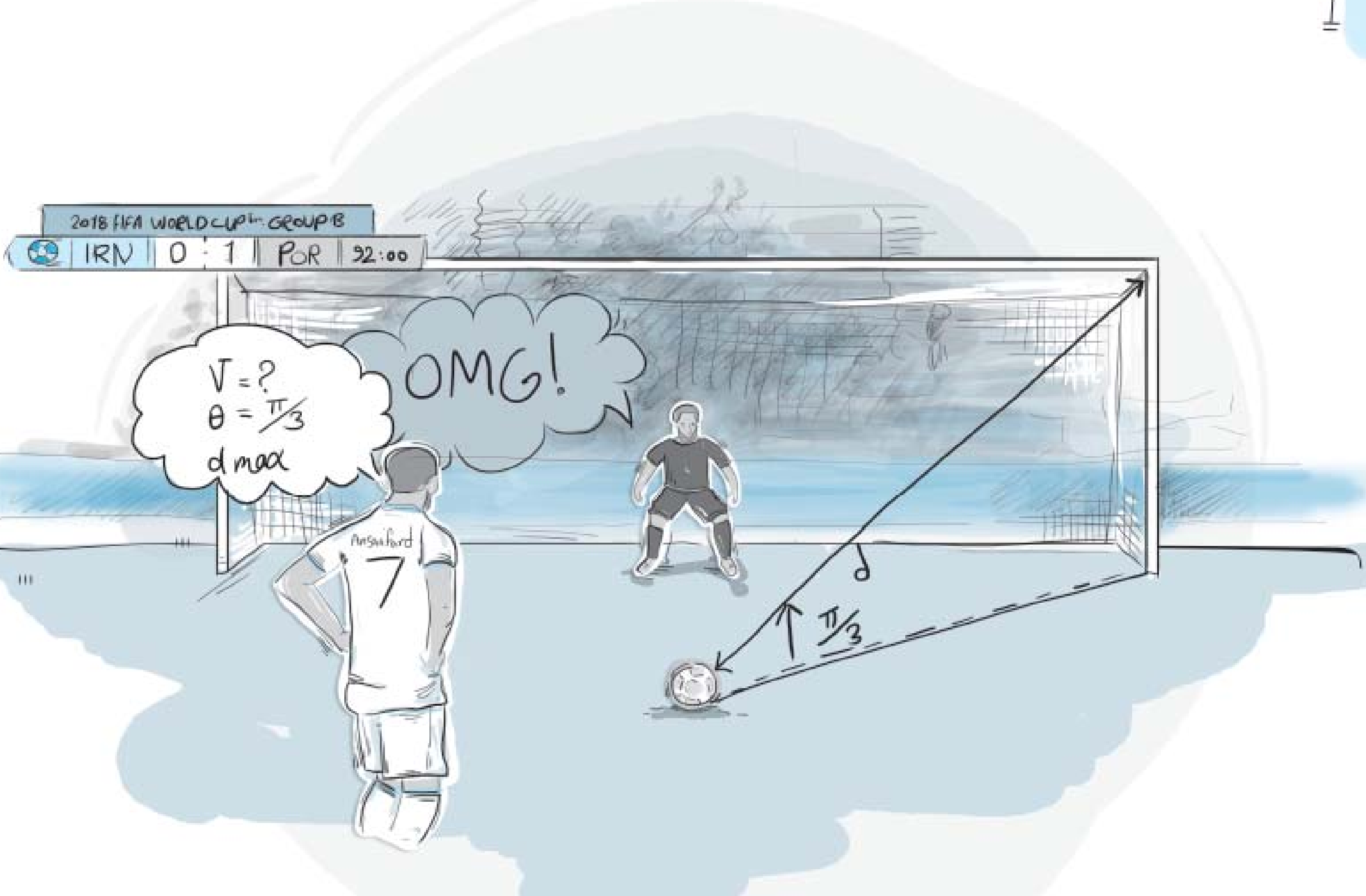
فهرست



فصل پنجم
کاربردهای مشتق

آموزش مفهومی

درس اول: تشخیص صعودی و نزولی بودن یک تابع

هنگامی که در فصل قبل مفهوم مشتق را خدمتتان معرفی کردیم، در همان ابتدا متوجه شدید که تعبیر هندسی مشتق شیب خط مماس بر منحنی توابع می‌باشد. تحلیل شیب خط مماس بر یک منحنی در شاخه‌های مختلف علوم، اقتصاد و مهندسی تعابیر علمی و عملی بسیار سودمندی دارد و به همین واسطه تحلیل مشتق، تحت عنوان «کاربرد مشتق» از مهم‌ترین و پرکاربردترین زیرشاخه‌های حساب دیفرانسیل محسوب می‌گردد. قبل از این‌که به طور کاملاً تخصصی وارد بحث کاربرد مشتق شویم، به مثال سادهٔ زیر دقت کنید تا ایدهٔ اولیه‌ای در مورد اهمیت مشتق در تحلیل‌های علمی به دست آورید.

مثال **معادلهٔ مکان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، به عنوان تابعی از زمان به شکل $x(t)=۳t^۲-۱۲t+۱۷$ می‌باشد. متحرک در ضمن حرکت خود چند بار تغییر جهت می‌دهد؟**

حل همهٔ ما خوب می‌دانیم که در لحظهٔ تغییر جهت یک متحرک، لازم است که سرعت متحرک صفر شود.

با در دست داشتن معادلهٔ مکان ـ زمان، می‌توانیم معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را به راحتی به دست آوریم:

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=۶t-۱۲$$

حال اگر سرعت متحرک را برابر صفر قرار دهیم «لحظهٔ توقف» متحرک به دست می‌آید:

$$۶t-۱۲=۰ \Rightarrow t=۲$$

اما آیا به راستی صفرشدن سرعت به تنهایی به معنای تغییر جهت متحرک است؟ خیر؛ یک متحرک ممکن است یک لحظه متوقف شود ولی بعد در همان جهتی که حرکت می‌کرده به حرکت خود ادامه دهد. پس از کجا بفهمیم که «جهت» حرکت تغییر کرده است یا خیر؟

خیلی ساده است. کافی است بررسی کنیم در لحظه‌ای که سرعت صفر شده، علامت سرعت که بیانگر جهت حرکت است، تغییر کرده یا خیر.

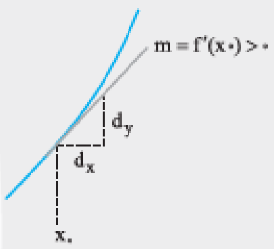
جدول مقابل این امر را به سادگی نمایش می‌دهد:

t	۰		۲	
$v(t)$		$-$	۰	$+$
		$\searrow$		$\nearrow$

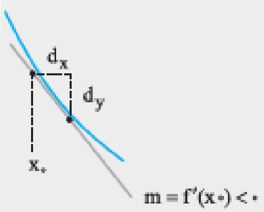
یعنی علامت سرعت متحرک ابتدا منفی بوده و سپس مثبت می‌شود؛ این بدان معنی است که متحرک در لحظهٔ $t=۲$ تغییر جهت داده است.

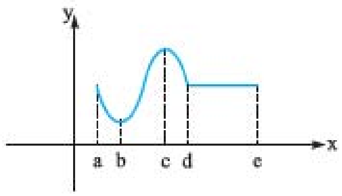
ارتباط بین صعودی و نزولی بودن توابع پیوسته و علامت مشتق

همان‌طوری که از قبل می‌دانیم، علامت مشتق یک تابع، در واقع علامت شیب خط مماس بر تابع می‌باشد؛ بنابراین زمانی که مشتق تابعی در نقطه‌ای مثبت است به این معنا است که شیب خط مماس بر تابع مثبت است و یا به عبارت دیگر آهنگ تغییرات آنی تابع در آن نقطه مثبت است؛ یعنی با افزایش آنی x در آن نقطه، y هم افزایش می‌یابد. این گفته به معنای «صعودی‌بودن» تابع است.



به همین ترتیب زمانی‌که مشتق تابعی در نقطه‌ای منفی است، می‌توان این‌طور تعبیر کرد که در آن نقطه با افزایش آنی x، y در آن نقطه کاهش می‌یابد و این گفته به معنای «نزولی‌بودن» تابع است.





در گذشته هم به نوعی پی برده بودیم که ارتباطی بین «یکنوایی توابع» و «علامت مشتق» آن‌ها وجود دارد.
به شکل مقابل دقت کنید:
با توجه به شکل، تابع در بازه‌های (a,b) و (c,d) اکیداً نزولی است و دقیقاً در همین بازه‌ها شیب خط مماس بر منحنی یعنی مشتق منفی است. از سوی دیگر تابع در بازهٔ (b,c) اکیداً صعودی است و هر خط مماس بر منحنی در این بازه، شیبی مثبت دارد. (یعنی مشتق در نقاط این بازه مثبت است.)
و در نهایت در بازهٔ (d,e) که تابع در آن ثابت است، شیب خط مماس بر تابع صفر می‌باشد قضیهٔ زیر ارتباط بین علامت مشتق و یکنوایی توابع را برای توابع پیوسته بیان می‌کند.

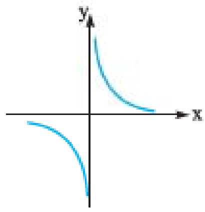
قضیه اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف اگر در تمام نقاط بازهٔ (a,b)، $f'(x)>0$ باشد تابع در بازهٔ $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب اگر در تمام نقاط بازهٔ (a,b)، $f'(x)<0$ باشد تابع در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید است.

ج اگر در تمام نقاط بازهٔ (a,b)، $f'(x)=0$ باشد تابع در بازهٔ $[a,b]$ ثابت است.

دوستان بزرگوارم دقت کنید شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در بیان این قضیه بسیار مهم و تعیین‌کننده است؛ یعنی تنها در صورتی‌که تابع در **تمامی** نقاط بازه‌ای مشتق تک علامت داشته باشد، تابع در آن بازه اکیداً یکنواست و اگر تابع حتی در یک نقطه از بازه، پیوسته و یا مشتق‌پذیر نباشد، نمی‌توانیم با استناد به علامت مشتق آن در مورد یکنوایی تابع نظر بدهیم. هر چند که بحث یکنوایی توابع ناپیوسته را جداگانه انجام خواهیم داد، ولی به عنوان مثال، تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید؛ مشتق این تابع یعنی $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ همواره در دامنهٔ آن منفی است، اما این تابع در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر نیست و همین مطلب موجب می‌شود که با استناد به قضیهٔ بالا نتوانیم در مورد یکنوایی تابع (اکیداً نزولی‌بودن آن) روی $\mathbb{R}$ نظر بدهیم. البته با توجه به شکل هم ملاحظه می‌کنید که تابع در بازهٔ یادشده اکیداً نزولی نیست.



البته اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه‌ای مانند $[1,7]$ در نظر بگیریم، چون تابع در این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر است، منفی‌بودن مشتق در این بازه طبق قضیه گواهی است بر اکیداً نزولی‌بودن تابع در این بازه!

مثال ثابت کنید $f(x)=x^3+5x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

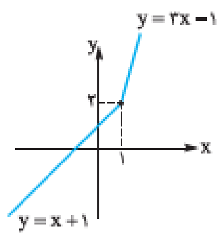
حل با توجه به این‌که تابع روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، طبق قضیهٔ بالا، علامت مشتق تابع، گویای وضعیت یکنوایی تابع خواهد بود:

$$f'(x)=3x^2+5>0$$

بنابراین چون تابع در «هر نقطه» از $\mathbb{R}$ مشتق مثبت دارد، پس تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مثال آیا به کمک قضیهٔ بیان‌شده می‌توان نشان داد تابع $f(x)=2x+|x-1|$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؟

حل هر چند که تابع $y=f(x)$ در این سؤال فی‌الواقع اکیداً صعودی است. اما با توجه به قضیه «نمی‌توان» در مورد اکیداً صعودی‌بودن تابع روی $\mathbb{R}$ نظر داد؛ چون تابع در این بازه مشتق‌پذیر نیست! (تابع در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.)



مثال درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف هر تابع که اکیداً نزولی باشد، در هر نقطه که مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن منفی است.

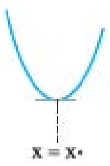
ب اگر مشتق تابعی در نقطه‌ای صفر باشد، تابع در همسایگی آن نقطه ثابت است.

ج اگر تابعی در بازه‌ای اکیداً صعودی باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر است.

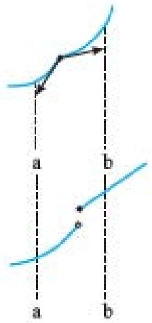
د اگر مشتق تابعی در نقاط بازه‌ای منفی باشد، تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

حل **الف** این گزاره درست است. اگر تابعی اکیداً نزولی باشد، در هر نقطه‌ای که مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن منفی است.

ب این گزاره ۱۰۰٪ نادرست است. صفرشدن مشتق یک تابع در یک نقطه، دلیل بر ثابت‌بودن تابع نیست؛ بلکه صفرشدن مشتق در تمامی نقاط یک بازه دلیل بر ثابت‌بودن تابع است. به شکل مقابل دقت کنید. مشتق تابع در نقطهٔ $x = x_0$، برابر صفر است؛ ولی تابع در همسایگی این نقطه ثابت نیست.



ج این گزاره هم نادرست است. صعودی‌بودن، ارتباطی با مشتق‌پذیری ندارد. به اشکال مقابل دقت کنید. هر دو تابع صعودی هستند ولی هیچ‌کدام مشتق‌پذیر نمی‌باشد.



د این گزاره را می‌توان با اندکی ارفاق درست فرض کرد؛ ولی به دلیل ذات دقیق و محافظه‌کارم این گزاره را هم نادرست در نظر می‌گیریم: اگر تابعی در «**تمام**» نقاط بازه‌ای، مشتق منفی داشته باشد، در آن بازه اکیداً نزولی است.

مثال **یکنوایی توابع زیر را روی دامنه‌شان بررسی کنید.**

الف $f(x) = -x^5 - x^3 - 11x + 19$ ب $f(x) = x^3 - 12x + 7$ ج $f(x) = x^4 - 4x^3$

د $f(x) = 2x + \sin x + \cos x$ هـ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 7$ و $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

حل همهٔ توابع مطرح‌شده در این سؤال، روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیرند؛ بنابراین بررسی علامت مشتق این توابع، وضعیت یکنوایی آن‌ها را کاملاً روشن می‌کند. بررسی علامت مشتق توابع را به کمک جدولی به نام «جدول تغییرات» تابع انجام می‌دهیم. بعدها از این جدول باز هم خواهید شنید و خواهید دید که جدول تغییرات ابزاری قدرتمند برای رسم منحنی توابع محسوب می‌گردد:

الف $f(x) = -x^5 - x^3 - 11x + 19 \Rightarrow f'(x) = -5x^4 - 3x^2 - 11$

مشتق تابع در این سؤال «همواره» منفی است؛ یعنی تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است! جدول تغییرات تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$+\infty$
y′		−	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

در این جدول هرگاه مشتق تابعی مثبت باشد، صعودی‌بودن تابع را با فلش سربالا ↗ و هرگاه مشتق تابعی منفی باشد، نزولی‌بودن تابع را با فلش سرپایین ↘ نمایش می‌دهند.

(دقت کنید در سطر سوم جدول، مقادیر تابع را به ازای هر x سطر اول یادداشت می‌کنیم.)

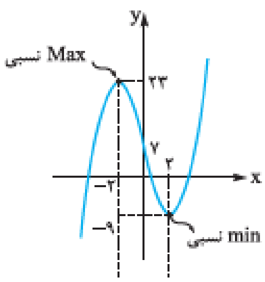
ب $f(x) = x^3 - 12x + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

در این سؤال، مشتق تک‌علامت نیست که فوراً رأی به اکیداً صعودی‌بودن یا اکیداً نزولی‌بودن تابع بدهیم. مشتق نیاز به تعیین علامت دارد و جدول تغییرات تابع به شکل مقابل است:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y′		+		−		+	
y	$-\infty$	↗	23	↘	-9	↗	$+\infty$

تک‌علامت نبودن مشتق، دلالت بر غیریکنوا بودن تابع دارد. تابع از چپ به راست ابتدا صعودی، سپس نزولی و نهایتاً مجدداً صعودی می‌باشد.

نکتهٔ جالب این است که با کمک جدول تغییرات و دنبال‌کردن جهت فلش‌ها می‌توان نمودار تابع را رسم کرد:

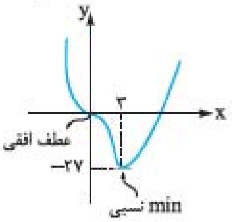


آیا متوجه نحوهٔ رسم تابع شدید؟! فلش‌های سطر سوم جدول تغییرات، به نوعی همان شکل تابع می‌باشد. جالبه نه! به دو نقطهٔ $(-2, 23)$ و $(2, -9)$ روی نمودار یا جدول دقت کنید؛ جهت یکنوایی تابع در این نقاط تغییر کرده است و مشتق در آن‌ها صفر شده است و تغییر علامت داده است. این نقاط بعدها «اکسترمم نسبی (ساده)» نام خواهند گرفت.

ج) $f(x)=x^۴-۴x^۳ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲=۴x^۲(x-۳)$

در این مثال هم به مانند مثال قبل، مشتق نیاز به تعیین علامت دارد:

y	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
y′		−	¦	−	¦	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↘	−۲۷	↗	$+\infty$



یعنی از چپ به راست تابع، ابتدا نزولی و سپس صعودی است. در $x=۰$ اتفاق عجیبی رخ داده است. در این نقطه مشتق تابع صفر شده ولی تغییر علامت نداده است؛ یعنی تابع قبل از $x=۰$ نزولی و بعد از آن هم نزولی است. یعنی علی‌رغم صفرشدن مشتق، جهت یکنوایی تابع در $x=۰$ تغییر نکرده است. این نقطه بعدها «عطف افقی» نام خواهد گرفت. به نمودار تابع و رفتار آن در $x=۰$ و $x=۳$ دقت کنید:

ملاحظه می‌کنید که در دو نقطه، مشتق تابع صفر است؛ اما تغییر علامت دادن مشتق در $x=۳$ و تغییر جهت یکنوایی تابع در این نقطه موجب شده است که $x=۳$، اکسترمم نسبی باشد و تغییر علامت ندادن مشتق در $x=۰$ و عدم تغییر جهت یکنوایی در این نقطه موجب شده که این نقطه اکسترمم نسبی نباشد (این نقطه عطف افقی است).

هر چند که بعدها خیلی مفصل در مورد اکسترمم نسبی و عطف افقی صحبت خواهیم کرد، اما همین حالا هم بد نیست که تأکید کنیم:

نکته ۱) در اکسترمم نسبی (ساده) مشتق صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد.

۲) در عطف افقی، مشتق صفر می‌شود و تغییر علامت نمی‌دهد.

د) $f(x)=۲x+\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=۲+\cos x-\sin x=۲-(\sin x-\cos x)=۲-\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$

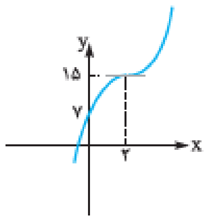
چون حداکثر $\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ برابر ۱ است؛ یعنی $f'(x)$ همواره مثبت و تابع اکیداً صعودی است.

x	$-\infty$		$+\infty$
y′		+	
y		↗	

ه) $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x+۷ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۱۲=۳(x-۲)^۲$

مشتق تابع در این سؤال روی $\mathbb{R}$، بزرگ‌تر **مساوی** صفر است. سؤالی که همیشه در این‌جا برای دوستان دانش‌آموز مطرح می‌شود این است که با توجه به این شرایط، تابع روی $\mathbb{R}$، صعودی است یا اکیداً صعودی؟ چرا که قضیه چنین عنوان کرده بود که اگر تابعی در تمام نقاط بازه‌ای مشتق بزرگ‌تر از صفر داشته باشد، تابع **اکیداً** صعودی است. جدول تغییرات و نمودار تابع، جواب این سؤال را خواهد داد:

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y′		+	¦	+	
y	$-\infty$	↗	۱۵	↗	$+\infty$



در این‌جا هم با توجه به این‌که مشتق در $x=۲$ صفر شده، ولی تغییر علامت نداده، بنابراین $x=۲$ عطف افقی است. اما نمودار تابع به این واقعیت اساسی تأکید می‌کند که با افزایش x، مقادیر تابع افزایش می‌یابد؛ یعنی تابع علی‌رغم این‌که مشتق بزرگ‌تر مساوی صفر دارد، اکیداً صعودی است.

نکتهٔ زیر را حتماً به خاطر بسپارید:

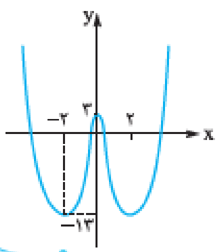
نکته: اگر مشتق تابعی در تمام نقاط یک بازه به‌جز مجموعه نقاطی منفصل از بازه، تک‌علامت باشد و در آن مجموعه نقاط منفصل، مشتق صفر باشد، تابع باز هم اکیداً یکنوا محسوب می‌گردد.

و) $f(x)=x^۴-۸x^۲+۳ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۶x=۴x(x^۲-۴)=۴(x+۲)x(x-۲)$

مشتق تک‌علامت نیست؛ یعنی تابع اکیداً یکنوا نیست. بقیهٔ داستان را می‌سپاریم به دست جدول تغییرات:

x	$-\infty$		−۲		۰		۲		$+\infty$
y′		−	¦	+	¦	−	¦	+	
y	$+\infty$	↘	−۱۳	↗	۳	↘	−۱۳	↗	$+\infty$

تابع در $x=-۲,۰,۲$ سه اکسترمم نسبی دارد و نمودار آن به شکل روبه‌رو است:

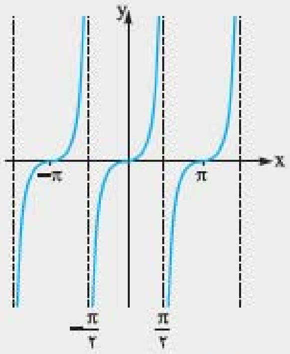


مطابق نمودار $x=۲$ و $x=-۲$، طول نقاط min نسبی و $x=۰$ طول نقطهٔ max نسبی تابع است.

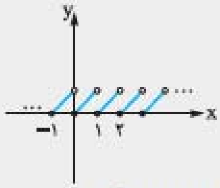
تست کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

۱) $f(x)=\tan x$ ۲) $f(x)=x-[x]$ ۳) $f(x)=x+\cos x$ ۴) $f(x)=\frac{x}{۲}-\sin x$

پاسخ **گزینهٔ ۳** تابع $f(x)=\tan x$ علی‌رغم داشتن مشتقی مثبت، یکنوا نیست؛ در واقع علی‌رغم این‌که $f'(x)=۱+\tan^۲ x>۰$ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیست، یکنوایی تابع روی $\mathbb{R}$ نتیجه نمی‌شود و نمودار تابع هم تأیید می‌کند که تابع غیریکنوا است. در ضمن، این نکته را هم به خاطر بسپارید که **توابع متناوب هرگز اکیداً یکنوا نمی‌باشند.**

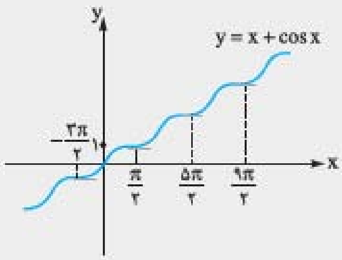


تابع $f(x)=x-[x]$ هم علی‌رغم داشتن مشتق مثبت چون روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نیست، تضمین یکنوایی را به کمک قضیه دریافت نمی‌کند و این تابع نیز به خاطر متناوب‌بودن، یکنوا نیست:



$$f'(x)=\begin{cases} ۱ & x\notin \mathbb{Z} \\ \text{نامعین} & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$$

اما گزینهٔ (۳) تابعی اکیداً صعودی است؛ $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=۱-\sin x\geq ۰$. چون صفرشدن مشتق در نقاط منفصل $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ رخ می‌دهد، علی‌رغم این‌که مشتق گاهی صفر می‌شود، تابع اکیداً صعودی محسوب می‌گردد. (گزینهٔ (۳) درست است.)



تابع $f(x)$ در گزینهٔ (۴) همواره مشتق‌پذیر است، اما مشتق تک‌علامت ندارد، پس اکیداً صعودی نیست.

($f'(x)=\frac{۱}{۲}-\cos x$، که گاهی مثبت و گاهی منفی است.)

تست اگر $f(x)=x^۳+ax^۲+۲۴x+۱۷$، حدود a کدام باشد تا f اکیداً صعودی باشد؟

۱) $|a|\leq ۶\sqrt{۲}$ ۲) $|a|<۶\sqrt{۲}$ ۳) $|a|\leq ۱۲$ ۴) $|a|<۱۲$

پاسخ **گزینهٔ ۱** تابع روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس برای این‌که تابع اکیداً صعودی باشد، کافی است که مشتق تابع **«بزرگ‌تر مساوی صفر»** باشد؛ $f'(x)=۳x^۲+۲ax+۲۴\geq ۰$

زیرا صفرشدن مشتق که تابعی درجه ۲ است، نهایتاً در **نقاطی منفصل** رخ می‌دهد نه در یک بازه:

برای این منظور لازم است که $\Delta\leq ۰$ و ضریب $x^۲$ بزرگ‌تر از صفر باشد (که هست!):

$$۴a^۲-۴(۳)(۲۴)\leq ۰ \Rightarrow a^۲\leq ۷۲ \Rightarrow |a|\leq\sqrt{۷۲} \Rightarrow |a|\leq ۶\sqrt{۲}$$

تست کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{۲x+۱}$ درست است؟

۱) با شرط $a>۶$، تابع اکیداً صعودی است. ۲) با شرط $a=۶$ تابع ثابت است.

۳) با شرط $a<۶$ تابع اکیداً نزولی است. ۴) هر سه مورد

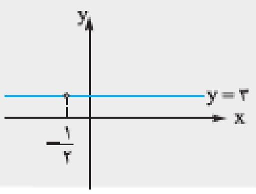
پاسخ **گزینهٔ ۲** مشتق تابع به شکل $f'(x)=\frac{a-۶}{(۲x+۱)^۲}$ می‌باشد. $\left(f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}\right)$

پس شاید در نگاه اول این‌طور به نظر آید وقتی $a>۶$ باشد، تابع اکیداً صعودی است و به ازای $a<۶$ تابع اکیداً نزولی است. اما شما بهتر از من می‌فهمید که این نگاه حتماً نادرست است. تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر نیست لذا نمی‌توانیم تنها با استناد به علامت مشتق آن در مورد یکنوایی‌اش اظهارنظر کنیم و با توجه به شکل تابع هموگرافیک و مجانب قائم آن، می‌دانیم که :

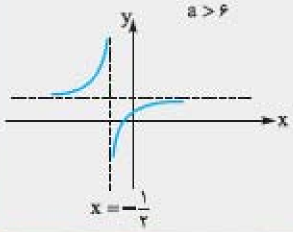
نکته **تابع هموگرافیک هرگز اکیداً یکنوا نیست؛ مگر آن‌که دامنهٔ آن را به گونه‌ای محدود کنند که شامل مجانب قائم تابع نباشد.**

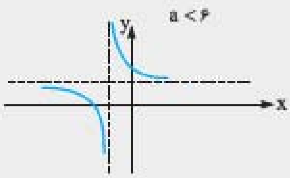
بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) قطعاً مردود هستند اما اگر $a=۶$ باشد تابع به تابعی ثابت به شکل مقابل تبدیل می‌شود:

$$a=۶ \Rightarrow f(x)=\frac{۶x+۳}{۲x+۱}=\frac{۳\cancel{(۲x+۱)}}{\cancel{۲x+۱}}=۳ \Rightarrow \begin{cases} f(x)=۳ \rightarrow \text{تابع ثابت} \\ x\neq -\frac{۱}{۲}\end{cases}$$



یعنی گزینهٔ (۲) درست است. در مقابل شکل تابع را به ازای $a > 6$ و $a < 6$ هم رسم می‌کنم تا دوستان ملاحظه کنند که علی‌رغم این‌که شاخه‌های تابع هموگرافیک در این حالات اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می‌شوند، تابع در کل یکنوا نخواهد شد:





تست توابع f و g روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی می‌باشد، کدام تابع زیر الزاماً اکیداً یکنواست؟

۱) $f \times g$ ۲) $f-g$ ۳) $\frac{f}{g}$ ۴) f^3+g^3

پاسخ **گزینهٔ ۴** گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) به تبع مشتق‌پذیری f و g، روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند ولی تابع گزینهٔ (۳) الزاماً روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نیست چون ممکن است به دلیل صفرشدن g حتی پیوسته هم نباشد، پس از روی بررسی علامت مشتق در گزینهٔ (۳) نمی‌توانیم در مورد یکنوائی آن نظر دهیم. حال به بررسی عبارت مشتق سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

عبارت f' و g' را می‌دانیم، اما چون عبارت f و g را نمی‌دانیم، تک‌علامت بودن و لذا یکنوائی $f\times g$ محرز نیست.

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

f' و g' هر دو مثبت می‌باشند، ولی $f'-g'$ الزاماً تک‌علامت نیست، لذا تابع الزاماً یکنوا نیست.

$$(f^3+g^3)'(x)=3f^2(x)f'(x)+3g^2(x)g'(x)$$

این عبارت همواره مثبت است، لذا f^3+g^3 اکیداً صعودی است.

تست طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^5-5x+1$ در آن نزولی است، چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $+\infty$

پاسخ **گزینهٔ ۲** با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع روی $\mathbb{R}$ با تعیین علامت مشتق فوراً جواب سؤال خود را خواهیم یافت.

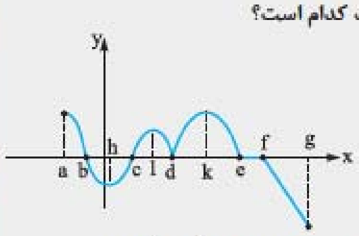
$$f'(x)=5x^4-5$$

برای نزولی‌بودن تابع لازم است که $f'(x)\le 0$ باشد، بنابراین:

$$5x^4-5\le 0 \Rightarrow x^4\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است، برابر ۲ می‌باشد. (گزینهٔ (۲))

تست نمودار مشتق تابعی به شکل روبه‌رو است. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است کدام است؟



۱) (d,k)
۲) (d,e)
۳) (c,e)
۴) (c,f)

پاسخ **گزینهٔ ۳** دقت کنید که نمودار داده‌شده، نمودار خود تابع نیست، نمودار مشتق تابع است. چون مشتق در کل بازهٔ $[a,g]$ موجود است پس تنها به کمک علامت مشتق می‌شود وضعیت یکنوایی تابع را تعیین کرد؛ لذا تابع در بازه‌هایی اکیداً صعودی است که f' مثبت باشد به عبارتی نمودار f' بالای محور xها قرار گرفته باشد. بزرگ‌ترین این بازه‌ها، بازهٔ (c,e) است (صفرشدن مشتق در تک نقطهٔ d اکیدبودن یکنوایی را بهم نمی‌زند).

حتماً دقت می‌کنید که در بازهٔ (c,f)، با توجه به این‌که در بازهٔ (e,f) مشتق صفر است و تابع ثابت است، تابع اکیداً صعودی نیست و تنها صعودی است.

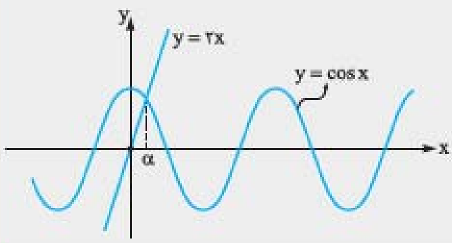
تست کدام گزینه در مورد یکنوایی تابع $f(x)=x^2-\sin x$ درست است؟

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است.
۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

پاسخ **گزینهٔ ۴** تابع روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است پس برای بررسی یکنوائی تابع فوراً مشتق آن را به دست می‌آوریم و علامت مشتق آن را تعیین می‌کنیم.

$$f'(x)=2x-\cos x$$

شاید در نگاه اول تعیین علامت مشتق به نظر امکان‌پذیر نیاید ولی با کمی دقت ملاحظه می‌کنید که خیلی هم سخت نیست:



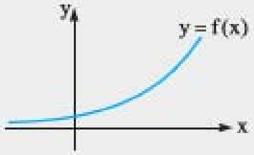
نمودارهای $y=2x$ و $y=\cos x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم. دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. $(x=\alpha)$

بعد از $x=\alpha$، $y=2x$ بالای $y=\cos x$ قرار می‌گیرد؛ لذا $2x-\cos x$ عبارتی مثبت است و قبل از $x=\alpha$؛ چون $y=\cos x$ بالای $y=2x$ قرار می‌گیرد، $2x-\cos x$ عبارتی منفی است:

x		α	
y'	$-$		$+$
y	↘		↗

لذا تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

تست نمودار f مطابق شکل روبه‌رو است کدام گزینهٔ زیر اکیداً نزولی است؟



۱) $y=f^{2}(x)$

۲) $y=\sqrt[3]{f(x)}$

۳) $y=\dfrac{1}{f(x)}$

۴) $y=fof(x)$

پاسخ **گزینه۳** با توجه به نمودار، f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و با توجه به این‌که عرض نقاط تابع همواره مثبت است $f(x)$ هرگز برابر صفر نمی‌شود، تمام گزینه‌های مورد بحث هم پیوسته و مشتق‌پذیرند. بنابراین بررسی عبارت مشتق به تنهایی کافی است تا متوجه شویم کدام گزینه اکیداً نزولی است:

$y=f^{2}(x) \Rightarrow y'=2f(x)f'(x)>0 \Rightarrow y=f^{2}(x)$ اکیداً صعودی است.

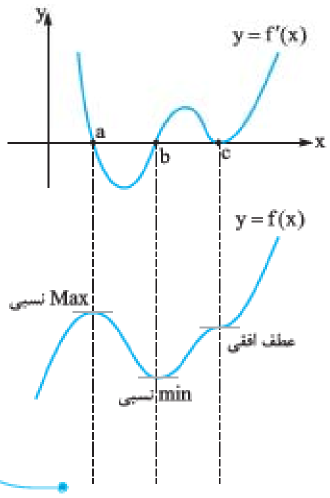
$y=\sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^{2}(x)}}>0 \Rightarrow y=\sqrt[3]{f(x)}$ اکیداً صعودی است.

$y=\dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{-f'(x)}{f(x)^{2}}<0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{f(x)}$ اکیداً نزولی است.

$y=fof(x) \Rightarrow y'=f'(x)f'(f(x))>0 \Rightarrow y=fof(x)$ اکیداً صعودی است.

مثال نمودار مشتق تابع $y=f(x)$ مطابق شکل روبه‌رو است. آیا می‌توانید از روی نمودار مشتق، نمودار خود تابع را به طور تقریبی رسم کنید؟

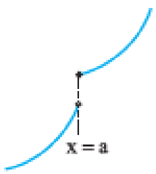
حل *کار که نشد نداره!* به نمودار f' خوب دقت کنید. هر جایی که f' بالای محور xها است؛ یعنی f اکیداً صعودی است و هرجایی که f' زیرمحور xها است، یعنی f اکیداً نزولی است. اما نقاط a، b و c چه نقاطی می‌باشند؟ در هر سه این نقاط مشتق تابع صفر است؛ بنابراین این نقاط یا اکسترمم نسبی (ساده) و یا عطف افقی می‌باشند. در $x=a$ و $x=b$ مشتق صفر شده و تغییر علامت داده است؛ یعنی این دو نقطه اکسترمم نسبی ساده هستند و اما چون در $x=c$ مشتق صفر شده و تغییر علامت نداده است، این نقطه عطف افقی است. با توجه به تمامی نکات گفته‌شده نمودار f چیزی شبیه شکل روبه‌رو است.



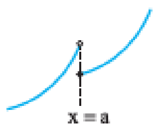
یکنوایی توابع ناپیوسته

متأسفانه در کتاب درسی هیچ صحبتی در مورد یکنوایی توابع ناپیوسته و ارتباط آن با مشتق به میان نیامده است. خُب ما هم می‌توانستیم به روی مبارک خودمان نیاوریم؛ ولی دوستان خوبی که شاید از حسابان(۱) همراه ما بوده‌اند، می‌دانند که اهل کم‌فروشی نیستیم؛ پس برویم به اتفاق بحث یکنوایی توابع ناپیوسته را بررسی کنیم.

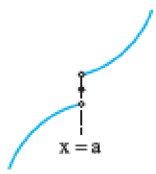
همان‌طوری که کم‌وبیش فهمیده‌اید، از روی علامت مشتق به تنهایی نمی‌توان در مورد یکنوایی توابع نظر داد. *تابع* $f(x)=\frac{1}{x}$ *را که یادتان نرفته!* این تابع علی‌رغم داشتن مشتق منفی $(f'(x)=\frac{-1}{x^{2}})$، نزولی و اصلاً یکنوا نیست. پس بررسی یکنوایی توابع ناپیوسته چَم‌وخَم خاص خود را دارد. برای درک بهتر مطلب، به اشکال زیر خوب دقت کنید:



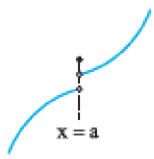
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)

هر ۴ تابع در هر نقطه‌ای که مشتق دارند، مشتقشان مثبت است، اما فقط در اشکال (۱) و (۳) تابع اکیداً صعودی است. چرا تابع شکل (۲) علی‌رغم داشتن مشتق مثبت اکیداً صعودی نیست؟ به این دلیل که در نقطهٔ ناپیوستگی روند صعود تابع مختل شده است. اگر تابع ناپیوسته با داشتن مشتق مثبت واقعاً بخواهد اکیداً صعودی باشد، باید در نقطهٔ ناپیوستگی هم روند صعود خود را حفظ کند یعنی «حد راست تابع باید از حد چپ آن در نقطهٔ ناپیوستگی بیشتر باشد»، که این‌جا این‌گونه نیست. یعنی در این‌جا تابع از سمت چپ a تا سمت راست آن نزول کرده و لذا روند یکنوایی تابع در $x=a$ به هم خورده.

در شکل (۴) علی‌رغم این‌که تابع همواره مشتق مثبتی دارد و حتی حد راست تابع در $x=a$ از حد چپ بیشتر است، ولی مقدار تابع در $x=a$ روند یکنوایی تابع را به هم زده است. اگر مقدار تابع در $x=a$ (به مانند شکل۳) بین حدهای چپ و راست قرار می‌گرفت، تابع یکنوا می‌شد. اکنون می‌توانیم شرط یکنواشدن توابع ناپیوسته را به شکل زیر خلاصه کنیم.

نکته اگر تابع f در بازه‌ای یک نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشد، در صورتی در آن بازه یکنوا است که:

۱ در تمام نقاط آن بازه به‌جز نقطهٔ ناپیوستگی، مشتق تک‌علامت داشته باشد.

۲ در نقطهٔ ناپیوستگی، حدهای چپ و راست تابع از روند یکنوایی تبعیت کنند (یعنی اگر به عنوان مثال مشتق تابع مثبت بود، حد راست تابع باید از حد چپ تابع بیشتر (یا مساوی) باشد و اگر مشتق منفی بود، حد راست باید از حد چپ کم‌تر (یا مساوی) باشد.)

۳ مقدار تابع در نقطهٔ ناپیوستگی در صورت وجود عددی بین حد راست و حد چپ تابع باشد. (و یا برابر یکی از آن‌ها باشد.)

هر کدام از شرایط که نقض شود، تابع یکنوا نخواهد بود.

مثال اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+x+a & x>1 \\ b & x=1 \\ x^5+4x & x<1 \end{cases}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، حدود a و b را تعیین کنید.

حل حتی به فرض ناپیوستگی در $x=1$ مشتق تابع هر جایی که موجود است همواره مثبت می‌باشد:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & x>1 \\ 5x^4+4 & x<1 \end{cases}$$

بنابراین از این‌جا به بعد برای این‌که تابع اکیداً صعودی باشد، تنها لازم است که:

۱) حد راست تابع در $x=1$ بزرگ‌تر مساوی حد چپ آن در این نقطه باشد.

۲) مقدار تابع در $x=1$ بین حدهای چپ و راست و یا حداقل برابر یکی از آن‌ها باشد؛ یعنی:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \ge f(1) \ge \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow 2+a \ge b \ge 5$$

دوستان خسته نباشید. مسائل تشریحی ۱ تا ۷ و تست‌های ۱ تا ۲۲ دست بوسند.

پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل ۵

درس ۱: تشخیص صعودی و نزولی بودن یک تابع

۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $0 \le a \le 2$ ۲) $-\sqrt{3} \le a < 2$ ۳) $|a| < \sqrt{3}$ ۴) $|a| \le 2$

۲- نمودار $y=(x-1)^3(x+1)$ در کدام فاصله نزولی است؟ (سراسری ۷۶)

۱) $x<1$ ۲) $x<-\frac{1}{2}$ ۳) $x>1$ ۴) $x>-\frac{1}{2}$

۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x : |x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟ (سراسری ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۴- تابع $f(x)=x+\sin x$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

۱) متناوب ۲) صعودی ۳) نزولی ۴) نه صعودی نه متناوب

۵- حدود a برای این‌که تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصلهٔ $[1,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\ge\frac{5}{2}$ ۲) $2<a\le\frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

۶- یکنوایی تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است.

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۷- اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ و اکیداً صعودی باشند، کدام تابع زیر الزاماً صعودی است؟

۱) $f.g$ ۲) $f-g$ ۳) $\frac{f}{g}$ ۴) fog

۸- اگر $x=2$ طول اکسترمم نسبی (ساده) تابع $f(x)=x+\frac{a}{x}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $a=4$ و $x=2$ طول نقطهٔ max نسبی است. ۲) $a=4$ و $x=2$ طول نقطهٔ min نسبی است.

۳) $a=2$ و $x=2$ طول نقطهٔ max نسبی است. ۴) $a=2$ و $x=2$ طول نقطهٔ min نسبی است.

۹- اگر مشتق تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+7$ فقط در یک نقطه صفر شود، a و نوع آن نقطه در کدام گزینه آمده است؟

۱) $a=12$، min نسبی ۲) $a=12$، max نسبی

۳) $a=12$، عطف افقی ۴) $a=6$، max نسبی

۱۰- اگر بازهٔ $(m,0)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x)=\frac{x+n}{x^2+x+1}$ بر آن صعودی است، زوج مرتب (m,n) کدام است؟

۱) $(1,-2)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(2,1)$ ۴) $(-2,1)$

۱۱- $f(x)$ و $g(x)$ توابعی همواره منفی، مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی هستند. تابع $y=f(x)g(x)$ از نظر یکنوایی چه حکمی دارد؟

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است.

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۱۲- تابع $f(x)=\sin 2x\sin x$ در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$:

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است.

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۱۳- به ازای چند مقدار صحیح a، تابع $f(x)=2x+\cos ax$ اکیداً صعودی است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

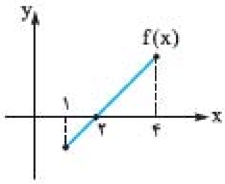
۱۴- به ازای چند مقدار صحیح b، تابع $f(x)=\begin{cases} x+\frac{6}{x} & x>3 \\ b & x=3 \\ 2x-5 & x<3 \end{cases}$ اکیداً صعودی است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵- حدود a کدام باشد تا تابع $f(x)=\frac{2x-a}{x+(a-4)}$ در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد؟

۱) $a>3$ ۲) $a<\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}<a<3$ ۴) مقداری برای a موجود نیست.

۱۶- اگر نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، کدام گزینه در مورد یکنوایی تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در بازهٔ $[1,4]$ درست است؟



۱) اکیداً صعودی است.

۲) اکیداً نزولی است.

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی است و سپس مجدداً صعودی است.

۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی است و سپس مجدداً نزولی است.

۱۷- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+9}$ صعودی است، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۸- تابع $f(x)=3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4}$ در بازهٔ $[m,n]$ نزولی است، حداکثر $n-m$ کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۴/۸ ۴) ۶/۴

۱۹- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی باشد، کدام تابع زیر روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؟

۱) $y=f^2(x)$ ۲) $y=-\frac{1}{f(x)}$ ۳) $y=-f^3(x)$ ۴) $y=fof(x)+f(x)$

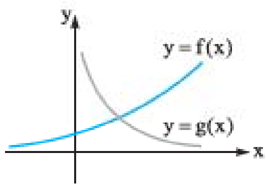
۲۰- یکنوایی تابع $f(x)=\frac{3x+1}{|x|+2}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۲۱- تابع $f(x)=\sin 2x-2\sin x$ از نظر یکنوایی در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۲۲- نمودار دو تابع f و g مطابق شکل مقابل است، کدام تابع زیر الزاماً صعودی است؟



۱) $f+g$

۲) $g-f$

۳) $\frac{f}{g}$

۴) $f\times g$

۱- گزینهٔ ۳ برای این‌که تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f همواره صعودی باشد، لازم است که مشتق آن بزرگ‌تر (مساوی) صفر باشد یعنی:

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax+۱\ge ۰$$

و می‌دانیم تابع درجه دوم وقتی همواره بزرگ‌تر مساوی صفر است که:

$$\begin{cases}\Delta\le ۰\\ \text{ضریب } x^۲>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴a^۲-۱۲\le ۰\\ ۳>۰\end{cases}\Rightarrow |a|\le\sqrt{۳}$$

۲- گزینهٔ ۲ تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f در بازه‌ای نزولی است که مشتق آن در آن بازه کوچک‌ترمساوی صفر باشد، بنابراین:

$$y'=۳(x-۱)^۲(x+۱)+(x-۱)^۳$$

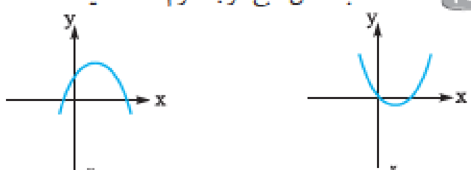
$$=(x-۱)^۲(۳(x+۱)+x-۱)\le ۰$$

$$\Rightarrow\ y'=(x-۱)^۲(۴x+۲)\le ۰\Rightarrow ۴x+۲\le ۰\Rightarrow x\le -\frac{۱}{۲}$$

۳- گزینهٔ ۱ تابع درجه‌دوم f با دامنهٔ $-۱<x<۳$ تعریف شده است. از آن‌جایی که مشتق تابع در این بازه تک‌علامت نیست $(f'(x)=۲x-۲)$ تابع در این بازه همواره صعودی یا همواره نزولی نمی‌باشد؛ اما از آن‌جایی که $f(x)=(x+۱)(x-۳)$ می‌باشد، پس در بازهٔ $x\in(-۱,۳)$ تابع همواره منفی است.

۴- گزینهٔ ۲ تابع مورد بحث متناوب نیست. $g(x)=\sin x$ تابعی متناوب است ولی $f(x)=x+\sin x$ متناوب نیست، اما از آن‌جایی که $f'(x)=۱+\cos x\ge ۰$، تابع مشتق‌پذیر و پیوستهٔ f تابعی اکیداً صعودی است.

۵- گزینهٔ ۱ به شکل تابع درجه دوم دقت کنید:



ضریب $x^۲$ منفی — ضریب $x^۲$ مثبت

برای این‌که تابع درجه دوم از نقطه‌ای مانند $x=\beta$ به بعد صعودی باشد، لازم است که:

۱) ضریب $x^۲$ در تابع مثبت باشد.

۲) $x=\beta$ بعد از رأس سهمی قرار گیرد (یا این‌که $x=\beta$ طول رأس سهمی باشد).

پس در این سؤال: $۱)\ a-۲>۰\Rightarrow a>۲\ (۱)$

$$۲)\ x_{\text{رأس}}=\frac{-B}{۲A}=\frac{۱}{۲(a-۲)}\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{a-۲}\le ۲$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{a-۲}-۲\le ۰\Rightarrow\frac{-۲a+۵}{a-۲}\le ۰\Rightarrow\frac{۲a-۵}{a-۲}\ge ۰$$

$$\Rightarrow a\ge\frac{۵}{۲}\ \text{یا}\ a<۰\ (۲)$$

با اشتراک‌گرفتن از جواب‌ها خواهیم داشت: $a\ge\frac{۵}{۲}$

۶- گزینهٔ ۳ تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است؛ پس علامت مشتق به تنهایی وضعیت یکنوایی تابع را معین می‌کند:

$$y'=\frac{-(۲x+۱)}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

x	$-\infty$	$-\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
y'	$+$	۰	$-$
y	↗		↘

یعنی تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

۷- گزینهٔ ۴ با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع f و g، تابعی الزاماً صعودی است که خودش پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و مشتق همواره مثبت داشته باشد: $۱)(f.g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

علی‌رغم این‌که می‌دانیم $f'(x)$ و $g'(x)$ همواره مثبت هستند، چون علامت خود f و خود g را نمی‌دانیم، نمی‌توانیم بگوییم که تابع صعودی است.

$$۲)(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

$f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو مثبت هستند، ولی علامت $f'(x)-g'(x)$ نامشخص است.

$$۳)\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

این گزینه دو مشکل دارد: ۱) به پیوستگی آن اطمینان نداریم و ۲) علامت مشتق آن را نمی‌دانیم. $۴)\ (fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))>۰$

در این‌جا با تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ مواجه هستیم که با توجه به مثبت‌بودن f' و g' روی $\mathbb{R}$، مشتقی همواره مثبت دارد.

۸- گزینهٔ ۲ از آن‌جایی که $x=۲$ طول اکسترمم نسبی تابع است، مشتق تابع باید در $x=۲$ برابر صفر باشد.

$$f'(x)=۱-\frac{a}{x^۲}\Rightarrow f'(۲)=۱-\frac{a}{۴}=۰\Rightarrow a=۴$$

اما برای این‌که بفهیم $x=۲$ طول نقطه max نسبی است یا min نسبی، باید مشتق را در $x=۲$ تعیین علامت کنیم: $f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}=\frac{x^۲-۴}{x^۲}$

به ازای xهای همسایگی راست ۲، مشتق مثبت و به ازای xهای همسایگی چپ ۲ مشتق منفی است؛ پس $x=۲$ طول نقطهٔ min نسبی است.

۹- گزینهٔ ۳ $f'(x)=۳x^۲+۱۲x+a$ بنابراین اگر مشتق تابع فقط در یک نقطه صفر شود، به این معنی است که مشتق ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\Delta_{f'}=۰\Rightarrow ۱۴۴-۱۲a=۰\Rightarrow a=۱۲$$

به ازای $a=۱۲$ مشتق به شکل زیر خواهد بود:

$$f'(x)=۳x^۲+۱۲x+۱۲=۳(x+۲)^۲$$

یعنی مشتق در $x=-۲$ صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد؛ پس $x=-۲$ طول عطف افقی تابع است.

۱۰- گزینهٔ ۴ تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن به شکل مقابل است: $f'(x)=\frac{-x^۲-۲nx+(۱-n)}{(x^۲+x+۱)^۲}$

اگر قرار باشد که $f(x)$ در بازه‌ای صعودی باشد، $f'(x)$ باید در آن بازه بزرگ‌ترمساوی صفر باشد؛ بنابراین آن بازه باید فاصلهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲-۲nx+(۱-n)=۰$ باشد (این تابع بین دو ریشه مخالف علامت $x^۲$ یعنی مثبت است.) یعنی یکی از ریشه‌های معادلهٔ فوق $x=۰$ و دیگری $x=m$ است. $-x^۲-۲nx+(۱-n)\big|_{x=۰}=۱-n=۰\Rightarrow n=۱$

با جای‌گذاری $n=1$ در عبارت $-x^2-2nx+(1-n)$ متوجه می‌شویم که ریشهٔ دیگر معادله ۲- است؛ یعنی $m=-2$.

$$n=1 \Rightarrow -x^2-2x=0 \Rightarrow x=0,-2 \Rightarrow m=-2$$

$$\Rightarrow (m,n)=(-2,1)$$

۱۱- گزینهٔ ۱ چون $f(x)$ و $g(x)$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیرند $f(x)g(x)$ هم پیوسته و هم مشتق‌پذیر است پس برای بررسی یکنوایی می‌رویم سراغ تعیین علامت مشتق:

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$g(x)$، $f(x)$، $g'(x)$ و $f'(x)$ همگی منفی هستند؛ پس عبارت بالا مثبت است و نتیجتاً $f(x)g(x)$ تابعی اکیداً صعودی است.

۱۲- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم و چون این تابع روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، برای بررسی یکنوایی آن از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sin 2x\cos x=2\sin^2 x\cos x$$

$$\Rightarrow f'(x)=4\sin x\cos x.\cos x-2\sin^3 x$$

$$=2\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x)=2\sin x(3\cos^2 x-1)$$

$\sin x$ در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ همواره مثبت است؛ اما $3\cos^2 x-1$ در اوایل بازه مثبت و در اواخر بازه منفی است؛ یعنی تابع ابتدا صعودی و سپس نزولی است. ($3\cos^2 x-1$ بالأخره در یک نقطه از بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ صفر می‌شود، این‌که آن نقطه کجا است اهمیت ندارد؛ مهم این است که قبل از آن نقطه مشتق مثبت و بعد از آن مشتق منفی است.)

۱۳- گزینهٔ ۲ با توجه به مشتق‌پذیری تابع روی $\mathbb{R}$ ابتدا از آن مشتق می‌گیریم: $f'(x)=2-a\sin ax$

قرار است که مشتق همواره مثبت (یا صفر باشد) یعنی: $2-a\sin ax\ge 0$

با توجه به این‌که $\sin ax$ همواره بین ۱- و ۱ است، برای این‌که عبارت فوق همواره بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، لازم است که a در بازهٔ $-2\le a\le 2$ باشد؛ یعنی ۵ مقدار صحیح برای a وجود دارد.

۱۴- گزینهٔ ۳ حتی با وجود ناپیوستگی تابع در $x=3$ تابع $f(x)$ مشتق همواره مثبتی دارد:

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{6}{x^2} & x>3\\ 2 & x<3\end{cases}$$

پس برای این‌که روند صعود در نقطهٔ ناپیوستگی تابع حفظ شود، لازم است که:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)\ge f(3)\ge \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

باشد، یعنی: $5\ge b\ge 1$

پس مقادیر صحیح b، ۵ مقدار هستند. $(b=1,2,3,4,5)$

۱۵- گزینهٔ ۴ برای این‌که تابع اکیداً نزولی باشد، ابتدا لازم است که مشتق منفی داشته باشیم:

$$f'(x)=\frac{2(a-4)+a}{(x+(a-4))^2}=\frac{3a-8}{(x+(a-4))^2}<0 \Rightarrow a<\frac{8}{3}$$

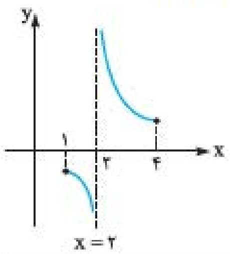
اما می‌دانیم که وجود مجانب قائم در بازهٔ مورد بحث تابع هموگرافیک موجب خواهد شد که تابع در آن بازه یکنوا نباشد؛ بنابراین برای نزولی‌بودن f لازم است که مجانب قائم تابع یعنی $x=4-a$ قبل یا روی $x=1$ قرار گیرد:

$$4-a\le 1 \Rightarrow 3\le a$$

و ملاحظه می‌کنیم که دو بازهٔ جواب a اشتراک ندارد.
بنابراین محال است که تابع اکیداً نزولی باشد.

۱۶- گزینهٔ ۴ اگر با بی‌دقتی صرفاً از روی علامت مشتق تابع بخواهیم در مورد یکنوایی آن نظر بدهیم، خواهیم داشت: $y'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

که با توجه به مثبت‌بودن f'، y' همواره منفی است؛ یعنی باید گزینهٔ (۲) را انتخاب کنیم، اما $y=\frac{1}{f(x)}$ تابع پیوسته‌ای نیست که بتوان صرفاً با تکیه به علامت مشتق وضعیت یکنوایی آن را مشخص کرد، در واقع با توجه به نمودار $y=f(x)$ نمودار $y=\frac{1}{f(x)}$ در بازهٔ $[1,4]$ به شکل زیر است:



با توجه به این شکل مشخص می‌شود که گزینهٔ (۴) درست است.

۱۷- گزینهٔ ۳ تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع در بازه‌ای صعودی است که مشتق آن در آن بازه بزرگ‌ترمساوی صفر باشد:

$$f'(x)=\frac{1(x^2+9)-2x(x)}{(x^2+9)^2}=\frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x)\ge 0 \Rightarrow 9-x^2\ge 0 \Rightarrow 9\ge x^2 \Rightarrow 3\ge x\ge -3$$

بنابراین طول چنین بازه‌ای برابر ۶ است.

۱۸- گزینهٔ ۲ مشتق تابع لازم است که منفی باشد:

$$f'(x)\le 0 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-4}}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{x-4}-2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}}\le 0 \Rightarrow 3\sqrt{x-4}-2\sqrt{x-1}\le 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x-4}\le 2\sqrt{x-1} \Rightarrow 9(x-4)\le 4(x-1)$$

$$\Rightarrow 5x\le 32 \Rightarrow x\le \frac{32}{5} \Rightarrow x\le 6/4$$

اما با در نظر گرفتن دامنهٔ تابع، درست است که بگوییم تابع در بازهٔ $[4,6/4]$ نزولی است و لذا حداکثر $n-m$ برابر ۲/۴ است.

۱۹- گزینهٔ ۴ گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) با عنایت به مشتق‌پذیری f، توابعی پیوسته و مشتق‌پذیرند، یعنی از روی علامت مشتق آن‌ها می‌توان در مورد یکنوایی‌شان نظر داد، اما گزینهٔ (۲) علی‌رغم این‌که همواره مشتق مثبت دارد نمی‌توانیم در مورد یکنوایی‌اش نظر بدهیم، چون الزاماً پیوسته نیست.

$$y=f^2(x) \Rightarrow y'=2f(x)f'(x)$$

چون علامت $f(x)$ را نمی‌دانیم، علامت y' مشخص نیست.

$$y=-f^{3}(x) \Rightarrow y'=-3f^{2}(x)f'(x)<0$$

یعنی y اکیداً نزولی است.

$$y=fof(x)+f(x) \Rightarrow y'=f'(x)f'(f(x))+f'(x)$$

با توجه به این‌که $f'(x)$ و $f'(f(x))$ همواره مثبت هستند، y' همواره مثبت است و تابع اکیداً صعودی است.

۲۰- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x+2} & x\geq 0\\ \dfrac{3x+1}{-x+2} & x<0\end{cases}$$

بنابراین:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{(x+2)^{2}} & x>0\\ \dfrac{7}{(-x+2)^{2}} & x<0\end{cases}$$

تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و مشتق تابع در همهٔ نقاطی که مشتق موجود است مثبت است، بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۲۱- گزینهٔ ۲ تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، بنابراین برای بررسی یکنوایی تابع به سراغ مشتق آن می‌رویم:

$$f'(x)=2\cos 2x-2\cos x=2(\cos 2x-\cos x)$$

$$=2(2\cos^{2}x-\cos x-1)=2(\cos x-1)(2\cos x+1)$$

$\cos x-1$ همواره منفی و در بازهٔ یادشده $2\cos x+1$ همواره مثبت است، بنابراین از آن‌جایی که $f'(x)\leq 0$ است، تابع اکیداً نزولی است.

۲۲- گزینهٔ ۳ f و g و تمامی توابع مورد سؤال، پیوسته و مشتق‌پذیرند، لذا تابعی صعودی است که الزاماً مشتق بزرگ‌ترمساوی صفر داشته باشد:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

$f'(x)$ مثبت و $g'(x)$ منفی است، پس علامت $f'(x)+g'(x)$ معلوم نیست.

$$(g-f)'(x)=g'(x)-f'(x)$$

از آن‌جایی که $g'(x)$ منفی و $f'(x)$ مثبت است، علامت $g'(x)-f'(x)$ منفی است، یعنی تابع $g-f$ تابعی نزولی است.

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{2}(x)}$$

علامت $f'(x)$ و $g(x)$ مثبت است از سوی دیگر علامت $g'(x)$ منفی و علامت $f(x)$ مثبت است، بنابراین $g'(x)f(x)$ علامتی مثبت دارد و لذا علامت عبارت $(\frac{f}{g})'(x)$ همواره مثبت است. پس $(\frac{f}{g})(x)$ الزاماً صعودی است و اما با محاسبهٔ مشتق $(f\times g)(x)$ خواهیم داشت:

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

چون $f'(x)g(x)$ مثبت و $g'(x)f(x)$ منفی است علامت مشتق ضرب دو تابع معلوم نیست.