سخن ناشر

آیا می‌دانید برای تهیه‌ی هر تن کاغذ
سفید ۱۷ اصله درخت سبز قطع می‌شود؟ آیا
می‌دانید برای تولید یک عنوان کتاب ۲۰۰ صفحه‌ای در قطع
رحلی و در شمارگان ۲۰۰۰ نسخه یک تن کاغذ مصرف می‌شود؟ لذا شایسته
است پس از مطالعه‌ی کتاب حاضر آن را در وب‌سایت mygaj.com قرار دهید تا
از تولید مجدد آن جلوگیری و در مصرف کاغذ صرفه‌جویی شود، باشد که شما
دوست خوب نادیده‌ام با این حرکت به ظاهر کوچک، گامی بلند در
حفظ منابع طبیعی کره‌ی زمین برداشته باشید.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار

سپاس و قدردانی

www.gajmarket.com

عطیه پوردرخشان ـ نیلوفر حاجیلو

- **شورای برنامه‌ریزی:** مهندس ابوالفضل جوکار ـ مهندس محمد جوکار ـ علیرضا مزرعتی
- **شورای تألیف:** حکیم رجبی ـ پروانه سعادت‌خواه ـ مینا پروین ـ صبا کریمی
سیده‌زینب‌صالحی
- **گروه گرافیک و فنی:** صغری قربانی ـ ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی
مهسا هوشیار ـ الناز دارانی ـ لیلا فرجی امین ـ رامین حاتمی
- **گروه طراح شکل:** وحیده معینی رجبی ـ حمیده میرزایی ـ محبوب رازی ـ شیرین قیژان‌زاده
- **گروه تصویرگری:** مجید باقرزادگان ـ پریسا رسولی ـ سارا نیک‌فروز
- **گروه رسانه و تصویر:** راضیه یادگاری

پس از تألیف این کتاب و عرضه آن به شما معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز، کماکان در کنار شما هستیم و شما می‌توانید کاستی‌ها و نقایصی که در کتاب موجود است را با مؤلفین کتاب در میان بگذارید و ما را در جهت بهبود کیفیت کتاب یاری کنید.

سخن مدیر تألیف

به نام آنکه هستی نام از او یافت ...

اندیشه در آفرینش هستی و نگاه به زندگی موجودات کوچک و بزرگ برای انسان درس‌های بزرگی به همراه دارد، باید تلاش کنیم با یادآوری این نعمت‌ها مسیر اندیشیدن، راه و روش درست زندگی کردن و سعادتمند شدن و استفاده درست از موهبت‌های الهی را بیاموزیم. خیلی مهم است که همیشه رویکردی مثبت به زندگی داشته باشیم، موانعی در زندگی وجود دارد که برای عبور از این موانع نباید دست از تلاش برداریم و نا امید شویم بلکه باید به‌دنبال راه‌های جایگزین برای رسیدن به اهدافمان باشیم.

یادگیری حل مسئله از مهم‌ترین موضوعاتی است که نظام آموزشی در کتاب‌های درسی جدید توجه ویژه‌ای به آن داشته است. اما چرا حل مسئله مهم است؟ وقتی صحبت از حل مسئله می‌کنیم لزوماً قرار نیست دربارهٔ ریاضیات صحبت کنیم، ما در زندگی روزانهٔ خود با مسائل متفاوتی مواجه می‌شویم که باید یاد بگیریم چگونه با آن‌ها برخورد کنیم و از همه مهم‌تر بیاموزیم با تکیه بر تحلیل‌های همه‌جانبه از عهده حل آن‌ها برآییم. این هدفی است که ما برای آن برنامه داریم و قصدمان این است که با تألیف کتاب‌هایی مبتنی بر محتوای کتاب‌های درسی جدید در کنار شما باشیم. کتاب‌های جدید انتشارات گاج تحت عنوان آموزش ساده یا به اختصار آس قرار است از دریچهٔ تازه‌تری به رشد و ارتقای سطح علمی و همچنین فهم عمیق مفاهیم مختلف به شما کمک کند.

هدف ما در کتاب‌های آس تنها این نیست که به‌صورت کلیشه‌ای سؤال‌ها و مثال‌هایی را در صفحه‌های مختلف همراه نکته‌های فراوان جا دهیم و در واقع با این کار به بمباران ذهن شما بپردازیم. آس می‌خواهد علم را به زبان ساده‌تر و صمیمی‌تری به نسلی که آینده برای آن‌هاست انتقال دهد. کسب مهارت‌های لازم برای حل مسئله از دیگر اولویت‌های مهم کتاب آس است که برای تحقق این هدف در بخش‌های مختلف آموزشی، سؤال‌ها و تست‌هایی از ساده به دشوار برای شما دانش‌آموزان عزیز فراهم شده است. برای خواندن آس این احساس را درخودتان به‌وجود بیاورید که قصد خواندن یک کتاب داستان را دارید، سطر به سطر را با حوصله بخوانید و از آن لذت ببرید. تمام تلاش خود را برای ارائه کتابی متفاوت و بی‌نقص به‌کار برده‌ایم اما علاقمند هستیم که شما نیز در این شیوه آموزشی با ما مشارکت داشته باشید، بنابراین ما را از نظرات و ایده‌هایتان بی‌نصیب نگذارید. منتظر انتقادات و پیشنهادات و راه‌حل‌های خلاقانه شما هستیم.

علیرضا مزرعتی

@mazraati

مقدمــــه مؤلفـــان

سخن اوّل

سلام. دوازدهمی عزیز، ای کسی که تمام کتاب‌های تازه تألیف روی تو آزموده می‌شود و در خط مقدم انقلاب کتاب‌های درسی، استوار و مقتدر، به پیش می‌روی! در این سال حتماً حتماً لازمه روش مطالعه‌ات رو تغییر بدی چون قراره در آزمون کنکور شرکت کنی و موفقیت بیشتری کسب کنی. مطمئن باش در این نبرد تنها نیستی و همیشه پشت تو خواهیم بود، مثل همیشه ... قبل از هر کاری کافیه چند تا سؤال جدی از خودتون بپرسید و پاش وایسید تا راز موفقیت را در جواب‌هایی که به خودتون می‌دید کشف کنید: «چرا باید درس بخونیم؟ و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخوره؟» خصوصاً سؤال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی می‌خوره؟!» چون به نظر ما هر دانش‌آموزی که بتونه جواب‌های منطقی برای این سؤالات پیدا کنه، دیگه درس خوندن براش سخت نیست!

ویژگی‌های بارز کتاب

در تألیف کتاب‌های درسی جدید، با مواردی روبه‌رو هستیم که شاید بتوان به جرأت گفت تا پیش از این، در کتاب‌های قدیمی‌تر با آن‌ها مواجه نبودیم. از جمله این موارد، کاربردی بودن مطالب و بیان مفهومی آن‌ها است که شخصاً در این مورد از مؤلفین محترم کتب درسی، حمایت می‌کنم. اما این مسئله، وظیفه سنگینی را بر دوش ما قرار می‌دهد تا بتوانیم در قالب کتاب درسی و هم راستا با اهداف در نظر گرفته شده، کتاب کمک درسی گردآوری کنیم تا با بیانی ساده، به انتقال هر چه بیشتر و بهتر مطالب، کمک کند. این در حالی است که بسیاری از کتاب‌های کمک درسی، همچنان با روش قدیمی و به اصطلاح مکتب‌خانه‌ای و برخلاف اهداف آموزش مفهومی کتب جدیدالتألیف، به بیان رگباری نکات، تست‌ها و سؤالات تکراری می‌پردازند و ذهن خواننده را تیر باران می‌کنند! بنابراین نسل جدیدی از کتاب‌های کمک درسی، منطبق بر آخرین تغییرات کتب درسی و رعایت اصول و چارچوب‌های مدنظر این کتب را خدمت شما عزیزان معرفی می‌کنیم: واضح است که این کتاب‌ها، در واحد انتشارات بین‌المللی گاج «آس» نامیده شده که این خود مخفف «آموزش ساده» است.در سری کتاب‌های آس، سعی بر این است تا ضمن مطالعه مطالب درسی، بتوانید با کشف کاربرد مطالب در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید. کتاب پیش روی شما، کتاب آموزش ساده «ریاضی و آمار ۳» نیز از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی ریاضی و آمار ۳ رشته انسانی، دارای ۳ فصل است که در هر فصل، به بیان دروس مربوطه پرداخته است. اما چگونه؟

در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

◆ شیوه بهره‌مندی و استفاده مفید از این کتاب

عصر حاضر، عصر اطلاعات است و بمباران اطلاعات و چالش‌های موجود، به رشد هوش و خلاقیت دانش‌آموزان از یک سو و به افزایش تنوع طلبی بصری از سوی دیگر دامن زده است. و از آن‌جایی که سلیقه مخاطب بسیار اهمیت دارد، سعی کرده‌ایم در این کتاب از بخش‌های خلاق و جذابی برای تفکیک مطالب به کمک گرافیک استفاده کنیم. بنابراین می‌توان گفت یکی از ویژگی‌های به خصوص کتاب‌های آس، بهره‌گیری از بخش‌های موضوعی ـ گرافیکی متنوع است. از جمله: «ماجرا چیه؟ ـ فکر کن تا کشف کنی ـ درسنامه ـ سؤال ـ مثال‌های آموزشی ـ روزنامه ریاضی ـ کافه سؤال ـ گزینه چند؟ ـ جمع‌بندی کنکوری ـ ایستگاه کنکور و بسیاری موارد دیگر که ماهیت کلی و کاربرد هر کدام با ورق زدن کتاب و مطالعه آن‌ها، قابل تحصیل هستند. اما درباره برخی از اصلی‌ترین موارد، توضیحاتی ارائه می‌دهیم:

ماجرا چیــه؟

درابتدای هر فصل، بخشی به‌عنوان «ماجرا چیه؟» قرار گرفته شده که به نوعی چشم‌انداز فصل پیش روی شما خواهد بود. در این بخش با بیان یک داستان، نوعی احساس نیاز به یادگیری مطالب را در ذهن شما ایجاد می‌کند و فضا را برای درک مطالب آماده می‌کند.

فکر کن تا کشف کنـی

در این بخش با مطرح کردن یک مسئله چالشی، هدفمند و در عین حال ساده، سعی کرده‌ایم کمی

ذهن را درگیر مسائل مربوطه کرده و زمینه را برای یادگیری مطالب موجود، فراهم کنیم. ممکن است سؤالات به‌گونه‌ای باشند که با کمی تفکر و به کمک دانسته‌های قبلی، قابل حل باشند و ممکن است برخی به گونه‌ای باشند که با ورود به فصل، مطالعه و تسلط بر مفاهیم مطرح شده، بازگشته و قله این مسائل را فتح کنند.

درسنامـــــه

و اما بخش مهم و حساس درسنامه ... برای نگارش درسنامه، نکات بسیاری مدنظر گرفته شده که مهم‌ترین آن‌ها، توجه به محتوا و در نظر گرفتن اهداف کتاب درسی یعنی همان کاربردی و مفهومی بودن است. اما این تمام ماجرا نیست!

هر درسنامه با بیان یک داستان یا یک ماجرا که ممکن است هر کدام از آن‌ها در زندگی روزمره هم رخ دهند، آغاز می‌شود. مفاهیم درس همگی در خلال این داستان‌ها یا ماجراها بیان می‌شود و مطالب بنیادین کاملاً ساده، خلاقانه و ماجراجویانه دنبال می‌شود و همین مسئله باعث می‌شود اولاً خواننده نیاز موضوعات درسی مطرح شده را احساس کند ثانیاً گام به گام و کاملاً مفهومی آن‌ها را فرا بگیرد. همچنین تصویر ذهنی که توسط این داستان‌ها در ذهن او ایجاد می‌شود، همواره به یادآوری مطالب به او کمک می‌کند.

در خلال این داستان‌ها تنها به پیکره‌بندی موضوعات درسی پرداخته شده و این درسنامه‌ها خالی از هرگونه نکته اضافه‌ای هستند تا مانع هرگونه سردرگمی و پیچیدگی شود. در واقع این وظیفه سنگین و خطیر بر عهده قسمت بعدی گذاشته شده است.

مثال‌های آموزشی

این بخش اگر از درسنامه مهم‌تر نباشد، کم اهمیت‌تر هم نیست. در واقع مثال‌های آموزشی، بخش تکمیلی درسنامه‌ها هستند که توصیه می‌شود پس از تسلط بر مفاهیم مطرح‌شده در درسنامه‌ها، به آن بپردازید.

در بخش مثال‌های آموزشی، سؤالات به‌گونه‌ای مرتب شده‌اند که روال منطقی آموزش در آن‌ها رعایت شود. این بخش دقیقاً خلاف سایر کتاب‌های کمک آموزشی طراحی شده است! در کتاب‌های کمک آموزشی دیگر، ابتدا نکات را مسلسل‌وار بیان می‌کنند و بعد از ایجاد خستگی ذهنی، مثال‌ها و تمرین‌ها را بیان و حل می‌کنند. اما در این بخش، ابتدا مثال‌ها مطرح می‌شود تا ذهن را آماده پذیرش نکته کند و سپس با بیان حل مثال و در خلال توضیحات آمده، نکته موردنظر مطرح می‌شود و به این ترتیب نکات را طبقه‌بندی و مرتب شده آموزش می‌دهد. البته شوخی‌های مطرح شده در خلال درسنامه و حل مثال‌ها نیز خستگی‌های ناشی از مطالعه را به حداقل ممکن می‌رساند.

روزنامه ریاضی

بخشی با عنوان «روزنامه ریاضی» در این کتاب آمده است که مطالب کاربردی و مرتبط با درس در آن‌ها آورده شده است که دانستن آن‌ها خالی از لطف نیست. البته در برخی موارد، قسمت‌های جدا مانده کتاب درسی گذشته مطرح شده است که حتی تا پیش از این از مطالب آن‌ها، سؤالات کنکوری هم مطرح می‌شدند. متن برخی از این مجلات به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که دانش‌آموز بتواند از آن‌ها به‌عنوان یک پروژه تحقیقی هم استفاده کند.

کافه سؤال ـ گزینه چند

در بخش «کافه سؤال» و «گزینه چند» سعی کرده‌ایم انواع تیپ‌های سؤالات و مسائل را در سطح استاندارد کتاب درسی بیان کنیم و در عین حال سعی کرده‌ایم از تکرار بپرهیزیم. تا بدین‌ترتیب بتوانید به‌راحتی برای آزمون‌های مدرسه و کنکور، خود را آماده کنید. این سؤالات همگی دارای پاسخ‌های تشریحی هستند و در پاسخگویی به سؤالات سعی کرده‌ایم بیان ساده را فراموش نکنیم. امّا توجه کنید ممکن است راه‌حل‌های متنوع دیگری هم برای پاسخگویی به سؤالات موجود باشند. توجه کنید مهم‌ترین بخش برای موفقیت در ریاضیات کسب مهارت و تجربه است و این تجربه جز با حل تمرین و مسئله کسب نمی‌شود. این بخش شما را به یک انسان باتجربه در ریاضیات تبدیل خواهد کرد.

ایستگاه کنکور ـ جمع‌بندی کنکوری

از آن‌جایی که شما دوازدهمی هستید و رویداد بزرگی به نام کنکور را پیش روی خود دارید، سعی کرده‌ایم بتوانیم نیاز شما را در این کتاب پاسخگو باشیم. البته در بیان درسنامه‌ها و مثال‌های آموزشی، تمام نکات موردنیاز یک کنکوری مطرح شده است امّا با تمام این توضیحات، بخشی با عنوان جمع‌بندی کنکوری قرار گرفته است که به شما این امکان را می‌دهد تمام نکات مطرح شده در درس را یک‌جا مشاهده و مطالعه کنید و بعد از آن سؤالات کنکورهای سراسری داخل و خارج از کشور گروه آزمایشی علوم انسانی، به همراه پاسخ کاملاً ساده و تشریحی مطرح شده است تا بتواند شما را به حد اعلایی از آموزش برساند تا بتوانید به راحتی از پس حل سؤالات کنکوری هم برآیید.

◆◆◆

آن‌چه در طراحی پاسخ‌نامه‌ها بیشتر اهمیت داشته است، حل خلاقانه و بیان ساده مطالب بوده تا هر سؤال بتواند شما را ایده‌پرداز و خلاق پرورش دهد. قطعاً روش‌های مختلفی برای حل سؤالات وجود دارد که مطمئناً شما به آن‌ها خواهید رسید. امیدوارم ما را در جریان راه‌حل‌های پیشنهادی خود و یا اشتباهات احتمالی کتاب قرار دهید. همچنین ممکن است پیشنهاد یا انتقادی داشته باشید که بیان آن‌ها می‌تواند به هرچه بهتر شدن کتاب کمک کند و حتماً آن‌ها را در چاپ‌های بعدی لحاظ خواهیم کرد.

ارتباط با ما

هرگونه پیشنهاد و انتقاد و همچنین مشاوره درسی و سؤالات علمی خود را با مؤلفان این کتاب در میان بگذارید، برای این منظور می‌توانید همه روزه از ساعت ۱۶ تا ۱۸ با تلفن ثابت ۰۲۱-۶۴۳۴۴۳۶۰ تماس گرفته و یا با ارسال ایمیل به آدرس Acebook@gaj.ir با مؤلفین این کتاب ارتباط برقرار کنید.

فهرست مطالب

CONTENTS

آس | ریاضی و آمار (۳)

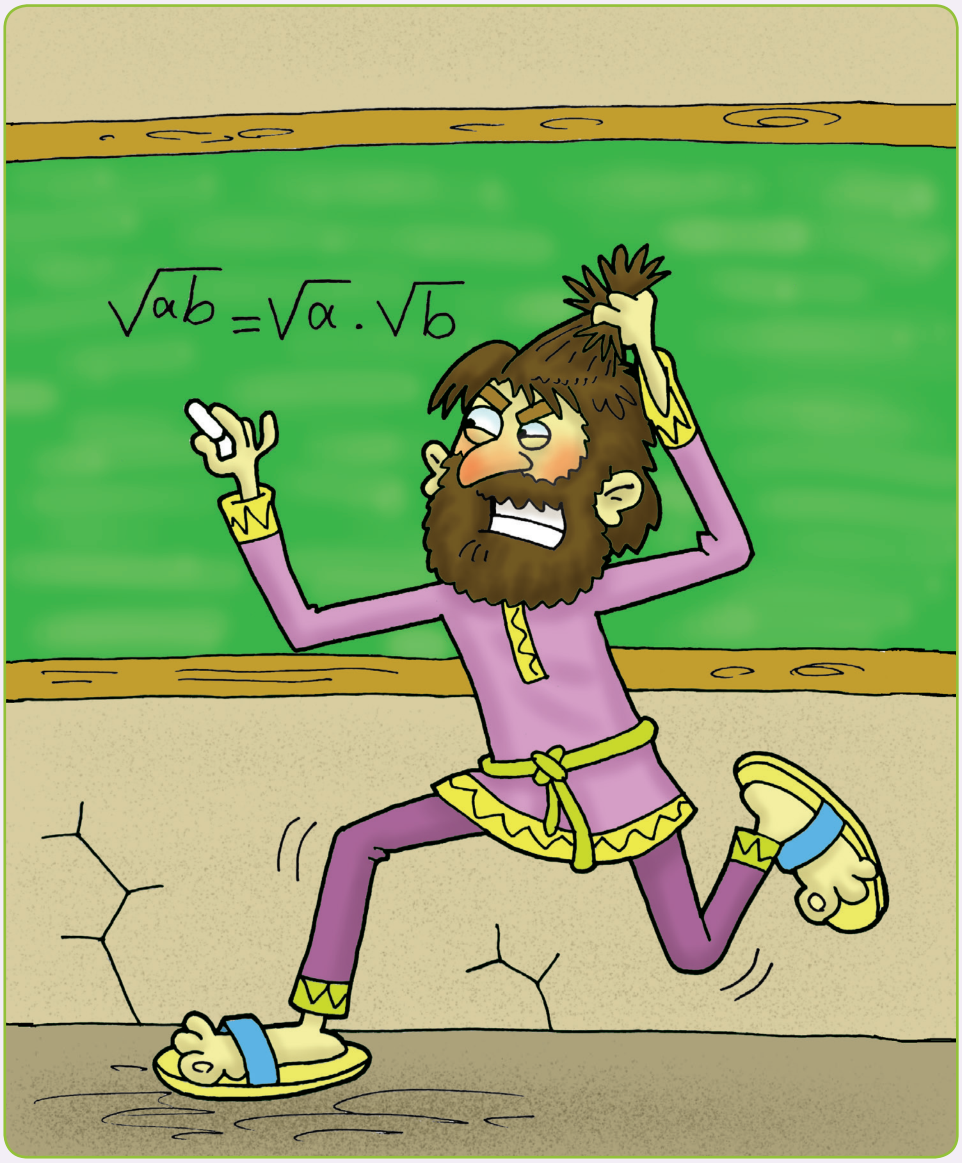
فصل سوم **N**on Linear Sequences

۳ الگوهای غیر خطی

ماجرا چیه؟!

دقیقاً ماجرا از این قرار است که مطالعات انسان روی الگوهای خطی، درهای جدیدی را به روی او گشود. او که از حل مسائل خطی خود بسیار ذوق زده و شگفت‌زده شده بود، پا در دنیای الگوهای غیرخطی گذاشت تا بتواند مسائل خود را حل کند و الحق والانصاف هم در این کار موفق بوده! او توانست بسیاری از مسائل خود را مدلسازی کرده و مرحله nام آن‌ها را حدس بزند و مجموع تمام جملات را حساب کند. در این بین به سؤالات جدیدی در مورد ریشه‌یابی و توان‌های اعداد رسید و دانست چگونه معادلات $x^n = a$ را حل کند.

هم‌چنین از خود پرسید اگر جای توان عددی و متغیر را عوض کنیم چه؟ در این صورت در مورد 2^x چه می‌توانیم بگوییم؟ و بدین ترتیب مفهوم تابع نمایی را بنیان نهاد. ما هم جا پای این بشر دو پا می‌گذاریم و با دنباله‌های هندسی و مجموع جملات آن‌ها آشنا می‌شویم و یک مسئله پرکاربرد به نام نیمه عمر را بررسی می‌کنیم. هم‌چنین توان‌های گویای اعداد و ریشه nام معادلات را مطالعه می‌کنیم و به معرفی تابع نمایی و خواص آن می‌پردازیم.



◈ در افسانه‌ها آمده است روزی مخترع شطرنج، صفحه‌ای که طراحی کرده بود را نزد پادشاه برد و بازی خود را شرح داد. حاکم هم از این اختراع خوشش آمده و شور و شعف وجودش را گرفت! احتمالاً این مخترع جوان بسیار هوشمندانه عمل کرده بود که اجازه داد تنها پادشاه برنده بازی باشد و صابون کیش و مات شدن به تن جناب حاکم نخورد! سپس حاکم چاکران را فرمان داد هر چه جوان طلب کرد به‌عنوان پاداش به او بدهند.

جوان سر به زیر انداخت و گفت: «پادشاها! حقیر را چه به پاداش، لطف شما مرا بس! چیز زیادی نمی‌خواهیم، دستور فرمایید در خانه اول، یک دانه گندم، در خانه دوم، دو برابر خانه اول، در خانه سوم، دو برابر خانه دوم و به همین ترتیب تا به خانه آخر برسید.[1]»

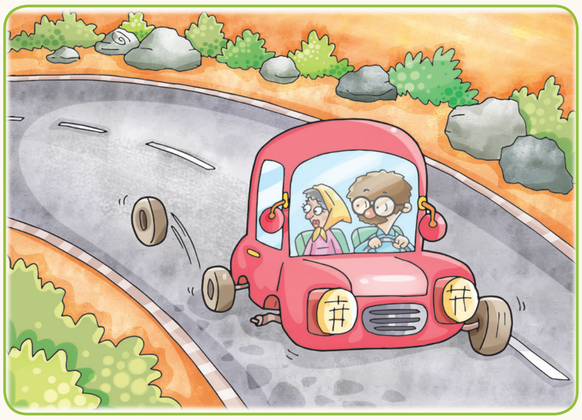
حاکم گفت: «خوشمان آمد! عجب جوان متواضع و چشم و دل سیری !» و سپس محاسبان را فرا خواند و دستور داد پاداش جوانک را محاسبه کنند. چند روز گذشت و خبری از محاسبان نشد. جناب حاکم آن‌ها را احضار کرد و علت را جویا شد. یکی از محاسبان گفت: «تمام گندم‌های موجود در انبارها کفاف حتی قسمتی از این درخواست را نمی‌کند!» به نظر شما چند گندم، پاداش جوان است؟

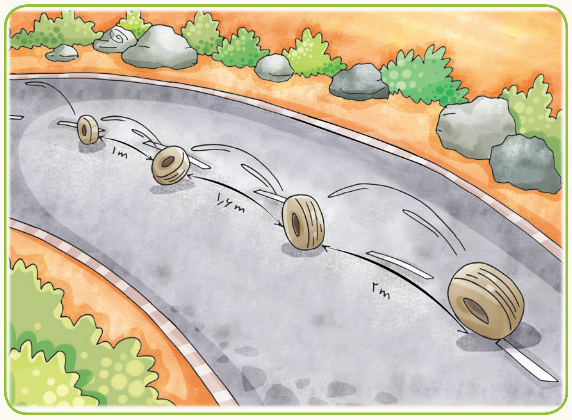
۱. طبق محاسبات صورت گرفته، برای به‌دست آوردن این مقدار گندم، کل کره زمین باید ۶ بار زیر کشت گندم برود تا به این رقم برسد!

درس اول: دنبالهٔ هندسی

معرفی دنبالهٔ هندسی

◆ فرض کنید در حال رانندگی در جاده هستید و هم‌زمان از زیبایی‌های طبیعت هم لذت می‌برید که ناگهان در یک پدیده نادر و عجیب! یکی از لاستیک‌های ماشین از جایش درآمده و به سمتی پرتاب می‌شود (حتماً در این موقع تو دلتون می‌گین خوشی به ما نیومده! میایم سفر هم لاستیک باید پرت بشه تو همون طبیعت که داریم ازش لذت می‌بریم!) لاستیک حدود ۲ متر جلوتر از شما با زمین برخورد کرده و مقداری از سرعت و انرژی خود را از دست داده و مجدداً به هوا می‌رود، حدود ۰/۸ مسافت قبل به زمین می‌رسد و مجدداً مقداری از انرژی و سرعت خود را از دست می‌دهد و به هوا می‌رود و این روند مانند قبل تکرار می‌شود. به نظر شما این لاستیک در برخورد دهم نسبت به برخورد اول، چه مسافتی را طی خواهد کرد؟





خوب بهتر است دست به کار شویم. بیایید میزان مسافت طی شده را در هر برخورد $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_{۱۰}$ در نظر بگیریم. بنابراین مراحل پرت شدن لاستیک:

$$x_{۱} = ۲m$$
$$x_{۲} = ۰/۸ \times ۲ = ۱/۶m$$
$$x_{۳} = ۰/۸ \times ۱/۶ = ۱/۲۸m$$
$$x_{۴} = ۰/۸ \times ۱/۲۸ = ۱/۰۲۴m$$

تازه مرحله سوم بود؟ حوصله ضرب و تقسیم‌های کشنده را ندارم! با اجازه شما از ادامه حل سؤال منصرف می‌شوم و محاسبات را به شما می‌سپارم ☹.

اما نه صبر کنید: حالا که دقیق‌تر نگاه می‌کنم به نظر می‌توان الگویی کشف کرد و راه حل خلاقانه و ساده‌تری را به کار برد:

$$x_{۱} = ۲m$$
$$x_{۲} = ۰/۸ \times ۲ = ۰/۸ \times x_{۱}$$
$$x_{۳} = ۰/۸ \times x_{۲} = ۰/۸ \times ۰/۸ \times x_{۱} = (۰/۸)^{۲} \times x_{۱}$$
$$x_{۴} = ۰/۸ \times x_{۳} = ۰/۸ \times (۰/۸)^{۲} \times x_{۱} = (۰/۸)^{۳} \times x_{۱}$$
$$\vdots$$
$$x_{۱۰} = ۰/۸ \times x_{۹} = (۰/۸)^{۹} \times x_{۱}$$

◆ به نظر می‌رسد خورشید دانایی از پشت ابرهای جهالت خارج شده و الگویی بس خلاقانه در دل آن متولد گشت. (فکر کنم یه کم زیاده‌روی کردم و دارم شلوغش می‌کنم. شما به دل نگیر. ذوقمو کور نکن!)

به جملات $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_{۱۰}$ دقت کنید. این جملات، دنباله‌ای ساخته‌اند که هر جمله آن، از ضرب جملهٔ قبلی در مقدار ثابت به‌دست آمده است: $۲, ۰/۸ \times ۲, (۰/۸)^{۲} \times ۲, \ldots, (۰/۸)^{۹} \times ۲$ چنین دنباله‌ای را دنباله هندسی می‌نامیم. اما طبق معمول همیشه، داستان‌گویی را باید کنار گذاشته و در پی تعاریف دقیق‌تر ریاضی باشیم:

تعریف یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به‌صورت $a, ar, ar^{۲}, \ldots$ است که در آن a جمله اولیه و $r \neq ۰$ نسبت مشترک (یا قدر نسبت) دنباله نامیده می‌شود.

هم‌چنین فرمولی برای یافتن جمله nام دنباله به‌دست آمده است که به صورت مقابل است: $a_n = ar^{n-۱}$

همان‌طور که گفته شد، هر جمله از ضرب جمله قبل در مقدار ثابت که نسبت مشترک نام دارد به‌دست می‌آید پس می‌توان ضابطه بازگشتی آن را چنین نوشت: $a_n = ra_{n-۱}$

مثال‌های آموزشی

۱) **ضابطهٔ بازگشتی و جملهٔ عمومی را برای دنبالهٔ روبه‌رو پیدا کنید.** $1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \frac{27}{125}, \dots$

پاسخ ابتدا به جملات دنباله توجه می‌کنیم و سعی می‌کنیم رابطه‌ای بین آن‌ها کشف کنیم. با کمی تفکر و تدبر! در می‌یابیم هر جمله از ضرب جملهٔ قبلی در مقدار ثابت $\frac{3}{5}$ ساخته شده است. پس حدس ما این است که پای دنبالهٔ هندسی در میان است. طبق تعریف دنبالهٔ هندسی، نیاز داریم تکلیف دو فاکتور مهم را مشخص کنیم. یکی «جملهٔ اول» و دیگری «نسبت مشترک».

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ضابطهٔ بازگشتی}: a_{n+1} = ra_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n \\ \text{جملهٔ عمومی}: a_n = a_1 r^{n-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \end{cases}$$

۲) **نسبت مشترک یک دنبالهٔ هندسی، $\frac{1}{4}$ است. اگر جملهٔ اول آن ۱۰۰ باشد، جملهٔ پنجم چند است؟**

پاسخ از فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_n = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

از طرفی جملهٔ پنجم را می‌خواهند، پس $n = 5$ و لذا داریم:

$$a_5 = 100 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 100 \times \frac{1}{256} = \frac{100}{256} \Rightarrow a_5 = \frac{100}{256}$$

۳) **جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۶۴ است. اگر جملهٔ چهارم آن ۸ باشد، نسبت مشترک را پیدا کنید.**

پاسخ همان‌طور که در مسئله گفته شده، دنبالهٔ مورد نظر هندسی است. جملهٔ اول و جملهٔ چهارم را داده‌اند و نسبت مشترک را می‌خواهند. از فرمول جملهٔ عمومی دنباله استفاده می‌کنیم و به مقصود می‌رسیم!

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_4 = a_1 r^3 \Rightarrow 8 = 64 \times r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{8}{\cancel{64}_{8}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

۴) **در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم ۸ و جملهٔ هشتم ۴۸ است. جملهٔ یازدهم چند است؟**

پاسخ می‌دانیم $a_{11} = a_1 \times r^{10}$ اما نه می‌دانیم r چند است و نه مقدار a_1 را داده‌اند و ما باید همه را پیدا کنیم!

$$\begin{cases} a_5 = a_1 \times r^4 \\ a_8 = a_1 \times r^7 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_8}{a_5} = \frac{\cancel{a_1} \times \cancel{r^7}^{\,3}}{\cancel{a_1} \times \cancel{r^4}} \Rightarrow \frac{\cancel{48}^{6}}{\cancel{8}_{1}} = r^3 \Rightarrow r^3 = 6 \Rightarrow r = \sqrt[3]{6}$$

حال توانستیم مقدار r را پیدا کنیم. با جای‌گذاری r در هر یک از فرمول‌های a_5 یا a_8 داریم:

$$8 = a_5 = a_1 \times (\sqrt[3]{6})^4 \Rightarrow 8 = a_1 \times (6\sqrt[3]{6}) \Rightarrow a_1 = \frac{8}{6\sqrt[3]{6}} = \frac{8\sqrt[3]{6^2}}{36}$$

تا حالا با سختی و مشقت بسیار توانستیم a_1 و r را پیدا کنیم. حال با افتخار داریم:

$$a_{11} = a_1 \times r^{10}$$

$$a_{11} = \frac{8}{36}\sqrt[3]{36} \times (\sqrt[3]{6})^{10}$$

۵) **جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = \frac{1}{2} \times 4^{n-1}$ است. دنبالهٔ اعضای آن‌را تا ۵ جملهٔ اول بنویسید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

پاسخ قلم در دست می‌گیریم و با نام و یاد خدا شروع می‌کنیم!

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times 4^{2-1} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \times 4^{3-1} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \times 4^{4-1} = \frac{1}{2} \times 64 = 32$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \times 4^{5-1} = \frac{1}{2} \times 4^4 = 128$$

جملات دنباله: $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128, \dots$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، جملات این دنباله در هر مرحله بزرگ‌تر می‌شوند. اگر در فرمول جملهٔ عمومی دقت کنیم a_1، $(a_1 > 0)$ یک مقداری است که در هر مرحله تغییر نمی‌کند و این نسبت مشترک است که با تغییر توان، مقدار جملهٔ دنباله را تغییر می‌دهد. اگر نسبت مشترک عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، دنباله‌ای که ساخته می‌شود، دنباله‌ای است که اعضای آن همواره در حال افزایش هستند.

نکته: در دنباله‌های هندسی اگر $a_1 > 0$ و $r > 1$ ، دنبالهٔ صعودی (افزایشی) خواهد بود.

۶) **جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{-1}{2} \times 4^{n-1}$ است. دنباله جملات آن‌را تا پنج جمله اول بنویسید و نتیجه‌گیری کنید.**

پاسخ

$$-\frac{1}{2}, -2, -8, -32, -128, \dots$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقادیر همین‌طور منفی‌تر می‌شوند پس دنباله‌ای که داریم، نزولی (کاهشی) خواهد بود.

> **نکته:** در دنباله‌های هندسی اگر $a_1 < 0$ و $r > 1$، دنباله نزولی (کاهشی) خواهد بود.

۷) **جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ است. دنباله اعضا را تا پنج جمله بنویسید و نتیجه‌گیری کنید.**

پاسخ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش مقدار n، مخرج کسر بزرگ‌تر و در نتیجه کسر کوچک‌تر می‌شود. پس دنباله نزولی است.

> **نکته:** در دنباله‌های هندسی اگر $a_1 > 1$ و $0 < r < 1$، دنباله کاهشی و اگر $a_1 < 0$ و $0 < r < 1$، دنباله افزایشی است.

۸) **جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = 1 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ است. ۵ جمله اول این دنباله را به‌دست آورید.**

پاسخ

$a_1 = 1$

$a_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{2-1} = \frac{-1}{2}$

$a_3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

$a_4 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3} = \frac{-1}{8}$

$a_5 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}$

جملات دنباله: $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، جملات این دنباله یکی در میان مثبت و منفی هستند. در این مثال، در واقع با تغییر مقدار n و ساختن یک توان زوج، مقدار جمله مثبت و با ساختن توان فرد، مقدار جمله منفی شده است!

به چنین دنباله‌هایی، دنباله متناوب گفته می‌شود.

> **نکته:** هر گاه در یک دنباله هندسی $r < 0$، دنباله هندسی، دنباله‌ای متناوب خواهد بود.

۹) **دو دنباله هندسی با جمله اولیه یکسان و نسبت‌های مشترک $r_1 = \frac{1}{3}$ و $r_2 = 3$ را در نظر بگیرید. جمله عمومی این دو دنباله را به‌دست آورید و مقادیر جملات دهم و صدم این دو دنباله را حساب کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

پاسخ

$$\begin{cases} a_n = a_1 r_1^{n-1} = a_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ a'_n = a_1 r_2^{n-1} = a_1 (3)^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{10} = a_1\left(\frac{1}{3}\right)^{9}, \; a'_{10} = a_1 (3)^{9} \\ a_{100} = a_1\left(\frac{1}{3}\right)^{99}, \; a'_{100} = a_1 (3)^{99} \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم اگر $0 < r < 1$ و $a_1 > 0$، با افزایش مقدار n، a_n کم و کمتر می‌شود تا به صفر نزدیک شود. اما اگر $r > 1$ و $a_1 > 0$، با افزایش n، مقدار a_n بیشتر می‌شود تا به بی‌نهایت برسد.

> **نکته:** برای جمع‌بندی مطالب گذشته، نیک است جدول زیر را بنگریم!

دنباله صعودی است	$r > 1$	$a > 0$
دنباله نزولی است	$r > 1$	$a < 0$
دنباله نزولی است	$0 < r < 1$	$a > 0$
دنباله صعودی است	$0 < r < 1$	$a < 0$
دنباله ثابت است	$r = 1$	$a \in \mathbb{R}$
دنباله متناوب است	$r < 0$	$a \in \mathbb{R}$

مجموع جملات دنباله هندسی

مثال لاستیک پرنده! ابتدای فصل را به خاطر بیاورید. به نظر شما این لاستیک پس از ۱۰ بار برخورد با زمین، تا چه مسافتی از ماشین جلو می‌رود؟

خیلی راحت ۱۰ جمله را به‌دست می‌آوریم و همه را با هم جمع می‌کنیم (دو دستش را بالا برده و محکم بر سرش می‌کوبد و ناله‌کنان جمع را ترک می‌کند) اما عقل سلیم به ما می‌گوید راه حل ساده‌تری هم هست! اگر خاطر شریفتان باشد، در فصل گذشته، مجموع جملات دنباله حسابی را با S_n نمایش دادیم. این نماد را برای مجموع جملات دنباله‌های هندسی هم به کار می‌بریم:

همان‌طور که می‌دانید در دنباله هندسی، جملات به‌صورت $a, ar, ar^2, \cdots$ است، پس:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

بیایید دو طرف تساوی را در r ضرب کنیم:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n \qquad (2)$$

حال رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم کنیم:

$$S_n - rS_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cdots + \cancel{ar^{n-1}} - \cancel{ar} - \cancel{ar^2} - \cancel{ar^3} - \cdots - \cancel{ar^{n-1}} - ar^n$$

آن‌چه باقی می‌ماند، خالص و ناب به‌صورت زیر است:

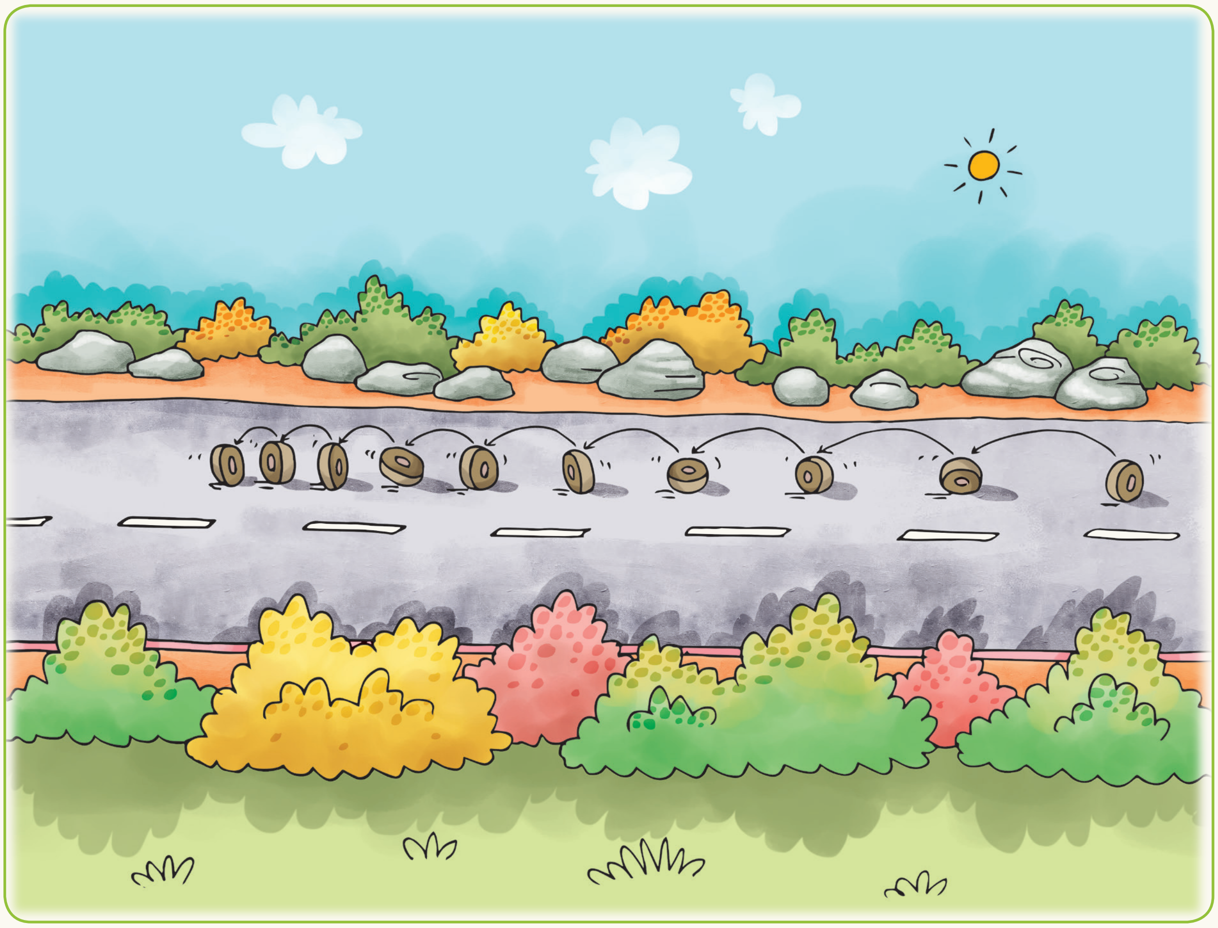
$$S_n - rS_n = a - ar^n \Rightarrow S_n(1-r) = a(1-r^n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

بنابراین در هر دنباله هندسی با جمله اولیه a_1 و نسبت مشترک r، مجموع جملات از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

و اما مثال لاستیک پرنده! در این مثال $n = 10$ ، $a = 2$ و $r = 0/8$، پس:

$$S_{10} = 2 \times \frac{1-(0/8)^{10}}{1-0/8} = 2 \times \frac{1-(0/8)^{10}}{0/2}$$



مثال‌های آموزشی

۱) در یک دنباله هندسی، جمله اول ۵ و نسبت مشترک ۲ است. مجموع ۶ جمله اول این دنباله چند است؟

پاسخ کافی است مقادیر داده شده را در فرمول مجموع جملات قرار دهیم:

$$S_n = a\times\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_6 = a\times\frac{1-r^6}{1-r} = 5\times\frac{1-2^6}{1-2} = 5\times\frac{1-64}{-1} = 5\times 63 = 315$$

۲) در یک دنباله هندسی، $a_1 - a_4 = 10$ و $S_3 = 15$، نسبت مشترک این دنباله را پیدا کنید؟

پاسخ اطلاعاتی که در اختیارتان گذاشته‌اند، کمی نامربوط به نظر می‌رسد. مجموع سه جمله اول و اختلاف دو جمله را داده‌اند و نسبت مشترک را می‌خواهند. (حتی با این کلمات نمی‌توان جملهٔ مربوط و با معنی ساخت چه برسد به پیدا کردن نسبت مشترک.) بیایید با نوشتن فرمول S_3 شروع کنیم، تا پیدا کردن جواب خدا بزرگ است ... .

$$S_3 = \frac{a_1(1-r^3)}{1-r} \Rightarrow \frac{a_1 - a_1 r^3}{1-r} = 15$$

چه جالب! می‌توان به جای $a_1 r^3$ ، مقدار a_4 را جایگزین کرد. پس داریم:

$$\frac{a_1 - a_4}{1-r} = 15 \Rightarrow \frac{10}{1-r} = 15 \Rightarrow 10 = (1-r)15 \Rightarrow \frac{10}{15} = 1-r \Rightarrow r = 1-\frac{10}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

پس نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ است.

۳) در یک دنباله هندسی مجموع ۶ جمله نخست، ۹ برابر مجموع ۳ جمله اول است. نسبت مشترک را پیدا کنید؟

پاسخ باز هم کلید حل، نوشتن فرمول مجموع جملات است:

$$S_3 = \frac{a_1(1-r^3)}{1-r}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-r^6)}{1-r}$$

$$S_6 = 9S_3 \Rightarrow \cancel{a_1}\frac{1-r^6}{\cancel{1-r}} = 9\cancel{a_1}\frac{1-r^3}{\cancel{1-r}} \Rightarrow 1-r^6 = 9(1-r^3) \Rightarrow 1-r^6 = 9-9r^3 \Rightarrow r^6 - 9r^3 + 8 = 0$$

با حل این معادله، مقدار نسبت مشترک را پیدا می‌کنیم. (اگر اتحاد یادتان باشد می‌توانید r^3 را m فرض کرده و $m^2 - 9m + 8 = 0$ را اتحاد جمله مشترک در نظر بگیرید و تجزیه را به کمک آن انجام دهید. در غیر این‌صورت با در نظر گرفتن m به جای r^3 ، می‌توان از دستور دلتا معادله را حل کرد.)

$$m^2 - 9m + 8 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow r=1 \\ m-8=0 \Rightarrow m=8 \Rightarrow r=2 \end{cases}$$

۴) در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول ۵ و نسبت مشترک ۲ باشد، مجموع ۳ جمله دوم چه‌قدر است؟

پاسخ دقت کنید که مجموع ۳ جمله دوم را می‌خواهد، یعنی $a_4 + a_5 + a_6$. اما فرمولی برای مجموع جملات دوم دنباله نداریم! مشابه روشی که در بخش دنباله حسابی داشتیم، $S_6 - S_3$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} S_6 = a_1\frac{1-r^6}{1-r} = 5\frac{1-64}{1-2} = 5\times 63 = 315 \\ S_3 = a_1\frac{1-r^3}{1-r} = 5\frac{1-8}{1-2} = 35 \end{array}\right\} \Rightarrow S_6 - S_3 = 315 - 35 = 280$$

۵) علی می‌خواهد ماشین خود را به فروش برساند. او به خریدار می‌گوید ماه اول ۱۰۰ هزار تومان، ماه بعد دو برابر ماه قبل و ماه‌های بعد به این ترتیب به او پول برگرداند. اگر ارزش اتومبیل او ۸۰ میلیون تومان باشد، پس از گذشت ۱۰ ماه، کدام‌یک سود کرده‌اند؟

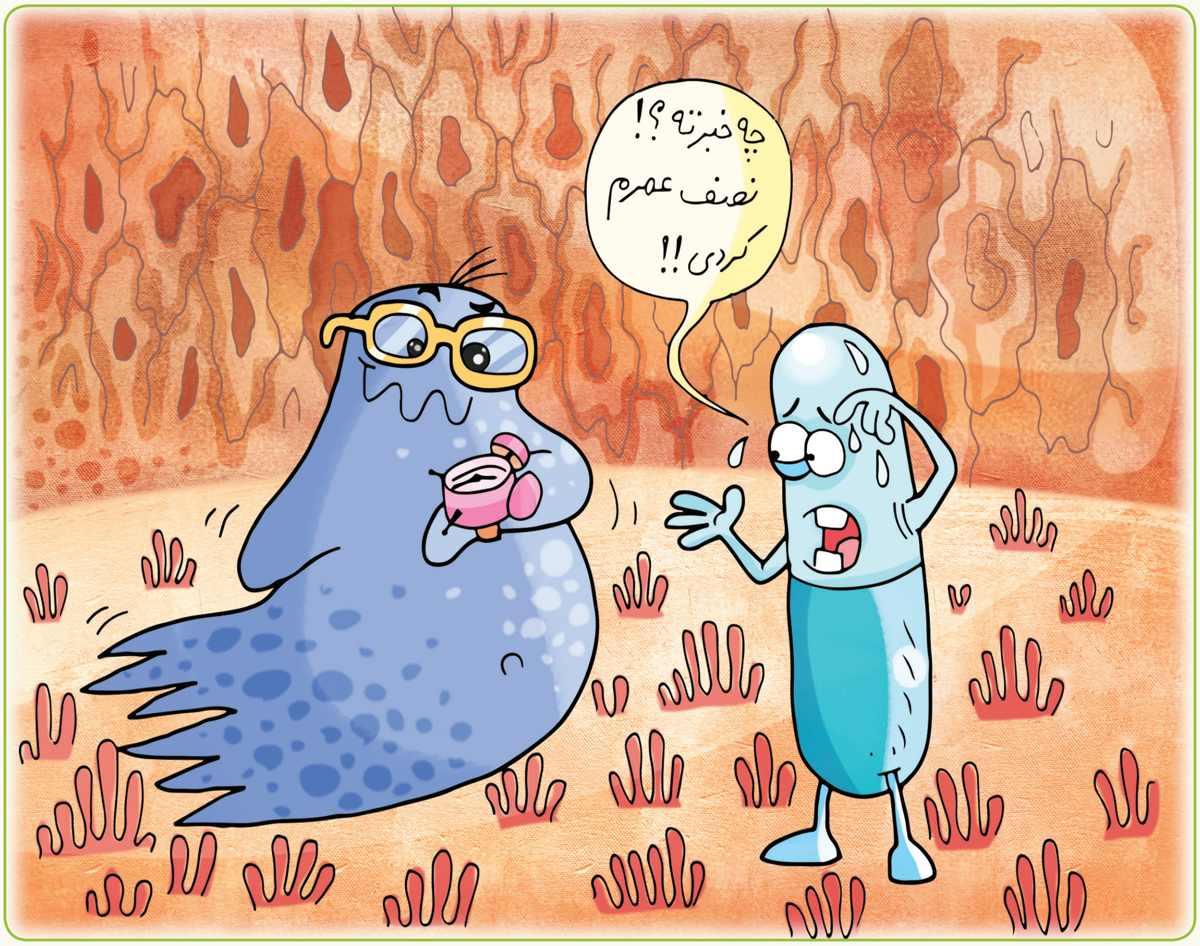
پاسخ در این سؤال باید مجموع جملات دنباله هندسی را پیدا کنیم که در آن نسبت مشترک ۲ و جمله اول ۱۰۰۰۰۰ است.

$$S_{10} = a_1\frac{1-r^{10}}{1-r} = 100000\times\frac{1-2^{10}}{1-2} = 100000\times 1023 = 102300000$$

صد و دو میلیون و سیصد هزار تومان در مجموع از خریدار دریافت کرده است. بنابراین علی حدود ۲۲ میلیون سود کرده است.

نیمه عمر

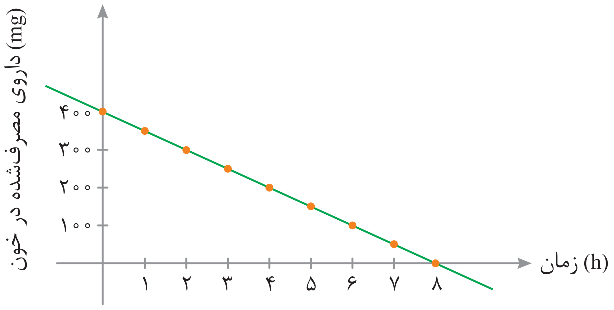
یکی از مسائل مهمی که بشر با آن برخورد کرده است، مسئله‌های مربوط به نیمه عمر است. شاید باور آن کمی سخت باشد اما با حل مسائل مربوط به نیمه عمر کربن، می‌توان قدمت فسیل‌ها را تخمین زد. با دانستن نیمه عمر داروها، می‌توان درباره انباشته شدن دارو در بدن بحث کرد تا میزان اضافه‌تر دارو در بدن جمع نشود. هم‌چنین دانستن نیمه عمر مربوط به اورانیوم و مواد پرتوزا در صنعت هسته‌ای به دلیل وجود خطرهای پرتوزایی این مواد، بسیار مهم و حیاتی است. اما این نیمه عمر دقیقاً چیست؟



باید بگوییم برخی مواد وقتی در شرایط خاصی قرار می‌گیرند، بنا به دلایلی (همگی توسط علم شیمی توجیه می‌شوند که در این مقال نمی‌گنجد!) پس از مدتی یا اثر اولیه خود را از دست می‌دهند یا از میزان اثر آن‌ها کاسته می‌شود. به مدت زمانی که این مقدار یا اثر، نصف حالت اولیه خود می‌شود، نیمه عمر می‌گویند و با $t_{\frac{1}{2}}$ نمایش می‌دهند. بنابراین نیمه عمر یک دارو، زمانی است که میزان دارو در خون، به نصف میزان اولیه زمان مصرف دارو کاهش پیدا کرده است.

در مورد حل مسائل مربوط به نیمه عمر، باید بگوییم الگوی خاصی وجود ندارد! در برخی مسائل، نیمه عمر دارو از الگوی خطی پیروی می‌کند و در برخی دیگر از الگوهای غیرخطی، البته داشتن الگوی خطی و رسیدن میزان دارو به مقدار صفر بسیار رویایی و آرمانی است و بیشتر در الگوهای غیرخطی بررسی می‌شوند. به کمک آن‌چه تاکنون در مورد الگوهای خطی و غیرخطی و مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی خوانده‌ایم، می‌توانیم میزان دارو را در نیمه عمرهای گوناگون محاسبه کنیم و میزان انباشت دارو پس از چند بار مصرف دارو را تخمین بزنیم.

مثال‌های آموزشی



۱) نمودار مقابل میزان حذف دارو در هر ساعت در بدن بیمار را نشان می‌دهد.

به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) در هر بار مصرف دارو، چه مقدار دارو وارد خون این بیمار می‌شود؟

ب) چند ساعت پس از مصرف دارو، اولین نیمه عمر اتفاق می‌افتد؟

پاسخ

همان‌گونه که مشخص است، این مسئله از الگوی خطی پیروی می‌کند. طبق مطالبی که در فصل گذشته مطالعه کردیم،

الف) عرض از مبدأ ۴۰۰ است پس $۴۰۰mg$ دارو مصرف کرده است.

ب) باید سعی کنیم جمله عمومی دنباله را مشخص کنیم. اگر خاطر شریفتان باشد! دو روش برای این کار وجود دارد. یکی نوشتن معادله خط $y = ax + b$ و دیگری استفاده از رابطه $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ است. (توجه داشته باشید که a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص، n ساعت پس از مصرف را نشان می‌دهد.) که در آن d شیب است لذا داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_n = a_۱ + nd - d \Rightarrow a_n = (a_۱ - d) + nd$$

$$d = \frac{۴۰۰-۰}{۰-۸} = -۵۰$$

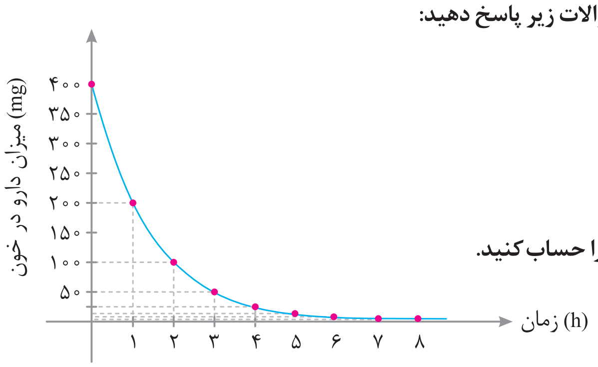
$$a_n = -۵۰n + ۴۰۰$$

پس جمله عمومی دنباله را یافتیم. حال زمانی را می‌خواهیم که میزان دارو نصف شده، یعنی ۲۰۰ میلی‌گرم!

$$۲۰۰ = -۵۰n + ۴۰۰ \Rightarrow ۵۰n = ۴۰۰ - ۲۰۰ \Rightarrow n = \frac{۲۰\cancel{۰}}{۵\cancel{۰}} = ۴$$

پس از گذشت ۴ ساعت، میزان دارو، به نصف کاهش پیدا می‌کند.

۲) نمودار زیر میزان حذف دارو در هر ساعت در بدن بیمار را نشان می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) جمله عمومی و دنباله بازگشتی مربوط به آن‌را بنویسید.

ب) میزان دارو پس از چند نیمه عمر کمتر از $۴۰mg$ است؟

ج) فرض کنید بیمار هر ۸ ساعت یک‌بار باید این دارو را مصرف کند.

اگر S_n میزان داروی موجود در خون بیمار پس از n بار مصرف دارو باشد، $S_{۱۰}$ را حساب کنید.

پاسخ

الف) این مسئله از الگوی غیر خطی پیروی می‌کند. حال جمله عمومی و رابطه بازگشتی را پیدا کنیم:

همان‌گونه که مشخص است هر جمله، نصف جمله قبلی خود است. پس نسبت مشترک آن، $r = \frac{۱}{۲}$ است. از طرفی جمله اولیه ۴۰۰ است پس طبق آن‌چه در بخش دنباله هندسی گفته شده داریم:

$$\text{جمله عمومی}: a_n = a_۱.r^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۴۰۰.(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

$$\text{رابطه بازگشتی}: a_n = ra_{n-۱} \Rightarrow a_n = \frac{۱}{۲}a_{n-۱}$$

ب) برای این قسمت دو راه حل پیشنهاد می‌شود. یکی این‌که مستقیم از روی نمودار پاسخ را حدس بزنیم (که خطای آن بسیار زیاد می‌باشد!) و دیگری از راه جمله عمومی. در سؤال گفته شده مرحله‌ای که میزان دارو کمتر از $۴۰mg$ است. پس:

$$a_n < ۴۰ \Rightarrow ۴۰۰(\frac{۱}{۲})^{n-۱} < ۴۰ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴۰۰}} (\frac{۱}{۲})^{n-۱} < \frac{۱}{۱۰}$$

اما می‌دانیم $۱۰ > ۸$ در نتیجه $\frac{۱}{۱۰} < \frac{۱}{۸}$ لذا $(\frac{۱}{۲})^{n-۱} < \frac{۱}{۸} = (\frac{۱}{۲})^۳$، پس $n-۱ > ۳$ در نتیجه $n > ۴$ پس $n = ۵$.

یک‌بار اعضای دنباله را بازنویسی می‌کنیم تا به حقایقی جدید و شگرف برسیم:

$a_۱=۴۰۰$

$a_۲=۲۰۰$

$a_۳=۱۰۰$

$a_۴=۵۰$

$a_۵=۲۵$

امّا توجه کنید $a_۱=۴۰۰$ مقدار اولیه ما است نه مقدار دارو بعد از نیمه عمر! پس منطقی‌تر این است که از تعداد نیمه عمرها حذف شود. به عبارت دیگر $n=۴$ تعداد نیمه عمرهای ما خواهد بود. نیک است یافته‌ای به این مهمی را در نکته زیر جمع‌بندی کنیم:

> **نکته:** فرض کنید $a_۱$ مقدار اولیه یک ماده باشد. میزان ماده باقی مانده پس از گذشت n نیمه عمر، از فرمول زیر محاسبه می‌شود:
>
> $$a_n=a_۱\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

بد نیست این سؤال را یکبار با این نکته بررسی کنیم:

$a_n<۴۰ \rightarrow ۴۰۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^n<۴۰ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\div ۴۰۰} \left(\frac{۱}{۲}\right)^n<\frac{۱}{۱۰}<\frac{۱}{۸} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^n<\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ \rightarrow n>۳ \rightarrow n=۴$ و مسئله تمام است.

ج)

$$S_n=a_۱\times\frac{۱-r^n}{۱-r} \Rightarrow S_{۱۰}=a_۱\frac{۱-(r)^{۱۰}}{۱-r}=۴۰۰\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}}{\underbrace{۱-\frac{۱}{۲}}_{\frac{۱}{۲}}}=۸۰۰\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\right)$$

> **نکته:** در محاسبه میزان نیمه عمر داروها که به‌صورت الگوی غیرخطی هستند. $r=\frac{۱}{۲}$. با افزایش تعداد ساعت‌ها، مقدار $a_n=a_۱r^{n-۱}$ به صفر نزدیک می‌شود ولی خود صفر نمی‌شود. چون $r^{n-۱}$ با افزایش مقدار n، کم می‌شود ولی صفر نمی‌شود. (اگر صفر شود چه می‌شود؟!)
>
> $r^{n-۱}=۰ \Rightarrow r=۰ \Rightarrow$ غیرممکن است!
>
> هم‌چنین در مورد میزان انباشت دارو در چند مصرف خواهیم داشت:
>
> $$S_n=a_۱\frac{۱-r^n}{۱-r}$$
>
> با افزایش مقدار n (nهای خیلی بزرگ) میزان r^n تقریباً به صفر نزدیک می‌شود و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. پس میزان S_n به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود.
>
> $$S_n=a_۱\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=a_۱\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲a_۱$$

یادداشت

کافه سؤال

۱ جمله دهم دنباله $۳,-۶,۱۲,\cdots$ چند است؟ این دنباله کاهشی است یا افزایشی؟

۲ در یک دنباله هندسی، جمله اول $\frac{۱}{۸}$ جمله چهارم است. جمله دهم چند برابر جمله هشتم است؟

۳ در یک دنباله هندسی، جمله چهارم ۱۶ برابر جمله دوم است. اگر جمله اول آن ۲- باشد، نسبت مشترک چند باشد تا دنباله کاهشی شود؟

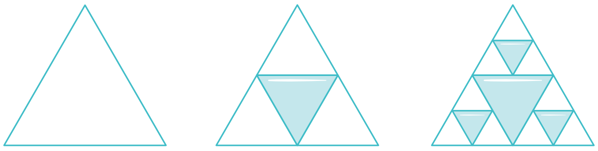
۴ در یک دنباله $t_۱=۵$ و $t_{n+۱}=۳t_n$ جمله عمومی این دنباله چیست؟

۵ در دنباله هندسی $a,b,\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶},c,\cdots$، بزرگ‌ترین جمله کدام است؟

۶ مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n=۶\times ۳^{n-۱}$ را پیدا کنید.

۷ یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر بگیرید. وسط اضلاع را به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. به این ترتیب ۴ مثلث متساوی الاضلاع برابر ایجاد می‌شود. مثلث مرکزی را رنگ‌آمیزی می‌کنیم و این روند رادر هر مرحله تکرار می‌کنیم.

اگر مساحت مثلث اولیه برابر ۵ باشد، مساحت قسمت رنگ شده در مرحله پنجم چند است؟ مرحله n ام چطور؟



۸ جمله عمومی یک دنباله هندسی به‌صورت $a_n=۵\times ۲^n$ است. حاصل عبارت روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲+\cdots+a_n^۲$$

۹ مجموع ۲۰ جمله اول دنباله هندسی $۲,\frac{۳}{۲},\frac{۹}{۸},\cdots$ چند برابر مجموع ۱۰ جمله اول آن است؟

۱۰ اگر $r=۵$، حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{(۱+r+r^۲+\cdots+r^{n-۱})(۱-r+r^۲-\cdots+r^{n-۱})}{۱-r^{۲n}}$$

گزینـهٔ چنــد؟!!!!

۱- در یک دنباله هندسی، حاصل‌ضرب جمله پنجم و هشتم، جمله دوازدهم را می‌سازد. جمله اول چند است؟

۱) ۲   ۲) ۳
۳) ۱   ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲- در یک دنباله هندسی بین سه جمله اول رابطه مقابل را داریم. a_1 چه‌قدر باشد تا جمله دهم و هفتم برابر شوند؟ $2a_2 - a_1 = a_3$

۱) ۳   ۲) ۵   ۳) ۱   ۴) هر مقدار a_1

۳- در یک دنباله هندسی، جمله پنجم برابر با ۱۴۴ و جمله سوم ۱۶ است. جمله هشتم کدام است؟

۱) 16×3^5 ۲) -16×3^5
۳) 16×3^6 ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۴- مقدار x چه‌قدر باشد تا $4, x, 36$ تشکیل یک دنباله هندسی افزایشی دهد؟

۱) ۱۲-   ۲) ۱۲   ۳) ۱۶   ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۵- جمله چندم دنباله هندسی $12, 8, \frac{16}{3}, \cdots$ برابر $\frac{64}{27}$ است؟

۱) پنجم   ۲) ششم   ۳) چهارم   ۴) سوم

۶- در یک دنباله هندسی، $S_n = 4(9^{\frac{n}{2}} - 1)$ جمله n ام کدام است؟

۱) 4×3^n ۲) $8 \times 3^{n-1}$ ۳) $4 \times 3^{n-1}$ ۴) 8×3^n

۷- در یک دنباله هندسی داریم: $2a_2 a_5 = 6a_6$ مقدار جمله اول را به‌دست آورید.

۱) ۵   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۸- مجموع چند جمله از دنباله هندسی $9, -18, 36, \cdots$ برابر با ۳۸۷ است؟

۱) ۶ جمله   ۲) ۷ جمله   ۳) ۸ جمله   ۴) ۹ جمله

۹- در یک دنباله هندسی، $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

۱) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 4$ ۲) $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^8$
۳) $2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)$ ۴) $2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1\right)$

۱۰- علی و محمد با هم قرار گذاشتند محمد روز اول ماه ۱۰ هزار تومان، روز دوم ۲۰ هزار تومان، روز سوم ۳۰ هزار تومان و به همین ترتیب تا پایان ماه به علی پول بدهد و علی روز اول ۱۰ هزار تومان، روز دوم ۲۰ هزار تومان، روز سوم ۴۰ هزار تومان و با همین روند تا پایان ماه به محمد پول بدهد. در این معامله کدام‌یک سود کرده‌اند؟

۱) علی   ۲) محمد
۳) هر کدام به یک اندازه سود کرده‌اند.   ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

درس ۲ پاسخنامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

با کمی دقت متوجه می‌شویم دنباله داده شده، یک دنباله هندسی است. ابتدا تکلیف نسبت مشترک را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} r=\frac{۱۲}{-۶}=-۲ \\ a_۱=۳ \end{cases} \Rightarrow a_n=a_۱r^{n-۱}=۳\times(-۲)^{n-۱}$$

$a_۹=a_۱\times r^۸=۳\times(-۲)^۸=۳\times ۲^۸$ مثبت است

$a_{۱۰}=a_۱\times r^۹=۳\times(-۲)^۹=-۳\times ۲^۹$ منفی است

$a_{۱۱}=a_۱\times r^{۱۰}=۳\times(-۲)^{۱۰}=۳\times ۲^{۱۰}$ مثبت است

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، $a_۹$ و $a_{۱۱}$ اعدادی مثبت و $a_{۱۰}$ عددی منفی است. بنابراین نه می‌توان گفت دنباله کاهشی و نه می‌توان گفت دنباله افزایشی است. این دنباله یک دنباله هندسی متناوب است.

۲

$$a_۱=\frac{۱}{۸}a_۴\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۸}\times a_۱\times r^۳\Rightarrow \frac{۱}{۸}\times r^۳=۱\Rightarrow r^۳=۸\Rightarrow r=۲$$

$$\frac{a_{۱۰}}{a_۸}=\frac{\cancel{a_۱}\times r^۹}{\cancel{a_۱}\times r^۷}=r^۲=۴\Rightarrow a_{۱۰}=۴a_۸$$

جمله دهم چهار برابر جمله هشتم است.

۳

ابتدا تکلیف نسبت مشترک را مشخص می‌کنیم:

$$a_۴=۱۶a_۲\Rightarrow \cancel{a_۱}r^{\cancel{۳}\,۲}=۱۶\cancel{a_۱}\cancel{r}\Rightarrow r^۲=۱۶\Rightarrow r=\pm۴$$

با حل معادله درجه دوم و ریشه‌گیری، دو مقدار ۴ و ۴- به‌دست آمد. از طرفی $a_۱$ عددی منفی است $(a_۱=-۲)$ پس اگر $r>۱$، دنباله کاهشی خواهد بود. در نتیجه $r=۴$ جواب خواهد بود.

۴

ابتدا چند جمله از این دنباله بازگشتی را می‌نویسیم:

$t_۱=۵$

$t_۲=۳\times۵=۱۵$

$t_۳=۳\times۱۵=۳^۲\times۵$

$t_۴=۳\times۳^۲\times۵=۳^۳\times۵$

$\vdots$

با ادامه این روند، متوجه می‌شویم دنبالهٔ داده شده دنبالهٔ هندسی است پس جملهٔ عمومی آن به‌صورت زیر است:

$t_n=۵\times۳^{n-۱}$

۵

در این دنباله، $a_۳=\frac{۱}{۸}$ و $a_۴=\frac{۱}{۱۶}$ در نتیجه داریم:

$$\frac{a_۴}{a_۳}=\frac{\cancel{a_۱}r^{\cancel{۳}}}{\cancel{a_۱}r^{\cancel{۲}}}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۸}}=r\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$$

چون تمام جملات مشخص شده اولاً متوالی، ثانیاً مثبت هستند، پس $a_۱>۰$. از طرفی $۰<r<۱$ پس این دنباله، یک دنباله کاهشی است. بنابراین a بزرگ‌ترین جمله این دنباله خواهد بود. پس جمله اول $(a_۱)$ را حساب می‌کنیم:

$$a_۳=a_۱r^۲=\frac{۱}{۸}\Rightarrow a_۱\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۸}\Rightarrow a_۱=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۶

از جمله عمومی داده شده به راحتی متوجه می‌شویم $a_1=۶$ و $r=۳$ پس داریم:

$$S_n=a_1\times\frac{1-r^n}{1-r}\Rightarrow S_{10}=a_1\times\frac{1-r^{10}}{1-r}=۶\times\frac{1-(۳)^{10}}{\underset{-۲}{\cancel{1-۳}}}=۳\times(۳^{10}-1)$$

۷

همان‌طور که در صورت سؤال گفته شده، در هر مرحله هر مثلث به ۴ مثلث برابر تبدیل شده که $\frac{1}{4}$ آن‌را رنگ می‌کنیم. پس در هر مرحله $\frac{1}{4}$ از قسمت‌های سفید مثلث‌ها، رنگ می‌شود. یعنی $\frac{1}{4}$ مرحله قبل خود! بیایید مسئله را جور دیگر بازگو کنیم. در هر مرحله $\frac{3}{4}$ مرحله قبلی سفید می‌ماند. بنابراین مساحت قسمت سفید در مرحله n ام برابر است با $۵\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$. اما مساحت قسمت رنگی از ما خواسته شده در نتیجه طبق اصل متمم که در بخش شمارش خواندیم، داریم:

$$۵-۵\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=۵\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

۸

بیایید چند جمله اول را به‌دست آوریم و ببینیم می‌توانیم رابطه جدیدی کشف کنیم یا نه!

$$\left.\begin{array}{l}a_1=۵\times۲=۱۰\Rightarrow a_1^2=(۵\times۲)^2\\ a_2=۵\times۴=۲۰\Rightarrow a_2^2=(۵\times۲^2)^2\\ a_3=۵\times۸=۴۰\Rightarrow a_3^2=(۵\times۲^3)^2\\ \vdots\\ a_n=۵\times۲^n\Rightarrow a_n^2=(۵\times۲^n)^2\end{array}\right\}\Rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=۵^2\times۲^2+۵^2\times(۲^2)^2+۵^2\times(۲^3)^2+\cdots+۵^2\times(۲^n)^2$$

اتفاق جالبی که افتاد این بود که دنباله جدیدی با جمله اولیه $۵^2\times۲^2$ و نسبت مشترک $۲^2=۴$ ایجاد شد پس داریم:

$$S_n=۱۰۰\times\frac{1-۴^n}{1-۴}=۱۰۰\times\frac{۴^n-1}{۳}=\frac{۱۰۰}{۳}(۴^n-1)$$

۹

ابتدا نسبت مشترک را پیدا می‌کنیم:

$$r=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{20}}{S_{10}}=\frac{\cancel{a_1}\times\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}}{\cancel{\left(1-\frac{3}{4}\right)}}}{\cancel{a_1}\times\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{\cancel{\left(1-\frac{3}{4}\right)}}}=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}\xlongequal{\text{تجزیه به کمک اتحاد مزدوج}}\frac{\cancel{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right)}\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right)}{\cancel{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}}\Rightarrow\frac{S_{20}}{S_{10}}=1+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

نکته‌ای که وجود دارد این است که چون در صورت و مخرج عملیات تفریق داریم، نمی‌توانیم به راحتی ساده کنیم و باید عبارت را تجزیه کنیم و اتحاد مزدوج راه گشای حل این مسئله است.

۱۰

توجه کنید $1،r،r^2،\cdots،r^{n-1}$ و $1،-r،r^2،-r^3،\cdots،r^{n-1}$ دنباله هندسی هستند. بنابراین:

$$S_1=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=1\times\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_2=1-r+r^2-\cdots+r^{n-1}=1\times\frac{1-(-r)^n}{1-(-r)}$$

$$\frac{(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})(1-r+r^2+\cdots+r^{n-1})}{1-r^{2n}}=\frac{\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)\left(\frac{1-(-r)^n}{1-(-r)}\right)}{1-r^{2n}}$$

یک‌بار به آخرین جمله S_2 دقت کنید،علامت پشت r^{n-1} مثبت است، پس $n-1$ عددی زوج و در نتیجه n عددی فرد خواهد بود. در نتیجه:

$$\frac{\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)\left(\frac{1-(-r)^n}{1-(-r)}\right)}{1-r^{2n}}\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{\frac{\cancel{1-r^{2n}}}{1-r^2}}{\frac{\cancel{1-r^{2n}}}{1}}=\frac{1}{1-r^2}$$

$$r=۵:\frac{1}{1-r^2}=\frac{1}{1-۲۵}=\frac{-1}{۲۴}$$

درس ۱ پاسخنامهٔ تشریحی گزینهٔ چند

۱ ۳

$$a_5\times a_8=a_{12}\Rightarrow a_1\times r^4\times a_1\times r^7=a_1\times r^{11}$$

$$\Rightarrow a_1\times \cancel{a_1}\times r^{4+7}=\cancel{a_1}\times r^{11}\Rightarrow a_1\times \cancel{r^{11}}=\cancel{r^{11}}\Rightarrow a_1=1$$

۲ ۴

بهترین راهی که به نظر می‌رسد این است که مقادیر a_3 و a_2 راجای‌گذاری کنیم:

$$2a_2-a_1=a_3\Rightarrow 2(a_1.r)-a_1=a_1.r^2 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \cancel{a_1}(2r-1)=\cancel{a_1}r^2$$

$$\Rightarrow r^2-2r+1=0 \xRightarrow{\text{اتحاد مربع کامل}} (r-1)^2=0\Rightarrow r-1=0\Rightarrow r=1$$

نسبت مشترک این دنباله، ۱ است، پس این دنباله ثابت خواهد بود. یعنی هر جمله از آن با هم برابر است. بنابراین a_1 هر عددی می‌تواند باشد.

۳ ۴

$$\begin{cases}a_5=144\\ a_3=16\end{cases}\Rightarrow \frac{a_5}{a_3}=\frac{\cancel{a_1}r^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{a_1}\cancel{r^2}}\Rightarrow \frac{144}{16}=r^2\Rightarrow r^2=9\Rightarrow r=\pm 3$$

حال که مقدار نسبت مشترک را پیدا کردیم، به کمک a_3 یا a_5 مقدار a_1 را مشخص می‌کنیم.

$$a_3=a_1r^2\Rightarrow 16=a_1\times 9\Rightarrow a_1=\frac{16}{9}$$

حال مقدار a_8 را حساب می‌کنیم:

$$a_8=a_1r^7$$

توجه کنید در a_3 ، چون r توان زوج دارد، برای ما فرقی ندارد $r=3$ یا $r=-3$. اما برای محاسبه a_8 چون r توان فرد دارد، این مسئله برایمان مهم می‌شود.

دو جواب به‌دست می‌آید:

$$1)r=3: a_8=\frac{16}{9}\times 3^7=\frac{16}{3^2}\times 3^7=16\times 3^5$$

$$2)r=-3: a_8=\frac{16}{9}\times (-3)^7=\frac{-16}{3^2}\times 3^7=-16\times 3^5$$

۴ ۲

برای حل این سؤال باید بتوانیم نسبت مشترک را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم نسبت مشترک در تمام جملات دنباله یکسان است. از این نکته استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}r=\frac{x}{4}\\ r=\frac{36}{x}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{36}{x}\Rightarrow x^2=4\times 36\Rightarrow x=\pm\sqrt{4\times 36}=\pm 2\times 6=\pm 12$$

$x=-12$ و $x=12$ می‌توانند جواب باشند. اما در صورت سؤال قید شده دنباله افزایشی است. پس $x=12$.

۵ ۱

ابتدا نسبت مشترک را پیدا می‌کنیم:

$$r=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{matrix}a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow a_n=12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ a_n=\frac{64}{27}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{64}{27}=12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{16}{\cancel{64}}}{\underset{3}{\cancel{12}}\times 27}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\Rightarrow \frac{2^4}{3^4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\Rightarrow n-1=4\Rightarrow n=5$$

۶ ۲

بیایید ابتدا ظاهر قشنگ‌تری به S_n بدهیم:

$$S_n=۴(۹^{\frac{n}{۲}}-۱)=۴\left((۳^۲)^{\frac{n}{۲}}-۱\right)=۴(۳^n-۱)$$

حال بیایید سعی کنیم ۲ جمله از آن‌را پیدا کنیم:

$$S_۱=a_۱\Rightarrow S_۱=۴(۳^۱-۱)=۸\Rightarrow a_۱=۸$$

$$\left.\begin{array}{l}S_۲=a_۱+a_۲=۸+a_۲\\ S_۲=۴(۳^۲-۱)=۳۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۸+a_۲=۳۲\Rightarrow a_۲=۳۲-۸=۲۴\Rightarrow a_۲=۲۴$$

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۲۴}{۸}=۳$$

$$a_n=a_۱r^{n-۱}=۸\times ۳^{n-۱}$$

۷ ۳

مقادیر هر کدام از جمله‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲a_۲a_۵=۶a_۶\Rightarrow ۲a_۱r\times a_۱r^۴=۶a_۱r^۵\Rightarrow \cancel{۲}a_۱^{\cancel{۲}}\cancel{r^۵}=\overset{۳}{\cancel{۶}}\,\cancel{a_۱}\cancel{r^۵}\Rightarrow a_۱=۳$$

۸ ۲

جمله اول مشخص است: $a_۱=۹$. به دنبال نسبت مشترک می‌گردیم:

$$r=\frac{-۱۸}{۹}=-۲$$

$$S_n=a_۱\frac{۱-r^n}{۱-r}\Rightarrow ۳۸۷=۹\frac{۱-(-۲)^n}{۱-(-۲)}\Rightarrow ۳۸۷=\overset{۳}{\cancel{۹}}\frac{۱-(-۲)^n}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}$$

$$\Rightarrow ۱-(-۲)^n=\frac{۳۸۷}{۳}=۱۲۹\Rightarrow (-۲)^n=-۱۲۸=(-۲)^۷\Rightarrow n=۷$$

۹ ۲

ابتدا توجه کنید فرمول اصلی دنباله هندسی به‌صورت $a_n=a_۱.r^{n-۱}$ است. در صورتی که در این سؤال $a_n=a_۱.r^n$. پس:

$$a_n=۴\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^n=۴\times\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$$

$$a_n=۲\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a_۱=۲\\ r=\frac{۱}{۲}\end{array}\right.$$

$$S_{۱۰}=a_۱\frac{۱-r^{۱۰}}{۱-r}=۲\frac{\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow S_{۱۰}=۴\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\right)=۴-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۸$$

۱۰ ۲

محمد با الگوی خطی و علی با الگوی غیرخطی پول پرداخت می‌کنند. $S_۱$ را پول پرداخت شده محمد و $S_۲$ را پول پرداخت شده توسط علی در نظر می‌گیریم:

$$S_۱=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

$$=\frac{۳۰}{۲}(۲\times ۱۰۰۰۰+۲۹\times ۱۰۰۰۰)=۱۵\times ۳۱۰۰۰۰=۴۶۵۰۰۰۰=۴۶۵\times ۱۰۰۰۰$$

$$S_۲=a_۱\frac{۱-r^{۳۰}}{۱-r}=۱۰۰۰۰\frac{۱-۲^{۳۰}}{۱-۲}=۱۰۰۰۰(۲^{۳۰}-۱)$$

برای اینکه ببینیم کدام یک سود کرده‌اند کافیست ۴۶۵ را با $(۲^{۳۰}-۱)$ مقایسه کنیم. $۲^{۱۰}$ برابر با ۱۰۲۴ خواهد بود که بیشتر از ۴۶۵ است پس $(۲^{۳۰}-۱)$ بسیار بزرگ‌تر از ۴۶۵ است. بنابراین پول پرداخت شده توسط علی بسیار بیشتر از محمد است و محمد در این معامله سود کرده است.

جمع‌بندی کنکوری درس اول

جمع‌بندی

دنباله هندسی

دنباله هندسی، دنباله‌ای به‌صورت $a, ar, ar^2, \dots$ است که در آن a جمله اولیه و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله نامیده می‌شود.

- در هر دنباله هندسی، جمله nام دنباله از ضابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به‌دست می‌آید.
- ضابطه بازگشتی هر دنباله هندسی، به‌صورت $a_n = ra_{n-1}$ است.

نکته

۱ در دنباله هندسی، اگر $r = 1$، دنباله ثابت خواهد بود.

۲ در دنباله‌های هندسی هرگاه $r < 0$، دنباله متناوب خواهد بود. (نه صعودی و نه نزولی)

حالت‌های مختلف دنبالهٔ هندسی

جدول زیر، حالت‌های مختلف دنباله هندسی را جمع‌بندی می‌کند:

دنباله صعودی است	$r > 1$	$a > 0$
دنباله نزولی است	$r > 1$	$a < 0$
دنباله نزولی است	$0 < r < 1$	$a > 0$
دنباله صعودی است	$0 < r < 1$	$a < 0$
دنباله ثابت است	$r = 1$	$a \in \mathbb{R}$
دنباله متناوب است	$r < 0$	$a \in \mathbb{R}$

مجموع جملات در دنباله‌های هندسی

مجموع n جمله اول در هر دنباله هندسی به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = a\frac{r^n-1}{r-1}$$

نکته

۱ برای پیدا کردن n جمله دوم می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$S'_n = S_{2n} - S_n$$

۲ اگر $-1 < r < 1$، و n عدد خیلی بزرگی باشد اندازه r^n خیلی کوچک می‌شود و می‌توان آن را صفر در نظر گرفت و از آن صرف‌نظر کرد. پس مقدار S_n به صورت زیر خواهد بود:

$$S_n = a\frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = a\frac{1}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

و اگر $r > 1$، مقدار r^n با افزایش مقدار n، بیشتر و بیشتر می‌شود. به گونه‌ای که سایر مقادیر در برابر آن قابل چشم‌پوشی هستند. بنابراین S_n مقدار بی‌نهایت را خواهد داشت.

نیمه عمر دارو

- زمانی است که میزان دارو در خون، به نصف میزان اولیه در زمان مصرف دارو، کاهش پیدا کرده است.
- در محاسبه میزان نیمه عمر داروها که به‌صورت الگوی غیرخطی هستند، $r = \frac{1}{2}$ در نتیجه با افزایش تعداد ساعت‌ها، مقدار $a_n = a_1 r^{n-1}$، به عدد صفر نزدیک می‌شود ولی به صفر نمی‌رسد. چون r^{n-1} با افزایش n کم می‌شود ولی صفر نمی‌شود.

فرض کنید صفر شود، در این صورت:

$r^{n-1} = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow$ دنباله تشکیل نمی‌شود.

در مورد میزان انباشت دارو، طبق نکات بخش الگوی غیرخطی، $S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ با افزایش مقدار n، میزان r^n تقریباً به صفر نزدیک می‌شود و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد و $S_n = \frac{a}{1-r}$، بنابراین S_n به یک مقدار ثابت یعنی $\frac{a}{1-r}$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

conclusion

ایستگاه کنکور

۱. مجموع بی‌شمار جمله از دنباله اعداد ... ، $\frac{8}{3}$ ، ۴ ، ۶ ، ۹ کدام است؟ سراسری انسانی ـ ۹۶

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

پاسخ

کمی به اعضای دنباله دقت می‌کنیم، نسبت مشترک دنباله $\frac{2}{3}$ است و تغییر نمی‌کند اما اختلاف اعداد متوالی متفاوت به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} 9-6=3 \\ 6-4=2 \end{cases} ;\ 3\neq 2$$

پس همه شواهد حاکی از آن است دنباله حسابی نیست. پس این یک دنباله هندسی با جمله اولیه ۹ و نسبت مشترک $\frac{2}{3}$ است.

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = 9\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = 9\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3}}$$

چون $0 < r < 1$، با افزایش مقدار n، می‌توان از r^n صرف‌نظر کرد. چون مقدار آن به صفر نزدیک می‌شود، پس داریم:

$$S_n = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 27$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

۲. در یک دنباله هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله اول آن کدام است؟ انسانی خارج از کشور ـ ۹۰

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ

هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله قبلی خودش است. پس $r=\frac{2}{3}$.

$$S_5 = a_1\frac{1-r^5}{1-r} \Rightarrow a_1\frac{1-(\frac{2}{3})^5}{1-\frac{2}{3}} = \frac{211}{27} \Rightarrow a_1\frac{1-\frac{32}{243}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{211}{27} \Rightarrow a_1\frac{\frac{243-32}{243}}{\frac{3-2}{3}} = \frac{211}{27} \Rightarrow a_1\frac{\frac{211}{243}}{\frac{1}{3}} = \frac{211}{27} \Rightarrow a_1\frac{211\times \cancel{3}}{\cancel{243}_{81}} = \frac{211}{27}$$

$$\Rightarrow a_1\frac{\cancel{211}^{1}}{\cancel{81}_{3}} = \frac{\cancel{211}^{1}}{\cancel{27}_{1}} \Rightarrow \frac{a_1}{3} = 1 \Rightarrow a_1 = 3$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

۳. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$، اگر مجموع هشت جمله اول $63\frac{3}{4}$ باشد، جمله پنجم کدام است؟ انسانی خارج از کشور ـ ۹۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ

در این سؤال $r=\frac{1}{2}$ ، $S_8 = 63\frac{3}{4}$.

$$S_8 = a_1\frac{1-r^8}{1-r} \Rightarrow a_1\frac{1-(\frac{1}{2})^8}{1-\frac{1}{2}} = 63\frac{3}{4} \Rightarrow a_1\frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = 63\frac{3}{4} = \frac{255}{4} \Rightarrow a_1\frac{\frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{255}{4} \Rightarrow a_1\frac{\cancel{255}\times \cancel{2}}{\cancel{256}_{32}} = \frac{\cancel{255}}{\cancel{4}} \Rightarrow a_1 = 32$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 32\times(\frac{1}{2})^4 = \cancel{2^5}^{2}\times\frac{1}{\cancel{2^4}} = 2$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

ایستگاه کنکور

۴. در یک دنباله هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می‌باشد. مجموع این ۶ جمله کدام است؟ انسانی خارج از کشور ـ ۹۴

۱) ۱۳۳ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۱۵

پاسخ

$$a_۱+a_۲=a_۱+a_۱r=۸۱\Rightarrow a_۱(۱+r)=۸۱$$

$$a_۵+a_۶=a_۱r^۴+a_۱r^۵=۱۶\Rightarrow a_۱r^۴(۱+r)=۱۶$$

$$\frac{\cancel{a_۱}r^۴\cancel{(۱+r)}}{\cancel{a_۱}\cancel{(۱+r)}}=\frac{۱۶}{۸۱}\Rightarrow r^۴=\frac{۱۶}{۸۱}\Rightarrow r=\pm\frac{۲}{۳}\xRightarrow{r>۰}a_۱\left(۱+\frac{۲}{۳}\right)=۸۱\Rightarrow a_۱=۸۱\times\frac{۳}{۵}=\frac{۲۴۳}{۵}$$

$$S_۶=\frac{\frac{۲۴۳}{۵}\left(۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^۶\right)}{۱-\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱۳۳}{\cancel{۳}}}{\frac{۱}{\cancel{۳}}}=۱۳۳$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۵. در یک دنباله هندسی، جمله چهارم ۸ برابر جمله اول است. اگر جمله ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن کدام است؟ سراسری انسانی ـ ۹۴

۱) ۴۷/۲۵ ۲) ۴۷/۵ ۳) ۴۷/۷۵ ۴) ۴۸/۵

پاسخ

$$a_۴=۸a_۱\Rightarrow \cancel{a_۱}r^۳=۸\cancel{a_۱}\Rightarrow r^۳=۸\Rightarrow r=۲$$

$$a_۶=a_۱r^۵=۲۴\Rightarrow a_۱\times۳۲=۲۴\Rightarrow a_۱=\frac{\overset{۳}{\cancel{۲۴}}}{\underset{۴}{\cancel{۳۲}}}=\frac{۳}{۴}$$

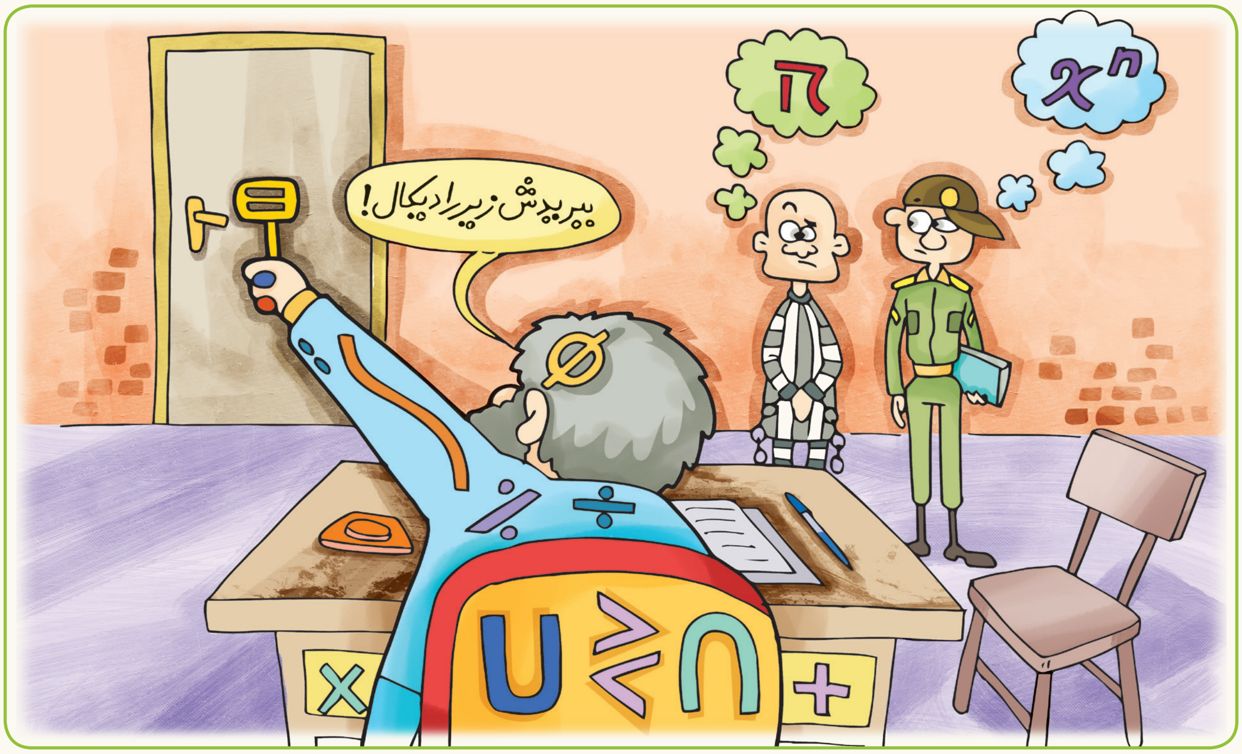
$$S_۶=a_۱\frac{۱-r^۶}{۱-r}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱-۶۴}{۱-۲}=\frac{۳}{۴}\times۶۳=\frac{۱۸۹}{۴}=۴۷/۲۵$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

درس دوم: توان‌های گویا

ریشهٔ n ام

◆ ریاضیات سرشار از مسائل متنوع و گوناگونی است که حل آنها نیازمند ۲ عامل مهم است. یکی خلاقیت و دیگری دانستن قوانین! هر عملیاتی که در ریاضیات انجام می‌شود، طبق قاعده و قانون انجام می‌شود. حتی جمع، پس بهتر است سری به کتاب قانون بزنیم و کمی قوانین محاسبات ریاضی را مطالعه کنیم.



◆ در دوره متوسطه اول، با مفاهیمی مانند توان صحیح آشنا شدید. خواندید همانطور که می‌توان $a^{۲}$ را محاسبه کرد، می‌توان برای $a^{-۲}$ هم مقداری در نظر گرفت. شاید دیدن جدول زیر خالی از لطف نباشد و بتواند به یادگیری مطالب کمک کند:

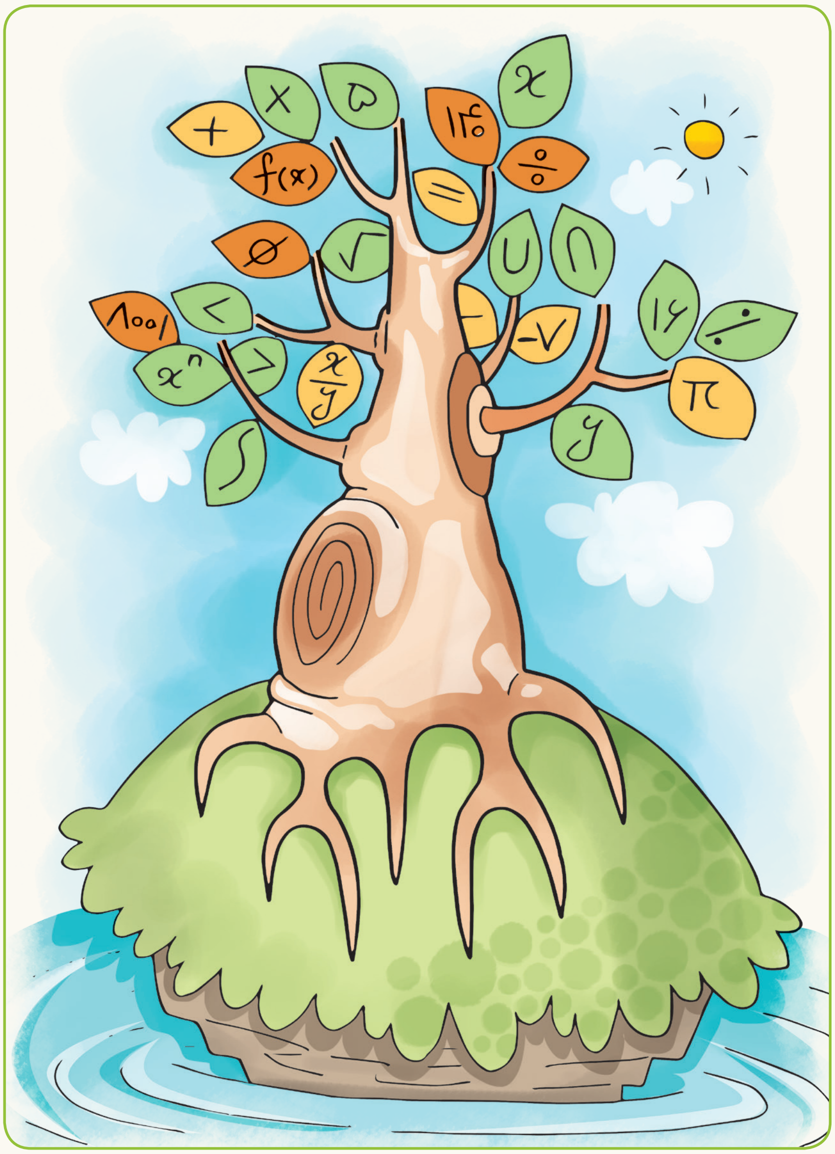
توان منفی	توان مثبت
$a^{-n}=\frac{۱}{a^n}=(\frac{۱}{a})^n$	a^n
$(a^m)^{-n}=(a^{-m})^n=a^{-mn}=(\frac{۱}{a})^{mn}$ $(a^{-m})^{-n}=a^{mn}$	$(a^m)^n=a^{mn}$
$a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$ $a^{-m}\times a^{-n}=a^{-(m+n)}=(\frac{۱}{a})^{m+n}$	$a^m\times a^n=a^{m+n}$
$a^m\times b^{-m}=a^m\times(\frac{۱}{b})^m=(\frac{a}{b})^m$ $a^{-m}\times b^{-m}=(\frac{۱}{a})^m\times(\frac{۱}{b})^m=(\frac{۱}{ab})^m$	$a^m\times b^m=(ab)^m$

نکته: توان منفی تنها نتیجه را معکوس می‌کند و هیچ اثری روی علامت اعداد نمی‌گذارد. تنها زوج و فرد بودن توان است که تاثیرگذار است. اگر توان زوج باشد، علامت مثبت و اگر توان فرد باشد، علامت منفی است.

از دیگر مطالب مهمی که با آن آشنا شدید، مفهوم ریشه دوم و ریشه سوم اعداد است. خواندید برای حل معادله $x^{2}=a$، اگر a عددی مثبت باشد، در این صورت a دارای دو ریشه دوم است که به‌صورت $x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$ نمایش داده می‌شوند. همچنین در حل معادلات به‌صورت $x^{3}=a$، $x=\sqrt[3]{a}$ ریشه سوم a در نظر گرفته می‌شود. جدول مقابل را بنگرید!

۱	$x^{2}=a \Rightarrow x=\sqrt{a}\,,\, x=-\sqrt{a}$
۲	$x^{2}=-a \Rightarrow$ x ریشه حقیقی ندارد.
۳	$x^{3}=a \Rightarrow x=\sqrt[3]{a}$
۴	$x^{3}=-a \Rightarrow x=-\sqrt[3]{a}$
۵	$\sqrt{a\pm b}\neq\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$
۶	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{b}}$

به نظر شما آیا می‌توان مفهوم ریشه را از ریشه دوم و سوم به ریشه با مقادیر بیشتر تعمیم داد؟



برای مثال آیا می‌توان ریشه پنجم اعداد را حساب کرد؟ تکلیف ریشه‌های دلخواه از یک عدد چگونه مشخص می‌شود؟

باید بگوییم به راحتی می‌توان مفهوم ریشه اعداد را به ریشه‌های چهارم، پنجم، ... و nام یک عدد تعمیم داد. در $x^{4}=a$ با شرط مثبت بودن a، $x=\sqrt[4]{a}$ و $x=-\sqrt[4]{a}$ ریشه‌های چهارم، در $x^{5}=a$، $x=\sqrt[5]{a}$ ریشه پنجم و به همین ترتیب برای n، ریشه nام تعریف می‌شوند. اما طبق معمول سعی می‌کنیم ریشه را علمی‌تر و ریشه‌ای‌تر تعریف کنیم!

فرض کنید $b^{n}=a$ در این صورت b را ریشه n ام a می‌نامیم. اما توجه به یک نکته بسیار حیاتی و مهم است. اگر n زوج باشد، ریشه nام تنها زمانی تعریف می‌شود که a مثبت باشد و با وجود چنین شرایطی، $\sqrt[n]{a}\,,\,-\sqrt[n]{a}$ ریشه‌های nام a خواهند بود.

مثال‌های آموزشی

۱) حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $(x-1)^{-2}$ ب) $(x-1)^{2}$

پاسخ الف) طبق قانون $a^{-2}=\left(\frac{1}{a}\right)^2$ پس داریم:

$$(x-1)^{-2}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2=\frac{1}{(x-1)^2}\overset{\text{اتحاد دو جمله‌ای}}{=\!=\!=}\frac{1}{x^2-2x+1}$$

ب) $(x-1)^2\overset{\text{مربع دو جمله‌ای}}{=\!=\!=}x^2-2x+1$

نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که توان منفی، روی علامت عبارت‌ها تاثیرگذار نیست. بلکه کل عبارت را معکوس می‌کند و بعد به توان می‌رساند (می‌کوبه از اول می‌سازه!)

۲) حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}$

پاسخ چون فرجه هردو یکسان است، می‌توانیم ضرب را به زیر رادیکال منتقل کنیم:

$$\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times8}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

> **نکته:** اگر a و b دو عدد حقیقی و $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند. داریم: $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$
>
> طبق این نکته. $\sqrt[4]{-8}\times\sqrt[4]{-2}$ را نمی‌توان به‌صورت $\sqrt[4]{16}$ نوشت چون $\sqrt[4]{-2}$ و $\sqrt[4]{-8}$ قابل تعریف نیستند.

۳) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt[4]{3-\sqrt{8}}\times\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}$$

پاسخ فرجه هر دو عبارت زوج است. پس برای ما مهم است مقدار زیر رادیکال مثبت است یا منفی. واضح است که $3+\sqrt{8}$ عددی مثبت است. در مورد $3-\sqrt{8}$ باید بگویم $\sqrt{8}$ حدوداً مقدار ۲/۸ را دارد پس ۲/۸ − ۳ هم عددی مثبت است.

$$\sqrt[4]{3-\sqrt{8}}\times\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}=\sqrt[4]{(3-\sqrt{8})\times(3+\sqrt{8})}\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=\!=}\sqrt[4]{9-8}=\sqrt[4]{1}=1$$

۴) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{\sqrt[5]{-64}}{\sqrt[5]{2}}$$

پاسخ فرجه هر دو عبارت فرد است پس $\sqrt[5]{-64}$ معنادار است بنابراین با خیال راحت ادامه می‌دهیم:

$$\frac{\sqrt[5]{-64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\frac{-64}{2}}=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{-2^5}=-2$$

> **نکته:** اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشد و $b\neq0$ ، داریم: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۵) حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^{25}}}\times\sqrt[6]{\sqrt[3]{2^{11}}}$

پاسخ عبارت‌های زیر رادیکال با فرجه‌های زوج همگی مثبت هستند. با خیال راحت ادامه می‌دهیم. مشابه نکاتی که برای فرجه ۲ و ۳ داشتیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^{25}}}=\sqrt[18]{2^{25}}\\ \sqrt[6]{\sqrt[3]{2^{11}}}=\sqrt[18]{2^{11}}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[18]{2^{25}}\times\sqrt[18]{2^{11}}=\sqrt[18]{2^{25}\times2^{11}}=\sqrt[18]{2^{36}}=\sqrt[18]{(2^2)^{18}}=2^2=4$$

> **نکته:** اگر $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد و m و n دو عدد طبیعی باشند. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
>
> هم‌چنین اگر $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{a^n}$ قابل تعریف باشند: $\sqrt[n]{a^n.b}=a\sqrt[n]{b}$

۶) **مقدار x را پیدا کنید.**

$$\frac{۴^۳+۴^۵}{۴^۲\times ۴^۳}=۴^x+۱$$

پاسخ ابتدا دقت کنیم چون در صورت کسر، عملیات جمع داریم، نمی‌توانیم به راحتی کسر را ساده کنیم. در این سؤال بهترین راه، فاکتورگیری است:

$$\frac{۴^۳+۴^۵}{۴^۲\times ۴^۳}=\frac{\cancel{۴^۳}(۱+۴^۲)}{۴^۲\times \cancel{۴^۳}}=۴^x+۱\Rightarrow \frac{۱+۴^۲}{۴^۲}=۴^x+۱\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۱+۴^۲=۴^۲(۴^x+۱)=۴^{x+۲}+۴^۲\Rightarrow ۴^{x+۲}=۱$$

می‌دانیم هر عدد به توان صفر، ۱ خواهد شد، بنابراین برحسب نیاز ۱ را ۴° در نظر می‌گیریم:

$$۴^{x+۲}=۴^\circ\Rightarrow x+۲=\circ\Rightarrow x=-۲$$

۷) **ابتدا مقدار x و سپس مقدار y را به‌ازای $y=x^۲$ بیابید؟**

$$x^{۱\circ}-۱\circ۲۴=\circ$$

پاسخ ابتدا مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$x^{۱\circ}-۱\circ۲۴=\circ\Rightarrow x^{۱\circ}=۱\circ۲۴\Rightarrow x^{۱\circ}=۲^{۱\circ}$$

نکته‌ای که وجود دارد این است که $۲^{۱\circ}$ و $(-۲)^{۱\circ}$ هر دو یک نتیجه را دارند. پس برای یافتن مقدار x، هر دو می‌توانند جواب معادله باشند پس $x=\pm ۲$

از طرفی $y=x^۲$، پس $y=(-۲)^۲=۲^۲=۴$. البته روش دیگری هم برای محاسبه y وجود دارد:

$$x^{۱\circ}-۱\circ۲۴=\circ\Rightarrow (x^۲)^۵=۱\circ۲۴\Rightarrow y^۵=۲^{۱\circ}=(۲^۲)^۵\Rightarrow y=۲^۲=۴$$

چون y دارای توان فرد است، علامت برایمان اهمیتی ندارد.

نکته: در حل معادلات به‌صورت $x^n=a$، اگر n عددی زوج باشد، معادله زمانی جواب دارد که a عددی مثبت باشد و جواب آن به‌صورت $x=\pm\sqrt[n]{a}$ است. اما اگر n عددی فرد باشد، مثبت و منفی بودن a اهمیتی ندارد و $x=\sqrt[n]{a}$ جواب معادله خواهد بود.

یک اشتباه رایج:

برخی از دوستان دو مفهوم جذر و ریشه‌گیری را با هم اشتباه می‌گیرند و نتایج عجیب و تاریخی به‌دست می‌آورند باید خدمت این دوستان عرض کنم هرگاه صحبت از حل معادله و یافتن جواب است، چون هم جواب مثبت و هم جواب منفی (البته در فرجه زوج) می‌توانند پاسخ باشند، هر دو علامت را به عنوان پاسخ می‌پذیریم. اما در گرفتن جذر اعداد، تنها مقدار مثبت را مدنظر داریم.

$$x^۶-۶۴=\circ\Rightarrow x=\pm ۲$$

$$\sqrt[۶]{۶۴}=۲\ ,\ \sqrt[۶]{۶۴}\neq -۲$$

توان‌های گویا

تاکنون درمورد اعداد با توان‌های صحیح به طور مفصل صحبت کردیم و قوانین محاسباتی آنها را یکی یکی مورد بررسی قرار دادیم. فرض کنید می‌خواهیم حاصل نهایی عبارتی را به‌دست آوریم که در آن هم اعداد توان‌دار حضور دارند هم رادیکالی‌ها! در این صورت شاید ظاهر مسائل کمی شلخته و بی‌ریخت به نظر برسد! بنابراین سعی می‌کنیم اعداد رادیکالی را به‌گونه‌ای بنویسیم که کمی ظاهر مسئله را خوش سیماتر و بهتر جلوه دهد! درواقع می‌خواهیم بدانیم چگونه می توان $\sqrt{a}$ را به‌صورت توانی از a نوشت:

$$\sqrt{a}=a^b\xrightarrow[\text{ضرب کنید}]{\text{دو طرف را در }\sqrt{a}}\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a}\times a^b\overset{\sqrt{a}=a^b}{\Longrightarrow}$$

$$a=a^b\times a^b=a^{b+b}\Rightarrow a^۱=a^{۲b}\Rightarrow ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

پس $\sqrt{a}=a^{\frac{۱}{۲}}$

به نظر شما در مورد $\sqrt[۳]{a}$ چه می‌توان گفت؟ $\sqrt[n]{a}$ چطور؟

به طور کلی برای هر عدد طبیعی $n\geq ۲$، داریم:

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{۱}{n}}$$

کلیه قواعد و قوانینی که برای توان‌های صحیح وجود دارد، برای توان‌های گویا هم صادق است. پس سخن کوتاه می‌کنیم و به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال‌های آموزشی

۱) حاصل $16^{-\frac{3}{4}}$ را به‌دست آورید.

پاسخ از ظاهر سؤال به نظر می‌رسد بحث جدی است! گفتیم قوانین محاسبه توان‌های گویا، مانند قوانین محاسبه توان‌های صحیح است، پس داریم:

$$16^{-\frac{3}{4}}=(2^{4})^{-\frac{3}{4}}=2^{-(\frac{3}{4}\times 4)}=2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8}$$

۲) حاصل $8^{\frac{4}{3}}\times 8^{\frac{5}{3}}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$8^{\frac{5}{3}}\times 8^{\frac{4}{3}}=8^{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}}=8^{\frac{9}{3}}=8^{3}=512$$

نکته: اگر $a^{\frac{m}{n}}$ و $a^{\frac{p}{q}}$ قابل تعریف باشند:

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

۳) در جاهای خالی علامت <=> بگذارید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $(\frac{5}{10})^{2}\ \square\ (\frac{5}{10})^{3}$

ب) $5^{2}\ \square\ 5^{3}$

ج) $(\frac{1}{1000})^{\frac{1}{2}}\ \square\ (\frac{1}{1000})^{\frac{1}{3}}$

د) $1000^{\frac{1}{2}}\ \square\ 1000^{\frac{1}{3}}$

پاسخ

الف)

$$\begin{cases}(\frac{5}{10})^{2}=\frac{25}{100}\\ (\frac{5}{10})^{3}=\frac{125}{1000}\end{cases},\ \frac{25}{100}=\frac{250}{1000}\Rightarrow \frac{250}{1000}\boxed{>}\frac{125}{1000}\Rightarrow (\frac{5}{10})^{2}\boxed{>}(\frac{5}{10})^{3}$$

ب)

$$\begin{cases}5^{2}=25\\ 5^{3}=125\end{cases}\Rightarrow 25<125\Rightarrow 5^{2}\boxed{<}5^{3}$$

ج)

$$\begin{cases}(\frac{1}{1000})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{10}\times(\frac{1}{10})^{\frac{1}{2}}\\ (\frac{1}{1000})^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{10}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{10}\times(\frac{1}{10})^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{10}\Rightarrow (\frac{1}{1000})^{\frac{1}{2}}\boxed{<}(\frac{1}{1000})^{\frac{1}{3}}$$

د)

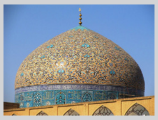
$$\begin{cases}(1000)^{\frac{1}{2}}=10\sqrt{10}\\ (1000)^{\frac{1}{3}}=10\end{cases}\Rightarrow 10\sqrt{10}>10\Rightarrow 1000^{\frac{1}{2}}\boxed{>}1000^{\frac{1}{3}}$$

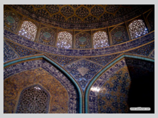
نکته: فرض کنید $\sqrt[m]{a}$ و $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشند. در این صورت، اگر $a\geq 1$، هرکدام فرجه کوچک‌تری دارد، بزرگ‌تر است و اگر $0<a<1$ هرکدام فرجه بزرگ‌تری دارد، بزرگ‌تر است. (در مورد توان‌های صحیح هم در دوره متوسطه اول مفصل بحث شده است. سعی کنید نکته‌اش را تکمیل کنید.)

| روزنامـهٔ ریاضـی (آس) ویژه‌نامهٔ ریاضی و آمار(۳) دورهٔ جدید | یکشنبه ۶ اسفند ۱۳۲۰ | شماره ۱۲۲۲ | ۱۵ صفحه | ۲۰ ریال | سردبیر: انتشارات بین‌المللی گاج

ای خواهشی که خواستنی‌تر زپاسخی
با چون تو پرسشی، چه نیازی جواب را

قیصر امین‌پور





۲ یا ۲-؟ مسئله این است...!

فرض کنید می‌خواهیم حاصل عبارت $(-32)^{\frac{1}{5}}$ را به‌دست آوریم. به همین دلیل، یک‌بار از راه‌حل شماره ۱ و یک‌بار از راه‌حل شماره ۲، این مقدار را محاسبه می‌کنیم:

راه‌حل شماره ۱: این راه بسیار ساده و پیرو قوانین مربوط به توان‌های گویا پیاده می‌شود.

$$\boxed{1}\quad (-32)^{\frac{1}{5}} = (-2^5)^{\frac{1}{5}} = (-2)^{\frac{5}{5}} = -2$$

$$\Rightarrow (-32)^{\frac{1}{5}} = -2$$

مقدار به دست آمده را در گوشه‌ای از حافظه خود بسپارید و راه‌حل بعدی را بررسی کنید:

راه‌حل شماره ۲: واضح است که $\frac{1}{5} = 2 \times \frac{1}{2\times 5}$، پس می‌توانیم به جای $\frac{1}{5}$، $\frac{2}{10}$ قرار دهیم بنابراین عبارت داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\boxed{2}\quad (-32)^{\frac{1}{5}} = (-32)^{\frac{2}{10}} = \left((-32)^2\right)^{\frac{1}{10}}$$

$$=(1024)^{\frac{1}{10}} = (2^{10})^{\frac{1}{10}} = 2 \Rightarrow (-32)^{\frac{1}{5}} = 2$$

حال دو مقدار $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ که از دو راه متفاوت ولی درست و با منطق به‌دست آورده‌اید را مقایسه کنید. بله درست است، یک عبارت دو جواب متفاوت را نتیجه داده است و این یک بی‌نظمی خطرناک در ریاضیات محسوب می‌شود. (خلاصه اینکه به دادمون برسید که ریاضی در خطر است!) برای رهایی از این بی‌نظمی، خیلی شیک و مجلسی، برای بررسی توان‌های گویا، عبارت‌ها را مثبت در نظر گرفته و عبارت‌های منفی را بررسی نمی‌کنیم. (یه جورایی میشه گفت صورت مسئله رو فعلا پاک می‌کنیم تا بعداً خدا بزرگه ...)

کافه سؤال

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}} \times \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$ ب) $\left(\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\right)^{8}$

۲ $\square$ را با علامت مناسب <=> پر کنید.

الف) $0<a<1: a^{\frac{4}{3}} \square a^{\frac{5}{3}}$ ب) $0<a<1: \sqrt[6]{a} \square \sqrt[5]{a}$

۳ حاصل عبارت‌های زیر را در حد امکان ساده کنید.

الف) $\dfrac{\sqrt[4]{x^5y^5}}{\sqrt[4]{xy}}$ ب) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}$

۴ حاصل عبارات را به ازای مقادیر خواسته شده به‌دست آورید.

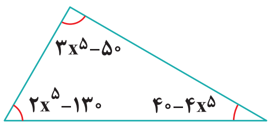
الف) $\sqrt[4]{(c-1)^4} - \sqrt[4]{(1+c)^4} , c\geq 1$ ب) $x\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x}\sqrt[3]{x\sqrt{x^2}} , x\leq 0$

۵ آیا تساوی $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ درست است؟

۶ در تساوی مقابل، مقدار n را پیدا کنید. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3n-4} = 9\times 81^{2n}$

۷ در نامساوی مقابل، مقدار n را پیدا کنید. $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\sqrt[3]{\frac{1}{16}} \geq 8$

۸ با توجه به شکل، مقدار x را مشخص کنید.



۹ کسر مقابل را گویا کنید. $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt[6]{9^2}}$

۱۰ معادله مقابل را حل کنید. $x^{12}-2x^6+1=0$

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- فرض کنید $A = \sqrt[۳]{۲۴} - \sqrt[۳]{۱۲۸}$ ، $B = \sqrt{(۳۲)^{-۱}}$ و $C = \sqrt[۳]{۳} - ۲\sqrt[۳]{۲}$ باشد، مقدار $۱ - \frac{AB}{C}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲} - ۱$ ۲) $\frac{\sqrt{۲} - ۲}{۲}$ ۳) $-(۱ + \sqrt{۲})$ ۴) $\frac{\sqrt{۲} - ۴}{۴}$

۲- حاصل عبارت $(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})\frac{۴}{\sqrt[۴]{۸}}$ کدام است؟

۱) $-۲\sqrt[۴]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۴]{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۲\sqrt[۴]{۲}}{۴}$

۳- اگر $x < ۰$ ، مقدار عبارت $\sqrt[۴]{x^۲\sqrt[۳]{x^۲\sqrt{x^۲}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{x^۳}$ ۲) $-\sqrt[۴]{x^۳}$ ۳) $\sqrt[۴]{-x^۳}$ ۴) $-x$

۴- مقدار x را از رابطهٔ $\frac{۴\sqrt[۳]{x}}{۸} = \left(۲\sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{۲\sqrt[۳]{x}}\right)$ به‌دست آورید.

۱) $\sqrt{\frac{۱}{۲۷}}$ ۲) $\pm\sqrt{۲۷}$ ۳) $\sqrt{۲۷}$ ۴) $\pm\sqrt{\frac{۱}{۲۷}}$

۵- اگر $x = ۵$ ، مقدار $\sqrt[۴]{(۱-x)^۴} + \sqrt[۳]{(-x)^۳}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۶- حاصل عبارت $A = \frac{۱۶}{\sqrt{۲\sqrt{۸\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ±۸

۷- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۵]{۱۶^۲} - ۱}{\sqrt[۶]{۸} + ۱} \times \frac{\sqrt[۶]{۸^۲} - ۱}{\sqrt[۵]{۱۶} + ۱} + (\sqrt[۵]{۱۶} + \sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۱ - ۲\sqrt[۱۰]{۲}$ ۲) $۱ + ۲\sqrt[۱۰]{۲^۳}$ ۳) $۱ + ۲\sqrt[۱۰]{۲^{۱۳}}$ ۴) $۱ - ۲\sqrt[۱۰]{۲^{۱۳}}$

۸- مقدار n چه‌قدر باشد تا حاصل $\sqrt{۱۱ - ۲\sqrt[۴]{n}}$ برابر ۳ شود؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ±۱ ۴) ±۲

۹- اگر $x = \sqrt[۴]{۳}$ ، حاصل عبارت $x^۵ + ۲x^۴ - ۳x^۳ - ۳x$ کدام است؟

۱) $۶ + ۳\sqrt[۴]{۳}$ ۲) $۶ - ۳\sqrt[۴]{۳}$ ۳) $۶ + ۳\sqrt[۴]{۲۷}$ ۴) $۶ - ۳\sqrt[۴]{۲۷}$

۱۰- حاصل عبارت $۹^{۰/۲۵} + \frac{۴^{۰/۷۵}}{۱ + ۲^{۰/۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۳} + \sqrt{۲}}{۱ + \sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۳} + ۲\sqrt{۲}}{۱ + \sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶} - ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$

درس ۲ پاسخنامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

الف) فرجه هر دو عبارت یکسان است، پس می‌توانیم عبارت‌های زیر را درهم ضرب کنیم:

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=\sqrt[4]{49-(4\sqrt{3})^2}=\sqrt[4]{49-(16\times 3)}=\sqrt[4]{49-48}=1$$

البته توجه به این نکته بسیار اهمیت دارد که $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ و $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$ هر دو قابل تعریف هستند.

ب) برای حل این سؤال تنها به این نکته توجه می‌کنیم که $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$، بنابراین داریم:

$$(\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}})^8=((3\sqrt{3\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}})^8=(3\sqrt{3\sqrt{3}})^{\frac{8}{2}}=3^4\times(\sqrt{3\sqrt{3}})^4$$

$$=3^4\times\left((3\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right)^4=3^4\times(3\sqrt{3})^{\frac{4}{2}}=3^4\times 3^2\times(\sqrt{3})^2=3^4\times 3^2\times 3=3^7$$

۲

الف) به این نکته توجه داریم که $0<a<1$ در این صورت $a^4>a^5$. اگر از دو طرف نامساوی جذر با فرجه ۳ بگیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند، پس $a^{\frac{4}{3}}>a^{\frac{5}{3}}$

ب) چون $0<a<1$، از $\sqrt[4]{a}$ و $\sqrt[5]{a}$، هر کدام فرجه کمتری دارد، بزرگ‌تر است پس $\sqrt[5]{a}<\sqrt[4]{a}$

۳

الف) توجه داریم هر دو رادیکال که در صورت و مخرج قرار دارند، فرجه یکسان دارند. پس می‌توان هردو را زیر رادیکال، بر هم تقسیم کرد و چون فرجه زوج است، داشتن قدرمطلق از نان شب هم واجب‌تر است.

$$\frac{\sqrt[4]{x^5y^5}}{\sqrt[4]{xy}}=\sqrt[4]{\frac{x^5y^5}{xy}}=\sqrt[4]{x^4y^4}=|xy|$$

ب) همانطور که ملاحظه می‌شود فرجه رادیکال‌ها یکسان نیست اما این دلیل خوبی برای کنار کشیدن ما از حل سؤال نیست! سعی می‌کنیم عبارات را با توان‌های گویا بنویسیم:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{6+4\sqrt{2}}=(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\times(6+4\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}\underline{\underline{\frac{1}{3}=\frac{2}{6}}}(2\sqrt{2})^{\frac{2}{6}}\times(6+4\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}$$

$$=\left((2\sqrt{2})^2\right)^{\frac{1}{6}}\times(6+4\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}\times(6+4\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}=(48+32\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}$$

به نظر می‌رسد از این ساده‌تر نمی‌شود!

۴

الف) هر دو عبارت زیر رادیکال، می‌توانند از رادیکال خارج شوند. امّا چون فرجه زوج است، به میدان مین قدرمطلق می رسیم!

$$\sqrt[4]{(c-1)^4}-\sqrt[4]{(1+c)^4}=|c-1|-|1+c|$$

از طرفی در مسئله گفته شده $c\ge 1$. در چنین شرایطی $c-1\ge 1-1=0$، پس $c-1\ge 0$. واضح است که $1+c\ge 2$ خواهد بود بنابراین در هر صورت مثبت است و عبارت‌ها، قدرمطلق را با علامت مثبت ترک می‌کنند!

$$|c-1|-|1+c|=c-1-(1+c)=c-1-1-c=-2$$

ب) از داخلی‌ترین عبارت زیر رادیکال‌ها شروع می‌کنیم یعنی $\sqrt{x^2}$ و $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$. حاصل این عبارت به ترتیب $|x|$ و $\left|\frac{1}{x}\right|$ است و چون $x\le 0$، پس:

$$\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{-1}{x},|x|=-x$$

$$x\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}}}+\frac{1}{x}\sqrt[3]{x\sqrt{x^2}}=x\sqrt[3]{\frac{1}{x}\times\frac{-1}{x}}+\frac{1}{x}\sqrt[3]{x(-x)}$$

سعی می‌کنیم x و $\frac{1}{x}$ را هم داخل رادیکال ببریم. می‌دانیم $\sqrt[3]{x^3}=x$ و $\frac{1}{x}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}$، پس:

$$x\sqrt[3]{\frac{-1}{x^2}}+\frac{1}{x}\sqrt[3]{-x^2}=\sqrt[3]{\frac{-x^3}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{-x^2}{x^3}}=\sqrt[3]{-x}+\sqrt[3]{\frac{-1}{x}}$$

۵

در مورد تساوی $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$، باید بگوییم اگر $\sqrt[m]{a}$ و $\sqrt[n]{a}$ هر دو قابل تعریف باشند، رخ می‌دهد. در این صورت طبق نکاتی که در طول درس با آن آشنا شدیم، داریم:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\Rightarrow\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

۶

می‌خواهیم n را به‌دست آوریم. بنابراین در دو طرف تساوی باید پایه‌های یکسان داشته باشیم اما میان آنها تفاوت از زمین تا آسمان است! شواهد حاکی از آن است که باید از تمام نکات گفته شده استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳n-۴}=۳^{-(۳n-۴)}=۳^{۴-۳n}\\ ۹\times ۸۱^{۲n}=۳^{۲}\times(۳^{۴})^{۲n}=۳^{۲}\times ۳^{۸n}=۳^{۸n+۲}\end{array}\right\}\Rightarrow ۳^{۴-۳n}=۳^{۸n+۲}$$

$$\Rightarrow ۴-۳n=۸n+۲\Rightarrow ۴-۲=۳n+۸n\Rightarrow ۲=۱۱n\Rightarrow n=\frac{۲}{۱۱}$$

۷

مشابه سؤال قبل، همهٔ پایه‌ها را یکسان می‌کنیم!

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{n-۱}=\left(\frac{۱}{۲^{۲}}\right)^{n-۱}=(۲^{۲})^{۱-n}=۲^{۲-۲n}\\ \sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۶}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲^{۴}}}=\sqrt[۳]{۲^{-۴}}=۲^{\frac{-۴}{۳}}\\ ۸=۲^{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow ۲^{۲-۲n}\times ۲^{\frac{-۴}{۳}}\geq ۲^{۳}\Rightarrow ۲^{\frac{۲}{۳}-۲n}\geq ۲^{۳}$$

تا اینجای کار داریم: $۲^{\frac{۲}{۳}-۲n}\geq ۲^{۳}$ سؤالی که پیش می‌آید این است که چه زمانی طرف چپ، از طرف راست نامساوی بیشتر می‌شود. چون پایه‌ها همگی یکسان و بیشتر از ۱ هستند $(a\geq ۱)$ پس زمانی که توان بیشتر باشد، مقدار عبارتش هم بیشتر می‌شود:

$$۲^{\frac{۲}{۳}-۲n}\geq ۲^{۳}\Rightarrow \frac{۲}{۳}-۲n\geq ۳\Rightarrow \frac{۲}{۳}-۳\geq ۲n\Rightarrow -\frac{۷}{۳}\geq ۲n\Rightarrow \frac{\frac{-۷}{۳}}{\frac{۲}{۱}}\geq n\Rightarrow \frac{-۷}{۶}\geq n$$

۸

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است، پس:

$$۳x^{۵}-۵۰+۲x^{۵}-۱۳۰+۴۰-۴x^{۵}=۱۸۰\Rightarrow ۳x^{۵}+۲x^{۵}-۴x^{۵}=۱۸۰+۱۳۰+۵۰-۴۰$$

$$\Rightarrow x^{۵}=۳۲۰\Rightarrow x=\sqrt[۵]{۳۲۰}=\sqrt[۵]{۲^{۵}\times ۱۰}=۲\sqrt[۵]{۱۰}$$

۹

روش اول: برای گویا کردن کسر باید کاری کنیم مخرج کسر، رادیکالی نباشد، بنابراین داریم:

$$\sqrt[۶]{۹^{۲}}=(۳^{۲})^{\frac{۲}{۶}}=۳^{\frac{۴}{۶}}=۳^{\frac{۲}{۳}}$$

به نظر شما $۳^{\frac{۲}{۳}}$ در چه عددی ضرب شود تا توان کسری خود را از دست بدهد؟

$$۳^{\frac{۲}{۳}}\times ۳^{x}=۳^{۱}\Rightarrow ۳^{\frac{۲}{۳}+x}=۳^{۱}\Rightarrow \frac{۲}{۳}+x=۱\Rightarrow x=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

پس صورت و مخرج کسر را در $۳^{\frac{۱}{۳}}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۴\sqrt{۳}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{۳^{\frac{۲}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۴\times ۳^{\frac{۱}{۲}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{۳}=\frac{۴\times ۳^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}}{۳}=\frac{۴\times ۳^{\frac{۵}{۶}}}{۳}=\frac{۴\times\sqrt[۶]{۳^{۵}}}{۳}$$

روش دوم:

$$\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt[۶]{۹^{۲}}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt[۶]{(۳^{۲})^{۲}}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt[۶]{۳^{۴}}}\times\frac{\sqrt[۶]{۳^{۲}}}{\sqrt[۶]{۳^{۲}}}=\frac{۴\sqrt{۳}\times\sqrt[۶]{۳^{۲}}}{\sqrt[۶]{۳^{۶}}}=\frac{۴\times ۳^{\frac{۱}{۲}}\times ۳^{\frac{۲}{۶}}}{۳}=\frac{۴\times ۳^{\frac{۱}{۲}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{۳}=\frac{۴\times ۳^{\frac{۵}{۶}}}{۳}=\frac{۴}{۳}\sqrt[۶]{۳^{۵}}$$

۱۰

با یک ترفند ساده، می‌توان این سؤال را به راحتی حل کرد می‌دانیم $x^{۱۲}=(x^{۶})^{۲}$. بیایید به جای $x^{۶}$، مقدار دیگری مثل y قرار دهیم: یعنی $y=x^{۶}$، بنابراین:

$$\begin{cases}x^{۱۲}=y^{۲}\\ x^{۶}=y\end{cases}$$

$$x^{۱۲}-۲x^{۶}+۱=y^{۲}-۲y+۱=۰$$

به نظر شما جالب نیست؟! به اتحاد مربع دو جمله‌ای تبدیل شد.

$$y^{۲}-۲y+۱=(y-۱)^{۲}=۰\Rightarrow y-۱=۰\Rightarrow y=۱$$

از طرفی $y=x^{۶}$ پس:

$$x^{۶}=۱\Rightarrow |x|=۱\Rightarrow x=\pm ۱$$

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی گزینهٔ چند

۱ ۴

مقدار A ، B و C را جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{AB}{C}=\frac{(\sqrt[۳]{۲۴}-\sqrt[۳]{۱۲۸})(\sqrt{(۳۲)^{-۱}})}{\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۲}}=\frac{(۲\sqrt[۳]{۳}-۴\sqrt[۳]{۲})(\sqrt{\frac{۱}{۳۲}})}{\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\cancel{۲}\cancel{(\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۲})}\left(\frac{۱}{\cancel{۴}_{۲}}(\sqrt{\frac{۱}{۲}})\right)}{\cancel{(\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۲})}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

حال جواب را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow\frac{AB}{C}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow\frac{AB}{C}-۱=\frac{\sqrt{۲}}{۴}-۱=\frac{\sqrt{۲}-۴}{۴}$$

۲ ۱

برای حل این سوال ابتدا تکلیف حاصل‌ضرب پرانتزها را مشخص می‌کنیم. همه چیز برای به کار بردن اتحاد مزدوج فراهم است. پس:

$$(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})=(\sqrt{۲})^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}=۲-۳=-۱$$

حال به سراغ بقیه عبارت می‌رویم:

$$\left(\frac{۴}{\sqrt[۴]{۸}}\right)(-۱)=\frac{-۴}{۸^{\frac{۱}{۴}}}=\frac{-۲^{۲}}{۲^{\frac{۳}{۴}}}=-۲^{۲-\frac{۳}{۴}}=-۲^{\frac{۵}{۴}}=-\sqrt[۴]{۲^{۵}}=-\sqrt[۴]{۲^{۴}\times۲}=-\sqrt[۴]{۲^{۴}}\times\sqrt[۴]{۲}=-۲\sqrt[۴]{۲}$$

۳ ۳

از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم و به ترتیب جلو می‌رویم:

$$\sqrt{x^{۲}}=|x|\xrightarrow{x<۰}|x|=-x$$

$$\sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x^{۲}}}=\sqrt[۳]{x^{۲}(-x)}=\sqrt[۳]{-x^{۳}}=-x$$

$$\sqrt[۴]{x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x^{۲}}}}=\sqrt[۴]{x^{۲}(-x)}=\sqrt[۴]{-x^{۳}}$$

اگر $x<۰$ در این صورت $x^{۳}<۰$، پس $-x^{۳}$ عددی مثبت خواهد بود و در نتیجه $\sqrt[۴]{-x^{۳}}$، قابل تعریف است. توجه داشته باشید $\sqrt[۴]{-x^{۳}}\neq-\sqrt[۴]{x^{۳}}$ چون $x^{۳}<۰$ و $\sqrt[۴]{x^{۳}}$ قابل تعریف نیست.

۴ ۴

ابتدا تکلیف سمت چپ تساوی را مشخص می‌کنیم:

$$۲\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{x}}\xlongequal{\text{مخرج مشترک}}\frac{(۲\sqrt[۳]{x})^{۲}-۱}{۲\sqrt[۳]{x}}=\frac{۴\sqrt[۳]{x^{۲}}-۱}{۲\sqrt[۳]{x}}$$

$$\frac{۴\sqrt[۳]{x^{۲}}-۱}{۲\sqrt[۳]{x}}=\frac{\cancel{۴}^{۱}}{\cancel{۸}_{۲}}\sqrt[۳]{x}\xlongequal{\text{طرفین وسطین}}۸\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲=۲\sqrt[۳]{x^{۲}}$$

$$\Rightarrow۸\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x^{۲}}=۲\Rightarrow۶\sqrt[۳]{x^{۲}}=۲\Rightarrow\sqrt[۳]{x^{۲}}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{دو طرف}}x^{۲}=\frac{۱}{۲۷}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲۷}}$$

۵ ۱

ابتدا تکلیف رادیکال‌ها را مشخص می‌کنیم. $\sqrt[۳]{(-x)^{۳}}=-x$ چون فرجه فرد است و $\sqrt[۴]{(۱-x)^{۴}}=|۱-x|$ چون فرجه زوج است. به دومین مین یعنی قدرمطلق می‌رسیم. اگر به جای x، مقدار ۵ را جای‌گذاری کنیم، $۱-x$ منفی خواهد شد. پس $|۱-x|=x-۱$ و در نتیجه $|۱-x|=x-۱=۴$ از طرفی $-x=-۵$ پس:

$$\sqrt[۳]{(-x)^{۳}}+\sqrt[۴]{(۱-x)^{۴}}=-x+|۱-x|=-۵+۴=-۱$$

۶ ۲

از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{8\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$$

$$\Rightarrow\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{\frac{1}{4}}}}=\sqrt{2\times 2}=\sqrt{4}=2\Rightarrow A=\frac{16}{2}=8$$

توجه کنید در این سؤال ریشه‌گیری انجام نمی‌دهیم پس گزینه (۴) درست نیست.

۷ ۲

سعی می‌کنیم رادیکال‌ها را به‌صورت اعداد توان‌دار بنویسیم:

$$\frac{\sqrt[6]{8^2}-1}{\sqrt[5]{16}+1}\times\frac{\sqrt[5]{16^2}-1}{\sqrt[6]{8}+1}=\frac{8^{\frac{2}{6}}-1}{16^{\frac{1}{5}}+1}\times\frac{16^{\frac{2}{5}}-1}{8^{\frac{1}{6}}+1}$$

به کمک تجزیه با اتحاد مزدوج، داریم:

$$\frac{(8^{\frac{1}{6}}-1)\cancel{(8^{\frac{1}{6}}+1)}}{\cancel{16^{\frac{1}{5}}+1}}\times\frac{(16^{\frac{1}{5}}-1)\cancel{(16^{\frac{1}{5}}+1)}}{\cancel{8^{\frac{1}{6}}+1}}=(8^{\frac{1}{6}}-1)(16^{\frac{1}{5}}-1)\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}1-(8^{\frac{1}{6}}+16^{\frac{1}{5}})+8^{\frac{1}{6}}\times 16^{\frac{1}{5}}=1-(2^{\frac{3}{6}}+2^{\frac{4}{5}})+2^{\frac{3}{6}}\times 2^{\frac{4}{5}}$$

$$=1+2^{\frac{13}{10}}-(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{4}{5}})$$

حالا که تکلیف ضرب مشخص شد، به سراغ عملیات جمع می‌رویم:

$$\cancel{(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{4}{5}})}+1+2^{\frac{13}{10}}-\cancel{(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{4}{5}})}=1+2^{\frac{13}{10}}=1+\sqrt[10]{2^{13}}=1+2\sqrt[10]{2^{3}}$$

> **نکته:** همیشه سعی کنید ابتدا تکلیف پرانتزها و عبارات داخل آن را مشخص کنید. بعد توان، بعد ضرب و تقسیم و در نهایت به سراغ جمع و تفریق بروید. همانطور که می‌دانید در محاسبات، اولویت اول با پرانتز، سپس توان، بعد ضرب و تقسیم و در آخر جمع و تفریق است.

۸ ۲

$$\sqrt{11-2\sqrt[4]{n}}=3\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}11-2\sqrt[4]{n}=9\Rightarrow 11-9=2\sqrt[4]{n}$$

$$\Rightarrow 2=2\sqrt[4]{n}\Rightarrow 1=\sqrt[4]{n}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۴}}n=1$$

۹ ۴

$$x^5+2x^4-3x^3-3x=(\sqrt[4]{3})^5+2(\sqrt[4]{3})^4-3(\sqrt[4]{3})^3-3\sqrt[4]{3}$$

$$=3^{\frac{5}{4}}+2\times 3-3\times 3^{\frac{3}{4}}-3\times 3^{\frac{1}{4}}=\cancel{3\times 3^{\frac{1}{4}}}+2\times 3-3\times 3^{\frac{3}{4}}-\cancel{3\times 3^{\frac{1}{4}}}=6-3\times 3^{\frac{3}{4}}=6-3\sqrt[4]{27}$$

۱۰ ۲

یا خدا! توان اعشاری؟! مگه داریم؟ مگه میشه؟ اما یک لحظه صبر کنید:

$$0/75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}\ ,\ 0/25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\ ,\ 0/5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

با در نظرگرفتن این مقادیر:

$$\frac{4^{0/75}}{1+2^{0/5}}+9^{0/25}=\frac{4^{\frac{3}{4}}}{1+2^{\frac{1}{2}}}+9^{\frac{1}{4}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{4^{\frac{3}{4}}+9^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{2}}\times 9^{\frac{1}{4}}}{1+2^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\frac{6}{4}}+3^{\frac{2}{4}}+2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{2}{4}}}{1+2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{1}{2}}+(2\times 3)^{\frac{1}{2}}}{1+2^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}}$$

جمع‌بندی کنکوری درس دوم

conclusion

ریشه nام و توان‌های گویا

فرض کنید $b^n = a$ در این صورت b را ریشه nام a می‌نامیم. اگر n زوج باشد، ریشه nام تنها زمانی تعریف می‌شود که a مثبت باشد و با درنظر گرفتن این شرایط، $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ ریشه‌های nام a خواهند بود. همچنین اگر n فرد بود، مثبت یا منفی بودن a خیلی اهمیت ندارد و $\sqrt[n]{a}$ ریشه nام a در نظر گرفته می‌شود.

نکته

۱ اگر a و b دو عدد حقیقی و $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند. داریم:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

۲ اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قابل تعریف باشند و $b\neq ۰$، داریم:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

۳ اگر $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشد و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

۴ اگر $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{a^n}$ قابل تعریف باشند، داریم:

$$\sqrt[n]{a^n\times b}=a\sqrt[n]{b}$$

البته توجه به این نکته ضروری است که اگر n عددی زوج باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{a^n\times b}=|a|\sqrt[n]{b}$$

۵ در حل معادلات به‌صورت $x^n=a$، اگر n عددی زوج باشد، معادله زمانی جواب دارد که a عددی مثبت باشد و جواب آن به‌صورت $x=|\sqrt[n]{a}|$ است اما اگر n عددی فرد باشد، مثبت یا منفی بودن a اهمیتی ندارد و $x=\sqrt[n]{a}$ جواب معادله خواهد بود.

۶ هرگاه صحبت از حل معادله و یافتن ریشه در میان بود، برای توان‌های زوج، دو جواب (یکی مثبت و دیگری منفی) خواهیم داشت. اما در جذرگیری معمولی از اعداد، نباید مثبت و منفی در نظر بگیریم.

$$\sqrt{۱۶}=۴,\ x^۲=۱۶\Rightarrow x=\pm۴$$

۷ به طور کلی برای هر عدد طبیعی $n\geq ۲$ داریم:

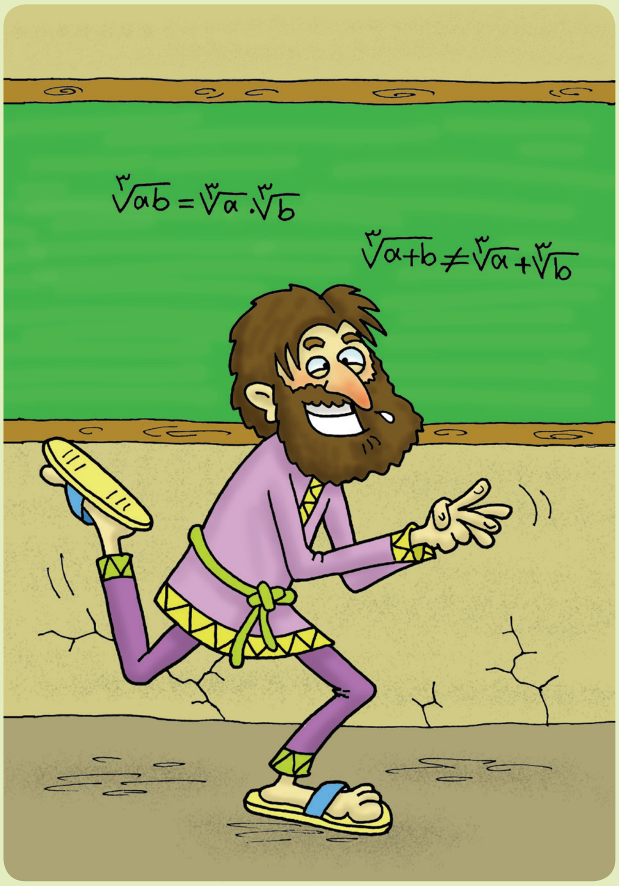
$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{۱}{n}}$$

۸ اگر $a^{\frac{m}{n}}$ و $a^{\frac{p}{q}}$ قابل تعریف باشند، داریم:

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

۹ فرض کنید $\sqrt[m]{a}$ و $\sqrt[n]{a}$ قابل تعریف باشند، در این صورت اگر $a\geq ۱$، هر کدام فرجه کوچکتری دارد، بزرگتر است و اگر $۰<a<۱$، هر کدام فرجه بزرگتری دارد، بزرگتر است.

۱۰ اگر عددی منفی به توان یک عدد زوج برسد، نتیجه عددی مثبت است. توان منفی تنها نتیجه را معکوس می‌کند و هیچ اثری روی علامت اعداد نمی‌گذارند و تنها توان است که تاثیرگذار است.



توان

فرجه فرد	فرجه زوج
$x^n=a\Rightarrow x=a^{\frac{۱}{n}}$	$x^n=a\Rightarrow x=\lvert a^{\frac{۱}{n}}\rvert$
$x^n=-a\Rightarrow x=-a^{\frac{۱}{n}}$	$x^n=-a\Rightarrow$ x ریشه حقیقی ندارد

توان مثبت	توان منفی
a^n	$a^{-n}=\frac{۱}{a^n}=(\frac{۱}{a})^n$
$(a^m)^n=a^{mn}$	$(a^m)^{-n}=(a^{-m})^n=a^{-mn}$ $(a^{-m})^{-n}=a^{mn}$
$a^m\times a^n=a^{m+n}$	$a^{-m}\times a^n=a^{n-m}$ $a^{-m}\times a^{-n}=a^{-(m+n)}=(\frac{۱}{a})^{m+n}$
$a^m\times b^m=(ab)^m$	$a^m\times b^{-m}=\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m$ $a^{-m}\times b^{-m}=(\frac{۱}{ab})^m$

نکته

اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{a\pm b}$ قابل تعریف باشند. آنگاه:

$$\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$$

جمع‌بندی

ایستگاه کنکور

۱. حاصل عبارت $\frac{۲}{۳-\sqrt{۷}}+\sqrt{(۲-\sqrt{۷})^۲}-\sqrt{۲۸}+\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}}$ کدام است؟ **انسانی خارج از کشور ـ ۹۶**

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $۲+\sqrt{۷}$

پاسخ

ابتدا تکلیف $\sqrt{(۲-\sqrt{۷})^۲}$ را مشخص می‌کنیم. می‌دانیم $\sqrt{۷}>۲$ پس $\sqrt{۷}-۲>۰$ در نتیجه $\sqrt{(۲-\sqrt{۷})^۲}=\sqrt{۷}-۲$ (چون مقدار زیر رادیکال با فرجه زوج همیشه باید زوج باشد)

$$\frac{۲}{۳-\sqrt{۷}}+\sqrt{(۲-\sqrt{۷})^۲}-\underbrace{\sqrt{۲۸}}_{\sqrt{۴\times۷}}+\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۳-\sqrt{۷}}+\sqrt{۷}-۲-۲\sqrt{۷}+\frac{۲\cancel{\sqrt{۲}}}{\cancel{\sqrt{۲}}}$$

$$=\frac{۲}{۳-\sqrt{۷}}-\sqrt{۷}\xlongequal{\text{مخرج مشترک}}\frac{۲-۳\sqrt{۷}+۷}{۳-\sqrt{۷}}=\frac{۹-۳\sqrt{۷}}{۳-\sqrt{۷}}=\frac{۳\cancel{(۳-\sqrt{۷})}}{\cancel{۳-\sqrt{۷}}}=۳$$

پس گزینه (۲) درست است.

۲. اگر $A=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۸}+۲\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۰۸}+۰/۳\sqrt{۲۰۰}$ ، $A^۲$ برابر کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۵**

۱) ۳۲ ۲) ۴۵ ۳) ۴۸ ۴) ۵۰

پاسخ

ابتدا تکلیف رادیکال‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$A=\frac{۲}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\sqrt{۲}+۲\times۳\sqrt{۳}-۶\sqrt{۳}+۰/۳\times۱۰\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}+\cancel{۶\sqrt{۳}}-\cancel{۶\sqrt{۳}}+۳\sqrt{۲}$$

$$=۵\sqrt{۲}\Rightarrow A=۵\sqrt{۲}\Rightarrow A^۲=(۵\sqrt{۲})^۲=۲۵\times۲=۵۰$$

پس گزینه (٤) درست است.

۳. حاصل عبارت $(\frac{۸}{۲۵})^{-۳}\times(۰/۸)^۴\times(۰/۲)$ کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۵**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

پاسخ

$$(\frac{۸}{۲۵})^{-۳}\times(\frac{۸}{۱۰})^۴\times(\frac{۲}{۱۰})=(\frac{۲۵}{۸})^۳\times(\frac{۲^۳}{۱۰})^۴\times\frac{۲}{۱۰}=(\frac{\overbrace{۴\times۲۵}^{۱۰۰}}{۴\times۸})^۳\times\frac{۲^{۱۲}}{۱۰^۴}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{(۱۰^۲)^۳}{(۲^۵)^۳}\times\frac{۲^{۱۳}}{۱۰^۵}=\frac{۱۰^۶\times۲^{۱۳}}{۲^{۱۵}\times۱۰^۵}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵$$

پس گزینه (۳) درست است.

۴. حاصل $(\frac{۴}{۹})^۳\times(\frac{۲۷}{۸})^۲\times(\frac{۱۵}{۴})^۲\times(\frac{۲}{۵})^۴$ کدام است؟ **انسانی خارج از کشور ـ ۹۰**

۱) ۰/۳۶ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۵۴ ۴) ۰/۶۳

پاسخ

بیایید تمام اعداد را تجزیه کنیم و توان‌ها را مجزا روی صورت و مخرج اثر دهیم و به‌صورت یک عبارت بنویسیم:

$$(\frac{۴}{۹})^۳\times(\frac{۲۷}{۸})^۲\times(\frac{۱۵}{۴})^۲\times(\frac{۲}{۵})^۴=(\frac{۲^۲}{۳^۲})^۳\times(\frac{۳^۳}{۲^۳})^۲\times(\frac{۳\times۵}{۲^۲})^۲\times(\frac{۲}{۵})^۴$$

$$=\frac{\cancel{۲^۶}}{\cancel{۳^۶}}\times\frac{\cancel{۳^۶}}{\cancel{۲^۶}}\times\frac{۳^۲\times\cancel{۵^۲}}{\cancel{۲^۴}}\times\frac{\cancel{۲^۴}}{۵^{\cancel{۴}۲}}=\frac{۹}{۲۵}=۰/۳۶$$

پس گزینه (۱) درست است.

ایستگاه کنکور

۵. خلاصه شده عبارت $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{6}\times\left(2\frac{1}{4}\right)\times(0/75)^{-3}$ کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۳**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ

هر کدام از پرانتزها را جداگانه بررسی می‌کنیم و در انتها عملیات ضرب را انجام می‌دهیم:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{6}=\frac{(2^{\frac{1}{2}})^{6}}{2^{6}}=\frac{\cancel{2^{3}}}{\cancel{2^{6}}^{\,3}}=\frac{1}{2^{3}}$$

$$\left(2\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}=\frac{3^{2}}{2^{2}}$$

$$(0/75)^{-3}=\left(\frac{75}{100}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}=\left(\frac{2^{2}}{3}\right)^{3}=\frac{2^{6}}{3^{3}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cancel{2^{3}}}\times\frac{\cancel{3^{2}}}{\cancel{2^{2}}}\times\frac{\cancel{2^{6}}}{\cancel{3^{3}}}=\frac{2}{3}$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۶. حاصل عبارت $\sqrt[3]{24}\times\sqrt[3]{9}+\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}-\sqrt{80}$ کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۳**

۱) -4 ۲) -3 ۳) $-1-2\sqrt{5}$ ۴) $3-2\sqrt{5}$

پاسخ

$$\sqrt[3]{24}\times\sqrt[3]{9}+\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}-\sqrt{80}=\sqrt[3]{3\times2^{3}}\times\sqrt[3]{3^{2}}+\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}-\sqrt{4^{2}\times5}$$

$$=\sqrt[3]{2^{3}\times3^{3}}+\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}-4\sqrt{5}=6-4\sqrt{5}+\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$$

$$\xlongequal{\text{مخرج‌مشترک}}\frac{12+6\sqrt{5}-8\sqrt{5}-20+2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=\frac{-6-3\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=\frac{-3\cancel{(2+\sqrt{5})}}{\cancel{2+\sqrt{5}}}=-3$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

۷. ساده شده عبارت $\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^{3}+\left(\sqrt[3]{5+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^{4}+(-\sqrt{2})^{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۴**

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۵

پاسخ

ابتدا تکلیف عبارت‌های زیر رادیکال را مشخص می‌کنیم و در انتها عملیات جمع را انجام می‌دهیم.

$$\left(\sqrt[3]{5+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^{4}+(-\sqrt{2})^{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\left(5+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^{4}+(-\sqrt{2})^{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\left(5+\frac{1}{9}+2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{64}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{64}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$$

$$\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^{3}=\left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{8}+\frac{27}{8}=\frac{3+27}{8}=\frac{30}{8}=3/75$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

۸. حاصل عبارت $\left(\frac{8}{25}\right)^{-3}(0/8)^{4}(0/2)$ کدام است؟ **سراسری انسانی ـ ۹۵**

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

پاسخ

$$\left(\frac{8}{25}\right)^{-3}(0/8)^{4}(0/2)=\left(\frac{25}{8}\right)^{3}\left(\frac{8}{10}\right)^{4}\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{5^{6}}{\cancel{8^{3}}}\times\overbrace{\underbrace{\frac{\cancel{8^{4}}}{10^{4}}\times\frac{2}{10}}_{10^{5}=(2\times5)^{5}}}^{2^{3}\times2}=\frac{\cancel{5^{6}}^{\,5}\times\cancel{2^{4}}}{\cancel{2^{5}}_{\,2}\times\cancel{5^{5}}}=\frac{5}{2}=2/5$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

ایستگاه کنکور

۹. حاصل عبارت $\frac{۲۵}{۹۰}\times(\frac{۳}{۲})^{۵}\times(۰/۷۵)^{-۳}$ کدام است؟ انسانی خارج از کشور ـ ۹۵

۱) ۲/۵ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) ۵ ۴) ۷/۵

پاسخ

$$\frac{۲۵}{۹۰}\times(\frac{۳}{۲})^{۵}\times(۰/۷۵)^{-۳}=\frac{۵\times\cancel{۵}}{۹\times\cancel{۱۰}_{۲}}\times\frac{۳^{۵}}{۲^{۵}}\times(\frac{۳}{۴})^{-۳}$$

$$=\frac{۵}{\cancel{۳^{۲}}\times۲}\times\frac{\cancel{۳^{۵}}}{۲^{۵}}\times\frac{۴^{۳}}{\cancel{۳^{۳}}}=\frac{\cancel{۲^{۶}}\times۵}{\cancel{۲^{۶}}}=۵$$

پس گزینه (۳) درست است.

۱۰. اگر $A=۲\sqrt{۵۰}+۴\sqrt{۷۵}-۵\sqrt{۴۸}-۳\sqrt{۸}$ ، $A^{۲}$ کدام است؟ انسانی خارج از کشور ـ ۹۵

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

پاسخ

مشابه روش‌های قبل ابتدا تکلیف A را مشخص می‌کنیم:

$$A=۲\sqrt{۵۰}+۴\sqrt{۷۵}-۵\sqrt{۴۸}-۳\sqrt{۸}=۲\sqrt{۵^{۲}\times۲}+۴\sqrt{۵^{۲}\times۳}-۵\sqrt{۲^{۴}\times۳}-۳\sqrt{۲^{۳}}$$

$$=۱۰\sqrt{۲}+\cancel{۲۰\sqrt{۳}}-\cancel{۲۰\sqrt{۳}}-۶\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow A=۴\sqrt{۲}$$

$$A^{۲}=(۴\sqrt{۲})^{۲}=۱۶\times۲=۳۲$$

پس گزینه (۳) درست است.

۱۱. ساده شده عبارت $(۰/۲۵)^{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{-۳}\times۶^{۴}$ کدام است؟ سراسری انسانی ـ ۹۷

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ

$$(۰/۲۵)^{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{۳}\times۶^{۴}=(\frac{۲۵}{۱۰۰})^{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{-۳}\times۶^{۴}$$

$$=(\frac{۱}{۴})^{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{-۳}\times۶^{۴}=(\frac{۱}{۲^{۲}})^{۴}\times(\frac{۲^{۲}}{۳})^{۳}\times(۲\times۳)^{۴}$$

$$=\frac{\cancel{۲^{۶}}\times\overset{۲^{۲}}{\cancel{۲^{۴}}}\times\overset{۳}{\cancel{۳^{۴}}}}{\cancel{۲^{۸}}\times\cancel{۳^{۳}}}=۴\times۳=۱۲$$

پس گزینه (۳) درست است.

۱۲. حاصل عبارت $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}-\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}$ کدام است؟ سراسری انسانی ـ ۹۷

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ

مخرج مشترک می‌گیریم و ادامه می‌دهیم ...

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۶}+\sqrt{۲۴}+\sqrt{۱۸}-\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}$$

$$=\frac{۴\sqrt{۲}+۴\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}=\frac{۴(\cancel{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}})}{\cancel{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}}=۴$$

پس گزینه (٤) درست است.

ایستگاه کنکور

۱۳. ساده شده عبارت $(0/75)^5(32)^3(12)^{-2}$ کدام است؟ **انسانی خارج از کشور ـ ۹۷**

۱) ۱۸ ۲) ۲۷ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

پاسخ

$$(0/75)^5(32)^3(12)^{-2}=\left(\frac{75}{100}\right)^5(2^5)^3\left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^5\times 2^{15}\times\left(\frac{1}{2^2\times 3}\right)^2=\frac{\cancelto{3^3}{3^5}\times\cancelto{2}{2^{15}}}{\cancel{2^{10}}\times\cancel{2^4}\times\cancel{3^2}}=27\times 2=54$$

پس گزینه (٤) درست است.

۱۴. حاصل $(1+\sqrt{2})^2+\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ کدام است؟ **انسانی خارج از کشور ـ ۹۷**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۶

پاسخ

در این سؤال اتحادها به کمک ما خواهند آمد. به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای مقدار $(1+\sqrt{2})^2$ را حساب می‌کنیم و سپس با مخرج مشترک‌گیری سؤال را حل می‌کنیم.

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+(1+\sqrt{2})^2=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+1+2+2\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+3+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4}{2+\sqrt{2}}=\frac{12+6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{6\cancel{(2+\sqrt{2})}}{\cancel{2+\sqrt{2}}}=6$$

پس گزینه (٤) درست است.