آزمـــــون (۱) نوبت اول

ردیف	سؤال	بارم
۱	**هر یک از جاهای خالی را با کلمه‌های مناسب پر کنید.** الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل .... است. ب) اگر صفحهٔ P هر دوتکه بالا و پایین یک مقطع مخروطی را قطع کند، فصل مشترک صفحه و سطح مقطع مخروطی یک ....است.	۱
۲	**اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$، ثابت کنید:** الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$	۲
۳	**اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.**	۱/۲۵
۴	**اگر ماتریس $AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۷ & -۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس B را به دست آورید.**	۱/۷۵
۵	**فرض کنید A ماتریس مربعی باشد و عدد طبیعی مانند n موجود باشد که $A^n=\overline{O}$ ثابت کنید $I-A$ وارون‌پذیر است و سپس وارون $I-A$ را به دست آورید.**	۲
۶	**به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{bmatrix} -۲ & -a \\ a-۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب ندارد؟**	۱/۵
۷	**دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.**	۱/۵
۸	**دو خط d و d' در یک صفحه‌اند و بر هم عمودند، مکان هندسی نقاطی از این صفحه را به دست آورید که فاصلهٔ آن‌ها از خط d، ۴ برابر فاصلهٔ آن‌ها از خط d' باشد.**	۱/۵
۹	**معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.**	۱/۵
۱۰	**وضعیت دو دایرهٔ زیر را نسبت به هم مشخص کنید.** $x^۲+y^۲-۱۰x-۱۴y+۷۳=۰$ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$	۲
۱۱	**معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات برخورد آن را با محورها به دست آورید.**	۱/۵
۱۲	**حدود m را طوری به دست آورید که معادلهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۵y+m=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد.**	۱/۷۵
۱۳	**اگر I ماتریس همانی و ۳×۳ و $k\in\mathbb{R}$ نشان دهید $\|kI\|=k^۳$.**	۰/۷۵

آزمـــون (۴) نوبت اول

ردیف	سؤال	بارم
۱	اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ۳ بوده و $\lvert A\rvert=-۳$ و $(A-I)^{۲}=-۳A$ باشد، حاصل $\lvert A^{۲}+I\rvert$ را پیدا کنید.	۱/۵
۲	اگر A ماتریس ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱}=۴$، در این صورت $\lvert A\rvert$ را بیابید.	۰/۷۵
۳	با یک مثال نقض نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$. به عبارت دیگر قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد.	۱/۵
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$ و از رابطهٔ $A+mA^{-۱}=۸I$ تبعیت کند، عدد حقیقی m را به‌دست آورید.	۱/۵
۵	اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & m & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ با دترمینان ماتریس وارون A برابر باشد، m را به‌دست آورید.	۱/۵
۶	دستگاه $\begin{cases}\frac{x}{۲}-\frac{y}{۳}=\frac{۱}{۶}\\ ۲x+y=۳\end{cases}$ را به روش ماتریس معکوس حل کنید.	۱/۵
۷	به ازای کدام مقدار a معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}a & ۲\\ ۳ & a+۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+۲\\ ۲\end{bmatrix}$ جواب ندارد؟	۱/۵
۸	دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحهٔ این دو خط وجود دارد که از d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر و از d' به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر باشند؟	۲
۹	وضعیت نقطهٔ $A(-۱,-۱)$ را نسبت به دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.	۱/۵
۱۰	دو دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۵=۰$ و $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ مماس داخل هستند. a را به‌دست آورید.	۲
۱۱	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(۱,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.	۱
۱۲	در صورت دایره بودن رابطهٔ ضمنی $۲x^{۲}+۲y^{۲}-۳x+۴y-۲=۰$ شعاع و مرکز دایره را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۳	شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(۲,-۲)$ می‌گذرد را به‌دست آورید.	۲/۲۵

آزمـــــــون (۶) نوبت اول (هماهنگ کشوری دی ماه سال ۱۳۹۷)

۱ **جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.** ۰/۵

الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس .... می‌نامیم.

ب) حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ....

---

۲ **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** ۲

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d، d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. درست ☐ نادرست ☐

ب) صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دواری، موازی است و از رأس عبور نمی‌کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. درست ☐ نادرست ☐

پ) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&0&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^2 برابر ۵ می‌باشد. درست ☐ نادرست ☐

ت) اگر $A^2=A$ باشد در این صورت داریم: $(A+I)^2=I+3A$ درست ☐ نادرست ☐

---

۳ اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i.j & i>j\\ i^2 & i=j\\ 2i-j & i<j\end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A-3I$ را به دست آورید. ۱/۲۵

---

۴ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=-2$ حاصل $\big||A|.A\big|$ را بیابید. ۰/۷۵

---

۵ اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $[x\quad 2\quad -y]\begin{bmatrix}3\\2\\-x\end{bmatrix}$ را بیابید. ۱/۵

---

۶ دستگاه $\begin{cases}(m-3)x+3y=m\\4x+(m+1)y=2\end{cases}$ به ازای چه مقدار m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد؟ ۱

---

۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(4,-1)$, $B(-2,1)$ دو سر قطری از آن باشند. ۱/۵

---

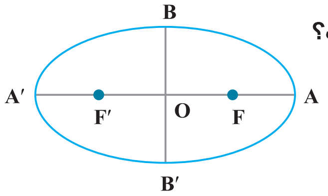
۸ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد. ۱

---

۹ دایره‌های $x^2+y^2-2x=4$ و $x^2+y^2=4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ ۱/۷۵

---

۱۰ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ ۱/۵



---

۱۱ معادله سهمی را بنویسید که $F(1,-2)$ کانون و $S(1,2)$ رأس آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید. ۱/۲۵

---

۱۲ اگر $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید. ۱

---

۱۳ اگر $\vec{c}=(-1,1,4)$، $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{a}=(-1,-3,0)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید. ۱/۵

---

۱۴ برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$. ۱

---

۱۵ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}|=3$، $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید. ۱/۵

---

۱۶ مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,0,1)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ تولید می‌شود را به دست آورید. ۱

آزمـــــــون (۹) نوبت دوم

۱	اگر $A=\begin{bmatrix} 4\lvert A\rvert & 3 \\ 1 & \lvert A\rvert \end{bmatrix}$ در این صورت دترمینان A را بیابید.	۱
۲	اگر برای دو ماتریس B و A بدانیم $2A+B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های A^2 را بیابید.	۱/۲۵
۳	به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases} a(x-1)=3(x-y) \\ 4x+(a+1)y=2 \end{cases}$ دارای جواب نیست؟	۱/۲۵
۴	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طول‌ها مماس باشد.	۲
۵	مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایرهٔ داده شده، واقع است و روی محیط آن می‌غلتد را پیدا کنید.	۰/۷۵
۶	نوع مقطع مخروطی $y^2+12x+4y-32=0$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.	۲
۷	طول قطر کوچک یک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس ۲ واحد است. مقدار $\frac{c}{a}$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۸	نقاط $A(6,1)$ ، $A'(-2,1)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی با نسبت $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طول قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.	۱/۷۵
۹	اگر $A(m-2,n+1,m+n)$ روی محور zها باشد، آنگاه نقطهٔ $B(m,2n+m,n+1)$ روی کدام‌یک از محورها یا صفحه‌های مختصات قرار دارد؟	۲
۱۰	دو بردار a و b به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض هستند. مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است، اگر زاویه بین این دو بردار کم‌تراز قائمه باشد، اندازه تفاضل این دو بردار را پیدا کنید.	۲/۲۵
۱۱	بردارهای عمود بر دو بردار $\vec{a}=i+2j+2k$ و $\vec{b}=-i+2j-2k$ را تعیین کنید.	۱/۲۵
۱۲	بردارهای $\vec{b}=i+k$ و $\vec{a}=i+j+k$ را در نظر بگیرید. الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ پیدا کنید. ب) مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو ضلع مجاور آن باشند.	۱/۷۵
۱۳	اندازه بردار حاصل‌ضرب خارجی دو بردار با حاصل‌ضرب داخلی آن دو بردار برابر است. زاویهٔ بین این دو بردار را به دست آورید.	۱

آزمـــــــون (۱۱) نوبت دوم

۱- اگر $\begin{bmatrix}۲&۳\\۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}$ باشد، مقدار y را به دست آورید. (۱)

۲- برای دو ماتریس A و B داریم $A^۲=\begin{bmatrix}۰&۳\\-۳&۳\end{bmatrix}$ و $B^۲=\begin{bmatrix}۷&۳\\۹&۷\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۳&۲\\۲&۳\end{bmatrix}$، حاصل $AB+BA$ را به دست آورید. (۱)

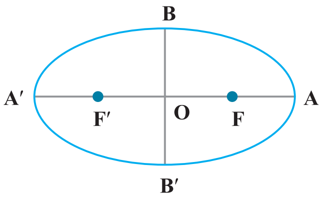
۳- در دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=e\\cx+dy=۲\end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix}-۲&۰\\۲&۳\end{bmatrix}$ است، اگر $x=۲$ باشد، مقدار y را به دست آورید. (۱)

۴- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $(۳,-۱)$ باشد و از نقطهٔ $(۰,۳)$ بگذرد. (۱/۲۵)

۵- سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را بر روی صفحهٔ مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم، مکان هندسی نقاطی درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار بگیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود. (۰/۷۵)

۶- سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را به دست آورید. (۲/۵)

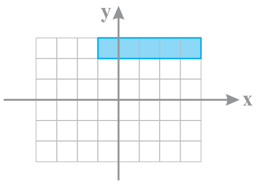
۷- در بیضی شکل مقابل مساحت مثلث OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' است. خروج از مرکز را پیدا کنید. (۱)



۸- طول قطر کوچک یک بیضی $۴\sqrt{۲}$ و فاصلهٔ کانون تا دورترین نقطهٔ آن ۴ است. قطر بزرگ بیضی را به دست آورید. (۱/۵)

۹- فاصلهٔ رأس تا خط هادی سهمی $y^۲-y+x=۲$ را پیدا کنید. (۱/۵)

۱۰- با توجه به شکل مقابل رابطهٔ مربوط به آن را بنویسید. (۱/۵)



۱۱- اگر k, j, i بردارهای واحد باشند، حاصل $\left(i\times(i\times j)\right)\times k$ را پیدا کنید. (۱/۵)

۱۲- اگر زاویهٔ بین دو بردار a و b برابر $\frac{\pi}{۳}$ و $\vec{a}.\vec{b}=\frac{۱}{۳}$ باشد حاصل $|(۲\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-۳\vec{b})|$ را به دست آورید. (۲)

۱۳- اگر $\vec{a}=۲i-j+۲k$ و $\vec{b}=i-j$ باشند: (۲)

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را تعیین کنید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را روی امتداد بردار $\vec{b}$ تعیین کنید.

۱۴- اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۶$ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۸$ باشد، حاصل $|\vec{a}-\vec{b}|$ را پیدا کنید. (۱/۵)

آزمـــــون (۱۸) نوبت دوم (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

۱ **جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.** ۱

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A .... باشد.

ب) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک .... داشته باشند و همچنین هرنقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک .... می‌شود.

ت) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر .... است.

---

۲ **درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** ۰/۷۵

الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم $AB = AC$، آنگاه لزوماً $B = C$ است. درست ☐ نادرست ☐

ب) در حالتی‌که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. درست ☐ نادرست ☐

پ) نقطهٔ $A(2,-3,0)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد. درست ☐ نادرست ☐

---

۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^3|$ را محاسبه کنید. ۱

---

۴ در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مقدار x را بیابید. ۱/۲۵

---

۵ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد. ۱/۲۵

---

۶ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد. ۱/۵

---

۷ در نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید. ۱

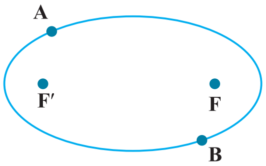
---

۸ اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید. ۱/۵

---

۹ دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. ۱/۲۵

اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند.



---

۱۰ سهمی $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است: ۲

الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نمودار آن را رسم کنید.

آزمـــــــون (۱۸) نوبت دوم (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

ردیف	سؤالات	بارم
۱۱	**به سؤالات زیر پاسخ دهید.** الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $A=(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه xoy موازی باشد. ب) معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟ پ) در فضای $\mathbb{R}^3$ ، نقطهٔ A به طول ۲ روی محور طول‌ها و نقطه $B=(-۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.	۱/۵
۱۲	**اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۱,۲,۱)$ باشد، طول بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ را به دست آورید.**	۱
۱۳	**بردارهای $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ را در نظر بگیرید.** الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.	۱/۷۵
۱۴	**ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}$.**	۱
۱۵	**مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,m,-۱۱)$ ، $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.**	۱
۱۶	**اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.**	۱/۲۵

هندسه (۳) — **پاسخ آزمون نوبت اول (۱)**

۱

الف) دایره (۰/۵) ب) هذلولی (۰/۵)

۲

الف) $(A+B)^{۲}\overset{(۰/۲۵)}{=}(A+B)(A+B)\overset{(۰/۲۵)}{=}A^{۲}+AB+BA+B^{۲}\,\underline{\underline{A\times B=B\times A}}$

$A^{۲}+AB+AB+B^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $(A-B)\times(A+B)\overset{(۰/۲۵)}{=}A^{۲}-BA+AB-B^{۲}\overset{(۰/۲۵)}{\,}\underline{\underline{AB=BA}}$

$A^{۲}-AB+AB-B^{۲}=A^{۲}-B^{۲}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۳

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

حال از برابری ماتریس‌ها داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}\left.\begin{matrix}۲x-y=۳\ (۰/۲۵)\\ ۲x+y=۵\ (۰/۲۵)\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=۲\,,\,y=۱\ (۰/۲۵)\\ z=-۲\ (۰/۲۵)\end{cases}\Bigg\}\Rightarrow x+y+z=۲+۱-۲=۱\ (۰/۲۵)$$

۴

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}(AB)\overset{(۰/۲۵)}{=}A^{-۱}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow(A^{-۱}A)B=\frac{۱}{۷-۴}\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۱ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow IB=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}۶ & ۳\\ ۹ & ۶\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\ (۰/۲۵)$$

(۰/۵)

۵

چون $IA=AI$ پس اتحاد (۰/۲۵)

$I^{n}-A^{n}=(I-A)(I+A+A^{۲}+\cdots+A^{n-۱})$ برقرار است و چون $A^{n}=\bar{O}$ داریم:

$$I^{n}=I^{n}-A^{n}$$

$$\Rightarrow I=(I-A)(I+A+A^{۲}+\cdots+A^{n-۱})\ (۰/۵)$$

بنابراین $(I-A)$ وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با: (۰/۲۵)

$$(I-A)^{-۱}=I+A+A^{۲}+\cdots+A^{n-۱}\ (۰/۲۵)$$

۶

باید دو خط موازی هم باشند: (۰/۲۵)

$$\frac{-۲}{a-۵}\overset{(۰/۲۵)}{=}\frac{-a}{۳}\neq\frac{a+۲}{۲}\Rightarrow -a^{۲}+۵a=-۶\Rightarrow a^{۲}-۵a-۶=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow(a-۶)(a+۱)=۰\Rightarrow a=۶,\ a=-۱\ (۰/۵)$$

۷

با توجه به فرض $A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ (ماتریس ضرایب) و $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}$ (ماتریس مقادیر معلوم) و $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ (ماتریس مجهولات)داریم:

$$X=A^{-۱}B\overset{(۰/۲۵)}{=}\frac{۱}{۶-(-۱)(-۴)}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}\ (۰/۵)$$

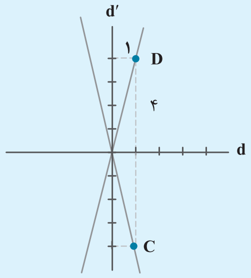
$$=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=۳\,,\,y=۲\ (۰/۲۵)$$

(۰/۵)

۸

دو خط عمود را رسم می‌کنیم. در فاصلهٔ ۱ واحد از مبداء روی خط d نقطه‌ای قرار می‌دهیم (۰/۵) و از آن نقطه به اندازهٔ ۴ واحد موازی d' بالا و پایین می‌آییم تا به نقاط C و D برسیم. (۰/۵)

خطوط گذرنده از مبدا و از نقاط C و D مکان موردنظر ما هستند. (۰/۲۵)



۹

محل تلاقی دو قطر مرکز دایره است.

$$\begin{cases}x+y=۱\\ x-y=۳\end{cases}\Rightarrow x=۲,y=-۱\Rightarrow O(۲,-۱)\ (۰/۵)$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره تا مماس شعاع دایره است.

$$r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)-۶|}{\sqrt{۱۶+۹}}\Rightarrow r=\frac{۱}{۵}\ (۰/۵)$$

$$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=\frac{۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۴x+۴+y^{۲}+۲y+۱=\frac{۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۴x+۲y+\frac{۱۲۴}{۲۵}=۰\ (۰/۵)$$

۱۰

$$x^{۲}-۴x+۴-۴+y^{۲}-۶y+۹-۹=۳$$

$$(x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۶\Rightarrow O(۲,۳),r=۴\ (۰/۵)$$

$$x^{۲}-۱۰x+۲۵-۲۵+y^{۲}-۱۴y+۴۹-۴۹+۷۳=۰$$

$$(x-۵)^{۲}+(y-۷)^{۲}=۱\Rightarrow O'(۵,۷),r'=۱\ (۰/۵)$$

$$OO'=\sqrt{(۵-۲)^{۲}+(۷-۳)^{۲}}=۵\ (۰/۲۵)$$

چون $OO'=r+r'$ (۰/۲۵) است. پس دو دایره مماس خارج‌اند. (۰/۲۵)

۴

می‌دانیم که $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ پس داریم: (۰/۲۵)

$$(۲AB)^{-1}=\underbrace{\frac{۱}{۲}B^{-۱}A^{-۱}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۲&۳\end{bmatrix}}_{(۰/۵)}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶&۷\\۸&۱۰\end{bmatrix}\ (۰/۲۵)$$

$$=\begin{bmatrix}۳&\frac{۷}{۲}\\۴&۵\end{bmatrix}\ (۰/۲۵)$$

۵

$$۲A^{۲}-A+I=۰\Rightarrow A-۲A^{۲}=I\Rightarrow AI-۲AA=I\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow A(I-۲A)=I\Rightarrow |A(I-۲A)|=|I|\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow |A||I-۲A|=۱\Rightarrow |A|\neq ۰\ (۰/۵)$$ A وارون‌پذیر است.

$$A(I-۲A)=I\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=I-۲A\quad (۰/۲۵)$$

۶

$$\underbrace{|A|\neq ۰\Rightarrow}_{(۰/۲۵)}\begin{vmatrix}۱&-a\\(a+۱)&-۲\end{vmatrix}\neq ۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-۲+a^{۲}+a\neq ۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{(a+۲)(a-۱)\neq ۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{a\neq -۲}_{(۰/۲۵)},\underbrace{a\neq ۱}_{(۰/۲۵)}$$

۷

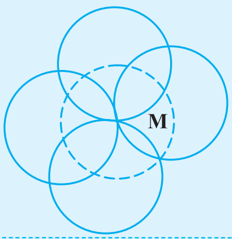
$$\begin{bmatrix}x&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۰\\۳&-۱&۱\\۱&۲&m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x^{۲}+۹x+(۲+m)\end{bmatrix}=۰\ (۰/۵)$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۹x+(۲+m)=۰\xRightarrow{x=۰}\overset{(۰/۲۵)}{۲+m=۰}\Rightarrow m=-۲\ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{۲x^{۲}+۹x=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow x(۲x+۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-\frac{۹}{۲}\end{cases}(۰/۲۵)$$

۸

مکان هندسی مرکز این دایره‌ها دایره‌ای (۰/۲۵) است به مرکز M (۰/۲۵) و به شعاع ۴ سانتی‌متر (۰/۲۵)



۹

$$x^{۲}-۲x+۱-۱+y^{۲}+۴y+۴-۴-۵=۰$$

$$\Rightarrow \overset{(۰/۲۵)}{(x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۱۰}\Rightarrow \overset{(۰/۲۵)}{O(۱,-۲)},\overset{(۰/۲۵)}{r=\sqrt{۱۰}}$$

$$OC=\sqrt{(۲-۱)^{۲}+(۳-(-۲))^{۲}}=\sqrt{۲۶}\ (۰/۲۵)$$

چون $CO>r$ است پس نقطهٔ C داخل دایره قرار ندارد. (۰/۵)

۱۰

$$x^{۲}+y^{۲}=۹\Rightarrow O(۰,۰),r=۳\ (۰/۵)$$

$$x^{۲}-۲x+۱-۱+y^{۲}+۲y+۱=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱\ (۰/۲۵)$$

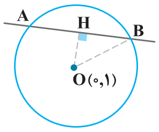
$$\Rightarrow O'(۱,-۱),r'=۱\ (۰/۵)$$

$$OO'=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۲}\ (۰/۲۵)$$

$OO'<|r-r'|$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ دو دایره متداخل می‌شوند. (۰/۲۵)

۱۱

اگر از مرکز دایره خط عمودی بر آن وتر رسم کنیم آن وتر را نصف می‌کند. $\left(AH=BH=\sqrt{۲}\right)$ (۰/۲۵)



$$OH=\frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

$$OB^{۲}=OH^{۲}+BH^{۲}\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underbrace{OB^{۲}=\frac{۱}{۲}+۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow OB^{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow OB=r=\sqrt{\frac{۵}{۲}}\ (۰/۲۵)$$

$$x^{۲}+(y-۱)^{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲y-\frac{۳}{۲}=۰\ (۰/۲۵)$$

۱۲

$$x^{۲}+ax+y^{۲}+by+c=۰\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}a^{۲}+b^{۲}=۲^{۲}+۳^{۲}=۱۳\ (۰/۵)\\ ۴c=۴(۴)=۱۶\ (۰/۲۵)\end{array}\right\}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}<۴c\ (۰/۵)$$

مکان هیچ نقطه‌ای نیست. پس معادلهٔ دایره نیست. (۰/۲۵)

۱۳

$$x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases}(۱,۰)\Rightarrow ۱+a+c=۰ & (۰/۲۵)\\(۰,-۱)\Rightarrow ۱-b+c=۰ & (۰/۲۵)\\(۰,۳)\Rightarrow ۹+۳b+c=۰\Rightarrow c+۳b=-۹ & (۰/۲۵)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-b+c=-۱\ (۰/۲۵)\\c+۳b=-۹\end{cases}\Rightarrow b=-۲,c=-۳\Rightarrow a=۲\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y-۳=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۴+۴+۱۲}}{۲}=\sqrt{۵}\ (۰/۲۵)$$

هندسه (۳) — پاسخ آزمون نوبت اول (۴)

۱

$$(A-I)^{۲}=-۳A\Rightarrow A^{۲}+I^{۲}-۲AI=-۳A\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A^{۲}+I-۲A=-۳A\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A^{۲}+I=-A\quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |A^{۲}+I|=\underbrace{|-A|=(-۱)^{۳}}_{(۰/۲۵)}\underbrace{|A|=-۱\times -۳}_{(۰/۲۵)}=۳\quad (۰/۲۵)$$

$OD^۲ = OH^۲ + DH^۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۱۷ = \frac{۴}{۲} + DH^۲ \Rightarrow DH^۲ = \frac{۳۰}{۲} \Rightarrow DH = \sqrt{۱۵}$ (۰/۲۵)

$CD = ۲DH \Rightarrow CD = ۲\sqrt{۱۵}$ (۰/۲۵)

۴

$x = y^۲ + my + n \Rightarrow$

$y^۲ + my + \frac{m^۲}{۴} = x - n + \frac{m^۲}{۴}$ (۰/۲۵)

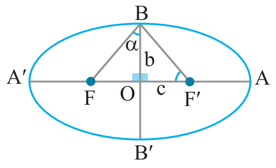
$\Rightarrow (y + \frac{m}{۲})^۲ = (x - n + \frac{m^۲}{۴})$ (۰/۲۵)

راس سهمی $= (n - \frac{m^۲}{۴}, -\frac{m}{۲}) = (-۱,۲)$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{m}{۲} = ۲ \Rightarrow m = -۴ & (۰/۵) \\ n - \frac{m^۲}{۴} = -۱ \Rightarrow n - ۴ = -۱ \Rightarrow n = ۳ & (۰/۵) \end{cases}$$

۵

اگر $AA' = ۲a$ باشد، پس $BB' = a$ خواهد بود، پس $b = \frac{a}{۲}$ و $FF' = ۲c$ است؛ چون $BF = BF'$ بنابراین مثلث FBF' متساوی‌الساقین است، و از آنجایی که مجموع فواصل هر نقطهٔ بیضی از کانون‌ها برابر ۲a است، پس $BF = a$ خواهیم داشت. (۰/۲۵)



$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = \frac{a^۲}{۴} + c^۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow c^۲ = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ (۰/۲۵)

$\tan\alpha = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b}$ (۰/۲۵)

$= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{\frac{۱}{۲}a} = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow F'\hat{B}F = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۶

$FA = OA - OF \Rightarrow ۲ = a - c$ (۰/۵)

$BF^۲ = OF^۲ + OB^۲ = c^۲ + b^۲$

$\xRightarrow{c^۲+b^۲=a^۲} BF^۲ = a^۲ \Rightarrow BF = a$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a = ۵ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۷

$x^۲ - ۴x + ۴ = ۸y + ۸ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۸(y+۱) \Rightarrow S(۲,-۱), a = ۲$ (۰/۲۵) (۰/۷۵)

$\Rightarrow F(۲,۱) \Rightarrow OF = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۸

وسط BC $M = (\frac{۳+۱}{۲}, \frac{۱+۵}{۲}, \frac{۴+۲}{۲}) = (۲,۳,۳)$ (۰/۲۵)

$AM = (۱,۱,۲)$

$|AM| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۶}$ (۰/۲۵) (۰/۵)

۹

a,b,c هم صفحه هستند $\Leftrightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰$ (۰/۲۵)

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۹ \end{vmatrix} = ۶\vec{i} - ۵\vec{j} + \vec{k} \quad (۰/۷۵)$$

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (۱)(۶) - (m)(۵) + m^۲(۱) = ۰$ (۰/۵)

$\Rightarrow m^۲ - ۵m + ۶ = ۰$

$\Rightarrow (m-۲)(m-۳) = ۰ \Rightarrow m = ۲,۳$ (۰/۵)

۱۰

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = |\vec{a}\times\vec{b}|$

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۲ & -۳ \\ ۴ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = -۱۲\vec{i} - ۲۴\vec{j} + ۸\vec{k} \quad (۱)$$

$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-۱۲)^۲ + (-۲۴)^۲ + ۸^۲} = ۲۸$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۱

$b+c$ را به دست می‌آوریم:

$\vec{b}+\vec{c} = (۲,-۳,۶), \vec{a} = (۱,-۳,۴)$ (۰/۲۵)

تصویر قائم a بر امتداد b+c $= \frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}+\vec{c}|^۲}(\vec{b}+\vec{c})$ (۰/۲۵)

$= \frac{۲+۹+۲۴}{۴+۹+۳۶}(۲,-۳,۶) = \frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$ (۰/۲۵)

$= \frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶)$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۲

می‌دانیم: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^۲ = |\vec{b}|^۲ \quad , \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^۲}{|\vec{a}||\vec{a}|} = ۱ \Rightarrow \theta = ۰$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۴

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = -۱-۴-۵=-۱۰$ (۰/۵)

$\vec{V_1}+\vec{V_2} = (۰,۳,-۴) \Rightarrow |\vec{V_1}+\vec{V_2}| = \sqrt{۰+۹+۱۶}=۵$ (۰/۲۵) (۰/۵)

$\Rightarrow |\vec{V_1}+\vec{V_2}| + \vec{V_1}.\vec{V_2} = -۱۰+۵=-۵$ (۰/۵)

هندسه (۳) | پاسخ آزمون نوبت دوم (۹)

۱

$A = \begin{bmatrix} ۴|A| & ۳ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۴|A|\times|A| - ۱\times۳$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow |A| = ۴|A|^۲ - ۳ \Rightarrow ۴|A|^۲ - |A| - ۳ = ۰$

$\Rightarrow |A| = \frac{۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۸} = \frac{۱\pm۷}{۸} = ۱, -\frac{۶}{۸}$ (۰/۵) (۰/۲۵)

۲

$(۲A+B)-(A+B) = \begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}۲&۲\\۱&۱\end{bmatrix} = A$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۳\end{bmatrix}$ (۰/۵)

$\Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&۰\\۴&۹\end{bmatrix}$ (۰/۵)

$\Rightarrow ۱+۰+۴+۹=۱۴$ (۰/۲۵)

۳

$\begin{cases} ax-a=۳x-۳y \\ ۴x+(a+۱)y=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-۳)x+۳y=a \\ ۴x+(a+۱)y=۲ \end{cases}$ (۰/۲۵)

باید این دو خط موازی باشند تا دستگاه جواب نداشته باشد.

$\frac{a-۳}{۴} = \frac{۳}{a+۱} \neq \frac{a}{۲} \Rightarrow a^۲-۲a-۳=۱۲$ (۰/۲۵)

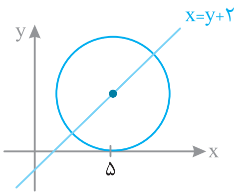
$\Rightarrow a^۲-۲a-۱۵=۰ \Rightarrow (a-۵)(a+۳)=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a=۵, a=-۳$ (۰/۵)

۴

فرض کنیم مرکز دایره $\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha-۲\end{vmatrix}$ باشد. (۰/۲۵)

پس شعاع دایره $\alpha-۲$ است که $\alpha=۵$ است. (۰/۵)



پس $\begin{vmatrix}۵\\۳\end{vmatrix}$ مرکز دایره و شعاع ۳ است. (۰/۲۵)

$(x-۵)^۲+(y-۳)^۲=۹ \Rightarrow x^۲+y^۲-۱۰x-۶y+۲۵=۰$

(۰/۵) (۰/۵)

۵

مکان هندسی موردنظر دایره‌ای است (۰/۲۵) به مرکز دایرهٔ اصلی (۰/۲۵) و به شعاع مجموع شعاع‌های دو دایره. (۰/۲۵)

۶

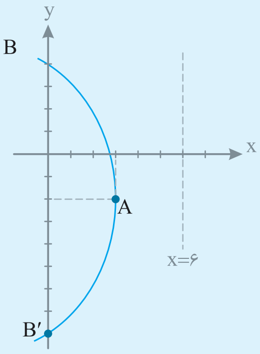
$y^۲+۴y+۴=-۱۲x+۳۲+۴$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (y+۲)^۲ = -۱۲(x-۳)$ معادلهٔ سهمی است (۰/۵)

$\Rightarrow$ راس سهمی $=A(۳,-۲), a=۳, F(۰,-۲) B(۰,۴) B'(۰,-۸)$ (۰/۵)

خط هادی $x=۳+۳=۶$

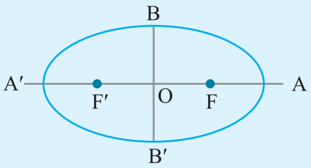
توجه داشته باشید که نقاط B، B' و F هم طولند و فاصلهٔ B، B' از F، $۲a$ است.



(۰/۷۵)

۷

می‌دانیم $FA=a-c$ و $FB=a$ است، پس FA نزدیک‌ترین فاصلهٔ کانون F تا یک رأس است:



$a-c=۲$ (۰/۲۵) و $۲b=۴\sqrt{۲} \Rightarrow b=۲\sqrt{۲}$ (۰/۲۵)

$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow (c+۲)^۲ = ۸+c^۲ \Rightarrow c^۲+۴c+۴=۸+c^۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۴c=۴ \Rightarrow c=۱ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۸

$AA'=۲a=۶-(-۲)=۸ \Rightarrow a=۴$ (۰/۲۵)

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{c}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow c=۲\sqrt{۳}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۶=b^۲+۱۲$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow b^۲=۴ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow ۲b=۴$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۹

$\begin{cases} m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \; (۰/۵) \\ n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱ \; (۰/۵) \end{cases} \Rightarrow B(۲,۰,۰)$ (۰/۷۵)

B روی محور xها قرار دارد. (۰/۲۵)

۱۲

الف) $\overrightarrow{AB}=(-۱,۲,-۲)$ (۰/۲۵) $\overrightarrow{AC}=(۲,۱,۲)$ (۰/۲۵)

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-۲+۲-۴}{\sqrt{۱+۴+۴}\sqrt{۴+۱+۴}}=-\frac{۴}{۹}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب):

$$\text{تصویر قائم } \overrightarrow{AB} \text{ بر } \overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^۲}\overrightarrow{AC}=\frac{-۲+۲-۴}{۴+۱+۴}(۲,۱,۲)$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$=\left(-\frac{۸}{۹},-\frac{۴}{۹},-\frac{۸}{۹}\right)$$
(۰/۲۵)

ج)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۱ & ۲ & -۲\\ ۲ & ۱ & ۲\end{vmatrix}=۶i-۲j-۵k$$
(۰/۲۵)

$$S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴+۲۵}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۳

$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow(m-۱)(۱)+۲(m)+۲(۲)=۰$ (۰/۵)

$\Rightarrow m+۲m+۳=۰\Rightarrow ۳m=-۳\Rightarrow m=-۱$ (۰/۲۵)

هندسه (۳) | پاسخ آزمون نوبت دوم (۱۳)

۱

$$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰\\ ۸ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲a & a\\ ۲c & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰\\ ۸ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow a=۰,\ c=۴$$
(۰/۵)

پس d و b هر مقداری می‌تواند باشد؛ بنابراین بی‌شمار ماتریس وجود دارد.

۲

$$\frac{|A^۲+I|}{|A+I|}=\frac{|A^۲+A^۳|}{|A+I|}=\frac{|A^۲(I+A)|}{|A+I|}=\frac{|A^۲||I+A|}{|A+I|}=|A^۲|$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$A^۳=I\Rightarrow|A^۳|=|I|\Rightarrow|A|^۳=۱\Rightarrow|A|=۱$ (۰/۵)

$\Rightarrow|A^۲|=|A|^۲=۱$ (۰/۲۵)

۳

فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند، باید ثابت کنیم $B=C$ است.

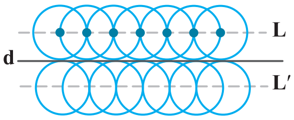
طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} AB=BA=I\\ AC=CA=I\end{cases}$$
(۰/۵)

$B=IB=(CA)B=C(AB)=C(I)=C$ (۰/۵)

۴

در مرکز این دایره‌ها بر روی دو خط موازی L و L′ که موازی d می‌باشند و در دو طرف خط d به فاصلهٔ r از d قرار دارند. (۰/۵)



(۰/۲۵)

۵

باید فاصلهٔ بین دو نقطه از شعاع کوچک‌تر باشد.

$\sqrt{(m+۱)^۲+(m+۱)^۲}<۵\Rightarrow\sqrt{۲(m+۱)^۲}<۵$ (۰/۵)

$\Rightarrow ۲(m+۱)^۲<۲۵\Rightarrow(m+۱)^۲<\frac{۲۵}{۲}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow-\frac{۵}{\sqrt{۲}}<m+۱<\frac{۵}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{-۵}{\sqrt{۲}}-۱<m<\frac{۵}{\sqrt{۲}}-۱$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۶

$x^۲-۴x+۴=۸y+۴+۴\Rightarrow(x-۲)^۲=۸(y+۱)$ (۰/۲۵) (۰/۵)

راس سهمی $=A(۲,-۱)$, $a=۲$ (۰/۷۵)

$y=-۱-۲=-۳$, $F(۲,-۱+۲)=F(۲,۱)$ (۰/۵)

۷

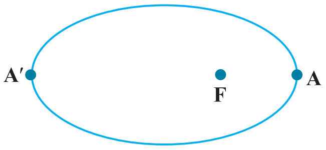
نقطهٔ M بر روی خط d بر روی بیضی قرار دارد و سایر نقطه‌ها روی d خارج بیضی قرار دارند و می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه خارج بیضی از کانون‌ها بیش از ۲a است؛ (۰/۷۵) درحالی‌که $MF+MF'=۲a$ است، پس نقطهٔ M مجموع فاصله‌هایش از دو کانون F و F′ کم‌ترین مقدار را دارد (۰/۷۵)

۸

همان‌طور که در شکل مشخص است نزدیک‌ترین نقطه بیضی تا F نقطهٔ A و دورترین نقطه تا F همان نقطهٔ A′ است (۰/۵) پس داریم:

$FA'=۳FA\Rightarrow OF+OA'=۳(OA-OF)$ (۰/۵)

$\Rightarrow c+a=۳(a-c)\Rightarrow ۴c=۲a\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۵)



۹

چون عرض دو نقطه برابر است پس بیضی افقی است. (۰/۲۵)

$a=SF=۳-(-۱)\Rightarrow a=۴\Rightarrow(y-۲)^۲=۱۶(x+۱)$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

۱۰

$$\begin{matrix} A(۲,۰,۳)\\ B(۰,۰,۳)\\ C(۰,۱,۳)\\ D(۲,۱,۳)\end{matrix}\Rightarrow ABCD\ \text{معادله وجه}:\begin{cases} ۰\le x\le ۲ & (۰/۵)\\ ۰\le y\le ۱ & (۰/۵)\\ z=۳ & (۰/۵)\end{cases}$$

۷

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. (۰/۲۵) مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است. این دایره را رسم می‌کنیم (۰/۲۵) محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است. (۰/۲۵)

بحث: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد. (۰/۲۵)

اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد. (۰/۲۵)

اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)

۸

$$r = OM = \sqrt{(۱+۲)^۲+(-۱-۳)^۲} = ۵ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow (x+۲)^۲+(y-۳)^۲ = ۲۵ \quad (۰/۵)$$

۹

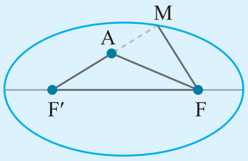
$$x^۲+y^۲=۲ \Rightarrow \underbrace{O(۰,۰)}_{(۰/۲۵)},\ \underbrace{r=\sqrt{۲}}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{x+y-۲=۰} \underbrace{d=\frac{|۱(۰)+۱(۰)-۲|}{\sqrt{۱+۱}}}_{(۰/۲۵)}$$

$$= \sqrt{۲} = r \quad (۰/۲۵)$$

خط بر دایره مماس است. (۰/۲۵)

۱۰

پاره‌خط F'A را ادامه می‌دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می‌کنیم (۰/۲۵) نقطه M روی بیضی قرار دارد.



در مثلث $M\hat{A}F$ بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم: $AF < MA + MF$ (۰/۲۵)

به طرفین نامساوی مقدار AF' را اضافه می‌کنیم

$$\underbrace{AF+AF' < (MA+AF')+MF}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{MF'+MF}_{(۰/۲۵)} = ۲a$$

۱۱

$$\begin{cases} ۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵ \ (۰/۲۵) \\ ۲b=۶ \Rightarrow b=۳ \ (۰/۲۵) \end{cases} \text{ و } \underbrace{a^۲=b^۲+c^۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow c=۴ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۴}{۵} \ (۰/۲۵)$$

۱۲

الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانه سهمی رو به پایین است و $a = ۴$

پس معادله سهمی به صورت $(x-۲)^۲ = -۱۶(y-۳)$ (۰/۵) است.

ب) مختصات کانون سهمی برابر $F = (۲,-۱)$ (۰/۵) است.

۱۳

الف) $|AB| = \sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲} = ۳$ (۰/۵)

ب)
$$\begin{cases} x = ۳ \\ -۲ \le y \le ۱ \ (۰/۷۵) \\ z = ۲ \end{cases}$$

۱۴

$\vec{a} = r\vec{b}$ (۰/۲۵)

$$\underbrace{\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\frac{(r\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\frac{r|\vec{b}|^۲}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{r\vec{b} = \vec{a}}_{(۰/۲۵)}$$

۱۵

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{i}.\underbrace{(\vec{i})}_{(۰/۵)} = \underbrace{|\vec{i}|^۲}_{(۰/۲۵)} = ۱ \quad (۰/۲۵)$$

۱۶

الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$\underbrace{(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{(۱,۴,۱)}_{(۰/۲۵)}\times(۲,۱,-۲) = \underbrace{(-۹,۴,-۷)}_{(۰/۵)}$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$\underbrace{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}_{(۰/۲۵)} = (۲,۳,۱).\underbrace{(-۲,-۲,-۳)}_{(۰/۵)} = -۱۳ \quad (۰/۲۵)$$

ماتریس

به هر آرایش مستطیلی از عددها، که شامل چند سطر و چند ستون باشد، ماتریس می‌گوییم. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. به‌طور معمول ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم. به منظور مشخص کردن جایگاه هر درایه، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند.

a_{ij}: یعنی درایهٔ روی سطر iام و ستون jام.

اگر تعداد سطرهای ماتریس m و تعداد ستون‌های آن n باشد، به $m\times n$ مرتبهٔ ماتریس گفته می‌شود.

$$A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۳ & ۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow a_{۲۱}=۳ \ , \ a_{۲۳}=۲ \ , \ a_{۱۳}=-۱$$

مثال در ماتریس $[i+j^۲]_{۲\times۲}$ مجموع درایه‌ها را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$[i+j^۲]_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۱+۱^۲ & ۱+۲^۲ \\ ۲+۱^۲ & ۲+۲^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۲+۵+۳+۶=۱۶$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس مربعی

در ماتریس A اگر تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

درایه‌هایی را که شمارهٔ سطر و ستون آن با هم یکسان باشند را درایه‌های قطر اصلی می‌نامیم. $(i=j)$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس مربعی $A_{۳\times۳}$ مشخص شده‌اند:

$$a_{۱۱}=۱ \ , \ a_{۲۲}=۴ \ , \ a_{۳۳}=۳ \quad \text{درایه‌های قطر اصلی} \qquad A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

ماتریس سطری

اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد، آن را ماتریس سطری می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}_{۱\times۳}$$

ماتریس ستونی

اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

ماتریس قطری

ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی، صفر باشد.

(درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و یا نباشند.)

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر

ماتریس قطری که تمامی درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی

ماتریس اسکالری که تمامی درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ باشد. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نمایش می‌دهند.

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

ماتریس صفر

ماتریسی که تمامی درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر می‌نامند و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهند.

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

دترمینان

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد $(۱ \le n \le ۳)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نشان می‌دهیم.

- اگر A ماتریسی از مرتبهٔ ۱ باشد، آن‌گاه $|A|$، برابر تنها درایهٔ ماتریس A خواهد بود. $A = [۲] \Rightarrow |A| = ۲$
- برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مرتبهٔ ۲ از رابطهٔ روبه‌رو استفاده می‌کنیم: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲(-۲) - (۱)(۳) = -۴ - ۳ = -۷$$

- برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس مرتبهٔ ۳ می‌توانیم بر حسب هر سطر یا هر ستون دلخواه آن را بسط دهیم، که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصر به فرد است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{۱۱} \times (-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۲} \times (-۱)^{۱+۲} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳} \times (-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

مثال دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون اول و سطر سوم به‌دست آورید.

$$|A| = ۱(-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۲+۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} + ... $$

$$|A| = ۱(-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۲+۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix} + (۱)(-۱)^{۳+۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱(-۲-۴) - ۳(۴-۲) + ۱(۴+۱) = -۶ - ۶ + ۵ = -۷$$

$$|A| = ۱(-۱)^{۳+۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۳+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۳+۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} = ۱(۴+۱) - ۲(۲-۳) + ۲(-۱-۶) = ۵ + ۲ - ۱۴ = -۷$$

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $|AB| + ۲|A+B|$ را پیدا کنید.

$$AB = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱۵ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = ۳۵ - ۴۵ = -۱۰$$

$$A + B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B| = ۱۰ - ۱۵ = -۵$$

$$|AB| + ۲|A+B| = -۱۰ - ۱۰ = -۲۰$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان‌های ۳×۳

در این روش باید دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش بنویسیم و مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های روی قطر اصلی و دو قطر موازی آن را از مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر فرعی و دو قطر موازی آن کم کنیم:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

مثال دترمینان ماتریس $A_{۳\times۳}$ مثال قبل را با استفاده از روش ساروس به دست آورید.

$$\left|\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{matrix}\right| \begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{matrix} \begin{aligned} &= ((۱)(-۱)(۲) + (۲)(۲)(۱) + (۱)(۳)(۲)) - ((۲)(۳)(۲) + (۱)(۲)(۲) + (۱)(-۱)(۱)) \\ &= (-۲ + ۴ + ۶) - (۱۲ + ۴ - ۱) = ۸ - ۱۵ = -۷ \end{aligned}$$

مثال اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m+2 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقدار m را پیدا کنید.

$$|A|=0 \Rightarrow (m+1)(m+2)-(1)(2)=0 \Rightarrow m^2+3m+2-2=0 \Rightarrow m(m+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-3 \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون

دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را می‌توانیم به فرم $\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B}$ درآوریم که در آن به ماتریس A، ماتریس ضرایب، به ماتریس B، مقادیر معلوم و به ماتریس X، ماتریس مجهولات گفته می‌شود و در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد ($|A|\neq 0$)، می‌توانیم ماتریس مجهول‌ها را از رابطهٔ $X=A^{-1}B$ به‌دست آوریم.

مثال دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

با فرض $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ داریم:

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x=3, y=2$$

نکته برای دو ماتریس وارون پذیر 2×2 و دلخواه A و B داریم:

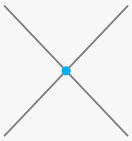
۱) $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$

۲) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

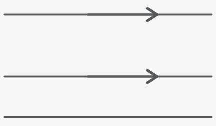
۳) $(A^{-1})^{-1}=A$

تعبیر هندسی دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول

می‌دانیم محل برخورد دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ در دستگاه مختصات همان جواب دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول، $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ است، پس داریم:



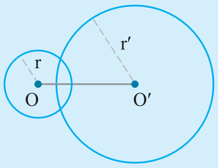
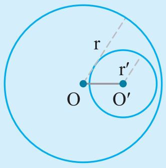
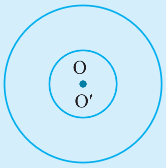
الف) اگر $\frac{b}{b'}\neq\frac{a}{a'}$ باشد، ۲ خط متقاطع هستند و دستگاه جواب منحصربه فرد دارد.($|A|\neq 0$)



ب) اگر $\frac{c}{c'}\neq\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ دو خط با هم موازی هستند، پس دستگاه فاقد جواب است.

ج) اگر $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ باشد آن‌گاه دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

توجه اگر $|A|=0$ باشد، یکی از حالت‌های (ب) و (ج) رخ می‌دهد.

وضعیت نسبی دو دایره		فاصلهٔ مراکز دو دایره از هم	شکل
۴	متقاطع	$\|r-r'\| < OO' < r+r'$	
۵	متداخل	$OO' < \|r-r'\|$	
۶	هم مرکز	$OO' = 0$	

وضعیت خط و دایره نسبت به هم

یک خط نسبت به یک دایره سه وضعیت دارد: الف) متقاطع، ب) مماس، پ) متخارج

برای بررسی هر یک از این سه وضعیت می‌توان از دو روش استفاده کرد:

روش اول: در معادلهٔ خط موجود، y را برحسب x مرتب می‌کنیم و به جای y در معادلهٔ دایره جای‌گذاری می‌کنیم تا یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب x به‌دست آید. سپس فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه می‌کنیم:

۱) اگر $\Delta > 0$ ← معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد ← خط در ۲ نقطه دایره را قطع می‌کند. (متقاطع)

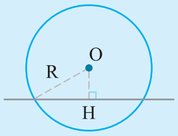
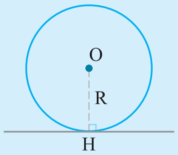
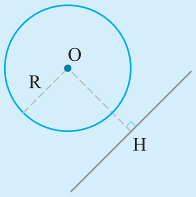
۲) اگر $\Delta = 0$ ← معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد ← خط در یک نقطه دایره را قطع می‌کند. (مماس)

۳) اگر $\Delta < 0$ ← معادله ریشهٔ حقیقی ندارد ← خط و دایره یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. (متخارج)

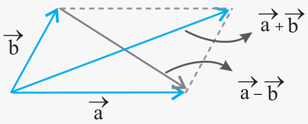
روش دوم: ابتدا باید از روی معادلهٔ دایره، شعاع (R) و مرکز آن $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ را به‌دست آوریم. سپس فاصلهٔ مرکز دایره از معادلهٔ خط موجود را از فرمول زیر محاسبه کنیم:

معادلهٔ خط : $ax+by+c=0 \Longrightarrow$ فاصلهٔ شعاع از خط : $OH = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

در این صورت:

فاصلهٔ مرکز دایره از خط		وضعیت نسبی خط و دایره نسبت به هم	شکل
الف	$OH < R$	متقاطع	
ب	$OH = R$	مماس	
پ	$OH > R$	متخارج	

تعبیر هندسی اعمال روی بردارها:



نکته: هر بردار مانند (a,b) را می‌توانیم به‌صورت $a\vec{i}+b\vec{j}$ نمایش دهیم.

اگر بخواهیم بردارها را توسط بردار یکه بنویسیم به‌صورت $\vec{a}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$ نمایش می‌دهیم که $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ است.

ضرب داخلی بین دو بردار:

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند، در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

تعریف دیگری از ضرب داخلی:

اگر $۰\le\theta\le\pi$ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد؛ داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

زاویهٔ بین دو بردار:

با توجه به تعریف ضرب داخلی زاویهٔ بین دو بردار از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست برآید:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

خواص ضرب داخلی:

(۱) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

(۲) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ خاصیت شرکت‌پذیری

(۳) اگر $\vec{a}\ne ۰,\vec{b}\ne ۰,\vec{a}.\vec{b}=۰ \xRightarrow{\text{آن‌گاه}}$ b,a بر هم عمودند.

(۴) $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

(۵) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

(۶) $\vec{a}.\vec{o}=۰$

(۷) اگر $\vec{a}=۰$ یا $\vec{b}=۰ \xRightarrow{\text{آن‌گاه}} \vec{a}.\vec{b}=۰$

مثال: اگر $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ بردارهایی باشند که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰$ و طول آن‌ها به ترتیب ۱، ۲ و ۳ باشد، مقدار $a.b+a.c+b.c$ را به‌دست آورید.

طرفین رابطه را در $(a+b+c)$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$a+b+c=۰\Rightarrow (a+b+c).(a+b+c)=۰\Rightarrow |a|^۲+a.b+a.c+b.a+|b|^۲+b.c+c.a+c.b+|c|^۲=۰$$

$$\Rightarrow |a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲a.b+۲a.c+۲b.c=۰\Rightarrow ۱^۲+۲^۲+۳^۲+۲(a.b+a.c+b.c)=۰\Rightarrow a.b+a.c+b.c=-۷$$

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$:

برای به دست آوردن تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

ضرب خارجی:

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشد، ضرب خارجی $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

نکته: ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برداری است که هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است.

مثال برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(1,-3,2)$ و $\vec{b}=(-2,1,-5)$ را به‌دست آورید.

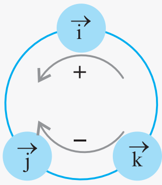
$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-13\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$$

ضرب خارجی بردارهای یکه:

برای به‌دست آوردن ضرب خارجی بردارهای یکه، سه بردار i، j و k را به ترتیب پشت سر هم می‌نویسیم. ضرب هر جفت از آن‌ها سومی می‌شود و علامت آن‌ها به این ترتیب مشخص می‌شود که اگر دو بردار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پشت سرهم قرار گیرند، علامت مثبت، در غیر این صورت منفی است.

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\ ,\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$



اندازهٔ ضرب خارجی دو بردار:

اندازهٔ ضرب خارجی دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ که زاویهٔ بین آن‌ها θ است. از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که توسط این بردارها ساخته می‌شوند و نصف این مقدار برابر مساحت مثلثی است که توسط این بردارها به دست می‌آید.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

خصوصیات ضرب خارجی:

(۱) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(۲) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{O}$

(۳) $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$

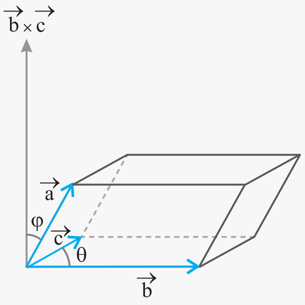
(۴) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(۵) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

(۶) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باهم موازیند

حجم متوازی السطوح:

حجم متوازی‌السطوحی که توسط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود، از رابطهٔ $V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ به‌دست می‌آید.



$$\text{ارتفاع}=\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\text{مساحت}=S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

اگر حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ساخته می‌شود، برابر صفر باشد. یعنی این سه بردار در یک صفحه قرار دارند و بالعکس.