درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱ ماتریسی 2×3 مثال بزنید که درایه‌های آن اعداد صحیح باشند و هر درایه از تمام درایه‌های سمت راست و پایین خود بزرگ‌تر باشد.

پاسخ: $A=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

۲ اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$، در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید. (تمرین صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

پاسخ:
$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1^2 & 1^2 & 1^2 \\ 2+1 & 7 & 2^2 & 2^2 \\ 3+1 & 3+2 & 7 & 3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

۳ ماتریس‌های زیر را به فرم آرایش مستطیلی بنویسید.

الف) $A=[a_{ij}]_{3\times 2}\ ,\ a_{ij}=i^2-j$

ب) $B=[b_{ij}]_{3\times 3}\ ,\ b_{ij}=i-2ij$

پ) $C=[c_{ij}]_{2\times 2}\ ,\ c_{ij}=2ij$

ت) $D=[d_{ij}]_{3\times 3}\ ,\ d_{ij}=i(i+j)j^2$

پاسخ:

الف) $$A=\begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 \\ 2^2-1 & 2^2-2 \\ 3^2-1 & 3^2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ب) $$B=\begin{bmatrix} 1-2\times1\times1 & 1-2\times1\times2 & 1-2\times1\times3 \\ 2-2\times2\times1 & 2-2\times2\times2 & 2-2\times2\times3 \\ 3-2\times3\times1 & 3-2\times3\times2 & 3-2\times3\times3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & -6 & -10 \\ -3 & -9 & -15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

پ) $$C=\begin{bmatrix} 2\times1\times1 & 2\times1\times2 \\ 2\times2\times1 & 2\times2\times2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ت) $$D=\begin{bmatrix} 1(1+1)1 & 1(1+2)4 & 1(1+3)9 \\ 2(2+1)1 & 2(2+2)4 & 2(2+3)9 \\ 3(3+1)1 & 3(3+2)4 & 3(3+3)9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 12 & 36 \\ 6 & 32 & 90 \\ 12 & 60 & 162 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

۴ ماتریس‌های زیر را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

الف) $A=[a_{ij}]_{2\times 2}\ ,\ a_{ij}=\begin{cases} 2 & i<j \\ 0 & i=j \\ -2 & i>j \end{cases}$

ب) $B=[b_{ij}]_{3\times 3}\ ,\ b_{ij}=\begin{cases} i^2-j & i<j \\ j^2 & i=j \\ i^2+j^2 & i>j \end{cases}$

پ) $C=[c_{ij}]_{2\times 3}\ ,\ c_{ij}=\begin{cases} 2i-3j & i\leq j \\ -4j & i>j \end{cases}$

پاسخ:

الف) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

ب) $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 10 & 13 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

پ) $C=\begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) هر ماتریس قطری، یک ماتریس اسکالر است.

ب) هر ماتریس مربعی، یک ماتریس قطری است.

پ) ماتریس همانی، یک ماتریس اسکالر است.

ت) ماتریس صفر، یک ماتریس اسکالر، قطری و مربعی است.

پاسخ:

الف) نادرست، زیرا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ قطری است ولی اسکالر نیست.

ب) نادرست؛ زیرا $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مربعی است ولی قطری نیست.

پ) درست

ت) نادرست؛ زیرا $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس صفر است ولی قطری، مربعی یا اسکالر نیست.

۶ الف) ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۳ مثال بزنید به طوری که قطر اصلی و فرعی آن با هم برابر و بقیهٔ درایه‌های آن صفر باشند.

پاسخ:

قطر اصلی — قطر فرعی

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ب) یک ماتریس قطری از مرتبهٔ ۳ مثال بزنید.

پاسخ: در ماتریس‌های قطری، همهٔ درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی برابر صفر هستند.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

۷ **ماتریسی اسکالر مثال بزنید که مرتبهٔ آن ۳ و درایهٔ سطر آخر و ستون آخر آن ۲− باشد.**

پاسخ: دقت کنید که در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند.

$$A=\begin{bmatrix}-۲&۰&۰\\۰&-۲&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۸ **مجموع درایه‌های ماتریس اسکالر A از مرتبهٔ ۴ برابر ۲۴ است. این ماتریس را مشخص کنید.**

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}x&۰&۰&۰\\۰&x&۰&۰\\۰&۰&x&۰\\۰&۰&۰&x\end{bmatrix}_{۴\times۴}\Rightarrow ۴x=۲۴\Rightarrow x=۶\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۶&۰&۰&۰\\۰&۶&۰&۰\\۰&۰&۶&۰\\۰&۰&۰&۶\end{bmatrix}_{۴\times۴}$$

۹ **اگر $A=\begin{bmatrix}۲x-y&۵\\z&۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳&۲x+y\\-۲&۱\end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.** (تمرین صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

پاسخ:

$$\begin{cases}۲x-y=۳\\۲x+y=۵\\z=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\y=۱\\z=-۲\end{cases}\Rightarrow x+y+z=۲+۱+(-۲)=۱$$

۱۰ **ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}ab&۴\\۳&a+b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۴\\۳&۴\end{bmatrix}$ با هم برابرند. مقادیر $a^۲+b^۲$ و $a^۳+b^۳$ را بیابید.**

پاسخ: دو ماتریس هم‌مرتبه زمانی با هم برابرند که درایه‌های نظیر به نظیر آنها با هم برابر باشند، پس $ab=۱$ و $a+b=۴$.

$$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab=۴^۲-۲(۱)=۱۴\ ,\ a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳(ab)(a+b)=۴^۳-۳(۱)(۴)=۶۴-۱۲=۵۲$$

۱۱ **دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ مثال بزنید و برای آنها نشان دهید: $A+B=B+A$.**

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۰&۱\\۵&۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A+B=\begin{bmatrix}۱+۰&۲+۱\\۳+۵&۴+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۸&۶\end{bmatrix}\\ B+A=\begin{bmatrix}۰+۱&۱+۲\\۵+۳&۲+۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۸&۶\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow A+B=B+A$$

۱۲ **فرض کنید $A=\begin{bmatrix}x&۳\\۴&۲-y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱-y&۳\\۵&-۱\end{bmatrix}$ باشد. می‌دانیم درایهٔ سطر اول و ستون اول ماتریس $A+B$ برابر ۳ و درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس $A-B$ برابر ۱− است. ماتریس‌های A و B را مشخص کنید.**

پاسخ:

$$A+B=\begin{bmatrix}x-y+۱&۶\\۹&۱-y\end{bmatrix},A-B=\begin{bmatrix}x+y-۱&۰\\-۱&۳-y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-y+۱=۳\\۳-y=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۶\\y=۴\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۶&۳\\۴&-۲\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-۳&۳\\۵&-۱\end{bmatrix}$$

۱۳ **ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ مفروض‌اند.** (کاردرکلاس صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

الف **ثابت کنید: $(r+s)A=rA+sA$.**

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}(r+s)A=(۳+(-۲))\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\\ rA+sA=۳A+(-۲)A=\begin{bmatrix}۳&۶\\-۳&۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲&-۴\\۲&-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow(r+s)A=rA+sA$$

ب **در حالت کلی رابطهٔ قسمت (الف) را ثابت کنید.**

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ باشد و r و s دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه:

$$(r+s)A=(r+s)[a_{ij}]=[(r+s)a_{ij}]=[ra_{ij}+sa_{ij}]=[ra_{ij}]+[sa_{ij}]=r[a_{ij}]+s[a_{ij}]=rA+sA$$

۱۴ **اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}\ ,\ a_{ij}=i^۲-j$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}\ ,\ b_{ij}=\begin{cases}-۱&i\le j\\۳&i>j\end{cases}$ باشد، حاصل عبارات مقابل را به دست آورید. $۲A-۳B\ ,\ (A+B)+(A-B)$**

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱^۲-۱&۱^۲-۲\\۲^۲-۱&۲^۲-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۳&۲\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۳&-۱\end{bmatrix}$$

$$۲A-۳B=\begin{bmatrix}۰&-۲\\۶&۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۳\\-۹&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۱\\-۳&۷\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}-۱&-۲\\۶&۱\end{bmatrix},A-B=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\Rightarrow(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix}۰&-۲\\۶&۴\end{bmatrix}$$

۱۵ **برای دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ و عدد حقیقی r ثابت کنید: $r(A+B)=rA+rB$.**

پاسخ:

$$r(A+B)=r([a_{ij}]+[b_{ij}])=r([a_{ij}+b_{ij}])=[r(a_{ij}+b_{ij})]=[ra_{ij}]+[rb_{ij}]=r[a_{ij}]+r[b_{ij}]=rA+rB$$

۱۶ اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید.
(کاردرکلاس صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

الف $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ ب $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$

پاسخ:

الف $A_{۳\times۵}\times B_{۳\times۲}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

$B_{۳\times۲}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ب $A_{۳\times۵}\times B_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

$B_{۳\times۵}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

پ $B=[b_{ij}]_{۵\times۳}$ ت $B=[b_{ij}]_{۵\times۴}$

پاسخ:

پ $A_{۳\times۵}\times B_{۵\times۳}\Rightarrow$ تعریف می‌شود؛ مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۳×۳ است.

$B_{۵\times۳}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۵×۵ است.

ت $A_{۳\times۵}\times B_{۵\times۴}\Rightarrow$ تعریف می‌شود؛ مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۳×۴ است.

$B_{۵\times۴}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

ث $B=[b_{ij}]_{۵\times۵}$

پاسخ:

ث $A_{۳\times۵}\times B_{۵\times۵}\Rightarrow$ تعریف می‌شود و مرتبهٔ ماتریس حاصل‌ضرب ۳×۵ است.

$B_{۵\times۵}\times A_{۳\times۵}\Rightarrow$ تعریف نمی‌شود.

۱۷ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید.
(تمرین صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

$$a_{ij}=\begin{cases}i^۲-۱ & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}\quad,\quad b_{ij}=\begin{cases}i^۲+۱ & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+۲ & i<j\end{cases}$$

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱^۲-۱ & ۲-۱\\ ۲-۱ & ۲^۲-۱\\ ۳-۱ & ۳-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۱^۲+۱ & ۱-۲+۲ & ۱-۳+۲\\ ۲+۱ & ۲^۲+۱ & ۲-۳+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۵ & ۱\\ ۱۱ & ۱۶ & ۳\\ ۷ & ۷ & ۱\end{bmatrix},B\times A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ ۷ & ۱۹\end{bmatrix}$$

۱۸ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد. در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
(کاردرکلاس صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

پاسخ:

$$B\times A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۱۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۴\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که $A\times B\neq B\times A$ و این یعنی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۱۹ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۵ & ۲\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۴\\ ۵ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=A\times B$ باشد، آنگاه حاصل $c_{۲۳}$ کدام است؟

پاسخ: $c_{۲۳}$ از ضرب سطر دوم ماتریس A در ستون سوم ماتریس B به دست می‌آید.

$$c_{۲۳}=\begin{bmatrix}۵ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۱\end{bmatrix}=(۵\times۴)+(۲\times۱)=۲۲$$

۲۰ علی ۳ کتاب داستان، ۲ کتاب تاریخی و ۵ کتاب مذهبی خرید. قیمت هر کتاب داستان ۱۵۰ ریال، هر کتاب تاریخ ۲۰۰ ریال و هر کتاب مذهبی ۱۰۰ ریال است. این اطلاعات را با ماتریس‌های سطری و ستونی A و B نشان داده و سپس ماتریس $A\times B$ را حساب و آن را تفسیر کنید.

پاسخ:

ماتریس مربوط به قیمت کتاب‌ها: $B=\begin{bmatrix}۱۵۰\\ ۲۰۰\\ ۱۰۰\end{bmatrix}$ ، ماتریس مربوط به تعداد کتاب‌ها: $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$

$$A\times B=(۳\times۱۵۰)+(۲\times۲۰۰)+(۵\times۱۰۰)=۱۳۵۰$$

ماتریس $A\times B$ یک ماتریس ۱×۱ که همان عدد است، می‌باشد و بیانگر کل مبلغی است که علی برای خرید این کتاب‌ها پرداخته است.

۲۱ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، مطلوب است:

الف **$۲AB$**

پاسخ

$$۲AB=(۲A)B=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۴ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

ب **$(A+B)(A-B)$**

پاسخ

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۴ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow (A+B)(A-B)=\begin{bmatrix} -۱۶ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پ **$A^۲+B^۲$**

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix} \\ B^۲=B\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow A^۲+B^۲=\begin{bmatrix} ۷ & ۸ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

ت **$۳A^۲\times ۲B$**

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}\Rightarrow ۳A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & ۱۸ \\ -۶ & -۹ \end{bmatrix} \\ ۲B=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow ۳A^۲\times ۲B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱۸ \\ -۶ & -۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰۸ & ۴۸ \\ -۵۴ & -۴۲ \end{bmatrix}$$

ث **$۲AI$**

پاسخ

$$۲AI=(۲A)I=۲A=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

ج **$(A+I)(B-I)(AB-I)$**

پاسخ

$$A+I=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}, B-I=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}, AB-I=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۷ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$(A+I)(B-I)(AB-I)=(\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix})\begin{bmatrix} ۸ & ۷ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۶ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۸ & ۷ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴۸ & ۲۴ \\ ۳۲ & ۳۴ \end{bmatrix}$$

۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ثابت کنید: (کاردرکلاس صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

الف **$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$** .

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} B+C=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow A\times(B+C)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \\ A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}, A\times C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ -۲ & -۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow (A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

ب **$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$** .

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} B\times C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}\Rightarrow A\times(B\times C)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix} \\ A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}\Rightarrow (A\times B)\times C=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

۲۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A-I)^۲$ را بیابید.

پاسخ

$$A-I=\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow (A-I)^۲=(A-I)(A-I)=\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۶\\۲&۴\end{bmatrix}$$

۲۴ اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&-۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A+۳I)(A-۴I)$ را به دست آورید.

پاسخ

$$\left.\begin{aligned}A+۳I&=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۳\\۴&۲\end{bmatrix}\\ A-۴I&=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&-۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&۳\\۴&-۵\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow (A+۳I)(A-۴I)=\begin{bmatrix}۵&۳\\۴&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&۳\\۴&-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$$

۲۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱&۱\\۰&۰&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A+A^۲+A^۳+A^۴$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰&۱&۱\\۰&۰&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۱\\۰&۰&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix},\ A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۱\\۰&۰&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\overline{O},\ A^۴=\overline{O}$$

$$\Rightarrow A+A^۲+A^۳+A^۴=\begin{bmatrix}۰&۱&۱\\۰&۰&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}+\overline{O}+\overline{O}=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۰&۰&۱\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

۲۶ اگر $A=\begin{bmatrix}۴&a\\b&-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد. (تمرین صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

پاسخ

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴&a\\b&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\b-۳&-۲b-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۱۶&۰\\۰&-۸\end{bmatrix}$$

۲۷ اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۳\\۵&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس B را طوری بیابید که $AB=\begin{bmatrix}۸\\۳\\۱\end{bmatrix}$.

پاسخ

با توجه به اندازهٔ ماتریس‌ها، ماتریس B باید از مرتبهٔ ۱×۲ باشد، بنابراین اگر $B=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$AB=\begin{bmatrix}۸\\۳\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲&-۳\\۵&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸\\۳\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a-۳b=۸\\ ۵a+b=۳\\ a+۰=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=-۲\end{cases}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$$

۲۸ اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\m&۱\end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}\\-۶&a_{۲۲}\end{bmatrix}$ باشد، مقدار m و ماتریس $A^۲$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A^۲=A\times A\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۱&-۱\\m&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\m&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-m&-۲\\۲m&-m+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}\\-۶&a_{۲۲}\end{bmatrix}\Rightarrow ۲m=-۶\Rightarrow m=-۳\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۶&۴\end{bmatrix}$$

۲۹ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ باشد، مقادیر α و β را به دست آورید.

پاسخ

$$\left.\begin{aligned}A^۲&=\begin{bmatrix}-۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۲\\۱۰&۲۱\end{bmatrix}\\ \alpha A+\beta I&=\begin{bmatrix}-۲\alpha&\alpha\\۵\alpha&۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&۰\\۰&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha+\beta&\alpha\\۵\alpha&۴\alpha+\beta\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}۹&۲\\۱۰&۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha+\beta&\alpha\\۵\alpha&۴\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۲\alpha+\beta=۹\\ \alpha=۲\end{cases}\Rightarrow\beta=۱۳$$

۳۰ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$. (تمرین صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\neq\overline{O},\ B=\begin{bmatrix}-۲&-۲&-۲\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\neq\overline{O}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\overline{O}$$

۳۱ **یک ماتریس سطری ۳×۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند B طوری تعریف کنید که: $A\times B=-7$.** (کاردرکلاس صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-2\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\-2\\-2\end{bmatrix}=(1\times(-1))+(2\times(-2))+(1\times(-2))=-7$$

۳۲ **با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.** (تمرین صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},A\times C=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=A\times C$$

اما $\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ یعنی $B\neq C$.

۳۳ **اگر $AB=A$ باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $B=I$ ؟ چرا؟**

پاسخ خیر، زیرا اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ و این یعنی $AB=A$ ؛ ولی $B\neq I$.

۳۴ **ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ ضرب کرده و آنها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟** (کاردرکلاس صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

پاسخ

$$A\times I=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix},I\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A\times I=I\times A=A$$

نتیجه می‌گیریم در ضرب ماتریس‌ها، ماتریس اسکالر I عضو بی‌اثر ضربی است.

۳۵ **اگر $A=\begin{bmatrix}r_1 & 0 & 0\\0 & r_2 & 0\\0 & 0 & r_3\end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟** (تمرین صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

پاسخ

$$A\times B=\begin{bmatrix}r_1 & 0 & 0\\0 & r_2 & 0\\0 & 0 & r_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ar_1 & br_1 & cr_1\\dr_2 & er_2 & fr_2\\gr_3 & hr_3 & kr_3\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر بخواهیم ماتریس قطری $A_{n\times n}$ را در ماتریس دلخواه $B_{n\times n}$ ضرب کنیم، کافی است به‌ازای هر i، درایهٔ a_{ii} از ماتریس A را در سطر iام ماتریس B ضرب کنیم. به‌علاوه اگر بخواهیم ماتریس $B_{n\times n}$ را در $A_{n\times n}$ ضرب کنیم، کافی است به‌ازای هر j، درایهٔ a_{jj} از ماتریس A را در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم.

۳۶ **اگر $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\4 & 2 & 1\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:**

الف **ماتریس AB را بیابید.**

پاسخ کافی است درایهٔ روی قطر اصلی سطر iام ماتریس A را در تمام درایه‌های سطر iام ماتریس B ضرب کنیم.

$$AB=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\4 & 2 & 1\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -4 & 0\\8 & 4 & 2\\6 & 12 & -18\end{bmatrix}$$

ب **آیا $AB=BA$ ؟**

پاسخ خیر، زیرا:

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\4 & 2 & 1\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -2 & 0\\16 & 4 & -6\\-4 & -4 & -18\end{bmatrix}$$

۳۷ **اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟** (تمرین صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

پاسخ

$$A^2=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 16\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\\0 & 27 & 0\\0 & 0 & 64\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}(-2)^3 & 0 & 0\\0 & 3^3 & 0\\0 & 0 & 4^3\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم هرگاه یک ماتریس قطری به توان یک عدد برسد، ماتریس حاصل یک ماتریس قطری است و درایه‌های روی قطر آن، با توان رساندن درایه‌های روی قطر اصلیِ ماتریس اولیه به دست می‌آید.

نکته اگر $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}_{n\times n}$ یک ماتریس قطری باشد، در این صورت $A^m=\begin{bmatrix}a_{ij}^m\end{bmatrix}_{n\times n}$.

۳۸ اگر $\begin{bmatrix}۲ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & x\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}=۰$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ:

$$\left(\begin{bmatrix}۲ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & x\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+۲x & ۵x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}=(۲+۲x)+۳(۵x)=۰\Rightarrow ۱۷x=-۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۱۷}$$

۳۹ از تساوی $\begin{bmatrix}۱ & ۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۴\\ ۲\end{bmatrix}=۰$، مقدار x را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\left(\begin{bmatrix}۱ & ۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}۱\\ ۴\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+x & ۳ & ۲+x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۴\\ ۲\end{bmatrix}=(۱+x)+۱۲+(۴+۲x)=۰\Rightarrow ۳x+۱۷=۰\Rightarrow x=-\frac{۱۷}{۳}$$

۴۰ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^۵$ را به دست آورید. (نهایی ۸۶)

پاسخ:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}=۳A$$

$$A^۵=A^۴\times A=(A^۲)^۲\times A\overset{A^۲=۳A}{=\!=\!=}(۳A)^۲\times A=۹A^۲\times A\overset{A^۲=۳A}{=\!=\!=}۹(۳A)\times A=۲۷A^۲\overset{A^۲=۳A}{=\!=\!=}۲۷(۳A)=۸۱A=\begin{bmatrix}۸۱ & ۸۱ & ۸۱\\ ۸۱ & ۸۱ & ۸۱\\ ۸۱ & ۸۱ & ۸۱\end{bmatrix}$$

۴۱ اگر $\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}^۵=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=۲A\Rightarrow A^۴=(A^۲)^۲\overset{A^۲=۲A}{=\!=\!=}(۲A)^۲=۴A^۲\overset{A^۲=۲A}{=\!=\!=}۸A$$

$$\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}^۵=A^۵=A^۴\times A=(۸A)A=۸A^۲\overset{A^۲=۲A}{=\!=\!=}۸(۲A)=۱۶A=\begin{bmatrix}۱۶ & ۱۶\\ ۱۶ & ۱۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\xrightarrow{a=b=c=d=۱۶}a+b+c+d=۶۴$$

۴۲ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید. (تمرین صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

پاسخ:

الف) $(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+\underset{AB}{\cancel{BA}}+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲+AB-\underset{AB}{\cancel{BA}}-B^۲=A^۲-B^۲$

۴۳ برای دو ماتریس A و B داریم $A^۲=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۳ & ۳\end{bmatrix}$، $B^۲=\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ ۹ & ۷\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$. حاصل $AB+BA$ را بیابید.

پاسخ:

می‌دانیم: $(A+B)^۲=A^۲+AB+BA+B^۲\Rightarrow AB+BA=(A+B)^۲-A^۲-B^۲$

$$(A+B)^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۳ & ۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ ۹ & ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۶\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}$$

۴۴ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ -۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $A^۲+AB+BA+B^۲$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ -۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow (A+B)^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۲ & ۱۰\\ ۸ & ۱۷ & ۱۶\\ -۲ & ۱۲ & ۱۹\end{bmatrix}$$

$$A^۲+AB+BA+B^۲=A(A+B)+B(A+B)=(A+B)(A+B)=(A+B)^۲=\begin{bmatrix}۷ & ۱۲ & ۱۰\\ ۸ & ۱۷ & ۱۶\\ -۲ & ۱۲ & ۱۹\end{bmatrix}$$

۴۵ اگر $(A+B)^۲=A^۲+B^۲$، نشان دهید: $A^۲B=BA^۲$.

پاسخ:

$$\left.\begin{aligned}&(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲\\ &(A+B)^۲=A^۲+B^۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow A^۲+AB+BA+B^۲=A^۲+B^۲\Rightarrow AB+BA=\overline{O}\Rightarrow AB=-BA$$

$$A^۲B=A(AB)\overset{AB=-BA}{=\!=\!=}A(-BA)=-(AB)A\overset{AB=-BA}{=\!=\!=}-(-BA)A=B(A\times A)=BA^۲$$

۴۶ الف اگر $A^2=kA$ ، نشان دهید $A^3=k^2A$ و سپس به طور حدسی، یک رابطه در مورد A^n بنویسید.

پاسخ

$$A^3=A^2\times A=(kA)A=kA^2=k(kA)=k^2A$$

حدس: $A^n=k^{n-1}A$

ب اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^{10} را به دست آورید.

پاسخ

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}=2A\xrightarrow{\text{نتیجهٔ (الف)}}A^{10}=2^{10-1}A=2^9\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^9&2^9\\2^9&2^9\end{bmatrix}$$

۴۷ الف اگر $A^2=\overline{O}$ باشد، ثابت کنید به ازای $m\ge 2$ داریم: $A^m=\overline{O}$.

پاسخ

$$A^m=A^2\times A^{m-2}=\overline{O}\times A^{m-2}=\overline{O}$$

ب اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{1398}+A^{1397}$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\overline{O}\Rightarrow A^{1397}+A^{1398}=\overline{O}+\overline{O}=\overline{O}$$

۴۸ اگر $A^2=I$ باشد، به ازای $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید: $A^n=\begin{cases}I & \text{n زوج}\\ A & \text{n فرد}\end{cases}$.

پاسخ فرض می‌کنیم $k\in\mathbb{N}$ باشد، در این صورت:

اگر $n=2k$ باشد، آنگاه: $A^n=A^{2k}=(A^2)^k=I^k=I$

اگر $n=2k+1$ باشد، آنگاه: $A^n=A^{2k+1}=A^{2k}\times A=(A^2)^k\times A=I^k\times A=I\times A=A$

۴۹ اگر $A^2=\overline{O}$ و A از مرتبهٔ ۲ باشد، مطلوب است سادهٔشدهٔ عبارت $A(2A-3I)^3$.

پاسخ

$$A^2=\overline{O}\Rightarrow A^3=\overline{O}\Rightarrow A(2A-3I)^3=A(\overset{\overline{O}}{\cancel{8A^3}}-\overset{\overline{O}}{\cancel{36A^2}}+54A-27I^3)=A(54A-27I)=\overset{\overline{O}}{\cancel{54A^2}}-27A=-27A$$

۵۰ اگر $A^2=A$ باشد، ثابت کنید: $(I-A)^2=I-A$.

پاسخ

$$(I-A)^2=(I-A)(I-A)=I^2-IA-AI+A^2\overset{A^2=A}{=\!=\!=}I-2A+A=I-A$$

۵۱ اگر $A^2=A-I$ باشد، ثابت کنید: $A^4+A=\overline{O}$.

پاسخ

$$A^2=A-I\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(A^2)^2=(A-I)^2\Rightarrow A^4=A^2-2A+I\overset{A^2=A-I}{=\!=\!=}(A-I)-2A+I=-A\Rightarrow A^4=-A\Rightarrow A^4+A=\overline{O}$$

۵۲ اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس اسکالر هم‌مرتبهٔ A باشد، نشان دهید: $(A+I)^2-(A-I)^2=4A$.

پاسخ می‌دانیم $AI=IA$ ، پس:

$$(A+I)^2-(A-I)^2=(A+I)(A+I)-(A-I)(A-I)=(A^2+2A+I)-(A^2-2A+I)=4A$$

۵۳ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبهٔ A^{10} . (نهایی ۸۶)

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=-2I\Rightarrow A^{10}=(-2I)^{10}=(-2)^{10}I^{10}=2^{10}\times I=\begin{bmatrix}2^{10}&0\\0&2^{10}\end{bmatrix}$$

۵۴ اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7-A^4 را بیابید.

پاسخ

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^7=(A^2)^3\times A=I^3\times A=A\quad,\quad A^4=(A^2)^2=I^2=I\Rightarrow A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$$

۵۵ اگر $A=\begin{bmatrix}6&4\\-4&-2\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $\frac{A^6}{64}$ را برحسب ماتریس اسکالر I به دست آورید.

پاسخ

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}4&6\\-2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&6\\-2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=4I$$

$$A^6=(A^2)^3=(4I)^3=4^3I^3=64I\Rightarrow\frac{A^6}{64}=\frac{64I}{64}=I$$

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

۵۶ آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟ (پرسش متن صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

پاسخ: خیر، زیرا:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\neq I$$

۵۷ ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی، منحصر به‌فرد است.

پاسخ: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون ماتریس A باشند. نشان می‌دهیم $B=C$ داریم:

C وارون A است $\Rightarrow AC=CA=I \quad (۱)$ ، B وارون A است $\Rightarrow AB=BA=I \quad (۲)$

بنابراین:

$$B=IB\overset{(۱)}{=\!=}(CA)B=C(AB)\overset{(۲)}{=\!=}CI=C$$

۵۸ برای دو ماتریس هم‌مرتبه و وارون‌پذیر A و B ثابت کنید: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

پاسخ: کافی است نشان دهیم $(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$. داریم:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(\underbrace{BB^{-1}}_{I})A^{-1}=\underbrace{(AI)}_{A}A^{-1}=AA^{-1}=I$$

۵۹ اگر A ماتریس وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید:

الف) $(kA)^{-1}=\frac{۱}{k}A^{-1}$ و $k\neq ۰$.

پاسخ: کافی است نشان دهیم $(kA)(\frac{۱}{k}A^{-1})=I$. داریم:

$$(kA)(\frac{۱}{k}A^{-1})=(k\times\frac{۱}{k})(AA^{-1})=۱\times I=I$$

ب) $(A^{-1})^{-1}=A$.

پاسخ: می‌دانیم: $A^{-1}A=I\Rightarrow (A^{-1})^{-1}=A$

۶۰ اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(۲AB)^{-1}$ را بیابید. (نهایی ۸۶)

پاسخ: می‌دانیم $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ، بنابراین:

$$(۲AB)^{-1}=\frac{۱}{۲}(AB)^{-1}=\frac{۱}{۲}B^{-1}A^{-1}$$

$$B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۷\\ ۸ & ۱۰\end{bmatrix}\Rightarrow (۲AB)^{-1}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶ & ۷\\ ۸ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & \frac{۷}{۲}\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

۶۱ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $A+B=AB$ ، ثابت کنید: $A^{-1}+B^{-1}=I$.

پاسخ:

$$A+B=AB\xrightarrow{\times A^{-1}}A^{-1}(A+B)=A^{-1}(AB)\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}+A^{-1}B=\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}B\Rightarrow I+A^{-1}B=B$$

$$\xrightarrow{\times B^{-1}}(I+A^{-1}B)B^{-1}=\underbrace{BB^{-1}}_{I}\Rightarrow IB^{-1}+(A^{-1}B)B^{-1}=I\Rightarrow B^{-1}+A^{-1}\underbrace{(BB^{-1})}_{I}=I\Rightarrow B^{-1}+A^{-1}=I\Rightarrow A^{-1}+B^{-1}=I$$

۶۲ اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|AB|+۲|A+B|$ را بیابید.

پاسخ:

$$\left.\begin{aligned}&AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۱۶ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow |AB|=(-۱\times ۷)-(۱۶\times ۳)=-۵۵\\ &A+B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۷ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow |A+B|=(۶\times ۵)-(۴\times ۳)=۱۸\end{aligned}\right\}\Rightarrow |AB|+۲|A+B|=-۵۵+۲(۱۸)=-۱۹$$

۶۳ اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲-۵|A|+۶=۰$ برقرار باشد. (پرسش متن صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

پاسخ:

$$|A|^۲-۵|A|+۶=۰\Rightarrow (|A|-۲)(|A|-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۲\xrightarrow{\text{مانند}}A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow a=۲\,,b=۰\,,c=۰\,,d=۱\\ |A|=۳\xrightarrow{\text{مانند}}A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow a=۳\,,b=۰\,,c=۰\,,d=۱\end{cases}$$

دقت کنید که برای این سؤال، بی‌شمار جواب وجود دارد.

۶۴ ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. اگر $|A|\neq \circ$ باشد، نشان دهید: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

پاسخ: فرض می‌کنیم $A^{-1}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$، بنابراین:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} ax+bz=1 \\ cx+dz=\circ \Rightarrow x=-\frac{d}{c}z \end{array}\right\} \Rightarrow a(-\frac{d}{c}z)+bz=1\Rightarrow z=\frac{-c}{ad-bc},\ x=\frac{d}{ad-bc} \\ \left.\begin{array}{l} cy+dw=1 \\ ay+bw=\circ \Rightarrow y=-\frac{b}{a}w \end{array}\right\} \Rightarrow c(-\frac{b}{a}w)+dw=1\Rightarrow w=\frac{a}{ad-bc},\ y=\frac{-b}{ad-bc} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۶۵ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1\circ & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ: چون $|A|=(1\circ\times 1)-(2\times 4)=2\neq\circ$، پس A دارای وارون است و داریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

۶۶ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ و $AB=I$ باشد، ماتریس B را بیابید.

پاسخ: چون حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B برابر I شده است، بنابراین این دو ماتریس وارون یکدیگرند. پس:

$$|A|=(1\times 7)-(2\times 4)=-1\Rightarrow B=A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

۶۷ اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & b \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار b را به دست آورید.

پاسخ:

$$|A|=(-1\times 1)-(\circ\times b)=-1\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -b \\ \circ & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & b \\ \circ & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \circ & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow b=3$$

۶۸ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-1}+A$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$|A|=(2\times 3)-(5\times 1)=1\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}+A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & \circ \\ \circ & 5 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}5+\circ+\circ+5=1\circ$$

۶۹ اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A+4A^{-1}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$|A|=(-2\times 3)-(-2\times 2)=-2\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow 4A^{-1}=\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A+4A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

۷۰ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس معکوس A^2 را به دست آورید.

پاسخ:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{bmatrix}\Rightarrow |A^2|=(9\times 14)-(-25\times(-5))=126-125=1$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{bmatrix}\Rightarrow |(A^2)^{-1}|=(14\times 9)-(25\times 5)=126-125=1$$