درسنامه ۱

شمارش (اصل جمع و ضرب)

اصل جمع

اگر فقط یک کار را بتوان به k یا m یا ... یا n حالت مختلف انجام داد آن‌گاه تعداد کل حالت‌های انجام این کار برابر است با: $k+m+\cdots+n$

دقت کنید که در این‌جا فقط می‌خواهیم یک عمل را به روش‌های مختلف انجام دهیم. ضمناً حرف «یا» در مسائل، نشان‌دهندهٔ اصل جمع است.

مثال

علی می‌خواهد از تهران به مشهد سفر کند. او برای انجام این کار می‌تواند از یکی از ۳ نوع قطار لوکس، خوب و معمولی یا یکی از ۴ شرکت هواپیمایی یا یکی از ۸ تعاونی اتوبوس استفاده کند. در کل او به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟

پاسخ: علی فقط می‌خواهد یک عمل را انجام دهد و آن سفر از تهران به مشهد است پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

$\text{تعداد کل حالت‌ها} = ۳+۴+۸=۱۵$

اصل ضرب

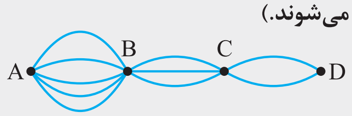
حالا می‌خواهیم دو یا چند عمل مختلف را با هم یا پشت سر هم انجام دهیم. در این حالت تعداد روش‌های هر عمل را در هم ضرب می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان‌دهندهٔ اصل ضرب است. توجه کنید گاهی ممکن است در یک مسأله، هم اصل ضرب و هم اصل جمع، مورد استفاده قرار گیرند.

مثلاً فرض کنید علی ۳ جفت کفش، ۴ پیراهن و ۶ شلوار مختلف دارد می‌خواهیم ببینیم او به چند حالت می‌تواند برای رفتن به مهمانی آماده شود واضح است که چون او باید هر سه عمل پوشیدن کفش، پیراهن و شلوار را با هم انجام دهد لذا باید از اصل ضرب استفاده کنیم: $\text{تعداد حالت‌ها} = ۳\times۴\times۶=۷۲$

مثال

با توجه به شکل زیر، مریم می‌خواهد از شهر A به شهر D سفر کند و برگردد. به طوری‌که در مسیر برگشت از راه‌هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می‌تواند این رفت و برگشت را انجام دهد؟ (همهٔ جاده‌ها دو طرفه فرض می‌شوند.)

پاسخ:



$$\left.\begin{array}{l}\text{تعداد حالت‌های مسیر رفت} = ۵\times۳\times۲=۳۰\\ \text{تعداد حالت‌های مسیر برگشت} = ۱\times۲\times۴=۸\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های رفت و برگشت} = ۳۰\times۸=۲۴۰$$

دقت کنید که در مسیر برگشت، از مسیرهایی که در مسیر رفت استفاده کرده‌ایم مجاز به استفادهٔ مجدد نیستیم یعنی از ۲ مسیر بین D و C یکی، از ۳ مسیر بین C و B یکی و از ۵ مسیر بین B و A هم یکی را حذف کرده‌ایم.

نکته

در آزمون‌های چندگزینه‌ای، اگر پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد، تعداد کل حالت‌های پاسخ‌گویی به آزمون، طبق اصل ضرب برابر می‌شود با:

$(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}}$

ولی اگر پاسخ‌گویی به هر سؤال، الزامی نباشد تعداد کل حالت‌ها برابر می‌شود با: $(\text{تعداد گزینه‌ها}+۱)^{\text{تعداد سؤالات}}$

مثال

به یک آزمون ۳ گزینه‌ای که شامل ۱۰ سؤال است به چند حالت مختلف می‌توان جواب داد؟ (پاسخ گویی به همهٔ سؤالات الزامی است.)

پاسخ: طبق نکتهٔ گفته‌شده، خواهیم داشت: $\text{تعداد حالت‌ها} = ۳^{۱۰}$

نماد فاکتوریل (!)

اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه حاصل $n!$ که آن را n فاکتوریل می‌خوانیم به‌صورت مقابل تعریف می‌شود: $\boxed{n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱}$

یعنی برای محاسبهٔ فاکتوریل یک عدد طبیعی، باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش ضرب کنیم مثلاً:

$۲!=۲\times۱=۲$

$۳!=۳\times۲\times۱=۶$

$۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

ضمناً توجه کنید که $۰!=۱$ و $۱!=۱$ می‌باشد.

درسنامه ۱

تذکر: گاهی لازم نیست فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم (مخصوصاً در کسرها)، در این حالت بعد از باز کردن اعداد فاکتوریل‌دار، هر جا که متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل بگذاریم.

مثال: $\frac{۹!}{۷!}=\frac{۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۷۲$

مثال: $\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=n(n-۱)=n^۲-n$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

آ) $۵!-۳!=?$ ب) $\sqrt{۰!-۱!}+۲!+۳!=?$ پ) $\frac{۶!}{۳!\times ۴!}=?$

پاسخ: آ) $۵!-۳!=(۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱)-(۳\times ۲\times ۱)=۱۲۰-۶=۱۱۴$

ب) $\sqrt{۰!-۱!}+۲!+۳!=\sqrt{۱-۱}+(۲\times ۱)+(۳\times ۲\times ۱)=۰+۲+۶=۸$

پ) $\frac{۶!}{۳!\times ۴!}=\frac{۶\times ۵\times \cancel{۴!}}{(۳\times ۲\times ۱)\times \cancel{۴!}}=۵$

مفهوم جایگشت: جایگشت یعنی نحوهٔ قرار گرفتن افراد یا اشیاء در کنار هم. مثلاً حروف a ، b و c به شکل‌های زیر می‌توانند کنار هم قرار گیرند و کلمات ۳ حرفی بسازند (بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات، در این مبحث، اصلاً مهم نیست.) abc، acb، bac، bca، cab، cba

الان به هر کدام از این ۶ کلمه که ساختیم یک جایگشت از حروف a ، b و c می‌گوییم. ضمناً چون ۳ حرف a ، b و c مختلف هستند تعداد جایگشت‌ها برابر می‌شود با: $۳!=۳\times ۲\times ۱=۶$

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء یا n فرد متمایز برابر با $n!$ می‌باشد مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمهٔ «TASNIM» می‌توان ساخت برابر با $۶!$ یا همان ۷۲۰ می‌باشد.

ساختن اعداد و کلمات در حالت کلی: معمولاً بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرایط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح باشد باید ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پُر کنیم سپس به سراغ پُر کردن اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم. ضمناً توجه کنید اگر در متن سؤال ذکر شود تکرار ارقام یا حروف، مجاز نیست پس از پر کردن هر خانه، باید یک حرف یا رقم استفاده‌شده در خانهٔ قبلی را به دلخواه خط بزنیم.

مثال **با ارقام ۰، ۲، ۵، ۶ و ۷ بدون تکرار ارقام:**

آ) چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟

پ) چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ می‌توان ساخت؟

ت) چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت که با ۲ شروع و به ۶ ختم شود؟

پاسخ: آ) شرط خاصی به‌جز تکراری نبودن ارقام ذکر نشده، پس خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم. فقط دقت کنید اولین خانهٔ سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد:

۲،۵،۶،~~۷~~ | ۰،۲،۵،۶،~~۷~~ | ۰،۲،۵،~~۶~~ | ۰،۲،~~۵~~ | ۰،~~۲~~

۴	۴	۳	۲	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددها $=۴\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۹۶$

ب) عددی فرد است که یکانش فرد باشد. پس ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم سپس به اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:

۲،۵،۶،~~۷~~ | ۰،۲،۵،~~۶~~ | ۰،۲،~~۵~~ | ۰،~~۲~~ | ۵،۷

۳	۳	۲	۱	۲

$\Rightarrow$ تعداد عددها $=۳\times ۳\times ۲\times ۱\times ۲=۳۶$

درسنامه ۱

پ) برای آن‌که عدد چهاررقمی مورد نظر، بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ باشد اولین رقم سمت چپ آن باید ۵ یا بیش‌تر باشد لذا پُرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

۵،۶،۷ — ۰،۲،۵،۶،~~۷~~ — ۰،۲،۵،~~۶~~ — ۰،۲،~~۵~~

۳	۴	۳	۲

$\Rightarrow$ تعداد عددها = ۳ × ۴ × ۳ × ۲ = ۷۲

ت) ابتدا و انتهای اعداد خواسته‌شده، هر کدام فقط به ۱ حالت پر می‌شوند:

فقط ۲ — ۰،۵،۷ — ۰،۵،~~۷~~ — ۰،~~۵~~ — فقط ۶

۱	۳	۲	۱	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددها = ۱ × ۳ × ۲ × ۱ × ۱ = ۶

در تمام قسمت‌هایی که حل کردیم اگر گفته می‌شد تکرار ارقام مجاز است، دیگر هیچ رقمی را خط نمی‌زدیم.

نکتهٔ بسیار مهم: اگر صفر جزء ارقام داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. در یک حالت فرض می‌کنیم یکان صفر باشد و در حالت دیگر فرض می‌کنیم یکان صفر نباشد. سپس جواب‌های هر دو حالت را با هم جمع می‌کنیم. توجه کنید اگر گفته شود تکرار ارقام مجاز است نیازی نیست دو حالت جداگانه تشکیل دهیم و با یک حالت، مسأله حل می‌شود.

مثال

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ چند عدد زوج چهاررقمی می‌توان ساخت به طوری‌که:

آ) تکرار ارقام مجاز باشد.

ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ: آ) تکرار ارقام مجاز است پس نیازی نیست دو حالت تشکیل دهیم:

۱،۲،۴،۵،۷،۸ — ۰،۱،۲،۴،۵،۷،۸ — ۰،۲،۴،۸

۶	۷	۷	۴

$\Rightarrow$ تعداد عددها = ۶ × ۷ × ۷ × ۴ = ۱۱۷۶

ب) تکرار ارقام غیرمجاز است پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱ :

۱،۲،۴،۵،۷،۸ — ۱،۲،۴،۵،۷،~~۸~~ — ۱،۲،۴،۵،~~۷~~ — یکان صفر باشد.

۶	۵	۴	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددها = ۶ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۲۰

حالت ۲ :

۱،۲،۴،۵،۷،~~۸~~ — ۰،۱،۲،۴،۵،~~۷~~ — ۰،۱،۲،۴،~~۵~~ — یکان ۸،۴،۲ باشد.

۵	۵	۴	۳

$\Rightarrow$ تعداد عددها = ۵ × ۵ × ۴ × ۳ = ۳۰۰

$\Rightarrow$ تعداد کل اعداد = ۱۲۰ + ۳۰۰ = ۴۲۰

سؤالات امتحانی

۱. اگر برای مسافرت به یکی از شهرهای مشهد، شیراز یا اهواز بتوان از وسیلهٔ نقلیهٔ سواری، اتوبوس یا هواپیما استفاده کرد، آن‌گاه:

آ) تعداد راه‌های ممکن را برای انتخاب شهر و وسیلهٔ نقلیه پیدا کنید.

ب) نمودار درختی مربوط به انتخاب‌ها را رسم کنید.

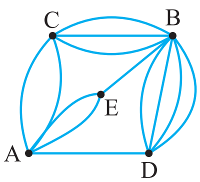
۲. آ) اگر از تهران به کرج ۳ راه، از کرج به زنجان ۴ راه و از زنجان به تبریز ۲ راه وجود داشته باشد، به چند طریق می‌توان از تهران و با عبور از کرج و زنجان، به تبریز رفت و برگشت؟

ب) به چند طریق می‌توان از تهران به تبریز رفت و برگشت به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از مسیرها، راه‌های رفت و برگشت یکی نباشند؟

۳. آ) با توجه به نمودار مقابل، به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

پ) به چند طریق می‌توانیم بدون گذشتن از شهر C از A به B برویم؟



۴. فردی می‌خواهد بداند به چند طریق با دو پیراهن به رنگ‌های «آبی ـ قرمز» و با سه شلوار به رنگ‌های «قهوه‌ای ـ مشکی ـ سرمه‌ای» می‌تواند لباس بپوشد. نمودار درختی حالت‌های مختلف انتخاب او را رسم کنید.

۵. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سهٔ آن‌ها را با هم بپوشد؟ (خرداد ۸۹)

۶. به چند طریق می‌توان به ۲ سؤال ۳ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری‌که هیچ سؤالی بی‌پاسخ نماند؟ (خرداد ۹۳)

۷. به چند طریق می‌توان به یک آزمون دو گزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد به طوری‌که:

آ) پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد.
ب) پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی نباشد.

۸. روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعدهٔ غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد، انتخاب کنیم؟ (خرداد ۹۲)

۹. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $۵! - ۴!$
ب) $\dfrac{۱۲!}{۱۰!}$
پ) $\dfrac{۷!}{۳! \times ۵!}$

ت) $\dfrac{۳! + ۵!}{۶!}$
ث) $\dfrac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!}$ (خرداد ۹۰ و مشابه خرداد ۸۹)

ج) $۰! + ۱! + ۲! + ۳!$
چ) $۴! + ۲!$
ح) $\dfrac{۱۰!}{۶! \times ۷!}$

۱۰. درستی یا نادرستی تساوی $۸! = ۴! + ۳! + ۱!$ را بررسی کنید. (خرداد ۹۲)

۱۱. اگر $\dfrac{۱}{۶} = \dfrac{(n-۱)!}{(n+۱)!}$ باشد، مقدار n را به‌دست آورید.

۱۲. با اعداد ۱، ۴، ۹ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت، به طوری‌که: (خرداد ۸۹)

آ) تکرار ارقام مجاز باشد.
ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

۱۳. به چند طریق مختلف ۸ نفر می‌توانند برای تهیهٔ بلیط سینما در یک صف بایستند؟

۱۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «کتاب» را بنویسید. (خرداد ۸۹)

۱۵. به چند طریق می‌توان کتاب‌های ریاضی، عربی، جغرافیا و تاریخ را کنار هم قرار داد؟ (خرداد ۹۰)

۱۶. با حروف الفبای فارسی چند کلمهٔ سه‌حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت به طوری‌که:

آ) تکرار حروف مجاز باشد.
ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۱۷. با حروف کلمهٔ «سعادت» به چند راه مختلف می‌توان کلمات سه حرفی نوشت به طوری‌که:

آ) تکرار حروف مجاز باشد.
ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۱۸. با حروف کلمهٔ «تهران» چند کلمهٔ سه‌حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۱۹. با حروف کلمهٔ «مهستان» و بدون تکرار حروف:

آ) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت که با حرف «س» شروع و به «ن» ختم شود؟

۲۰. با حروف کلمهٔ «TRIANGLE» و بدون تکرار حروف:

آ) چند کلمهٔ پنج‌حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع شود؟

پ) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع و به «E» ختم شود؟

۲۱. با ارقام ۰، ۱، ۵، ۹ و ۴ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:

آ) تکرار مجاز باشد. ب) تکرار غیرمجاز باشد.

۲۲. با ارقام ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام:

آ) چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که با ۲ شروع شود؟ ت) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که با ۳ شروع و به ۸ ختم شود؟

۲۳. دو رقم اول سمت چپ یک عدد پنج‌رقمی، مشخص است. چند راه ممکن برای ساختن آن عدد پنج‌رقمی وجود دارد؟ (ارقام می‌توانند تکراری باشند.)

۲۴. با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶ و ۸ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ساخت، به طوری‌که: (شهریور ۹۰)

آ) آن عدد زوج باشد. ب) رقم یکان آن عدد اول باشد.

۲۵. با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷: (با تکرار ارقام)

آ) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد دورقمی فرد می‌توان نوشت؟

۲۶. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۲۷. با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴ و ۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر یا مساوی ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

۲۸. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:

آ) عدد مضرب ۵ بوده و تکرار مجاز باشد. ب) عدد زوج باشد و تکرار مجاز باشد.

۲۹. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که:

آ) عدد مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ب) عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

۳۰. با ارقام ۵، ۹، ۶، ۸ و ۷ چند عدد: (خرداد ۹۰)

آ) سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟ ب) چهاررقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۳۱. با ارقام ۵، ۳، ۸، ۲ و ۷ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی ساخت به طوری‌که: (شهریور ۸۹)

آ) آن عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.

۳۲. چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن‌ها، عددی اول باشد؟

۳۳. پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به‌صورت $\boxed{\text{تهران} \;|\; \ast\ast\ast \text{ ب } \ast\ast}$ می‌باشد که هر ستاره نمایش‌گر یک عدد غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۳۴. یک اداره برای شمارهٔ کارت پرسنلی کارمندان خود از یک کد سه‌رقمی و ۲ حرف فارسی به شکل زیر استفاده می‌کند، با این شرط که اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد. تعداد راه‌های ممکن برای شمارهٔ کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید به شرطی که:

(برگرفته از کتاب درسی)

عدد	عدد	حرف	حرف	عدد
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

آ) تکرار حروف و ارقام مجاز باشد.

ب) تکرار حروف و ارقام مجاز نباشد.

۳۵. مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۲۰ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۲ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند:

آ) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۰ نفر مشورت بگیرد؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشاوره بگیرد به شرط آن‌که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۳۶. کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ (خرداد ۹۶)

آ) $(۳!)^۲ = ۹!$ ب) $۳! \times ۴ = ۴!$

۳۷. کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ (خرداد ۹۵)

آ) $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$ ب) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

۳۸. با ارقام ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد. (خرداد ۹۵)

۳۹. با ارقام ۹ ، ۲ ، ۷ ، ۵ ، ۳ و ۸: (خرداد ۹۴)

آ) چند عدد سه‌رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که یکان آن ۲ باشد؟

۴۰. با حروف کلمهٔ «روستا» و بدون تکرار، چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی) (خرداد ۹۱)

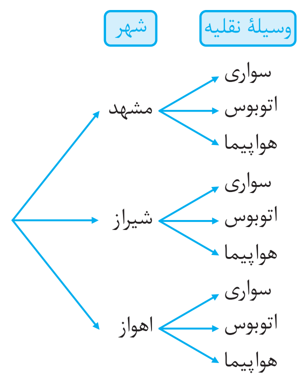
۴۱. به چند راه مختلف، ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم عکس بگیرند؟ (خرداد ۹۱)

پاسخ‌های تشریحی

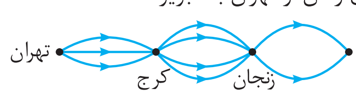
۱ آ) طبق اطلاعات مسئله برای انتخاب شهر ۳ گزینه وجود دارد (مشهد، شیراز یا اهواز) و برای انتخاب وسیلهٔ نقلیه نیز ۳ گزینه موجود است (سواری، اتوبوس یا هواپیما) بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب‌های این دو عمل در هم ضرب می‌شوند:

$۹ = ۳ \times ۳ =$ تعداد راه‌های ممکن برای سفر

ب) می‌توانیم، با یک تقسیم‌بندی مناسب (نمودار درختی) حالت‌های مختلف انتخاب را نمایش دهیم:

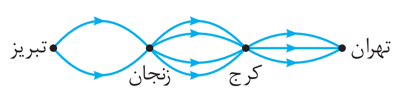


۲ آ) تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



$\Rightarrow ۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$

تعداد راه‌های ممکن برای برگشتن از تبریز به تهران:



$\Rightarrow ۲ \times ۴ \times ۳ = ۲۴$

طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

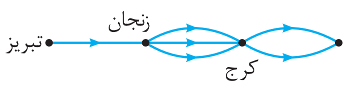
$۲۴ \times ۲۴ = ۵۷۶$

ب) مسیرهای رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند قسمت «آ» می‌باشد:

$۲۴ = ۲ \times ۴ \times ۳ =$ تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز

چون گفته شده مسیرهای رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیرهایی که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند:

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



$\Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۲ = ۶$

حال طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

(تعداد حالات مسیر رفت) = تعداد کل راه‌های انتخابی $\times$

$۱۴۴ = ۶ \times ۲۴ =$ (تعداد حالات مسیر برگشت)

۳ آ) برای رفتن از A به B سه مسیر کلی وجود دارد:

۱) مسیر $A \rightarrow C \rightarrow B$

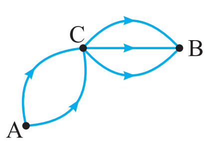
یا

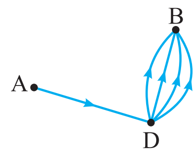
۲) مسیر $A \rightarrow D \rightarrow B$

یا

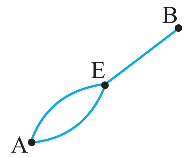
۳) مسیر $A \rightarrow E \rightarrow B$

مسیر (۱): مطابق شکل مقابل می‌توانیم ابتدا از شهر A به C و سپس از C به B برویم. ملاحظه می‌شود که از A به C دو مسیر مختلف و از C به B سه مسیر متمایز وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $۶ = ۳ \times ۲$ طریق انجام می‌گیرد.





مسیر (۲): ابتدا از A به D و سپس از D به B می‌رویم. ملاحظه می‌شود که از A به D فقط یک مسیر و از D به B چهار مسیر وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $۴ = ۱ \times ۴$ طریق انجام می‌گیرد.



در مسیر (۳) نیز خواهیم داشت:

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۱ = ۲$

چون برای رفتن از شهر A به شهر B فقط می‌توانیم یکی از ۳ مسیر (۱)، (۲) یا (۳) را در نظر بگیریم (به کلمهٔ «یا» در ابتدای پاسخ توجه کنید که نشان‌دهندهٔ اصل جمع است.) لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

تعداد کل حالت‌ها برای رفتن از A به B $= ۶ + ۴ + ۲ = ۱۲$

ب) می‌خواهیم حتماً از شهر C عبور کنیم پس فقط مسیر $A \to C \to B$ را خواهیم داشت: تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۳ = ۶$

پ) می‌خواهیم از شهر C عبور نکنیم پس دو مسیر $A \to E \to B$ و $A \to D \to B$ را خواهیم داشت:

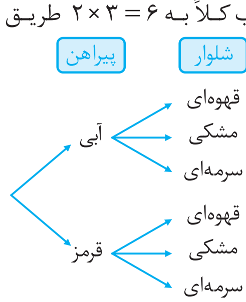
$A \to E \to B$: تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۱ = ۲$

$A \to D \to B$: تعداد حالت‌ها $= ۱ \times ۴ = ۴$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= ۲ + ۴ = ۶$

---

۴ این فرد برای انتخاب پیراهن به ۲ طریق و برای انتخاب شلوار به ۳ طریق می‌تواند عمل کند، لذا طبق اصل ضرب کلاً به $۶ = ۳ \times ۲$ طریق می‌تواند لباس بپوشد.



---

۵ طبق اصل شمارش، تعداد انتخاب‌های حالت‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم:

تعداد انتخاب‌ها $= ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

---

۶ ۲ سؤال وجود دارد که برای هر کدام از آن‌ها ۳ گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات $= ۳ \times ۳ = ۹$

---

۷ آ) پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال، شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. یعنی جواب دادن به سؤال ۱ دو حالت دارد، جواب دادن به سؤال ۲ نیز دو حالت دارد، و ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{\text{۲۰ بار}} = ۲^{۲۰}$

ب) چون پاسخگویی به سؤالات الزامی نیست. پس برای هر سؤال ۳ انتخاب داریم، یعنی به عنوان مثال برای جواب دادن به سؤال اول می‌توانیم گزینهٔ «الف» و یا «ب» را انتخاب کنیم و یا می‌توانیم اصلاً به سؤال پاسخ ندهیم.

پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن عبارت است از:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{۳ \times ۳ \times \ldots \times ۳}_{\text{۲۰ بار}} = ۳^{۲۰}$

در این‌گونه مسائل که یک کار مشابه را به دفعات زیاد تکرار می‌کنیم راه کوتاه‌تری برای پیدا کردن تعداد حالت‌ها وجود داره؟

پاسخ: *بله که وجود داره ... به تذکر زیر خوب دقت کن:*

> **تذکر:** اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(۱،۲،۳،\ldots،k)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله با هم برابر و مساوی n باشد آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌های ممکن برابر با n^k است.

---

۸ یک فرد می‌تواند هر سه کار را با هم انجام دهد. یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۴ \times ۳ = ۲۴$

---

۹ آ) $۵! - ۴! = (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) - (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۱۲۰ - ۲۴ = ۹۶$

> **تذکر:** از حل قسمت «آ» این مسئله نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی:
>
> $$\begin{cases} a! + b! \neq (a+b)! \\ a! - b! \neq (a-b)! \end{cases}$$
>
> به عنوان مثال نمی‌توان گفت که حاصل $۴! + ۳!$ برابر $(۴+۳)!$ یعنی $۷!$ است، زیرا اگر حاصل این دو عبارت را جداگانه محاسبه کنیم خواهیم داشت:
>
> $$\left.\begin{array}{l} ۳! + ۴! = (۳ \times ۲ \times ۱) + (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۶ + ۲۴ = ۳۰ \\ ۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳! + ۴! \neq ۷!$$

ب) $$\frac{۱۲!}{۱۰!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times \cancel{۱۰!}}{\cancel{۱۰!}} = ۱۲ \times ۱۱ = ۱۳۲$$

پ) $$\frac{۷!}{۳! \times ۵!} = \frac{۷ \times ۶ \times \cancel{۵!}}{(۳ \times ۲ \times ۱) \times \cancel{۵!}} = \frac{۷ \times ۶}{۶} = ۷$$

ت) $$\frac{۳! + ۵!}{۶!} = \frac{(۳ \times ۲ \times ۱) + (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱)}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۶ + ۱۲۰}{۷۲۰} = \frac{۱۲۶}{۷۲۰} = \frac{۷}{۴۰}$$

ث) $$\frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!} = \frac{۸ \times \cancel{۷} \times \cancel{۶!}}{(۲ \times ۱) \times \cancel{۷} \times \cancel{۶!}} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

ج) $$۰! + ۱! + ۲! + ۳! = ۱ + ۱ + \underbrace{(۲ \times ۱)}_{۲} + \underbrace{(۳ \times ۲ \times ۱)}_{۶} = ۱۰$$

چ) $$۴! + ۲! = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) + (۲ \times ۱) = ۲۴ + ۲ = ۲۶$$

ح) $$\frac{۱۰!}{۶! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۶! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$= \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۱۰ \times ۹ \times ۸} = ۱$$

۱۰
$$\begin{cases}۱!+۳!+۴!=۱+۶+۲۴=۳۱\\ ۸!=۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۴۰۳۲۰\end{cases}$$
پس رابطهٔ داده‌شده، نادرست است.

---

۱۱ **روش اول:**

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{\cancel{(n-۱)!}}{(n+۱)\times n\times\cancel{(n-۱)!}}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{(n+۱)(n)}=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم.}}(n+۱)(n)=۶$$

$$\Rightarrow n^۲+n=۶\Rightarrow n^۲+n-۶=۰\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{اتحاد جمله}}(n+۳)(n-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n+۳=۰\\ n-۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-۳<۰\ (\text{غ ق ق})\\ n=۲\ (\text{ق ق})\end{cases}$$

چون n باید عددی طبیعی باشد، پس جواب $n=-۳$ غیرقابل قبول است.

روش دوم: در معادلهٔ $(n+۱)(n)=۶$ به جای حل این معادلهٔ درجه دوم به روش دلتا می‌توان گفت که چون $(n+۱)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) هستند، پس عدد ۶ را نیز به‌صورت دو عدد متوالی می‌نویسیم:

$$(n+۱)\times n=۳\times۲\Rightarrow n=۲$$

---

۱۲ آ) چون عدد مورد نظر سه‌رقمی است سه جای خالی می‌کشیم. طبق صورت مسئله چهار عدد به ما داده شده و تکرار ارقام نیز مجاز است، پس هر جای خالی (خانه) به چهار طریق می‌تواند پر شود که بنابه اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب در یکدیگر ضرب می‌شوند:

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}\Rightarrow ۴\times۴\times۴=۶۴$:تعداد اعداد مطلوب
حالت حالت حالت

تذکر: فلش‌های روی مربع‌ها، ترتیب پر شدن خانه‌ها را نشان می‌دهند.

ب) ابتدا سه خانه می‌کشیم. رقم سمت چپ (صدگان) به چهار طریق مختلف می‌تواند پر شود. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقم دهگان (خانهٔ وسط) می‌تواند به سه طریق پر شود، زیرا از رقمی که در خانهٔ اول استفاده کردیم دیگر نمی‌توانیم در خانهٔ وسطی استفاده نماییم. در نهایت در خانهٔ سمت راست (رقم یکان) فقط می‌توانیم از دو رقم استفاده کنیم پس خواهیم داشت:

$\boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\Rightarrow ۴\times۳\times۲=۲۴$:تعداد اعداد مطلوب
حالت حالت حالت

---

۱۳ چون برای قرار گرفتن در یک صف، ترتیب مهم است لذا با یک مسئلهٔ ترتیب مواجه هستیم. می‌دانیم تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$، لذا تعداد جایگشت‌های ۸ نفر برابر است با:

$۸!=۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۴۰۳۲۰$:تعداد کل حالت‌های ممکن

---

۱۴ چون در کلمهٔ «کتاب» حروف تکراری وجود ندارد و این کلمه ۴ حرف است، لذا خواهیم نوشت:

$۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$ = تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «کتاب»

---

۱۵ تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شیء مختلف در کنار هم برابر است با $n!$ لذا تعداد حالت‌های قرار گرفتن این ۴ کتاب کنار هم برابر است با:

$$۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

---

۱۶ آ) اگر تکرار حروف مجاز باشد، هر یک از سه خانهٔ زیر می‌توانند به ۳۲ طریق مختلف پر شوند.

تعداد کلمات مورد نظر:

$\boxed{۳۲}\ \boxed{۳۲}\ \boxed{۳۲}\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}۳۲\times۳۲\times۳۲=(۳۲)^۳$
حالت حالت حالت

ب) وقتی گفته می‌شود تکرار غیرمجاز است به آن معنا است که وقتی خانهٔ سمت راست می‌تواند با هر یک از ۳۲ انتخاب پر شود، خانهٔ بعدی با ۳۱ انتخاب و خانهٔ آخر با ۳۰ انتخاب پر می‌شود.

تعداد کلمات مورد نظر:

$\boxed{۳۰}\ \boxed{۳۱}\ \boxed{۳۲}\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}۳۲\times۳۱\times۳۰$
حالت حالت حالت

تذکر: علت این‌که پر کردن خانه‌ها را از سمت راست شروع کردیم این است که کلمات فارسی از راست به چپ نوشته می‌شوند. (البته اگر از سمت چپ هم شروع کنید به همین جواب‌ها خواهید رسید.)

---

۱۷ آ) چون کلمات سه‌حرفی می‌خواهیم لذا ۳ خانه در نظر می‌گیریم و چون تکرار حروف مجاز است، خانه‌ها به‌صورت زیر پر می‌شوند:

$\boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $=۵\times۵\times۵=۱۲۵$
حالت حالت حالت

یعنی به عنوان مثال اگر در خانهٔ سمت راست از حرف «س» شروع کردیم در بقیهٔ خانه‌ها نیز می‌توانیم از آن استفاده کنیم. (دقت کنید که بی‌معنی بودن کلمهٔ ساخته‌شده مهم نیست.)


ببخشید چرا پر کردن خونه‌ها رو از سمت راست شروع کردید؟

پاسخ: *تو این مسئله چون محدودیتی برای کلمات ۳ حرفی مورد نظر وجود نداره از هر طرف که خواستیم می‌تونیم خونه‌ها رو پر کنیم ولی در کلمات فارسی همیشه بهتر اینه که از سمت راست، جاهای خالی رو پر کنیم.*

ب) چون تکرار حروف مجاز نمی‌باشد، خواهیم داشت:

$\boxed{۳}\ \boxed{۴}\ \boxed{۵}\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $=۵\times۴\times۳=۶۰$
حالت حالت حالت

یعنی اگر در خانهٔ اول (سمت راست) مثلاً از حرف «س» استفاده کردیم دیگر در خانهٔ بعدی نمی‌توان آن را به کار برد (پس ۴ حرف باقی می‌ماند) و اگر در خانهٔ دوم مثلاً از حرف «د» استفاده کردیم در خانهٔ سوم دیگر مجاز به استفاده از آن نیستیم (پس ۳ حرف باقی می‌ماند).

---

۱۸ چون کلمهٔ مورد نظر سه‌حرفی است، پس سه خانه در نظر می‌گیریم و چون شروع کلمه باید با حرف نقطه‌دار باشد، خانهٔ سمت راست به دو طریق می‌تواند پر شود (حروف «ت» یا «ن»). از طرفی تکرار حروف غیرمجاز است پس خانه‌های وسط و سمت چپ به چهار طریق و سه طریق پر می‌شوند. پس خواهیم داشت:

$\boxed{۳}\ \boxed{۴}\ \boxed{۲}\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $=۲\times۴\times۳=۲۴$
حالت حالت حالت

۱۹ آ) چون کلمهٔ چهارحرفی می‌خواهیم پس چهار خانه می‌کشیم:

$\boxed{۳}\ \boxed{۴}\ \boxed{۵}\ \boxed{۶}$

⇒ تعداد کلمات مورد نظر = ۶ × ۵ × ۴ × ۳ = ۳۶۰

ب) چون کلمهٔ سه‌حرفی مورد نظر است لذا سه خانه می‌کشیم. خانهٔ اول (سمت راست) فقط با یک حالت پر می‌شود (حرف «س») و خانهٔ آخر (سمت چپ) نیز فقط به یک طریق پر می‌شود (حرف «ن») و خانهٔ وسط به چهار طریق می‌تواند پر شود (یکی از حروف م، ه، ت، ا) پس خواهیم داشت:

حرف «ن» حرف «س»

$\boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱}$ ⇒ تعداد کلمات مورد نظر = ۱ × ۴ × ۱ = ۴

حالت حالت حالت

---

۲۰ آ) پنج خانه می‌کشیم و دقت می‌کنیم که از هر حرف فقط یک بار می‌توان استفاده کرد (تکرار حروف غیرمجاز است) یعنی خواهیم داشت:

یکی از ۸ حرف کلمه

$\boxed{۸}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}$

یکی از ۷ حرف باقی‌مانده

⇒ تعداد کلمات ۵ حرفی = ۸ × ۷ × ۶ × ۵ × ۴ = ۶۷۲۰

ب) چهار خانه می‌کشیم. برای حرف سمت چپ فقط یک حالت داریم (حرف T) و برای بقیهٔ خانه‌ها به‌صورت زیر، انتخاب خواهیم داشت:

$\boxed{۱}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵}$ ⇒ تعداد کلمات مورد نظر = ۱×۷×۶×۵ = ۲۱۰

حرف «T»

پ) خانه‌های اول و آخر هر کدام فقط به یک طریق پر می‌شوند (هر کدام یک حالت دارند) و می‌توان چنین نوشت:

$\boxed{۱}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۱}$ ⇒ تعداد کلمات مورد نظر = ۱ × ۶ × ۵ × ۱ = ۳۰

حرف «T» حرف «E»

---

۲۱ آ) چون عدد مورد نظر پنج‌رقمی است، پس پنج خانه در نظر می‌گیریم. چون در این مسئله محدودیتی نداریم (شرطی مانند زوج بودن، فرد بودن و غیره در صورت مسئله ذکر نشده) پس پر کردن خانه‌ها را از خانهٔ سمت چپ شروع می‌کنیم. می‌دانیم این خانه نمی‌تواند با صفر شروع شود (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند) پس به ۴ طریق می‌تواند پر شود ولی خانه‌های بعدی، همگی می‌توانند به ۵ طریق پر شوند (چون تکرار مجاز است و از صفر در خانه‌های دیگر می‌توانیم استفاده کنیم):

تعداد اعداد مطلوب:

از چپ به راست

$\boxed{۴}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}$ ⇒ ۴ × ۵ × ۵ × ۵ × ۵ = ۲۵۰۰

ب) پنج خانه را در نظر می‌گیریم. خانهٔ سمت چپ همان‌طور که گفته شد می‌تواند به ۴ طریق پر شود و چون تکرار مجاز نیست خانهٔ بعدی می‌تواند به ۴ طریق پر شود (عددی که با آن خانهٔ سمت چپ را پر کردیم حذف می‌شود) به همین ترتیب در هر مرحله، یک عدد باید حذف شود:

تعداد اعداد مطلوب:

از چپ به راست

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱}$ ⇒ ۴ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۹۶

---

۲۲ آ) چون عدد مورد نظر پنج‌رقمی است، پنج خانه می‌کشیم که به‌صورت زیر پر می‌شوند.

از چپ به راست

$\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱}$ ⇒ ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰ :تعداد اعداد مورد نظر

حالت حالت حالت حالت حالت

دقت کنید که در هر مرحله، از تعداد انتخاب‌ها یکی کم شده است (زیرا تکرار مجاز نیست).

ب) برای عدد سه‌رقمی مطلوب، سه خانه در نظر می‌گیریم:

$\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}$ ⇒ ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰ : تعداد اعداد مطلوب

حالت حالت حالت

پ) چون عدد چهار رقمی است پس چهار خانه می‌کشیم. خانهٔ سمت چپ طبق صورت مسئله فقط به یک حالت پر می‌شود (عدد ۲) و بقیهٔ خانه‌ها به‌صورت زیر پر می‌شوند:

$\boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}$ ⇒ ۱ × ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴ : تعداد اعداد مورد نظر

حالت حالت حالت حالت

ت) برای عدد سه‌رقمی مذکور، سه خانه می‌کشیم خانهٔ سمت چپ فقط می‌تواند به یک حالت پر شود (عدد سه) خانهٔ سمت راست (یکان) نیز فقط می‌تواند به یک حالت پر شود (عدد هشت) پس برای خانهٔ وسط سه انتخاب خواهیم داشت (یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶) یعنی می‌توان نوشت:

فقط عدد ۳ فقط عدد ۸

$\boxed{۱}\ \boxed{۳}\ \boxed{۱}$ ⇒ ۱ × ۳ × ۱ = ۳ : تعداد اعداد مورد نظر

یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶

---

۲۳ چون عدد پنج‌رقمی می‌خواهیم پنج خانه می‌کشیم. دو خانهٔ سمت چپ هر کدام فقط به یک حالت امکان پر شدن دارند، زیرا هر یک از این دو خانه قبلاً با یک عدد پر شده است. سه خانهٔ باقی‌مانده هر کدام به ۱۰ حالت مختلف می‌توانند پر شوند (اعداد ۰ تا ۹) لذا می‌توان چنین نوشت:

از چپ به راست

$\boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{۱۰}\ \boxed{۱۰}\ \boxed{۱۰}$

حالت حالت حالت حالت حالت

اصل ضرب

⟶ تعداد اعداد مورد نظر = ۱ × ۱ × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ = ۱۰۰۰

تذکر: اگر در صورت مسئله ذکر می‌شد که تکرار غیرمجاز است، سه خانهٔ سمت راست (سه رقم راست عدد) به‌صورت زیر پر می‌شدند:

از چپ به راست

$\boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{۸}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶}$

اصل ضرب

⟶ تعداد اعداد مورد نظر = ۱ × ۱ × ۸ × ۷ × ۶ = ۳۳۶

۲۴ آ) برای زوج بودن عدد سه‌رقمی مورد نظر، ۲ انتخاب برای یکان داریم (عدد ۶ یا ۸)، پس:

تعداد اعداد مورد نظر : $\boxed{4}\,\boxed{3}\,\boxed{2} \Rightarrow 4\times3\times2=24$

ب) برای اول بودن یکان نیز ۳ انتخاب داریم (اعداد ۳، ۵ یا ۷)، پس:

تعداد اعداد مورد نظر : $\boxed{4}\,\boxed{3}\,\boxed{3} \Rightarrow 4\times3\times3=36$

---

۲۵ آ) چون عدد مطلوب سه‌رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون تکرار مجاز است هر خانه می‌تواند به پنج طریق پر شود، بنابراین داریم:

تعداد اعداد مورد نظر : $\boxed{5}\,\boxed{5}\,\boxed{5} \Rightarrow 5\times5\times5=125$

ب) چون عدد مطلوب چهار رقمی است، پس چهار خانه می‌کشیم. خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌تواند با ارقام ۲، ۴ یا ۶ پر شود (پس ۳ حالت داریم) ولی چون تکرار مجاز است خانه‌های دیگر هر کدام می‌توانند به پنج طریق پر شوند:

تعداد اعداد مورد نظر : $\boxed{5}\,\boxed{5}\,\boxed{5}\,\boxed{3} \Rightarrow 3\times5\times5\times5=375$

پ) عدد مورد نظر دو رقمی است، پس دو خانه در نظر می‌گیریم. در خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌توانیم از اعداد ۱ و یا ۷ استفاده کنیم (چون عدد باید فرد باشد) ولی در خانهٔ سمت چپ از هر کدام از پنج عدد داده‌شده می‌توانیم استفاده کنیم (تکرار مجاز است):

تعداد اعداد مطلوب : $\boxed{5}\,\boxed{2} \Rightarrow 2\times5=10$

---

۲۶ سه خانه در نظر می‌گیریم. چون عدد مورد نظر باید بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، در خانهٔ سمت چپ (صدگان) می‌توانیم فقط از اعداد ۳، ۴ یا ۵ استفاده کنیم (۳ حالت) و چون تکرار غیرمجاز است، خانه‌های بعدی به پنج حالت و چهار حالت پر می‌شوند.

تعداد اعداد مورد نظر : $\boxed{3}\,\boxed{5}\,\boxed{4} \Rightarrow 3\times5\times4=60$

---

۲۷ دقت کنید که عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ رقم سمت چپش نمی‌تواند ۱ یا صفر باشد ولی می‌تواند ۲ یا بیش‌تر باشد (چون در این حالت‌ها اعداد بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ ساخته می‌شود) ولی خانه‌های (۲)، (۳) و (۴) هیچ محدودیتی ندارند و هر کدام می‌توانند به ۵ طریق پر شوند (همهٔ رقم‌ها می‌توانند استفاده شوند) لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد اعداد مورد نظر $\underset{(1)}{\boxed{4}}\,\underset{(2)}{\boxed{5}}\,\underset{(3)}{\boxed{5}}\,\underset{(4)}{\boxed{5}} \Rightarrow 4\times5\times5\times5=500$

---

۲۸ آ) می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. پس خانهٔ سمت راست به دو طریق یعنی با ۰ یا ۵ پر می‌شود و چون تکرار ارقام مجاز است خانهٔ وسط به ۶ طریق پر می‌شود ولی خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق پر می‌شود زیرا صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند) پس داریم:

تعداد اعداد مطلوب : $\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{2} \Rightarrow 2\times5\times6=60$

ب) عدد مورد نظر باید زوج باشد پس رقم یکان (سمت راست) می‌تواند با یکی از اعداد ۰، ۲ یا ۴ پر شود که سه حالت می‌باشد و چون تکرار مجاز است، خانهٔ وسط به ۶ حالت پر می‌شود ولی خانهٔ سمت چپ به ۵ حالت پر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد. پس داریم:

تعداد اعداد مطلوب : $\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{3} \Rightarrow 3\times5\times6=90$

---

۲۹ آ) می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد و چون تکرار ارقام مجاز نیست باید هر یک از این حالت‌ها را جداگانه بررسی کنیم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست فقط عدد صفر می‌تواند باشد، پس به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق و خانهٔ وسط به ۴ طریق پر می‌شود (از هر رقم فقط یک بار می‌توان استفاده کرد).

$\boxed{5}\,\boxed{4}\,\boxed{1} \Rightarrow 1\times5\times4=20$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست فقط با عدد ۵ پر می‌شود (۱ حالت) و چون تکرار غیرمجاز است خانهٔ سمت چپ به ۴ حالت پر می‌شود (چون ۵ و صفر نمی‌توانند در این خانه قرار گیرند) و خانهٔ وسط به ۴ طریق می‌تواند پر شود (چون از بین ۶ عدد داده‌شده دو عدد در خانهٔ سمت چپ و راست قرار گرفته‌اند) پس داریم:

$\boxed{4}\,\boxed{4}\,\boxed{1} \Rightarrow 1\times4\times4=16$

طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد مورد نظر عبارت است از: $20+16=36$

ب) می‌دانیم عددی زوج است که یکان آن زوج باشد (در این‌جا یکان فقط می‌تواند ۰، ۲ یا ۴ را اختیار کند) و چون تکرار ارقام غیرمجاز است دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست فقط می‌تواند صفر باشد (۱ حالت داریم) و چون تکرار غیرمجاز است، خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق و خانهٔ وسط به ۴ طریق پر می‌شود؛ یعنی داریم:

$\boxed{5}\,\boxed{4}\,\boxed{1} \Rightarrow 1\times5\times4=20$

حالت دوم: رقم یکان ۲ یا ۴ باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست فقط می‌تواند ۲ یا ۴ باشد (۲ حالت داریم) و چون تکرار غیرمجاز است، خانهٔ سمت چپ به ۴ طریق پر می‌شود (چون از صفر و عدد قرار داده‌شده در خانهٔ سمت راست نمی‌توان استفاده کرد) و خانهٔ وسطی به ۴ طریق پر می‌شود (چون از ۶ عدد داده‌شده، دو عدد در خانه‌های سمت چپ و راست استفاده شدند)، پس داریم:

$\boxed{4}\,\boxed{4}\,\boxed{2} \Rightarrow 2\times4\times4=32$

حال طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد مورد نظر عبارت است از:

$20+32=52$

۳۰ آ) تعداد اعداد مورد نظر = ۵×۴×۳ = ۶۰ $\xleftarrow{\text{اصل ضرب}}$ [۵] [۴] [۳]

ب) عدد ۶ یا ۸

[۴] [۳] [۲] [۲]

تعداد اعداد مطلوب = ۴ × ۳ × ۲ × ۲ = ۴۸ $\xleftarrow{\text{اصل ضرب}}$

---

۳۱ آ) عدد ۲ یا ۸

تعداد اعداد مطلوب = ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴ $\xleftarrow{\text{اصل ضرب}}$ [۴] [۳] [۲]

ب) فقط عدد ۷

تعداد اعداد مطلوب = ۵ × ۵ × ۱ = ۲۵ $\xleftarrow{\text{اصل ضرب}}$ [۵] [۵] [۱]

---

۳۲ چون عدد مطلوب سه‌رقمی است، سه خانه می‌کشیم. در این سؤال، ارقام مشخص به ما داده نشده‌اند پس ارقام را از ۰ تا ۹ در نظر می‌گیریم. طبق صورت مسئله دهگان (خانهٔ وسط) باید عددی اول باشد پس این خانه به چهار طریق می‌تواند پر شود (اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷) و چون تکرار غیرمجاز است و اعداد نمی‌توانند با صفر شروع شوند خانهٔ سمت چپ به ۸ طریق پر می‌شود اما صفر در خانهٔ سمت راست (یکان) می‌تواند واقع شود پس خانهٔ سمت راست نیز به ۸ طریق پر می‌شود. زیرا از ۱۰عددی که در اختیار داریم (۰ تا ۹) دو تای آن‌ها را در خانه‌های وسط و چپ استفاده کرده‌ایم پس ۸ تا باقی می‌ماند.

[۸] [۴] [۸] ⇐ تعداد اعداد مطلوب = ۴ × ۸ × ۸ = ۲۵۶

---

۳۳ به جای ستارهٔ سمت چپ می‌توان هر یک از اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ را قرار داد (پنج حالت داریم) و به جای ستارهٔ سمت راست می‌توان هر یک از اعداد ۲، ۴، ۶ و یا ۸ را قرار داد (چهار حالت داریم، زیرا صفر در شماره‌گذاری لحاظ نمی‌شود) و به جای بقیهٔ ستاره‌ها ۹ عدد از ۱ تا ۹ را می‌توان قرار داد (چون تکرار ارقام مجاز است) که در این صورت خواهیم داشت:

تعداد اعداد فرد یک‌رقمی — تعداد اعداد زوج یک‌رقمی

[۵] [۹] «ب» [۹] [۹] [۴]

⇐ تعداد کل پلاک‌ها = ۵ × ۹ × ۹ × ۹ × ۴ = ۱۴۵۸۰

---

۳۴ آ) چون رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد پس برای پر کردن آن ۹ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹). همچنین برای پر کردن بقیهٔ خانه‌های اعداد به ترتیب ۱۰ و ۱۰ انتخاب داریم (چون تکرار مجاز است). برای پر کردن اولین خانهٔ حروف (سمت چپ) ۳۲ انتخاب داریم، زیرا حروف الفبای فارسی ۳۲ تا می‌باشد و برای پر کردن خانهٔ حرف بعدی نیز ۳۲ انتخاب داریم (چون از حرف قبلی هم می‌توانیم استفاده کنیم). لذا داریم:

عدد، حرف، حرف، عدد، عدد

[۹] [۳۲] [۳۲] [۱۰] [۱۰]

تعداد کارت‌های پرسنلی = ۹ × ۳۲ × ۳۲ × ۱۰ × ۱۰ $\xleftarrow{\text{اصل ضرب}}$

ب) چون تکرار حروف و ارقام مجاز نیست در هر مرحله، یکی از تعداد انتخاب‌ها را کم می‌کنیم:

عدد، حرف، حرف، عدد، عدد

[۹] [۳۲] [۳۱] [۹] [۸]

تعداد کارت‌های پرسنلی = ۹ × ۳۲ × ۳۱ × ۹ × ۸ $\xleftarrow{\text{اصل ضرب}}$

تذکر: برای پر کردن سه خانهٔ اعداد به این مطلب توجه کنید که خانهٔ اول (سمت چپ) به ۹ طریق پر می‌شود (یعنی اعداد ۱ تا ۹). خانهٔ بعدی اعداد هم به ۹ طریق پر می‌شود (زیرا از ۱۰ عدد موجود یکی در خانهٔ اول استفاده شده است) و خانهٔ آخر نیز به ۸ طریق پر می‌شود (چون از ۱۰ عدد موجود دو تا در خانه‌های قبلی استفاده شده است).

---

۳۵ آ) از اصل جمع استفاده می‌کنیم. چون مدیرعامل می‌تواند فقط یک نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: تعداد حالت‌ها = ۱۲ + ۸ = ۲۰

ب) در این قسمت، مدیرعامل می‌تواند به ۱۲ طریق یک نفر را از گروه A و به ۸ طریق یک نفر را از گروه B انتخاب کند. پس با استفاده از اصل ضرب چنین می‌نویسیم: تعداد حالت‌ها = ۱۲ × ۸ = ۹۶

---

۳۶ آ) نادرست است. زیرا:

$$\begin{cases}(۳!)^۲ = (۳ × ۲ × ۱)^۲ = ۶^۲ = ۳۶ \\ ۹! = ۹ × ۸ × ۷ × \cdots × ۳ × ۲ × ۱\end{cases} \Rightarrow (۳!)^۲ \neq ۹!$$

ب) درست است. زیرا:

$$\begin{cases}۳! × ۴ = (۳ × ۲ × ۱) × ۴ = ۲۴ \\ ۴! = ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴\end{cases} \Rightarrow ۳! × ۴ = ۴!$$

---

۳۷ آ) نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases}\frac{۸!}{۴!} = \frac{۸ × ۷ × ۶ × ۵ × \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}} = ۱۶۸۰ \\ ۲! = ۲ × ۱ = ۲\end{cases} \Rightarrow \frac{۸!}{۴!} \neq ۲!$$

ب) درست است. زیرا وقتی یک عدد طبیعی را که فاکتوریل دارد، باز می‌کنیم، هر جا متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل را قرار دهیم.

۳۸

۱، ۲، ۵، ۸ — فقط ۶ — ۱، ۲، ۵، ~~۸~~

[۱] [۴] [۳] ⇐ تعداد عددهای مطلوب = ۱ × ۴ × ۳ = ۱۲

---

۳۹ آ) ارقام ۹، ۲، ۷، ۵، ۳، ۸

[۶] [۶] [۶] ⇐ تعداد عددهای مطلوب = ۶ × ۶ × ۶ = ۲۱۶

ب)

۹، ۷، ۵، ۳، ~~۸~~

۹، ۷، ۵، ۳، ۸ — ۹، ۷، ۵، ~~۳~~ — فقط ۲

[۵] [۴] [۳] [۱] ⇐ تعداد عددهای مطلوب = ۵ × ۴ × ۳ × ۱ = ۶۰

۴۰

ر، و، س، ت، ا — ر، و، س، ~~ت~~

[۳] [۴] [۵] ⇐ تعداد کلمات مطلوب = ۳ × ۴ × ۵ = ۶۰

ر، و، س، ت، ~~ا~~

---

۴۱ این افراد به !۶ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند.