ± 7 یا $a=\pm 1$)

ب) از رابطهٔ $P \mid a^n$ مطمئن هستیم $P \mid a$. (مثلاً از $3 \mid a^4$ نتیجه می‌گیریم $3 \mid a$.)

پ) از رابطهٔ $P \mid ab$ می‌توان نتیجه گرفت $P \mid a$ یا $P \mid b$. (اگر $7 \mid ab$، حتماً $7 \mid a$ یا $7 \mid b$.)

مثال P عددی اول و فرد است. چند عدد صحیح x در رابطهٔ $x \mid 4p$ صدق می‌کنند؟

پاسخ چون p عدد اول است کارمان خیلی ساده است، اگر در ذهنتان سعی کنید $4p$ را به صورت ضرب دوتا عدد بنویسید، متوجه می‌شوید که $4p$ بر ۱، ۲، ۴، p، $2p$، $4p$ و قرینهٔ آن‌ها بخش‌پذیر است، پس برای عدد صحیح x، ۱۲ جواب داریم.

تست دو رابطهٔ $a \mid 7n-1$ و $a \mid kn+3$ برقرار هستند. به ازای کدام k فقط دو مقدار مثبت برای a به دست می‌آید؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ کاری می‌کنیم تا n از بین برود:

$$\begin{array}{l} a \mid 7n-1 \xrightarrow{\times k} a \mid 7kn-k \\ a \mid kn+3 \xrightarrow{\times 7} a \mid 7kn+21 \end{array} \xrightarrow[\text{دو رابطه را کم}]{\text{سمت راست}} a \mid 21-(-k) \Rightarrow a \mid 21+k$$

به زبان قانون ترکیب خطی می‌توانستیم یک‌دفعه هم بنویسیم:

$$a \mid 7(kn+3)-k(7n-1)=21+k$$

فقط در صورتی‌که $21+k$ عددی اول باشد، برای a فقط دو مقدار مثبت به دست می‌آید. در بین گزینه‌ها فقط به ازای $k=10$ عدد $21+k=31$ (که اول است) به دست می‌آید.

تذکر دربارهٔ اعداد اوّل و ویژگی‌های آن به صورت کامل و مفصل در درس ۵ صحبت می‌کنیم.

تغییر توان‌ها در رابطهٔ $a^m \mid b^n$

اگر از رابطهٔ $a^m \mid b^n$ بخواهیم نتیجه بگیریم $a^r \mid b^s$، باید $\frac{n}{m} \le \frac{s}{r}$ باشد. مثلاً نتیجه‌گیری $a^4 \mid b^3 \Rightarrow a^3 \mid b^2$ نادرست است، چون $\frac{2}{3}$ از $\frac{3}{4}$ بیشتر نیست اما می‌توانیم از $a^2 \mid b$ نتیجه بگیریم $a^4 \mid b^3$، چون $\frac{3}{4}$ از $\frac{1}{2}$ بیشتر است. این‌جوری حفظ کنید:

$$a^m \mid b^n \Rightarrow a^r \mid b^s \Rightarrow sm \ge nr$$

یعنی ضرب توان‌های بیرونی از ضرب توان‌های درونی کم‌تر نشود. مثلاً رابطهٔ زیر درست است چون 4×4 بیشتر از 3×5 است:

$$a^4 \mid b^5 \Rightarrow a^3 \mid b^4$$

(بیرونی، درونی)

البته اثباتش در حالت عددی خیلی هم سخت نیست مثلاً برای همین مثالی که زدیم داریم:

$$a^4 \mid b^5 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} (a^4)^3 \mid (b^5)^3 \Rightarrow a^{12} \mid b^{15} \xrightarrow[\text{در یک b ضرب کرد.}]{\text{می‌شود سمت راست را}} a^{12} \mid b^{16}$$

$$\xrightarrow{\text{به بیان دیگر}} (a^3)^4 \mid (b^4)^4 \xrightarrow{\text{عکس توان}} a^3 \mid b^4$$

تست از رابطهٔ $a^4 \mid b^7$ می‌توان نتیجه گرفت $a^m \mid b^{20}$، m حداکثر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ شرط این بود که $7\times m$ کوچکتر یا مساوی 4×20 باشد، پس داریم:

$$7m \le 80 \Rightarrow m \le \frac{80}{7} \Rightarrow m \le 11$$

اتحادها و بخش‌پذیری

با کمک اتحادهای $a^n \pm b^n$ می‌توانیم نشان دهیم که:

الف) $a^n - b^n$ همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $x^{13}-2^{13}$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است یا $7^{10}-3^{10}$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

در حالت کلی‌تر هم $a^n - b^n$ وقتی n مضرب P باشد، بر $a^P - b^P$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $a^{18}-b^{18}$ بر a^2-b^2 و a^3-b^3 بخش‌پذیر است، اما به a^4-b^4 بخش‌پذیر نیست.

مثال عدد $2^{30}-1$ بر چه اعدادی به شکل 2^n-1 بخش‌پذیر است؟

پاسخ n باید مقسوم‌علیه ۳۰ باشد، پس 2^1-1، 2^2-1، 2^3-1، 2^5-1، 2^6-1، $2^{10}-1$، $2^{15}-1$ و $2^{30}-1$ قبول‌اند؛ یعنی $2^{30}-1$ بر ۳، ۷، ۳۱، ۶۳، ۱۰۲۳ و ... بخش‌پذیر است.

پ) $a^n - b^n$ وقتی n زوج باشد بر $a+b$ بخش‌پذیر است. در حالت کلی‌تر فقط در صورتی که $\frac{n}{P}$ زوج باشد، $a^n - b^n$ بر $a^P + b^P$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $x^{۱۴} - ۲^{۱۴}$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، اما بر $x^۲ + ۲^۲$ بخش‌پذیر نیست. ($\frac{۱۴}{۲}$ زوج نیست)

مثال عدد $۳^n - ۲^n$ در چه صورت به ۱۳ می‌خورد؟

پاسخ ۱۳ همان $۳^۲ + ۲^۲$ است، پس باید $\frac{n}{۲}$ زوج باشد یعنی n مضرب ۴ باشد.

تست ترکیبی ببینید:

تست اگر $۲^n - ۱$ هم بر ۹ و هم بر ۳۱ بخش‌پذیر باشد، چند جواب دورقمی برای n داریم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ ۳ باید $۲^n - ۱ \mid ۲^۳ + ۱$ و نیز $۲^n - ۱ \mid ۲^۵ - ۱$

پس n مضرب زوج ۳ است ($\frac{n}{۳}$ زوج است یعنی n به ۶ می‌خورد) و n مضرب ۵ است، یعنی n مضرب ۵ و ۶ است و در اعداد دورقمی، ۳۰، ۶۰ و ۹۰ مناسب‌اند. (۳تا)

پ) $a^n + b^n$ وقتی n فرد باشد بر $a+b$ بخش‌پذیر است و در حالت کلی‌تر فقط در صورتی که $\frac{n}{P}$ فرد باشد، $a^n + b^n$ بر $a^P + b^P$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $۳^{۲۰} + ۲^{۲۰}$ بر $۳ + ۲$ بخش‌پذیر نیست اما بر $۳^۴ + ۲^۴$ بخش‌پذیر است. (چون $\frac{۲۰}{۴}$ فرد است.)

مثال از روابط $x^P + y^P \mid x^{۵۰} + y^{۵۰}$ و $x^P + y^P \mid x^{۶۰} - x^{۶۰}$ مقادیر P کدام است؟

پاسخ باید $\frac{۵۰}{P}$ فرد باشد و $\frac{۶۰}{P}$ زوج؛ پس داریم:

$\frac{۵۰}{P}$ فرد است. $\Rightarrow P = ۲,۱۰,۵۰$

$\frac{۶۰}{P}$ زوج است. $\Rightarrow P = ۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۳۰$

بنابراین فقط $P = ۱۰$ و $P = ۲$ مناسب است.

تست اگر $۳^n - ۱ \mid ۲۸$ و $۵^n + ۱ \mid ۲۶$، کدام برای n قابل قبول‌اند؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۲

پاسخ ۱ از $۳^n - ۱ \mid ۳^۳ + ۱$ نتیجه می‌گیریم n مضرب زوج ۳ است و از $۵^n + ۱ \mid ۲۶$ باید n مضرب فرد ۲ باشد، پس n حتماً به صورت $۶k$ و مقدار k فرد است. در بین گزینه‌ها فقط ۳۰ به این ویژگی ها می‌خورد.

درس دوم: عادکردن

ویژگی‌های عادکردن ۱

۵۹- اگر a و b اعداد صحیح باشند، کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟ (کتاب درسی)

۱) $\pm 1 \mid a$ ۲) $ab \mid 0$

۳) اگر $ab \mid 0$، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$ ۴) اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، آن‌گاه $a = b$

۶۰- رابطهٔ $a^2 - 3a + 2 \mid 0$، به ازای چند مقدار صحیح a برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۶۱- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $n \mid 18$ و $2 \nmid n$؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۲- چند عدد طبیعی $a < 50$ وجود دارد که $5 \mid a$ و $3 \nmid a$؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۳- اگر به ازای هر عدد صحیح n، رابطهٔ $m^2 - 3m + 1 \mid n$ برقرار باشد، آن‌گاه m چند حالت مختلف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

۶۴- اگر $ab = cd$، کدام نتیجه می‌تواند نادرست باشد؟ (کتاب درسی)

۱) $a \mid cd$ ۲) $d \mid cb$ ۳) $c \mid ab$ ۴) $b \mid cd^2$

۶۵- کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ (کتاب درسی)

۱) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ یا $a \mid c$ ۲) $b \mid a$ و $c \mid a \Rightarrow b + c \mid a$

۳) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ یا $a \mid c$ ۴) $c \mid a$ و $b \mid a \Rightarrow bc \mid a$

۶۶- اگر $a^2 \mid b^2 + c^2$ و $a^2 > b^2 + c^2$، کدام رابطه الزاماً برقرار است؟

۱) $|a| = |b| = |c| = 1$ ۲) $|b| = |c| = 1$ ۳) $a = b = c = 0$ ۴) $b = c = 0$

۶۷- اگر $n+1 \mid n^۲+۳$ و $n+1 \mid n^۲+۳$، n چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۸- اگر $a \mid c$ و $ab \mid c$، کدام گزینه درست است؟

۱) $b \mid c$ ۲) $a+b \mid c$ ۳) $a-b \mid c$ ۴) $a^۲ \mid c$

۶۹- از رابطهٔ $۲x \mid ۳y$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $x \mid ۶y$ ۲) $۴x \mid ۶y^۲$ ۳) $۲x \mid ۱۸y^۳$ ۴) $۸x \mid ۲۷y^۳$

۷۰- a یک عدد طبیعی و P عدد اول فرد است. اگر داشته باشیم: $a \mid ۶P$ و $۵a \mid ۳$، چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۱- به ازای چند عدد طبیعی یک‌رقمی n، رابطهٔ $۶^{n+1} \mid ۹^{n-1}$ درست است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۲- چند عدد طبیعی n وجود دارد، به طوری که حاصل هر دو کسر $\frac{۱۶۰}{۲^{n-1}}$ و $\frac{۶^{۲n+1}}{۱۶۲}$ عددی طبیعی باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۷۳- اگر p یک عدد اول باشد، آن‌گاه $۲p^۲$ بر چند عدد صحیح قابل قسمت است؟ $(p > ۲)$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۴- اگر $a^۲ \mid ۷۲$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری می‌تواند نادرست باشد؟

۱) $۱۸ \mid a^۲$ ۲) $۱۲ \mid a$ ۳) $۹ \mid a$ ۴) $۱۶ \mid a^۲$

۷۵- چند عدد طبیعی $a < ۳۰$ وجود دارد به طوری که $۲۴ \mid a^۲$؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۶- چند عدد زوج سه‌رقمی و مضرب ۲۹ وجود دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۷۷- عدد ۱۰۸۰ بر چند عدد مثبت مضرب ۱۲ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۷۸- کوچک‌ترین n طبیعی به طوری که $۸۱ \mid n^۳$ و $۱۶۰ \mid n^۲$، کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۲۴۰

۷۹- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ $(\sqrt{۱۰} \cong ۳/۱۶)$ (۱۴۰۰ خارج)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۸۰- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۰} \cong ۲/۱)$ (۱۴۰۰ داخل)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۱- کدام گزینه درست است؟ (کتاب درسی)

۱) $(a+b) \mid (a+b)^۲ - ۲ab$ ۲) $(a+b) \mid (a+b)^۳ - ۳a^۲b - ۳ab^۲$

۳) $(a+b) \mid (a-b)^۳ + ۳a^۲b - ۳b^۲a$ ۴) $(a+b) \mid (a-b)^۲ + ۲ab$

۸۲- به ازای چند عدد طبیعی $n < ۱۰$، رابطهٔ $n^۲ \mid n!$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ویژگی‌های عادکردن ۲ (ترکیب خطی و ...)

۸۳- اگر $a \mid a-b$، آن‌گاه:

۱) $a \mid a-b$ ۲) $b \mid a-b$ ۳) $a \mid b$ ۴) $a-b \mid b$

۸۴- اگر $a \mid a^۲-b^۲$، کدام نتیجه ممکن است درست نباشد؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a \mid a^۲+b^۲$ ۳) $a \mid a^۳-b^۳$ ۴) $a \mid a^۳+b^۳$

۸۵- اگر $a-b \mid a+b$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد؟

۱) $a-b \mid ۲a$ ۲) $a-b \mid ۴a+b$ ۳) $a-b \mid ۳a+b$ ۴) $a-b \mid ۲b$

۸۶- به ازای چند مقدار طبیعی n، کسر $\frac{۱۱}{۲n+۳}$ عضو مجموعهٔ اعداد صحیح است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۷- مجموع مقادیر عدد صحیح n به طوری که $n+1 \mid 3n+5$ ، کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۸۸- به ازای چند مقدار صحیح x هر دو رابطهٔ $x \mid 3a+4$ و $x \mid 4a+3$ ، برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۹- اگر $a>1$ ، $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ، کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (کتاب درسی)

۱) a عدد اول است. ۲) a مربع کامل است. ۳) $a \mid 24$ ۴) $a \mid 45$

۹۰- اگر $a>1$ ، $a \mid 9k+b$ و $a \mid 5k+b+1$ ، به ازای چند مقدار یک‌رقمی طبیعی b، عدد a اول است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۷

۹۱- برای چند عدد طبیعی n رابطهٔ $2n+1 \mid 2n^2-3n+3$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۲- منحنی $2xy-3x+y+2=0$ از چند نقطه با مختصات طبیعی عبور می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۳- چند نقطه با مختصات صحیح روی تابع هموگرافیک $y=\frac{x+3}{2x-1}$ قرار دارد؟ (کنکور تجدیدنظر ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴- به ازای کدام مقدار n هر سه رابطهٔ $8^{n+1} \mid 4^{2n-1}$ ، $n \mid 5k+19$ و $n \mid k+5$ برقرار است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) نشدنی

۹۵- چند زوج مرتب به صورت (a,b) در اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که $a \mid b+1$ و کسر $\frac{a+1}{b}$ طبیعی باشد؟

۱) بی‌شمار ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۶- به ازای چند مقدار طبیعی n داریم $n+3 \mid (n+1)^2$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۷- اگر $7 \mid 2a+3b$ ، آن‌گاه لزوماً کدام درست است؟

۱) $7 \mid 3a+b$ ۲) $7 \mid 3a+5b$ ۳) $7 \mid 6a+4b$ ۴) $7 \mid 3a+4b$

۹۸- اگر $5 \mid 4k+1$ ، کدام عبارت مضرب ۲۵ است؟ (کتاب درسی)

۱) $16k^2+28k+8$ ۲) $16k^2+28k+4$ ۳) $16k^2+28k+5$ ۴) $16k^2+28k+6$

۹۹- عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ وجود دارد که $6 \mid 5k+1$. اگر $36 \mid 25k^2+40k+m$ ، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۲ ۳) ۴۳ ۴) ۴۴

۱۰۰- اگر عدد طبیعی به صورت $2n+1$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ عدد طبیعی به صورت $14n^2+19n+6$ ، بر ۲۵ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۱- اگر $9x+5y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای این‌که لزوماً $10x+ky$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰۲- به ازای چند عدد صحیح k، عبارت k^3+2k+1 بر k^2+k+1 بخش‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۳- اگر $a^5 \mid b^3$ ، کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a^3 \mid b^2$ ۲) $a \mid b$ ۳) $a^2 \mid b$ ۴) $a^8 \mid b^5$

۱۰۴- اگر $a^9 \mid b^5$ ، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a^5 \mid b^3$ ۲) $a^5 \mid b^2$ ۳) $a^2 \mid b$ ۴) $a^7 \mid b^4$

اتحادها و بخش‌پذیری

۱۰۵- عدد $5^{24}-4^{36}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲

۱۰۶- کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) $a^{13}+1 \mid a^{52}-1$ ۲) $a^4+1 \mid a^{12}+1$ ۳) $a^3+1 \mid a^{15}+1$ ۴) $a^{13}+1 \mid a^{52}+1$

۱۰۷- برای هر عدد صحیح a، $a^{18}-1$ بر کدام‌یک بخش‌پذیر نیست؟

۱) a^6+1 ۲) a^3+1 ۳) a^6-1 ۴) a^3-1

۱۰۸- تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2^{42} - 3^{42}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱۰- کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) $29 \mid 2^{90} + 5^{90}$ ۲) $130 \mid 7^{20} - 3^{40}$ ۳) $33 \mid 2^{80} + 1$ ۴) $1023 \mid 2^{80} - 1$

۵۹. گزینه ۴ — (۱) درست است. هر عدد صحیح a بر ± ۱ بخش‌پذیر است.

(۲) هم درست است. صفر بر هر عدد صحیح ab بخش‌پذیر است.

(۳) این گزینهٔ می‌گوید اگر ab بر صفر بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$. این هم درست است. دقت کنید که اگر عددی بر صفر بخش‌پذیر باشد، آن عدد حتماً صفر است: $۰ \mid ab \Rightarrow ab=۰ \Rightarrow a=۰$ یا $b=۰$

(۴) نادرست است. اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، یعنی a و b بر هم بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه $|a|=|b|$ است. یعنی $a=\pm b$؛ پس نتیجه‌گیری $a=b$ (به تنهایی) درست نیست.

۶۰. گزینه ۳ — $a^۲-۳a+۲$ باید صفر باشد تا بر صفر بخش‌پذیر بشود (سایر اعداد بر صفر تقسیم نمی‌شوند).

پس: $a^۲-۳a+۲=۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۲)=۰ \Rightarrow a=۱$ یا ۲

پس به ازای ۲ عدد صحیح a برقرار است.

۶۱. گزینه ۳ — $n \mid ۱۸$ یعنی n مقسوم‌علیه ۱۸ است و $۲ \nmid n$ یعنی n فرد است پس دنبال مقسوم‌علیه‌های فرد ۱۸ هستیم.

راه I: با کمی جستجو ۱۸ بر اعداد فرد ۱، ۳ و ۹ بخش‌پذیر است پس ۳تا مقدار طبیعی برای n داریم.

راه II: در تجزیهٔ ۱۸، $۲^۱ \times ۳^۲$ داریم که چون مقسوم‌علیه فرد می‌خواهیم باید حتماً $۲^۱$ را انتخاب نکنیم. بنابراین تجزیهٔ مقسوم‌علیه فرد طبیعی به صورت $۳^{۰\ \text{یا}\ ۱\ \text{یا}\ ۲}$ است و ۳ حالت دارد.

۶۲. گزینه ۳ — در اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰ دنبال مضارب ۵ هستیم که مضرب ۳ نباشند.

تعداد مضارب ۵ از ۱ تا ۴۹ برابر است با: $\left[\frac{۴۹}{۵}\right]=۹$

در بین آن‌ها، ۳ عدد مضرب ۵ و ۳ یعنی مضرب ۱۵ هستند: $\left[\frac{۴۹}{۱۵}\right]=۳$

این اعداد (یعنی ۱۵، ۳۰ و ۴۵) را نمی‌خواهیم.

پس جواب می‌شود: $۹-۳=۶$

۶۳. گزینه ۴ — طبق صورت سؤال، هر عدد صحیح n بر $m^۲-۳m+۱$ بخش‌پذیر شده است و این فقط وقتی امکان دارد که $m^۲-۳m+۱=\pm۱$ باشد:

$$\begin{cases} m^۲-۳m+۱=۱ \Rightarrow m^۲-۳m=۰ \Rightarrow m=۰\ \text{یا}\ ۳ \\ m^۲-۳m+۱=-۱ \Rightarrow m^۲-۳m+۲=۰ \Rightarrow m=۱\ \text{یا}\ ۲ \end{cases}$$

پس m دارای مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ است؛ یعنی بیش از ۳ حالت دارد.

۶۴. گزینه ۲ — از رابطهٔ $ab=cd$ نتیجه می‌شود cd مضرب a و b است؛ پس $a \mid cd$ و $b \mid cd$. همچنین ab مضرب c و d است؛ پس $c \mid ab$ و $d \mid ab$ و بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست‌اند.

دلیل درستی (۴) را ببینید: گفتیم cd مضرب b است؛ پس $b \mid cd$. حالا طرف راست را در d ضرب کنیم (اجازه داریم طرف راست را در عدد دلخواه ضرب کنیم)؛ پس $b \mid cd^۲$.

اما (۲) درست نیست. یعنی در مورد این‌که cb مضرب d هست، اطلاعی نداریم.

۶۵. گزینه ۴ — در (۱) ادعا شده اگر جمع دو عدد بر a بخش‌پذیر باشد؛ حداقل یکی بر a بخش‌پذیر است. خب این‌که درست نیست، مثلاً $۵+۳$ به ۴ می‌خورد اما ۳ یا ۵ به ۴ نمی‌خورند. در (۲) ادعا شده اگر عددی به جمع دو عدد بخش‌پذیر باشد، بر تک‌تک آن‌ها بخش‌پذیر است؛ مثلاً ۵ بر $۳+۲$ بخش‌پذیر است اما به ۲ یا ۳ نمی‌خورد. در (۳) گفته شده اگر ضرب دو عدد به a بخورد، حداقل یکی به a بخش‌پذیر است. البته این دربارهٔ اعداد اول درست است اما در مورد اعداد مرکب درست نیست. مثال نقض می‌زنیم: ۴×۳ بر ۶ بخش‌پذیر است اما ۳ یا ۴ به ۶ نمی‌خورند.

(۴) درست است. ببینید:

$$bc \mid a \Rightarrow a=bcq=b(cq)=bq' \Rightarrow b \mid a$$

$$bc \mid a \Rightarrow a=bcq=c(bq)=cq'' \Rightarrow c \mid a$$

یعنی اگر عددی به حاصل‌ضرب b و c بخورد، به تک‌تک آن‌ها هم می‌خورد.

۶۶. گزینه ۴ — طبق ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن، اگر $x \mid y$، آن‌گاه حتماً $y=۰$ یا $|x| \le |y|$ است. الان صورت سؤال گفته $a^۲ \mid b^۲+c^۲$ و $a^۲ > b^۲+c^۲$؛ یعنی قدر مطلق سمت راستی، از سمت چپی کم‌تر است، پس حتماً سمت راستی صفر بوده:

$$\underbrace{|a^۲|<|b^۲+c^۲|}_{\text{سؤال گفته این نیست.}} \Rightarrow b^۲+c^۲=۰ \Rightarrow b=c=۰$$

یا $a^۲ \mid b^۲+c^۲ \Rightarrow b^۲+c^۲=۰$

> **تذکر:** چرا (۳) را انتخاب نکنیم؟ مگر $۰ \mid ۰$ درست نیست؟ (این را شما می‌پرسید) خب چون رابطهٔ $a^۲>b^۲+c^۲$ به ازای $a=b=c=۰$ برقرار نمی‌شود.

۶۷. گزینه ۱ — اگر دو عدد a و b هر دو بر هم بخش‌پذیر باشند، حتماً قدرمطلق آن‌ها برابر است: $a \mid b, b \mid a \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$

پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} n^۲+۳ \mid n+۱ \\ n+۱ \mid n^۲+۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^۲+۳=\pm(n+۱)$$

$$\begin{cases} n^۲+۳=n+۱ \Rightarrow n^۲-n+۲=۰ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ n^۲+۳=-(n+۱)=-n-۱ \Rightarrow n^۲+n+۴=۰ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

۶۸. گزینه ۱ — از رابطهٔ $ab \mid c$ داریم: $c=abq$

بنابراین $c=b(aq)=bq'$ و در نتیجه $b \mid c$. برای سایر گزینه‌ها مثال نقض داریم: $۳^۲ \nmid ۱۵$، $۳-۵ \nmid ۱۵$، $۳+۵ \nmid ۱۵$ اما $۳\times۵ \mid ۱۵$

۶۹. گزینه ۴ — از رابطهٔ $۲x \mid ۳y$ اجازه داریم طرف راست را در هر ضریب ضرب کرده یا به هر توانی برسانیم. پس:

(۳) $۲x \mid ۳y \xrightarrow[\text{ضرب می‌شود}]{\text{طرف راست در } ۶y^۲} ۲x \mid ۱۸y^۳$

همچنین اجازه داریم دو طرف را در هر ضریب ضرب کنیم. پس:

(۲) $۲x \mid ۳y \xrightarrow[\times ۲]{\text{دو طرف}} ۴x \mid ۶y \xrightarrow[\text{ضرب در } y]{\text{طرف راست}} ۴x \mid ۶y^۲$

راستی می‌توانیم طرف چپ را کوچک‌تر کنیم. یعنی به جای طرف چپ، مقسوم‌علیه آن را قرار دهیم. پس:

(۱) $۲x \mid ۳y \xrightarrow[\text{می‌توانیم } x \text{ بگذاریم}]{\text{به جای } ۲x} x \mid ۳y \xrightarrow[\text{ضرب در } ۲]{\text{طرف راست}} x \mid ۶y$

اما هیچ‌وقت نمی‌توانیم به (۴) برسیم. چون طرف چپ از $2x$ به $8x$ رسیده و ۴ برابر شده اما طرف راست ۴ برابر نشده است.

۷۰. گزینهٔ ۴ از رابطهٔ $3|5a$، یعنی این‌که $5a$ بر ۳ بخش‌پذیر است، چون ۵ بر ۳ بخش‌پذیر نیست نتیجه می‌گیریم a مضرب ۳ است. پس $3|a$ یا $a=3k$.
حالا در رابطهٔ $a|6p$ داریم $3k|6p$ و با تقسیم دو طرف بر ۳ نتیجه می‌شود $k|2p$ و بنابراین k می‌تواند ۱ یا ۲ یا P یا $2p$ باشد و ۴ جواب دارد.
پس برای $a=3k$ هم ۴ جواب داریم.

تذکر دقت کنید که p عدد اول فرد است. (اگر $p=2$ بود از رابطهٔ $k|2p$ فقط ۳ جواب داشتیم.)

۷۱. گزینهٔ ۱ اگر $a>1$ باشد و $a^m|a^n$، می‌توانیم نتیجه بگیریم $m\le n$. پس:

$$9^{n-1}|6^{n+1} \Rightarrow 3^{2n-2}|3^{n+1}\times 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2n-2\le n+1 \Rightarrow n\le 3 \Rightarrow n=1,2,3$$

دقت دارید مهم این است که توان ۳ در سمت راست بیشتر باشد و عامل‌های ۲ مشکلی ایجاد نمی‌کنند.
پس به ازای سه عدد طبیعی یک‌رقمی رابطهٔ گفته‌شده برقرار است.

۷۲. گزینهٔ ۳ حاصل یک کسر وقتی عددی صحیح می‌شود که صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد یا مخرج صورت را عاد کند؛ یعنی $\frac{a}{b}\in\mathbb{Z} \Rightarrow b|a$.
اگر $a\ne 0,1,-1$، داریم: $a^m|a^n \Leftrightarrow m\le n$ (توان سمت راست باید بزرگ‌تر یا مساوی توان سمت چپ باشد). $162|6^{2n+1}\ ,\ 2^{n-1}|160$

اعداد را تجزیه می‌کنیم: $162=3^4\times 2\ ,\ 160=2^5\times 5$

$2^{n-1}|2^5\times 5$، پس $n-1\le 5$ و $n\le 6$ (I).

$3^4\times 2|3^{2n+1}\times 2^{2n+1}$. به ازای هر عدد طبیعی n، توان عدد ۲ در سمت راست بزرگ‌تر یا مساوی از توان ۲ در سمت چپ است $(1\le 2n+1)$. اما باید $4\le 2n+1$ نیز برقرار باشد؛ پس $\frac{3}{2}\le n$.
چون n طبیعی است، باید $2\le n$ (II)
با اشتراک بین دو جواب (I) و (II)، $n=2,3,4,5,6$ (یعنی ۵ مقدار) می‌تواند داشته باشد.

۷۳. گزینهٔ ۴ $2p^2$ بر ۱، ۲، p، p^2، $2p$ و $2p^2$ بخش‌پذیر است. پس ۶تا مقسوم‌علیه مثبت و ۱۲ تا مقسوم‌علیه صحیح دارد.

۷۴. گزینهٔ ۳ باید a^2 بر $2^3\times 3^2$ بخش‌پذیر باشد پس در تجزیهٔ a حتماً عامل‌های 3^1 و 2^2 را داریم.
یعنی a بر ۱۲ بخش‌پذیر است ((۲) درسته)
بنابراین a^2 به 12^2 بخش‌پذیر است: $144|a^2$
و چون ۱۸ و ۱۶ مقسوم‌علیه ۱۴۴ هستند (۱) و (۴) هم درستاند.
اما (۳) می‌تواند نادرست باشد.

۷۵. گزینهٔ ۲ از رابطهٔ $24|a^2$ داریم: $2^3\times 3|a^2$
پس باید در تجزیهٔ a حداقل 3^1 و 2^2 داشته باشیم؛ یعنی a مضرب ۱۲ است. در بین اعداد ۱ تا ۲۹ فقط دوتا عدد مضرب ۱۲ داریم: ۲۴،۱۲
پس دوتا جواب برای a داریم.

۷۶. گزینهٔ ۱ عدد زوج مضرب ۲۹ حتماً به صورت $2k(29)$ یعنی $58k$ است.
حالا باید سه‌رقمی باشد، پس داریم: $100\le 58k<1000$
با تقسیم دو طرف بر a خواهیم داشت: $\xrightarrow{\div 58} \frac{100}{58}\le k<\frac{1000}{58}$
$\frac{1000}{58}$ تقریباً می‌شود ۱۷/۲.

پس داریم: $1/72\le k<17/2$
مقادیر صحیح k از ۲ تا ۱۷ هستند که تعدادشان ۱۶تا است.

۷۷. گزینهٔ ۲ کافی است تعداد اعداد مثبت k را طوری به دست آوریم که $k|1080$ و $12|k$. از رابطهٔ دوم $k=12q$، پس:

$$12q|1080 \xrightarrow{\div 12} q|90$$

پس q باید مقسوم‌علیه ۹۰ باشد:

$$q=1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90$$

به ازای هر q دقیقاً یک k به دست می‌آید؛ پس ۱۲ مقدار برای k به دست می‌آید.

۷۸. گزینهٔ ۱ در n^3 باید $81=3^4$ باشد پس در تجزیهٔ n باید حداقل 3^2 داشته باشیم (3^1 کافی نیست).
در n^2 باید $160=2^5\times 5^1$ باشد پس در تجزیهٔ n باید $5^1\times 2^3$ داشته باشیم
پس n حتماً بر $3^2\times 5^1\times 2^3$ بخش‌پذیر است:

$$9\times 5\times 8|n \Rightarrow 360|n \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n_{min}=360$$

یعنی کم‌ترین مقدار طبیعی n برابر ۳۶۰ است.

۷۹. گزینهٔ ۲ عدد x^2 را می‌نامیم. داریم: $18|x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2\times 3^2}\in\mathbb{Z}$
اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد، x حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین: $x=6q \Rightarrow x^2=36q^2$
از طرفی عدد پنج‌رقمی است، بنابراین:

$$10000\le 36q^2<100000$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 100\le 6q<100\sqrt{10}$$

$$100\le 6q<316 \Rightarrow 16/6<q<52/6$$

بنابراین $q\in\{17,18,\dots,52\}$ و در نتیجه به ازای $52-17+1=36$ عدد رابطه برقرار است.

۸۰. گزینهٔ ۳ فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت x^3 است.
اگر x^3 بر ۹ بخش‌پذیر باشد، x باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:

$$x=3q \Rightarrow x^3=27q^3$$

حالا مقادیر سه و چهار رقمی x^3 را پیدا می‌کنیم:

$$100\le x^3<10000 \Rightarrow 100\le 27q^3<10000$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} \sqrt[3]{100}\le 3q<\sqrt[3]{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}}\le 3q\le 10\sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2/1}\le 3q\le 10\times 2/1$$

$$\Rightarrow 4/76\le 3q\le 21 \Rightarrow 1/5\le q\le 7$$

$$\Rightarrow q=2,3,4,5,6,7$$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.

۸۱. گزینهٔ ۲ گزینه‌های (۱) و (۴) به صورت $a+b|a^2+b^2$ ساده می‌شوند که درست نیست ($\frac{2}{1}$ فرد نیست). ساده‌شدهٔ (۲)، $a+b|a^3+b^3$ است که درست است ($\frac{3}{1}$ فرد است). اما در (۳) به $a+b|a^3-b^3$ می‌رسیم که نادرست است. ($\frac{3}{1}$ زوج نیست.)

۸۲. گزینهٔ ۱ اگر دو طرف را بر n تقسیم کنیم، داریم:

$$n^2|n! \xrightarrow{\div n} n|(n-1)!$$

یعنی باید $(n-1)!$ به n بخورد.

برای $n=1$، $n=6$، $n=8$ و $n=9$ این رابطه برقرار است اما برای nهای اول و ۴، برقرار نمی‌شود؛ پس برای ۴ عدد طبیعی n، رابطهٔ مذکور برقرار است.

۸۳. گزینه ۴ خودمان یک رابطهٔ بدیهی می‌نویسیم:

$$a-b \mid a-b$$

طبق صورت سؤال:

$$a-b \mid a$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{سمت‌راست‌ها را کم کنیم}} a-b \mid a-(a-b) \Rightarrow a-b \mid b$$

بنابراین نتیجه گرفتیم:

$$a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid b$$

۸۴. گزینه ۱ اگر خودمان رابطهٔ بدیهی $a \mid a^2$ را بنویسیم، داریم:

$$\begin{cases} a \mid a^2-b^2 \\ a \mid a^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرف‌راست را از هم کم کنیم}} a \mid b^2$$

پس در مورد $a \mid b$ اطلاعی نداریم و ۱ لزوماً صحیح نیست.

اما با $a \mid b^2$ و $a \mid a^2$ داریم: $a \mid a^2+b^2$؛ یعنی ۲ درست است.

همچنین از $a \mid b^2$، طرف راست را بزرگ می‌کنیم و داریم $a \mid b^3$. حالا با $a \mid b^3$ و $a \mid a^3$ می‌توان گفت $a \mid a^3 \pm b^3$ و گزینه‌های ۳ و ۴ هم درستند.

۸۵. گزینه ۲ از رابطهٔ $a-b \mid a+b$ با کمک رابطهٔ بدیهی $a-b \mid a-b$، داریم:

۱) $a-b \mid a+b \xrightarrow{\text{جمع}} a-b \mid 2a$

۴) $a-b \mid a-b \xrightarrow{\text{تفریق}} a-b \mid 2b$

حالا اگر طرف راست ۱ را با فرض سؤال جمع کنیم: $a-b \mid \underbrace{2a+a+b}_{3a+b}$

که ۳ هم درست است؛ اما ۲ را نمی‌توانیم تأیید کنیم.

۸۶. گزینه ۱ این کسر وقتی عدد صحیح می‌شود که ۱۱ بر $2n+3$ بخش‌پذیر باشد؛ یعنی $2n+3$ یکی از اعداد ± 1 یا ± 11 شود:

$$2n+3=-1 \Rightarrow n=-2$$
$$2n+3=1 \Rightarrow n=-1$$
$$2n+3=-11 \Rightarrow n=-7$$
$$2n+3=11 \Rightarrow n=4$$

پس ۴ مقدار صحیح و فقط یک مقدار طبیعی برای n داریم.

> **تذکر:** از اول هم می‌شد گفت که وقتی n عدد طبیعی است، $2n+3$ از ۵ کم‌تر نخواهد بود؛ پس تنها عددی که ۱۱ بر آن بخش‌پذیر شود (و از ۵ کم‌تر نباشد)، ۱۱ است:
>
> $$2n+3=11 \Rightarrow 2n=8 \Rightarrow n=4$$

یعنی یک مقدار طبیعی n داریم.

۸۷. گزینه ۴ راه I از رابطهٔ بدیهی $n+1 \mid n+1$ و ویژگی ترکیب خطی استفاده می‌کنیم:

بدیهی: $n+1 \mid n+1$

گفتهٔ سؤال: $n+1 \mid 3n+5$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} n+1 \mid -3(n+1)+1(3n+5) \Rightarrow n+1 \mid 2$$

ضرایب دلخواه

> **تذکر:** وقتی $a \mid b$ و $a \mid c$، می‌توان نتیجه گرفت $a \mid rb+sc$ که در آن r و s ضرایب دلخواه هستند و به $rb+sc$، ترکیب خطی b و c می‌گوییم.

پس فهمیدیم که $n+1 \mid 2$؛ یعنی $n+1$ باید ± 1 یا ± 2 باشد. مقادیر n عبارت‌اند از:

$$n+1=1 \Rightarrow n=0,\ n+1=-1 \Rightarrow n=-2$$
$$n+1=2 \Rightarrow n=1,\ n+1=-2 \Rightarrow n=-3$$

و مجموع آن‌ها $(-3)+1+(-2)+0$ یعنی -4 است.

راه II از رابطهٔ $x-a \mid f(x) \Rightarrow x-a \mid f(a)$ استفاده می‌کنیم، یعنی ریشهٔ سمت چپ را در سمت راست جای‌گذاری می‌کنیم.

$$n+1 \mid 3n+5 \xrightarrow[n=-1]{n+1=0} n+1 \mid 3(-1)+5$$

$$\Rightarrow n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1=\pm 1, \pm 2 \Rightarrow n=0 \text{ یا } -2 \text{ یا } 1 \text{ یا } -3$$

۸۸. گزینه ۳ با استفاده از ویژگی ترکیب خطی، a را حذف کنیم:

$$\begin{cases} x \mid 3a+4 \\ x \mid 4a+3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} x \mid 4(3a+4)-3(4a+3)$$

ضرایب دلخواه

$$\Rightarrow x \mid 12a+16-12a-9 \Rightarrow x \mid 7 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ یا } \pm 7$$

پس برای ۴ مقدار صحیح x، روابط مورد نظر سؤال برقرارند.

۸۹. گزینه ۱ سمت راست‌ها را به ترتیب در ۵ و ۹ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \mid 9k+4 \\ a \mid 5k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 5(9k+4) \\ a \mid 9(5k+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 45k+20 \\ a \mid 45k+27 \end{cases}$$

حالا طرف راست‌ها را از هم کم می‌کنیم تا $45k$ خط بخورد و داریم: $a \mid 7$ و با توجه به شرط $a>1$، $a=7$ است که یک عدد اول است.

۹۰. گزینه ۲ هر عدد اول مثل p فقط دو مقسوم‌علیه مثبت دارد؛ پس اگر عدد طبیعی a عدد p را عاد کند $(a \mid p)$، نتیجه می‌گیریم $a=1$ یا $a=p$؛ مثلاً اگر a عددی طبیعی و $a \mid 7$، نتیجه می‌گیریم $a=1$ یا $a=7$. اگر $a>1$ باشد نیز نتیجه می‌شود $a=7$.

گام اول: با ضرب سمت راست در اعداد مناسب کاری می‌کنیم تا k از بین برود:

$$a \mid 9k+b \xrightarrow{\times 5} a \mid 45k+5b$$
$$a \mid 5k+b+1 \xrightarrow{\times(-9)} a \mid -45k-9b-9$$

سمت راست دو رابطه را جمع می‌کنیم:

$$a \mid -4b-9$$

گام دوم: $a \mid x$ با $a \mid -x$ فرقی ندارد؛ پس رابطهٔ گام دوم را می‌توانیم به صورت $a \mid 4b+9$ ببینیم.

ببینیم به ازای کدام:

$$b=1 \Rightarrow 4b+9=13$$
$$b=2 \Rightarrow 4b+9=17$$
$$b=3 \Rightarrow 4b+9=21$$
$$b=4 \Rightarrow 4b+9=25$$
$$b=5 \Rightarrow 4b+9=29$$
$$b=6 \Rightarrow 4b+9=33$$
$$b=7 \Rightarrow 4b+9=37$$
$$b=8 \Rightarrow 4b+9=41$$
$$b=9 \Rightarrow 4b+9=45$$

به ازای ۵ مقدار b، $4b+9$ عددی اول می‌شود که با توجه به توضیحات بالا و $a>1$، a نیز به ازای این ۵ مقدار b عددی اول است.

۹۱. گزینه ۳ راه I ریشهٔ عبارت سمت چپ، $n=-\frac{1}{2}$ است و اگر آن را در سمت راست قرار بدهیم، کسری نمی‌شود، ببینید:

$$2n+1 \mid 2n^2-3n+3$$

$$\xrightarrow{n=-\frac{1}{2}} 2n+1 \mid 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+3=5$$

پس $5 \mid 2n+1$ و بنابراین $2n+1$ باید ± 1 یا ± 5 باشد.

$$2n+1=1 \Rightarrow n=0 \qquad 2n+1=5 \Rightarrow n=2$$
$$2n+1=-1 \Rightarrow n=-1 \qquad 2n+1=-5 \Rightarrow n=-3$$

پس فقط یک مقدار طبیعی $n=2$ داریم.

راه II اگر طرف راست را در ۲ ضرب کنیم (اجازه داریم)، می‌توانیم کل آن را برحسب $2n$ بنویسیم:

$$2n+1 \mid 2n^2-3n+3$$
$$\Rightarrow 2n+1 \mid 2(2n^2-3n+3)=4n^2-6n+6$$
$$=(2n)^2-3(2n)+6$$

حالا ریشهٔ سمت چپ، $2n=-1$ است.

$$\xrightarrow{2n=-1} 2n+1 \mid (-1)^2-3(-1)+6 \Rightarrow 2n+1 \mid 10$$

دقت کنید که $2n+1$ عددی فرد است و از بین اعدادی که ۱۰ را می‌شمارند، $2n+1$ فقط می‌تواند ± 1 یا ± 5 باشد؛ پس داریم: $2n+1=\pm 1$ یا ± 5

که فقط یک مقدار طبیعی $n=2$ را می‌دهند.

۹۲. **گزینه ۲** اول ضابطهٔ منحنی را اصلاح کنیم:

$$2xy-3x+y+2=0 \Rightarrow 2xy+y=3x-2$$
$$\Rightarrow y(2x+1)=3x-2 \Rightarrow y=\frac{3x-2}{2x+1}$$

پس باید $2x+1 \mid 3x-2$ و داریم:

$$2x+1 \mid 3x-2 \xrightarrow[x=-\frac{1}{2}]{2x+1=0} 2x+1 \mid 3\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow 2x+1 \mid -7 \Rightarrow 2x+1=\pm 1, \pm 7 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x=3$$

تنها جواب طبیعی $x=3$ است که به ازای آن، $y=1$ می‌شود؛ پس فقط نقطهٔ $(3,1)$ را داریم.

۹۳. **گزینه ۴** باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد: $2x-1 \mid x+3$ و می‌دانیم $2x-1 \mid 2x-1$.

طبق قانون ترکیب خطی داریم: $2x-1 \mid -2(x+3)+2x-1$

بنابراین $2x-1 \mid -7$ پس $2x-1$ باید ± 1 یا ± 7 باشد که از آن $x=1,0,4,-3$ به دست می‌آید. یعنی ۴ نقطه.

۹۴. **گزینه ۲** اگر n و m دو عدد طبیعی و $a^m \mid a^n$ ، $(a>1)$، آن‌گاه باید $m \le n$.

$$8^{n+1} \mid 4^{2n-1} \Rightarrow 2^{3n+3} \mid 2^{4n-2}$$
$$\Rightarrow 3n+3 \le 4n-2 \Rightarrow 5 \le n \quad (1)$$

$$\begin{cases} n \mid 5k+19 \\ n \mid k+5 \xrightarrow{\times 5} n \mid 5k+25 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} n \mid 6 \rightarrow n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=6 \quad (2)$$

با توجه به دو شرط (۱) و (۲) فقط $n=6$ قابل قبول است.

۹۵. **گزینه ۳** کسر $\frac{a+1}{b}$ وقتی طبیعی می‌شود که صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد. داریم:

$$\begin{matrix} a \mid b+1 \\ b \mid a+1 \end{matrix} \Rightarrow ab \mid ab+a+b+1 \Rightarrow ab \mid a+b+1$$

اگر a و b هر دو بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، $ab > a+b+1$ و رابطه برقرار نمی‌شود؛ پس با جستجو داریم:

$$a=1 \Rightarrow b \mid 2 \Rightarrow b=1,2 \Rightarrow (1,1),(1,2)$$
$$a=2 \Rightarrow b \mid 3, 2 \mid b+1 \Rightarrow b=1,3 \Rightarrow (2,1),(2,3)$$
$$a=3 \Rightarrow 3 \mid b+1, b \mid 4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow (3,2)$$

پس ۵ زوج مرتب وجود دارد.

۹۶. **گزینه ۲** به نظر نمی‌آید $n+3$ بتواند بیشتر از $(n+1)^2$ باشد. ببینیم:

$$a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \le |b|$$
$$(n+1)^2 \mid n+3 \xrightarrow[n+3 \neq 0]{n \in \mathbb{N}} |(n+1)^2| \le |n+3|$$
$$\xrightarrow{\text{هر دو مثبت هستند.}} (n+1)^2 \le n+3 \Rightarrow n^2+2n+1 \le n+3$$
$$\Rightarrow n^2+n-2 \le 0 \Rightarrow (n+2)(n-1) \le 0$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \le n \le 1$$

پس تنها مقدار طبیعی n، که امکان برقراری عادکردن را می‌دهد، $n=1$ است.

کنترل کنیم: $\xrightarrow{n=1} (1+1)^2 \mid 1+3 \Rightarrow 4 \mid 4$

پس $n=1$ قبول است و فقط همین یک مقدار را برای n داریم.

۹۷. **گزینه ۱** **راه I** می‌دانیم $7 \mid 7a+7b$، پس داریم:

$$\begin{cases} 7 \mid 7a+7b \\ 7 \mid 2a+3b \end{cases} \xrightarrow{\text{طرف‌های راست را از هم کم می‌کنیم}} 7 \mid 5a+4b$$

دوباره فرض سؤال را بنویسیم: $7 \mid 2a+3b$

اگر طرف راست‌ها را کم کنیم: $7 \mid 3a+b$

این ۱ است.

راه II a و b باید طوری باشند که $7 \mid 2a+3b$، مثلاً $a=1$ و $b=4$ می‌تواند باشد. حالا این مقادیر را در گزینه‌ها جای‌گذاری کنید، می‌بینید که فقط ۱ درست است. $3a+b=3(1)+(4)=7 \Rightarrow 7 \mid 3a+b$

۹۸. **گزینه ۴** اول دو طرف رابطهٔ $5 \mid 4k+1$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$5^2 \mid (4k+1)^2 \Rightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1 \quad (1)$$

حالا یک بار هم دو طرف رابطهٔ $5 \mid 4k+1$ را در ۵ ضرب می‌کنیم: $25 \mid 20k+5$

حالا چون سمت چپ‌های (۱) و (۲) یکی هستند؛ پس سمت راست‌ها را با هم جمع می‌کنیم: $25 \mid 16k^2+28k+6$

۹۹. **گزینه ۳** اگر $a \mid b$، آن‌گاه $a^n \mid b^n$ و $ka \mid kb$، بنابراین:

$$6 \mid 5k+1 \xrightarrow[\text{توان ۲ می‌رسانیم.}]{\text{دو طرف را به}} 36 \mid 25k^2+10k+1$$
$$6 \mid 5k+1 \xrightarrow[\text{۶ ضرب می‌کنیم.}]{\text{دو طرف را در}} 36 \mid 30k+6$$
$$+$$
$$36 \mid 25k^2+40k+7$$

هر عدد خودش را عاد می‌کند؛ پس:

$$\begin{matrix} 36 \mid 25k^2+40k+7 \\ 36 \mid 36 \end{matrix} \xrightarrow{(+)} 36 \mid 25k^2+40k+43$$

۱۰۰. **گزینه ۴** **راه I** از رابطهٔ $5 \mid 2n+1$ داریم:

$$5 \mid 2n+1 \begin{cases} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25 \mid 4n^2+4n+1 \\ \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 10n+5 \xrightarrow[\text{برابر } n]{\text{طرف راست}} 25 \mid 10n^2+5n \end{cases}$$

حالا طبق ویژگی ترکیب خطی می‌نویسیم:

$$25 \mid (4n^2+4n+1)+(10n+5)+(10n^2+5n)$$

پس: $25 \mid 14n^2+19n+6$

یعنی این عبارت بر ۲۵ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده می‌شود صفر.

راه II $n=2$ شرط مسئله را برقرار می‌کند. $n=2 \Rightarrow 5 \mid 2n+1$

حالا جواب $14n^2+19n+6$ می‌شود $14\times 4+19\times 2+6$ یعنی ۱۰۰ که باقی‌مانده‌اش بر ۲۵، صفر است.

۱۰۱. گزینه ۴ داریم $11|9x+5y$ و $11|10x+ky$. حالا x را با ترکیب خطی حذف می‌کنیم:

$$11|9(10x+ky)-10(9x+5y)$$

$$\Rightarrow 11|\cancel{90x}+9ky-\cancel{90x}-50y \Rightarrow 11|(9k-50)y$$

پس k باید طوری انتخاب شود که $9k-50$ به ۱۱ بخورد؛ در نتیجه $k=8$ مناسب است و $9(8)-50=22$ به ۱۱ می‌خورد.

۱۰۲. گزینه ۳ $k^2+k+1|k^3+2k+1$

$$\text{I)}\ k^2+k+1|k^2+k+1 \xrightarrow{\times k} k^2+k+1|k^3+k^2+k$$

سمت راست دو رابطه را کم می‌کنیم تا نتیجه شود: $\text{II)}\ k^2+k+1|k^2-k-1$

دوباره سمت راست دو رابطهٔ (I) و (II) را کم می‌کنیم: $k^2+k+1|2k+2$

الف) اگر $k\ge 2$ باشد، سمت چپ بزرگ‌تر از سمت راست بوده و رابطه برقرار نمی‌شود.

ب) به ازای $k=0,-1$ رابطه برقرار است و به ازای $k=1$ برقرار نیست.

پ) به ازای $k\le -2$ نیز باز هم سمت چپ بزرگ‌تر شده و رابطه برقرار نمی‌شود؛ پس به ازای دو مقدار صحیح، رابطهٔ عادکردن برقرار می‌شود.

۱۰۳. گزینه ۳ اگر $\frac{m}{n}\le\frac{r}{s}$ باشد، از رابطهٔ $a^n|b^m$ می‌توان نتیجه گرفت $a^s|b^r$. پس باید گزینه‌ای را انتخاب کرد که $\frac{3}{5}\le\frac{r}{s}$ برقرار نباشد. بین گزینه‌ها، ۳ مناسب است.

$$a^5|b^3 \not\Rightarrow a^2|b^1 \quad (\tfrac{3}{5}\not\le\tfrac{1}{2})$$

۱۰۴. گزینه ۱ باید $\frac{5}{9}\le\frac{r}{s}$ باشد؛ پس $a^5|b^3$ مناسب است، زیرا $\frac{5}{9}\le\frac{3}{5}$.

۱۰۵. گزینه ۳ ما در مورد بخش‌پذیری a^n-b^n بر a^p-b^p می‌توانیم نظر بدهیم. پس اول $5^{24}-4^{36}$ را به صورت توان‌های مساوی درمی‌آوریم:

$$5^{24}-4^{36}=(5^2)^{12}-(4^3)^{12}=25^{12}-64^{12}$$

این عدد بر $25-64$، یعنی -39 بخش‌پذیر است و بنابراین به ۱۳ می‌خورد.

$$-39|25^{12}-64^{12} \Rightarrow 13|25^{12}-64^{12}$$

۱۰۶. گزینه ۴ شرط‌ها را مرور کنیم:

برای $a^n+b^n|a^p+b^p$ لازم است $\frac{n}{p}$ فرد باشد؛ پس:

۳: ($\frac{15}{3}=5$ فرد است) $a^3+1|a^{15}+1$

۲: ($\frac{12}{4}=3$ فرد است) $a^4+1|a^{12}+1$

۴: ($\frac{52}{13}=4$ فرد نیست) $a^{13}+1\nmid a^{52}+1$

برای $a^p+b^p|a^n-b^n$ لازم است $\frac{n}{p}$ زوج باشد؛ پس:

۱: ($\frac{52}{13}=4$ زوج است) $a^{13}+1|a^{52}-1$

۱۰۷. گزینه ۱ شرط بخش‌پذیری a^n-b^n بر a^p+b^p این است که $\frac{n}{p}$ زوج باشد. پس ۱ غلط است:

$a^6+1\nmid a^{18}-1$ ($\frac{18}{6}=3$ زوج نیست)

اما ۲ درست است: $a^3+1|a^{18}-1$ ($\frac{18}{3}=6$ زوج است)

در مورد گزینه‌های ۳ و ۴ هم شرط بخش‌پذیری a^n-b^n بر a^p-b^p، این است که $\frac{n}{p}$ عدد طبیعی باشد؛ یعنی n به p بخورد. چون ۱۸ به ۶ و ۳ می‌خورد.

۴: ($\frac{18}{3}$ طبیعی است) $a^3-1|a^{18}-1$

۳: ($\frac{18}{6}$ طبیعی است) $a^6-1|a^{18}-1$

۱۰۸. گزینه ۳ راه I: ۶۵ به صورت 2^6+1 است؛ پس داریم $2^6+1|2^n+1$. شرطش این است که $\frac{n}{6}$ فرد باشد؛ پس باید n، مضرب فرد ۶ باشد. مقادیر n از ۱ تا ۹۹ عبارت‌اند از:

$$1\times6,3\times6,5\times6,7\times6,9\times6,11\times6,13\times6,15\times6$$

یعنی ۸ مقدار برای n داریم.

راه II: تعداد کل مضارب ۶ از ۱ تا ۹۹ برابر با $[\frac{99}{6}]=16$ است. نصف آن‌ها مضرب فرد هستند، پس ۸ تا مضرب فرد ۶ داریم. یعنی ۸ مقدار برای n داریم.

۱۰۹. گزینه ۱ از مساوی‌بودن توان‌ها، به یاد a^n-b^n می‌افتیم، پس باید ۳۵ را هم به صورت a^p+b^p یا a^p-b^p بنویسیم. $35=2^3+3^3$

حالا دقت کنید که $2^3+3^3|3^{42}-2^{42}$ (چون $\frac{42}{3}$ زوج است)، پس این عدد بر ۳۵ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده، صفر است.

۱۱۰. گزینه ۳ در ۱، اگر به جای ۲۹ بنویسیم 2^2+5^2، آن‌وقت داریم $2^2+5^2|2^{90}+5^{90}$ که چون $\frac{90}{2}=45$ فرد است، بخش‌پذیر است.

در ۲، می‌نویسیم $130|7^{20}-(3^2)^{20}$، یعنی $130|7^{20}-9^{20}$. حالا دقت کنیم که $7^{20}-9^{20}$ بر 7^2+9^2 بخش‌پذیر است، یعنی به $49+81=130$ می‌خورد.

در ۳، اگر ۳۳ را به صورت 2^5+1 بنویسیم، باید $2^5+1|2^{80}+1$ شرطش این است که $\frac{80}{5}=16$ فرد باشد که نیست! پس ۳ نادرست است.

در ۴، اگر ۱۰۲۳ را $2^{10}-1$ بنویسیم، داریم $2^{10}-1|2^{80}-1$، چون $\frac{80}{10}$ عدد طبیعی است، این هم درست است. پس ۳ نادرست بود.