

## مقدمه ناشر

به نام خدا

بدون شک مارادونا اسطوره فوتبال جهانها!

جادوگری که از وسط زمین شروع به دریبل زدن بازیکنان می‌کنه، سریعاً نزدیک و نزدیک دروازه می‌شه و ... !gooooooal  
حالا برای این که مارادونای کنکورتون باشین، یه سری کتاب جیبی براتون تألیف کردیم به اسم نکته‌باز!

در فرایند تألیف کتابای نکته‌باز، هوشمندانه عمل کردیم، این طوری که نکات کاملاً ضروری کنکور و استراتژی‌های لازم برای حل سؤالات رو، یک جا براتون آوردیم. علاوه بر همه این‌ها، شما با انتخاب نکته‌باز، می‌تونین در سریع‌ترین زمان ممکن مطالب رو جمع‌بندی کنین، چون تو این کتابا همه مطالب کنکور به صورت نکته‌محور دسته‌بندی شدن.

در پایان جا داره یه تشکر ویژه کنیم از تیم تألیف و تولید خیلی سبز که بدون زحماتشون، بدون شک کتابای به این خوبی نداشتیم ...!

مارادونای زندگی‌ت باش ...

## مقدمه مؤلف

زندگی زیباست، زیبایی زندگی به ریاضیات و زیبایی ریاضیات به هندسه و زیبایی هندسه به یک نقطه و زیبایی نقطه به هیچ!  
سلام به مهندسان آینده!

بله کاملاً درسته! هندسه، سرآغاز مهندس شدن شماست. ما در این جا جمع شدیم تا مسیر شما رو راحت تر کنیم! مباحث مهم هندسه ۱ و ۲ و ۳ رو جمع بندی کردیم، اما بعدش رهاتون نکردیم. کلی تست همراه این نکات تقدیمتون کردیم که هم کلیات کتاب درسی و هم کنکور سال های اخیر رو پوشش بده، البته خلاصه! یادتون باشه هندسه اولش صبر زیاد می خواد که خودت رو عادت بدی و تست رو به تصویر بکشی! اطلاعات رو جمله به جمله روی تصویرت اضافه کنی. تو پاسخنامه تست ها یادتون دادم نکته ها رو عین پازل روی تصویرت چه طور بچینی و نیم نگاهی هم به خواسته مسئله ات داشته باشی! یهو به جرقه نهایی، آخرین تکه پازل رو می چینه و جواب تست رو تو گزینه ها پیدا می کنی! نمی گم شما با مطالعه چند هفته ای این کتاب یه دفعه درصد خودتون رو به ۶۰ تا ۸۰ درصد افزایش می دهید. ما در این کتاب های نکته باز، چشم بندی نمی کنیم، اما چشمتون رو به حقایق حل مسئله در هر درس باز می کنیم و سپس جمع بندی و خلاصه می کنیم!

در آخر تشکر می کنم از:

- مادرم که همیشه پشت و پناه و دلگرمی زندگی من هستند.
- تیم حرفه ای و شریف تألیف و تولید خیلی سبز که بهترین دلگرمی و همراه من در تمام مراحل تألیف این کتاب بودند، آقای پیام ابراهیم نژاد و آقای صارمی و بقیه اساتید و بزرگواران.

منیره احمدی کیا - مهر ۱۴۰۲

📧 @MonAhmadik

📧 Mo.mo.ahmadikia@gmail.com

# فهرست مطالب

## پایه دهم

- ۷ فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
- ۲۱ فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
- ۴۹ فصل سوم: چندضلعی‌ها
- ۷۵ فصل چهارم: تجسم فضایی

## پایه یازدهم

- ۹۸ فصل پنجم: دایره
- ۱۳۷ فصل ششم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها
- ۱۶۳ فصل هفتم: روابط طولی در مثلث

## پایه دوازدهم

- ۱۸۱ فصل هشتم: ماتریس و کاربردها
- ۲۰۷ فصل نهم: آشنایی با مقاطع مخروطی
- ۲۴۵ فصل دهم: بردارها



# بردارها

## معرفی فضای $\mathbb{R}^2$ و رسم نمودار در آن

۹۵

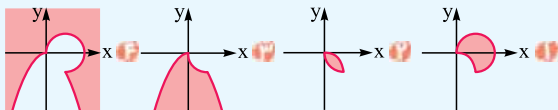
هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند  $(a, b)$  مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه از صفحه را مشخص می‌کند.

بنابراین مجموعه  $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با  $\mathbb{R}^2$  نمایش می‌دهند.

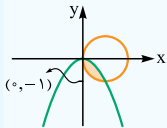
$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

برای رسم نمودار یک نایبراری در فضای  $\mathbb{R}^2$ ، ابتدا علامت نامساوی را به مساوی تبدیل کرده، سپس نمودار را رسم می‌کنیم. در یک طرف نمودار نقطه‌ای دلخواه را انتخاب می‌کنیم و اگر مختصات آن در نایبراری صدق کرد، آن قسمت از نمودار که شامل آن نقطه است، محدوده نایبراری است. در غیر این صورت دیگر، جواب مسئله است.

تست نمودار رابطه  $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 \leq -2y \end{cases}$  در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟



پاسخ ✔ گزینه ۲ نمودار  $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$  نقاط درون و روی دایره به مرکز  $(2, 0)$  و شعاع ۲ است. هم‌چنین سهمی قائم  $x^2 = -2y$  به رأس  $(0, 0)$  با دهانه رو به پایین است. نقطه  $(0, -1)$

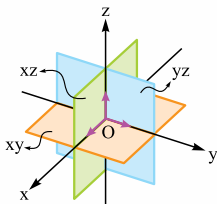


در نامعادله  $x^2 \leq -2y$  صدق می‌کند، پس نمودار آن شامل نقاط داخل و روی سهمی است؛ بنابراین اشتراک داخل دایره و سهمی به صورت مقابل است:

## معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

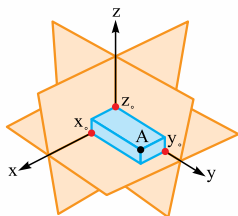
۹۶

هر نقطه از فضا دقیقاً توسط یک سه‌تایی مرتب مانند  $(a, b, c)$  مشخص می‌شود و بالعکس. بنابراین مجموعه  $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  شامل همه نقاط فضا است.



مطابق شکل فضای  $\mathbb{R}^3$  شامل سه محور عمود بر هم  $x$  و  $y$  و  $z$  و سه صفحه عمود بر هم  $xy$  و  $yz$  و  $xz$  می‌باشد که فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند. مبدأ مختصات است.  $O(0, 0, 0)$

**نمایش نقطه در فضای  $\mathbb{R}^3$**  برای نمایش نقطه



$A(x_0, y_0, z_0)$  در دستگاه مختصات  $\mathbb{R}^3$  ابتدای نقطه  $(x_0, y_0)$  در صفحه  $xy$  را مشخص کرده و سپس ارتفاع آن را به اندازه  $z_0$  در راستای موازی با محور  $z$ ها تغییر می‌دهیم.

علامت مؤلفه‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  در هر یک از ۸ ناحیه فضای  $\mathbb{R}^3$  مطابق جدول زیر می‌باشد:

شماره ناحیه	علامت محورها		
	$x$	$y$	$z$
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

تصویر نقطه  $A(x, y, z)$  در فضا:

تصویر روی صفحه $XY$	تصویر روی صفحه $YZ$	تصویر روی صفحه $XZ$
$(x, y, 0)$	$(0, y, z)$	$(x, 0, z)$

تصویر روی محور $x$ ها	تصویر روی محور $y$ ها	تصویر روی محور $z$ ها
$(x, 0, 0)$	$(0, y, 0)$	$(0, 0, z)$

قرینه نقطه  $A(x, y, z)$  در فضا:

نسبت به مبدأ	نسبت به محور $x$ ها	نسبت به محور $y$ ها	نسبت به محور $z$ ها
$(-x, -y, -z)$	$(x, -y, -z)$	$(-x, y, -z)$	$(-x, -y, z)$

نسبت به صفحه $xz$	نسبت به صفحه $yz$	نسبت به صفحه $xy$
$(x, -y, z)$	$(-x, y, z)$	$(x, y, -z)$

## فاصله دو نقطه در فضا

۹۷

فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  که همان طول پاره خط  $AB$  می باشد، برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

فاصله نقطه  $A(x, y, z)$  از مبدأ یا محورهای مختصات به صورت زیر است:

فاصله از محور $z$	فاصله از محور $y$	فاصله از محور $x$	فاصله از مبدأ
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$\sqrt{x^2 + z^2}$	$\sqrt{y^2 + z^2}$	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

فاصله از صفحه $xz$	فاصله از صفحه $yz$	فاصله از صفحه $xy$
$ y $	$ x $	$ z $

**تست** فاصله نقطه  $A$  از محور  $x$ ها،  $y$ ها و  $z$ ها به ترتیب ۳، ۴ و

۷ است. فاصله  $A$  از مبدأ مختصات کدام است؟

$\sqrt{29}$  **۴**

$\sqrt{30}$  **۳**

$\sqrt{34}$  **۲**

$\sqrt{37}$  **۱**

**پاسخ گزینه ۱** با توجه به فاصله نقطه  $A$  از محورهای

مختصات داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + z^2} = 3 \\ \sqrt{x^2 + z^2} = 4 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{توان } 2} \begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 74$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + z^2 = 37$$

بنابراین فاصله A از مبدأ مختصات برابر  $\sqrt{37}$  است.

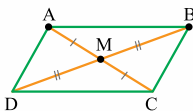
## مختصات وسط یک پاره‌خط

۹۸

اگر  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  باشند، مختصات وسط پاره‌خط AB

$$M = \frac{A+B}{2} = \left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right) \quad \text{برابر است با:}$$

می‌کنند داریم:  در متوازی‌الاضلاع ABCD چون قطرهای همدیگر را نصف



$$A+C = B+D \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases}$$

قرینه نقطه  $A(x, y, z)$  نسبت به نقطه  $M(\alpha, \beta, \gamma)$  به صورت  $(2\alpha - x, 2\beta - y, 2\gamma - z)$  است.

تست  قرینه نقطه A به مختصات  $(2-m, m, -m)$  نسبت به

نقطه  $B(-1, 1, 2)$  روی صفحه xoy قرار دارد. مجموع مؤلفه‌های نقطه M

وسط AB کدام است؟

۱/۵ 

۲ 

۳ 

۴ 

پاسخ گزینه ۱ ابتدا مقدار m را پیدا می‌کنیم: 

$$A(2-m, m, -m)$$



$$\frac{\text{قرینه نسبت به}}{(-1, 1, 2)} \rightarrow A'(2(-1) - (2 - m), 2(1) - m, 2(2) - (-m))$$

$$A' = (m - 4, 2 - m, m + 4) \xrightarrow{\text{روی صفحه } xy} m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = -4 \Rightarrow A(6, -4, 4)$$

$$M = \frac{A+B}{2} = \left( \frac{6+(-1)}{2}, \frac{-4+1}{2}, \frac{4+2}{2} \right) \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$\Rightarrow M(2/5, -1/5, 3)$$

مجموع مؤلفه‌های  $M$  برابر  $M = 4 = 2/5 - 1/5 + 3$  است.

## معادلات محورها و صفحات مختصات

۹۹

معادله محور $z$ ها	معادله محور $y$ ها	معادله محور $x$ ها
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
معادله صفحه $yz$	معادله صفحه $xz$	معادله صفحه $xy$
$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$
معادله خط موازی با محور $z$ ها	معادله خط موازی با محور $y$ ها	معادله خط موازی محور $x$ ها (عمود بر صفحه $yz$ )
$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$	$\begin{cases} x = \alpha \\ z = \gamma \end{cases}$	$\begin{cases} y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$
معادله صفحه موازی $xoy$ به فاصله $ k $ از آن	معادله صفحه موازی $xoz$ به فاصله $ k $ از آن	معادله صفحه موازی $yoz$ به فاصله $ k $ از آن
$z = k$	$y = k$	$x = k$



**مثال** معادله خطی که از نقطه  $(-3, 2, 3)$  موازی محور  $x$ ها

رسم شود، به فرم  $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$  است.

**تست** فاصله نقطه  $A(\alpha+2, 6, 3)$  از مبدأ مختصات برابر

۹ است. معادله خطی که از این نقطه می‌گذرد و بر صفحه  $xOz$  عمود

است، کدام است؟

$\begin{cases} x = 6 \\ z = -3 \end{cases}$    
  $\begin{cases} x = -6 \\ z = 3 \end{cases}$    
  $\begin{cases} x = -6 \\ y = 6 \end{cases}$    
  $\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$

**پاسخ گزینه ۳**

$$|OA| = \sqrt{(\alpha+2)^2 + 6^2 + 3^2} = 9$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 4$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 32 = 0 \Rightarrow \alpha = 4, -8$$

$A(6, 6, 3)$  یا  $A(-6, 6, 3)$

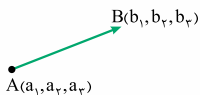
پس معادله خطی که از  $A$  می‌گذرد و بر صفحه  $xOz$  عمود است (یعنی

موازی با محور  $y$ ها) به دو صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 6 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = -6 \\ z = 3 \end{cases}$$

## بردار

۱۰۰



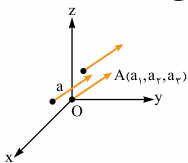
هر پاره‌خط جهت‌داری را که دارای طول، راستا و جهت باشد، بردار می‌نامیم. برای به دست آوردن طول و مؤلفه‌های یک بردار از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\overline{AB} = \text{مختصات ابتدا} - \text{مختصات انتها} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\overline{AB} \text{ بردار} : |\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

برداری که ابتدا و انتهای آن یک نقطه باشد را بردار صفر می‌نامیم و به صورت  $\vec{O} = (0, 0, 0)$  نمایش می‌دهیم.

دو بردار همسنگ (مساوی یا هم‌ارز) دارای اندازه و جهت یکسان هستند و نقطهٔ ابتدایی در بردارهای مساوی، می‌تواند متفاوت باشد.



برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات است را به عنوان نمایندهٔ بردارهای همسنگ در نظر می‌گیریم:  $\vec{a} = \overline{OA} = (a_1, a_2, a_3)$

$$|\vec{a}| = |OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  را برحسب بردارهای یکهٔ  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ،  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  و  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

برای یافتن تصویر یا قرینهٔ یک بردار نسبت به محورها و صفحات مختصات مثل نکات گفته‌شده برای نقطه رفتار می‌کنیم. مثلاً اگر

$\vec{a} = (2, -1, 3)$  باشد:  $\vec{a} = (-2, 1, -3)$  قرینهٔ  $\vec{a}$  نسبت به مبدأ

روی صفحهٔ  $xy$ :  $\vec{b} = (2, -1, 0)$  تصویر  $\vec{a}$

## ضرب عدد در بردار

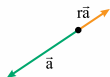
۱۰۱

فرض کنید  $r$  یک عدد حقیقی و  $\vec{a}(x, y, z)$  یک بردار باشد، در این صورت:

$$r\vec{a} = (rx, ry, rz)$$



اگر  $r > 0$  باشد،  $r\vec{a}$  هم‌جهت با  $\vec{a}$  است:



اگر  $r < 0$  باشد،  $r\vec{a}$  مخالف جهت  $\vec{a}$  است:



1 طول بردار  $r\vec{a}$ ،  $|r|$  برابر طول بردار  $\vec{a}$  می‌باشد:  $|r\vec{a}| = |r||\vec{a}|$

2 اگر  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی و  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار باشند:

$$(rs)\vec{a} = r(s\vec{a}) = s(r\vec{a}) \quad (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

3 دو بردار موازی هستند اگر و تنها اگر یکی از آن‌ها، مضرب دیگری باشد:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = r\vec{b} \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}, r \neq 0)$$

به عبارتی اگر  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  و  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  موازی باشند:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

**تست** اگر نقاط  $A(-1, 2, 0)$ ،  $B(2, -2, 3)$  و  $C(m, n, 4)$  روی

یک خط راست باشند، طول بردار  $\vec{OC}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\frac{5\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{13}}{3}$$

**پاسخ گزینه ۱** چون هر سه نقطه در یک راستا هستند پس

$\vec{AB} \parallel \vec{BC}$  است، بنابراین:

$$\vec{AB} = B - A = (2, -2, 3) - (-1, 2, 0) = (3, -4, 3)$$

$$\vec{BC} = C - B = (m-2, n+2, 1)$$

$$\text{شرط موازی بودن: } \frac{3}{m-2} = \frac{-4}{n+2} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{m-2} = 3 \Rightarrow m=3 \\ \frac{-4}{n+2} = 3 \Rightarrow n = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

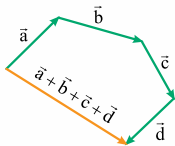
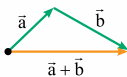
$$\vec{OC} = (3, -\frac{10}{3}, 4) \Rightarrow |\vec{OC}| = \sqrt{3^2 + (-\frac{10}{3})^2 + 16} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

۱. به صورت تحلیلی: کافی است مؤلفه‌های نظیر دو بردار را با هم جمع یا

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

تفریق کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \end{cases}$$



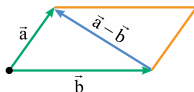
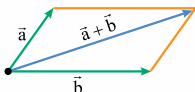
۲. روش مثلث: اگر بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به گونه‌ای

باشند که ابتدای یکی بر انتهای دیگری منطبق باشد، مجموع آن‌ها برداری است که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار دومی وصل می‌کند.

توجه: اگر مطابق شکل، چند بردار از انتهای بردار قبلی شروع شوند، برای محاسبه بردار مجموع آن‌ها، کافی است از ابتدای اولی به انتهای آخری، برداری را رسم کنیم.

۳. روش متوازی‌الاضلاع: اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  از یک مبدأ مشترک شروع

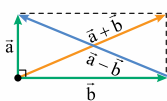
شده باشند، مطابق شکل‌های زیر از انتهای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  موازی آن‌ها رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع حاصل شود. در این صورت قطرهای متوازی‌الاضلاع  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - \vec{b}$  خواهند بود:



$\vec{a} + \vec{b}$  از مبدأ مشترک آغاز می‌شود.

$\vec{a} - \vec{b}$  از انتهای بردار  $\vec{b}$  که بردار دوم

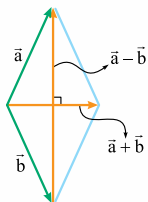
است، آغاز می‌شود.  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



۱ اگر  $a$  و  $b$  بر هم عمود باشند، متوازی الاضلاع تبدیل به مستطیل می شود و داریم:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

(قطرهای مستطیل برابرند.)



۲ اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم برابر باشند، متوازی الاضلاع تبدیل به لوزی می شود:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

(قطرهای لوزی بر هم عمودند.)

**تست** با فرض  $\vec{a} = (3, m, 5)$  و  $\vec{b} = (3 - m, 7, 0)$ ، به ازای یک مقدار  $m$  دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - \vec{b}$  بر هم عمودند. قرینه بردار  $2\vec{a}$  نسبت به صفحه  $xoy$  کدام است؟

- $(0, 0, 10)$   
   $(6, 8, -10)$   
   $(6, 8, 0)$   
   $(-6, -8, 10)$

**پاسخ گزینه ۳** چون  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - \vec{b}$  بر هم عمودند، پس متوازی الاضلاع ساخته شده بر بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، حتماً لوزی است. در نتیجه:  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  و داریم:

$$9 + m^2 + 25 = (3 - m)^2 + 49 + 0 \Rightarrow m = 4$$

$$2\vec{a} = (6, 2m, 10) = (6, 8, 10)$$

در قرینه یک بردار نسبت به صفحه  $xoy$ ، فقط مؤلفه  $z$  آن قرینه می شود، یعنی  $(6, 8, -10)$ .

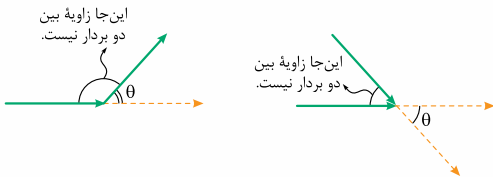
## ضرب داخلی دو بردار

۱۰۳

ضرب داخلی دو بردار  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  را با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نشان داده و به صورت مقابل تعریف می کنیم:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

**تعبیر هندسی:** اگر  $\theta$  زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  باشد، ضرب داخلی آن‌ها برابر است با:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

**توجه!** حواستان باشد که منظور از زاویه بین دو بردار، کوچک‌ترین زاویه‌ای است که دو بردار هم‌ابتدا با یکدیگر می‌سازند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



**تست** اگر دو بردار  $\vec{a} = (m, 3, -2)$  و  $\vec{b} = (-1, m, 2)$  اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع به زاویه  $120^\circ$  باشند و  $|\vec{a}| = 4$  باشد، آن‌گاه

اندازه بردار  $\vec{b}$  کدام است؟

$\frac{18}{5}$

$\frac{9}{5}$

$\frac{9}{2}$

$\frac{9}{4}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= 4 |\vec{b}| \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} = -2 |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (m, 3, -2) \cdot (-1, m, 2) \\ &= -m + 3m - 2(2) = 2m - 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 |\vec{b}| = 2m - 4$$

$$\xrightarrow{\div 2} |\vec{b}| = -m + 2$$

از طرفی  $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + m^2 + 2^2} = \sqrt{m^2 + 5}$  بنابراین:

$$-m + 2 = \sqrt{m^2 + 5} \Rightarrow (-m + 2)^2 = m^2 + 5$$

$$\Rightarrow m^2 + 4 - 4m = m^2 + 5 \Rightarrow m = \frac{-1}{4}$$

$$|\vec{b}| = -m + 2 = \frac{+1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

### ویژگی‌های ضرب داخلی دو بردار:

1 ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2 ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر با مربع اندازه بردار است.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

3 ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

4 طرفین یک تساوی برداری را می‌توان در برداری دلخواه ضرب داخلی

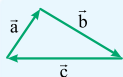
$$\vec{0} = \vec{\Delta} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{a} \cdot \vec{\Delta} \quad \text{کرد. (برعکس همواره درست نیست.)}$$

### اتحادها در بردارها:

1  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

2  $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

3  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$



تست سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  با اندازه‌های ۳، ۴ و ۷ واحد مطابق شکل روبه‌رو قرار دارند. مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  برابر کدام است؟

۱۰  ۱۲  ۱۰  ۱۲

(سراسری و مشابه تمرین کتاب درسی)

-۱۰

-۱۲

۱۰

۱۲

پاسخ گزینه ۱ مطابق شکل چون  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  است،

بنابراین:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \xrightarrow{\text{توان}^2} (\vec{a} + \vec{b})^2 = (-\vec{c})^2$$





$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7^2$$

$$\Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 24 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

## زاویه بین دو بردار

۱۰۴

اگر زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر  $\theta$  باشد، آن گاه:

**نتیجه** اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  موازی باشند:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

**تست** دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه  $60^\circ$  می‌سازند. اندازه زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

(سراسری ۱۴۰۱)

$120^\circ$

$60^\circ$

$45^\circ$

$30^\circ$

**پاسخ گزینه ۱** بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را با طول‌های  $x$  و  $2x$  در نظر می‌گیریم که زاویه بین آن‌ها  $60^\circ$  باشد:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = x \times 2x \times \frac{1}{2} = x^2$$

برای محاسبه اندازه تفاضل دو بردار یعنی  $|\vec{b} - \vec{a}|$  می‌توانیم از اتحاد استفاده کنیم:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = (2x)^2 + (x)^2 - 2(x^2) = 3x^2$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = x\sqrt{3}$$

حالا اگر زاویه بین  $\vec{b}$  و  $\vec{b} - \vec{a}$  را  $\theta$  بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{b}| |\vec{b} - \vec{a}|} = \frac{|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}| |\vec{b} - \vec{a}|} \\ &= \frac{(2x)^2 - x^2}{(2x)(x\sqrt{3})} = \frac{3x^2}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \end{aligned}$$

**تست** بردارهای  $\vec{a} = (1, -1, 3)$  و  $\vec{b} = (3, 2, m)$  بر هم عمودند و بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c} = (n, m, p)$  با هم موازی‌اند. حاصل  $2n - 6p + 3m$  کدام است؟

$$\frac{-15}{2}$$

$$-\frac{7}{3}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{3}$$

**پاسخ گزینه ۳** چون  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمودند، پس:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (1, -1, 3) \cdot (3, 2, m) = 0$$

$$3 - 2 + 3m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

هم‌چنین  $\vec{c}$  و  $\vec{b}$  موازی هستند، بنابراین:

$$\vec{b} \parallel \vec{c} \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{2}{m} = \frac{m}{p} \xrightarrow{m = -\frac{1}{3}} \frac{3}{n} = -6 = \frac{-1}{3p}$$

$$\Rightarrow n = \frac{-1}{2}, \quad p = \frac{1}{18}$$

در نتیجه حاصل  $2n - 6p + 3m$  برابر است با:

$$2n - 6p + 3m = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{1}{18}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$