

## فهرست مطالب

### ریاضیات گسسته

شماره صفحه	فهرست مطالب
۵	آزمون‌ها
۶	آزمون (۱) نوبت اول
۷	آزمون (۲) نوبت اول
۸	آزمون (۳) نوبت اول
۹	آزمون (۴) نوبت اول
۱۰	آزمون (۵) نوبت اول
۱۱	آزمون (۶) نوبت دوم
۱۲	آزمون (۷) نوبت دوم
۱۳	آزمون (۸) نوبت دوم
۱۴	آزمون (۹) نوبت دوم
۱۵	آزمون (۱۰) نوبت دوم
۱۶	آزمون (۱۱) نوبت دوم
۱۷	آزمون (۱۲) نوبت دوم
۱۸	آزمون (۱۳) نوبت دوم
۱۹	آزمون (۱۴) نوبت دوم
۲۰	آزمون (۱۵) نوبت دوم
۲۱	آزمون (۱۶) نوبت دوم
۲۲	آزمون (۱۷) نوبت دوم
۲۳	آزمون (۱۸) نوبت دوم
۲۴	آزمون (۱۹) نوبت دوم
۲۶	آزمون (۲۰) نوبت دوم
۲۸	پاسخنامه تشریحی
۴۸	خلاصه فصل‌ها


# سوالات آزمون های

ترم اول

و

ترم دوم

## آزمون (۶) نوبت دوم

- ۱ (فصل اول) اگر  $n^2$  مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که  $n$  نیز مضربی از ۳ است. ۱
- ۱ (فصل اول) چند عدد طبیعی مانند  $a$  داریم، به طوری که  $9 \mid a$  و  $108 \mid a$ ؟ ۲
- ۱ (فصل اول) اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $n \mid m$  ثابت کنید  $a \equiv b \pmod{n}$ . ۳
- ۱ (فصل اول) آیا می توان یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۴ کیلویی وزن کرد؟ ۴
- ۱/۵ (فصل دوم) دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  به صورت زیر داده شده اند. با توجه به آن ها شکل گراف مورد نظر را رسم کنید. ۵
- $$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$$
- $$E(G) = \{v_1v_4, v_2v_5, v_6v_1, v_5v_1\}$$
- ۲ (فصل دوم) گرافی را مشخص کنید که عدد احاطه گری آن،  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  نباشد. ۶
- ۲ (فصل دوم) در گراف شکل زیر، چند مجموعه ۴ عضوی می توان نوشت که احاطه گر نباشد؟ ۷
- 
- ۲ (فصل دوم) در گراف  $C_6$  عدد احاطه گری را به دست آورید. ۸
- ۱ (فصل سوم) با حروف کلمه انتخابات چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که حرف های «ت» کنار هم باشند؟ ۹
- ۱/۲۵ (فصل سوم) متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید. ۱۰
- |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۳ | ۱ | ۲ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۱ |
| ۲ | ۳ | ۱ | ۱ | ۲ | ۳ |
- ۲/۲۵ (فصل سوم) تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را به دست آورید. ۱۱
- $$x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$
- ۲/۵ (فصل سوم) چند عدد طبیعی مانند  $n$  وجود دارد، به طوری که  $1 \leq n \leq 350$  و بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشد؟ ۱۲
- ۱/۵ (فصل سوم) ثابت کنید در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند؟ ۱۳

آزمون (۷) نوبت دوم

۰/۷۵

(فصل اول)

اگر  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی باشند و  $ab < 0$ ، ثابت کنید:  $2 \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ .

۱

۰/۷۵

(فصل اول)

ثابت کنید حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲

۱

(فصل اول)

اگر  $a$  عددی طبیعی باشد و دو عدد  $(9k+7)$  و  $(7k+6)$  را عا د کند، ثابت کنید:  $a=1$  یا  $a=5$ .

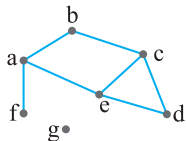
۳

در یک رستوران فقط دو نوع غذا، قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می کند).

۴

۱/۵

(فصل دوم)



گراف  $G$  را در نظر بگیرید. الف) مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید.

ب)  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  را مشخص کنید.

پ) مجموعه همسایه های رأس های  $f$  و  $g$  و  $e$  را بنویسید.

ت) اگر  $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه  $x$  کدام رأس است؟

۵

اگر برای گراف  $G$  داشته باشیم،  $Y(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف  $G$  می توان پی برد؟  $\Delta(G)$ ، حداقل و حداکثر

۶

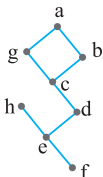
۲

(فصل دوم)

تعداد یال های را که گراف  $G$  می تواند داشته باشد، مشخص کنید.

۲

(فصل دوم)



عدد احاطه گری شکل مقابل را مشخص کنید.

۷

۲

(فصل دوم)

عدد احاطه گری  $P_5$  را پیدا کنید.

۸

۱/۵

(فصل سوم)

دو مربع لاتین  $5 \times 5$  بنویسید.

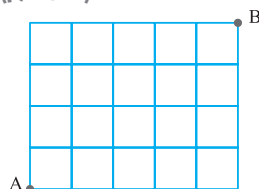
۹

۰/۷۵

(فصل سوم)

چند مسیر از  $A$  به  $B$  وجود دارد، به طوری که فقط مجاز باشیم به سمت راست یا بالا حرکت کنیم؟

۱۰



۲/۲۵

(فصل سوم)

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را به دست آورید.

۱۱

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 5$$

چه تعداد تابع مانند  $f: A \rightarrow B$  می توان تعریف کرد، اگر بدانیم  $|A| = 5$  و  $|B| = 4$  است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

۱۲

۱

(فصل سوم)

اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ ثانیه طول می کشد، حداکثر زمانی که لازم است تا این قفل باز شود، چند ثانیه است؟

۱۳

۲

(فصل سوم)

۱/۵

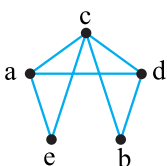
(فصل سوم)

ثابت کنید اگر در یک دبیرستان ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند، لاقل ۷ نفر از آن ها روز و ماه تولدشان یکسان است.

۱۴

آزمون (۵) نوبت اول

۲	(فصل اول)	ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همراه بر ۳ بخش پذیر است.	۱
۱/۵	(فصل اول)	اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی، درستی رابطه روبه‌رو را بررسی کنید: $a^2 + 1 \geq b(2 - b)$	۲
۱/۵	(فصل اول)	اگر $a b$ و $a c$ ، نشان دهید $a mb \pm nc$ .	۳
۱/۵	(فصل اول)	ثابت کنید اگر $n$ عدد صحیح و $n^2$ فرد باشد، $n$ نیز فرد است.	۴
۱/۷۵	(فصل اول)	اگر $d = (a - 5, a^2 - 6a + 3)$ و $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه $d$ را پیدا کنید.	۵
۱/۷۵	(فصل اول)	اگر در یک تقسیم ۱۴۰ واحد به مقسوم، اضافه و ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم کنیم، از باقی‌مانده، ۷ واحد کم می‌شود و خارج قسمت تغییر نمی‌کند. خارج قسمت را به‌دست آورید.	۶
۱/۵	(فصل اول)	باقی‌مانده تقسیم $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید.	۷
۲	(فصل اول)	رقم یکان $7^{23} + 3^{25}$ را محاسبه کنید.	۸
۱/۵	(فصل اول)	ثابت کنید هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $(a b, a c \Rightarrow a b \pm c)$	۹
۱/۵	(فصل اول)	عدد $\overline{2435a2}$ بر عدد ۱۱ بخش پذیر است. $a$ را پیدا کنید.	۱۰
۲	(فصل دوم)	الف) مسیر در گراف را تعریف کنید. ب) یک مسیر به طول ۳ از $a$ به $b$ در گراف مقابل بنویسید.	۱۱
۱/۵	(فصل دوم)	در گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶، چند یال اضافه کنیم تا گراف کامل از همین مرتبه به‌دست آید؟	۱۲



۰/۵

درست     نادرست  
 درست     نادرست

۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگتر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

۱/۵

۲ جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $[a \cdot b] = c$  اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

(۱)  $a | c \cdot b | c$

(۲)  $\forall m > 0, \dots$

ب) گراف  $G$  را ----- می‌نامیم هر گاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

ج) مقدار  $\gamma(C_n)$  به ازای هر عدد طبیعی  $n > 2$  برابر است با: -----

د) هر گاه  $(kn+1)$  کبوتر یا بیشتر در ----- لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ----- کبوتر در آن قرار گرفته است.

۱/۵

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

۳ برای هر سه عدد حقیقی  $x, y, z$  ثابت کنید:

۱/۵

۴ اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر دو عدد ۵, ۶ به ترتیب ۲, ۳ باشد؛ باقی‌مانده تقسیم عدد  $a$  را بر ۳۰ بیابید.

۱/۵

۵ باقی‌مانده تقسیم  $19 + (27)^7$  را بر ۱۳ بیابید.

۱/۵

۶ با تبدیل معادله سیاله خطی  $29000x + 5000y = 29000$  به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۲

۷ گراف  $G$  با مجموعه راس‌های  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  و مجموعه یال‌های زیر را در نظر بگیرید:  
 $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.

ب)  $N_G[b]$  را مشخص کنید.

ج) یک مسیر به طول ۵ از  $b$  به  $d$  بنویسید.

۱

۸ یک گراف ۵ راسی غیرتهی  $k$ -منتظم رسم کنید به طوری که:

الف)  $k$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $k$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱/۵

۹ الف) گراف  $p_8$  را رسم کنید.

ب) یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

# پاسخ نامه تشریحی

پاسخ نامه آزمون (۱۱)

ریاضیات گسسته

۹

$$3a - 5 \equiv 4a - 7 \Rightarrow -5 + 7 \equiv 4a - 3a$$

$$\Rightarrow a \equiv 2 \Rightarrow 9a \equiv 18 \Rightarrow 9a + 6 \equiv 24, 24 \equiv 4$$

$$\Rightarrow 9a + 6 \equiv 4 \Rightarrow r = 4$$

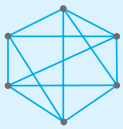
۱۰

$$2^6 \equiv 1 \Rightarrow (2^6)^5 \equiv (1)^5 \Rightarrow 2^{30} \equiv 1 \Rightarrow 2^{31} \equiv 2$$

$$3^3 \equiv 6 \equiv -1 \Rightarrow (3^3)^{10} \equiv (-1)^{10} \Rightarrow 3^{30} \equiv 3$$

$$4^3 \equiv 1 \Rightarrow (4^3)^{10} \equiv (1)^{10} \Rightarrow 4^{30} \equiv 4$$

$$2^{31} + 3^{31} + 4^{31} \equiv 2 + 3 + 4 \equiv 9$$



۱۱

$$\binom{p}{2} = 21 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 21 \Rightarrow p(p-1) = 42 \Rightarrow p = 7$$

پس درجه هر رأس گراف ۶ است.

۱۲

$$4p = 2q \Rightarrow q = 2p$$

$$q + 12 = \binom{p}{2} \Rightarrow 2p + 12 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p^2 - 5p - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (p-8)(p+3) = 0 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow q = 16$$

پاسخ نامه آزمون (۱۲)

ریاضیات گسسته

۱

الف) اگر  $a$  زوج باشد ( $a = 2k$ )، عدد بعدی  $a+1 = 2k+1$  خواهد بود، پس داریم:

$$a(a+1) = 2k(2k+1) \Rightarrow 2 \mid a(a+1)$$

ب) اگر  $a$  فرد باشد ( $a = 2k+1$ )، عدد بعدی  $a+1 = 2k+2$  است و داریم:

$$a(a+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) \Rightarrow 2 \mid a(a+1)$$

بنابراین حاصل ضرب هر دو عدد متوالی زوج است.

۲

خیر به عنوان مثال  $7 \mid 3+4$  ولی  $7 \nmid 3$  و  $7 \nmid 4$  یا  $12 \mid 15-3$  ولی  $12 \nmid 15$  و  $12 \nmid 3$ .

۳

$$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a-ba) \Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + 1 - 2a + 2ba \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (a+b)^2 \geq 0$$

چون رابطه فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۱

بله، دو عدد فرد را  $2k+1$  و  $2k'+1$  فرض می‌کنیم که داریم:

$$(2k+1) + (2k'+1) = (2k+2k') + 2 = 2(k+k'+1) = 2q$$

که  $2q$ ، عددی زوج است.

۲

خیر، زیرا به عنوان مثال  $6 \mid 3 \times 4$  ولی  $6 \nmid 3$  و  $6 \nmid 4$

۳

فرض کنیم  $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} = a$  عددی گویا باشد، پس داریم:

$$1 + \sqrt{2} = a^3 \Rightarrow \sqrt{2} = a^3 - 1$$

با توجه به آنکه  $a^3 - 1$  عددی گویا است، پس  $\sqrt{2}$  نیز گویا است که این خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۴

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

عبارت فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۵

$$3^9 = 3^5 \times 3^4 \xrightarrow{q=3^4} 3^5 \mid 3^9$$

$$a^n = a^{n-m} \times a^m \xrightarrow{q=a^{n-m}} a^m \mid a^n$$

۶

$$a \mid b \Rightarrow \mid a \mid \mid b$$

$$a \mid a \Rightarrow \mid a \mid \mid a$$

اگر برای هر  $m > 0$  داشته باشیم  $m \mid a$  و  $m \mid b$  در این صورت خواهیم داشت:

$$m \mid a \Rightarrow \mid m \mid \leq \mid a \mid \xrightarrow{m > 0} m \leq \mid a \mid$$

۷

$$\left. \begin{aligned} A &= 39q + 17 \\ B &= 39q' + 23 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - B = 39(q - q') - 6 = 39(q - q') - 39 + 33$$

$$\Rightarrow A - B = 39 \underbrace{(q - q' - 1)}_{q''} + 33 \Rightarrow A - B = 39q'' + 33$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده} = r = 33$$

۸

$$4x \equiv 17 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 2 \times 5 + 2 \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv \frac{12}{4} \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$$



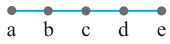
پاسخ نامه آزمون (۷)

ریاضیات گسسته

۸

باتوجه به آن که  $P=5$  و  $\Delta=2$  است، پس  $\gamma \geq \left\lfloor \frac{5}{2+1} \right\rfloor = 2$  و مجموعه

$\{b, d\}$  یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس  $\gamma \leq 2$  بنابراین  $\gamma = 2$  است.



۹

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۵	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴	۵
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۱۰

اگر حرکت به سمت راست را با R و حرکت به سمت بالا را با حرف L نمایش دهیم، باید ۵ بار حرف R و ۴ بار حرف L داشته باشیم. بنابراین:

$$\frac{9!}{5!4!} = 126$$

۱۱

$$x_r = 0 \Rightarrow x_1 + x_r + x_f + x_d = 11 \Rightarrow \binom{11+4-1}{4-1} = 364$$

$$x_r = 1 \Rightarrow x_1 + x_r + x_f + x_d = 8 \Rightarrow \binom{8+4-1}{4-1} = 165$$

$$x_r = 2 \Rightarrow x_1 + x_r + x_f + x_d = 5 \Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = 56$$

$$x_r = 3 \Rightarrow x_1 + x_r + x_f + x_d = 2 \Rightarrow \binom{2+4-1}{4-1} = 10$$

پس کل حالت‌ها  $364 + 165 + 56 + 10 = 595$  است.

۱۲

تعداد توابع  $4^5 = 1024$ ، تعداد توابع یک‌به‌یک،  $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0 = 0$

۱۳

اگر A تعداد رمزهای ۴ رقمی فاقد ۷ و B تعداد رمزهای ۴ رقمی فاقد ۸ باشند، داریم:

$$|A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 \quad |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$$

$$|A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$$

$$|S| - |A \cup B| = 10^4 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974$$

ثانیه  $974 \times 5 = 4870$  زمان لازم

پس  $4870$  ثانیه زمان لازم داریم.

۱۴

چون ۷ روز در هفته و ۱۲ ماه در سال داریم  $7 \times 12 = 84$  لانه داریم؛ چون  $84 \times 6 + 1 = 505$  است، پس حداقل ۷ نفر از آن‌ها روز و ماه تولد یکسان دارند.

۱

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{b^2 + a^2}{ab} \leq -2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0$$

نامعادله فوق همواره درست است، پس حکم درست است.

۲

فرض کنیم  $r$  یک عدد گویای ناصفر و  $x$  عددی گنگ باشد. فرض خلف: فرض کنیم  $rx$  عددی گویا باشد.

$$rx \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)(rx) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

$x \in \mathbb{Q}$  با فرض  $x$  گنگ است در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۳

$$a | 9k + 7 \Rightarrow a | 7 \times (9k + 7) \Rightarrow a | 63k + 49$$

$$a | 7k + 6 \Rightarrow a | 9 \times (7k + 6) \Rightarrow a | 63k + 54$$

$$\Rightarrow a | (63k + 49) - (63k + 54) \Rightarrow a | -5 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 5$$

۴

تعداد غذای قورمه‌سبزی را  $x$  و تعداد غذای قیمه را  $y$  در نظر می‌گیریم:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow x = k + 5$$

$$k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

$$x \geq 0 \Rightarrow k + 5 \geq 0 \Rightarrow k \geq -5 \Rightarrow k = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow -k \geq 0 \Rightarrow k \leq 0$$

به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا دهند.

۵

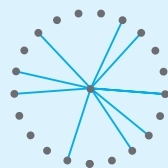
$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\} \text{ (الف)}$$

$$\Delta(G) = 3 \text{ و } \delta(G) = 0 \text{ (ب)}$$

$$N_G(f) = \{a\}, \quad N_G(g) = \{\}, \quad N_G(e) = \{a, c, d\} \text{ (پ)}$$

$$N_G(x) = \{a, c\} \Rightarrow x = b \text{ (ت)}$$

۶



این گراف در صورتی که  $n \geq 2$  باشد، باید مانند شکل مقابل باشد که یک رأس در وسط و سایر رأس‌ها به آن وصل شوند به این ترتیب و  $\Delta(G) = n - 1$  است که در این صورت حداقل و حداکثر تعداد یال‌ها  $(n - 1)$  است.

۷

باتوجه به آن که  $\gamma \geq \left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$  است ولی مجموعه‌های احاطه‌گر ۲

عضوی نداریم و مجموعه  $\{a, c, e\}$  احاطه‌گر مینیم است پس  $\gamma \leq 3$  است. پس  $\gamma = 3$  است.

۱۳

دست کم  $5 \times 4 + 1 = 21$  اسب باید داشته باشیم تا دست کم ۵ اسب هم رنگ داشته باشیم.

پاسخ نامه آزمون (۱۹۹)

ریاضیات گسسته

۱

اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$   
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 0$   
 گزاره همیشه درست

۲

الف) ۲۸ (ب) ۳ راس (ج)  $p-1$  (د) ۱۵

۳

$$\begin{aligned} m &= 13q_1 + 2 & 3m &= 13(3q_1) + 6 \\ n &= 13q_2 + 9 & 5n &= 13(5q_2) + 45 \\ \Rightarrow 5n - 3m &= 13q' + 39 & \Rightarrow 5n - 3m &= 13q'' + 0 \Rightarrow r=0 \end{aligned}$$

۴

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$29 + 3 + 3 + 3 + 3 + 12 = 131 \equiv 5$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنجشنبه را نشان می‌دهد.

۵

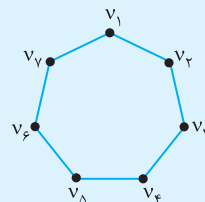
$$2y \equiv 18 \pmod{25} \Rightarrow y \equiv 9 \pmod{25} \Rightarrow y \equiv 9 \pmod{25}$$

$$y = 5k + 4, \quad x = -2k + 2$$

۶

الف)  $p=6, q=7$  (ب)  $N_G(b) = \{a \cdot d \cdot c\}$   
 ج)  $\bar{G}$  تعداد یال‌های گراف  $G$  + تعداد یال‌های گراف  $\bar{G}$  =  $\frac{p(p-1)}{2}$   
 $\bar{G}$  = ۱۶ مجموع درجه‌های رئوس گراف  $\bar{G} \Rightarrow \bar{G}$  = ۸ تعداد یال‌های گراف  $\bar{G}$

۷



الف)  $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

ب)  $\gamma(G) = 3$

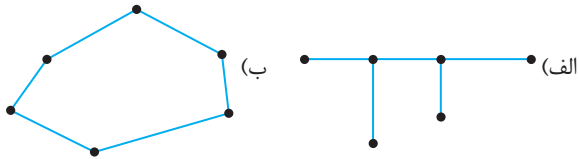
ج)  $\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}$

۸

الف) اگر  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه‌گر مینیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضوی مانند  $a_1$  را در نظر می‌گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند آن را حذف می‌کنیم در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.

ب)  $A = \{h, g, f, i, j\}$

۹



۱۰

$$P = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} \Rightarrow p = 3 \times 7!$$

۱۱

الف)  $5! \times 6!$  (ب)  $5! \times 7!$  (ج)  $10! \times 2!$

۱۲

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \xrightarrow{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{6+5-1}{5-1}$$

۱۳

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه		دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۱	۲	A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱	B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳	C	۱	۲	۳

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

۱۴

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = \left[ \frac{90}{2} \right] + \left[ \frac{90}{3} \right] + \left[ \frac{90}{6} \right]$$

$$n(A \cup B) = 60$$

۱۵

تعداد لانه‌ها:  $7 \times 12 = 84$  تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش آموز

$$\begin{array}{r} 505 \ 84 \\ -504 \ 6 \\ \hline 1 \end{array} \quad 6+1=7$$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

پاسخ نامه آزمون (۲۰)

ریاضیات گسسته

۱۱

(ب)  $5! \times 4!$

(الف)  $4! \times 6!$   
(ج)  $3! \times 7!$

۱۲

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \Rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$$

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} \rightarrow \binom{5+6-1}{6-1}$$

۱۳

	۱	۲	۳	۴
$C_1$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$C_2$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$C_3$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$
$C_4$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$

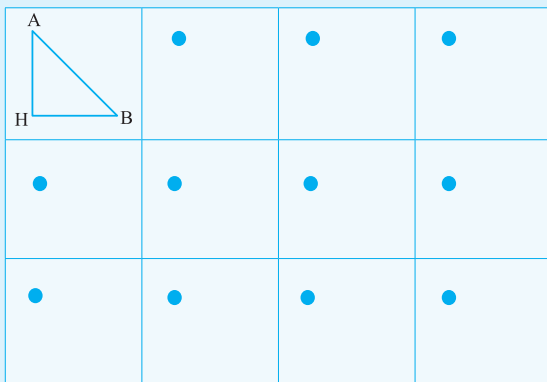
۱۴

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$= 350 - \left[ \frac{350}{4} \right] - \left[ \frac{350}{6} \right] + \left[ \frac{350}{12} \right] = 234$$

۱۵

تعداد لانه‌ها: ۱۲ مربع به مانند شکل  
تعداد کبوترها: ۱۳ نقطه



طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند.  
پس:

$$\begin{cases} AH < r \\ BH < r \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < r^2 \Rightarrow AB^2 < r^2 \Rightarrow AB < \sqrt{r^2}$$

۱

(ب) نادرست

(الف) درست

۲

$$\forall m > 0, a | m, b | m \Rightarrow c \leq m \quad (\text{الف})$$

(ب) همبند

$$\left[ \frac{n}{\Delta+1} \right] \quad (\text{ج})$$

(د) به ترتیب متن سوال n و (k+1)

۳

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۴

$$\begin{cases} a = 5q + 2 \\ a = 6q' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 30q + 12 \\ 5a = 30q' + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 30q'' - 3$$

$$\Rightarrow a = 30r + 27$$

۵

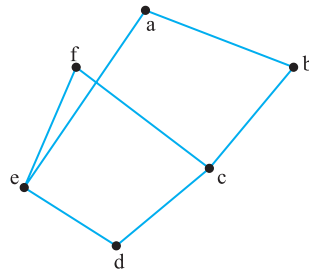
$$27 \equiv 1^3 \Rightarrow (27)^3 \equiv 1^3 \Rightarrow (27)^3 + 19 \equiv 1^3 + 19 = 20 \Rightarrow (27)^3 + 19 \equiv 7$$

۶

$$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \equiv 29 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2$$

$$y = -2k + 5$$

۷

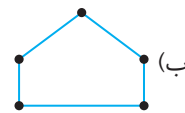


(الف) رسم شکل

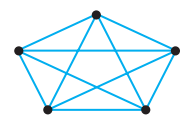
$$N_G[b] = \{a, b, c\} \quad (\text{ب})$$

$$b, a, e, f, c, d \quad (\text{ج})$$

۸



(ب)



(الف)

۹



(الف)

$$\{a, d, e, h\} \quad (\text{ج})$$

$$\{a, d, g\} \quad (\text{ب})$$

۱۰

یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال به صورت  $\{a, h, f, b\}$  است.  
اکنون با حذف راس a از آن، یک مجموعه احاطه گر مینیمال به دست می‌آید.

# خلاصه فصلها

**درس اول: استدلال ریاضی**

◆ مثال نقض: گاهی برای رد کردن یک قانون به صورت کلی، مثالی می‌آوریم که با حکم قانون در تناقض باشد. به این مثال، مثال نقض گویند.

**مثال** آیا گزاره «برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است» درست است؟  
 پاسخ: با فرض  $n = 6$  عدد  $2^6 - 1 = 63$  اول نیست و حکم نقض می‌شود.

**اثبات مستقیم**

به اثبات کردن یک قانون با استفاده از مطالبی که در قبل، درستی آن‌ها را پذیرفتیم، اثبات مستقیم می‌گویند.

**مثال** اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.  
 پاسخ: فرض کنیم  $k = a(a + 1)$ :  $a \in \mathbb{N}$  باشد، پس داریم:

$$4k + 1 = 4a(a + 1) + 1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$$

پس  $4k + 1$  مربع کامل است.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: برخی اوقات برای اثبات برخی از گزاره‌ها باید تمامی موارد ممکن را در مسأله در نظر گرفته و گزاره را ثابت کنیم.

**مثال** ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

پاسخ: برای اثبات این مطلب دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف)  $n$  زوج است. به عبارت دیگر  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )، پس داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 - 5k + 3}_q) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 \text{ فرد است.}$$

ب)  $n$  فرد است. به عبارت دیگر  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ )، بنابراین داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k + 1)^2 - 5(2k + 1) + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_{q'}) + 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 \text{ فرد است.}$$

**اثبات به روش غیرمستقیم (برهان خلف)**

در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین و استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آن‌جا معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

**مثال** ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

پاسخ: فرض کنیم  $r$  عدد گویا و  $x$  گنگ است. باید ثابت کنیم  $r + x$  گنگ است. فرض خلف:  $r + x$  گنگ نیست.

$$r + x \in \mathbb{Q} \Rightarrow r + x - r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

گویا بودن  $x$  خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

**اثبات‌های بازگشتی — گزاره‌های هم‌ارز**

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم. اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه  $P \Rightarrow Q$  و  $Q \Rightarrow P$  هر دو درست هستند و در نتیجه  $P \Leftrightarrow Q$  یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دوشرطی  $P \Leftrightarrow Q$  درست باشد، آنگاه  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

◆ ویژگی‌های هم‌نهشتی

$$۱) a \equiv b \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \quad (c \in \mathbb{Z})$$

$$۲) a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc \quad (c \in \mathbb{Z})$$

$$۳) a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$۴) a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow ac \equiv bd$$

$$۵) a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$$

$$۶) a \equiv b \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

$$۷) \begin{cases} ac \equiv bc \\ (m \cdot c) = d \end{cases} \Rightarrow a \equiv \frac{d}{c} b$$

$$۸) \begin{cases} ac \equiv bc \\ (m \cdot c) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b$$

مثال اگر بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد  $a$  را به پیمانه  $m$  مشخص کنیم، کافی است عدد  $a$  را بر  $m$  تقسیم کنیم و باقیمانده را به دست آوریم.

مثال اگر  $b \div a$  در تقسیم بر عدد طبیعی  $m$  باقی‌مانده یکسان داشته باشند، در این صورت  $b \div a$  به پیمانه  $m$  هم‌نهشت هستند.

$$a \equiv r \pmod{m}$$

مثال اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $m$  مساوی  $r$  باشد، در این صورت:

مثال باقی‌مانده تقسیم  $A = (27)^7 + 19$  بر  $13$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \Rightarrow (27)^7 \equiv (1)^7 = 1$$

$$19 = 13 \times 1 + 6 \Rightarrow 19 \equiv 6$$

$$(27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \Rightarrow A \equiv 7$$

پس باقی‌مانده تقسیم  $A$  بر  $13$  برابر  $7$  است.

مثال برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم عددی بر  $3$  یا  $9$  کافی است، باقی‌مانده مجموع عددها را بر  $3$  یا  $9$  به دست آوریم.

مثال برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم عددی بر  $2$  یا  $5$  یا  $10$  کافی است باقی‌مانده رقم یکان را بر  $2$  یا  $5$  یا  $10$  به دست آوریم.

مثال باقی‌مانده تقسیم عدد  $A = (2^{11} + 7) \times 9$  را بر  $23$  بیابید.

پاسخ:

$$2^5 \equiv 9 \Rightarrow 2^{10} \equiv 81, 81 \equiv 12$$

$$\Rightarrow 2^{10} \equiv 12 \xrightarrow{\times 2} 2^{11} \equiv 24, 24 \equiv 1 \Rightarrow 2^{11} \equiv 1$$

$$2^{11} + 7 \equiv 1 + 7$$

$$\Rightarrow (2^{11} + 7) \times 9 \equiv 72, 72 \equiv 3 \Rightarrow (2^{11} + 7) \times 9 \equiv 3$$

◆ کاربرد هم‌نهشتی در تاریخ

برای این کار باید فاصله دو تاریخ را به دست آورده و باقی‌مانده تقسیم آن را بر ۷ پیدا کنیم، اگر روز تاریخ جلوتر را بخواهیم به مقدار عدد باقی‌مانده به سمت جلو حرکت کنیم و چنانچه روز تاریخ گذشته را بخواهیم به مقدار عدد باقی‌مانده به سمت عقب حرکت کنیم.

◆ معادله‌های هم‌نهشتی

هر معادله به فرم  $ax \equiv b \pmod{m}$  را معادله هم‌نهشتی می‌گوییم و منظور از حل یک معادله هم‌نهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون  $x_0 \in \mathbb{Z}$  است که در معادله فوق صدق کنند یعنی:

$$(a, b \in \mathbb{Z}) \quad ax_0 \equiv b \pmod{m}$$

مثال همه اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشد.

پاسخ: اگر آن عدد را  $x$  فرض کنیم، باید  $3x - 13 \equiv 0 \pmod{7}$  یا  $3x \equiv 13 \pmod{7}$  حال داریم:

$$3x \equiv 13 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 2$$

مثال جواب‌های عمومی معادله  $4x \equiv 17 \pmod{5}$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$4x \equiv 17 \pmod{5}, 17 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\xrightarrow{\text{و بزرگی ۵}} \Rightarrow 4x \equiv 2 + (2 \times 5) \pmod{5}$$

$$4x \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 4 \times 3 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$$

$$(5 | x - 3 \Rightarrow x - 3 = 5k \Rightarrow x = 5k + 3)$$

◆ طرز حل کردن معادله هم‌نهشتی

در معادله  $ax \equiv b \pmod{m}$  اگر  $a$  و  $b$  عددی بزرگ‌تر از  $m$  باشند، باید به جای آن‌ها باقی‌مانده تقسیمشان را بر  $m$  بنویسیم و طرفین را اگر به ضرب  $x$  قابل قسمت باشند به آن تقسیم کنیم و در صورتی که قابل قسمت نباشند، ضربی از پیمانان را به سمت دیگر اضافه کنیم تا طرفین بر ضرب  $x$  تقسیم شوند و به معادله‌ای به فرم  $x \equiv c \pmod{m}$  برسیم که جواب آن  $x = mk + c$  خواهد بود.

◆ قضیه: معادله هم‌نهشتی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است، اگر فقط  $(a, m) | b$

◆ معادله سیاله

هر معادله به صورت  $ax + by = c$  را که در آن  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  است را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم. برای حل یک معادله سیاله ابتدا آن را به صورت  $ax \equiv b \pmod{m}$  در آورده و از آنجا  $x$  را پیدا کرده و در معادله اولیه قرار می‌دهیم تا  $y$  به دست آید.

مثال معادله  $ax + by = c$  وقتی دارای جواب است که  $(a, b) | c$

**مثال** دو مربع لاتین متعامد نیستند، هرگاه در یکی از دو مربع دو درایه یکسان پیدا کنیم، به طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اول) وجود داشته باشد.

**مثال** آیا دو مربع لاتین  $4 \times 4$  زیر متعامدند؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

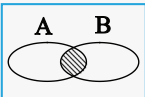
$$\begin{bmatrix} 33 & 44 & 11 & 22 \\ 41 & 32 & 23 & 14 \\ 12 & 21 & 34 & 43 \\ 24 & 13 & 42 & 31 \end{bmatrix}$$

پاسخ: در مربع لاتین مقابل عدد تکراری نداریم پس این دو مربع لاتین متعامد هستند.

### درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

برای محاسبه تعداد اعضای  $A \cup B$  یعنی  $|A \cup B|$ ، یک بار تعداد اعضای  $A$  و بار دیگر تعداد اعضای  $B$  را می‌شماریم و از مجموع آن‌ها تعداد اعضای  $A \cap B$  را کم می‌کنیم که از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

**مثال** در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند، مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال بازی می‌کنند و هم والیبال؟

پاسخ:

مجموعه والیبال‌ها:  $V$

مجموعه فوتبال‌ها:  $F$

$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| \Rightarrow |F \cup V| = 15 + 14 - 9 = 20$$

$$|S| - |F \cup V| = 25 - 20 = 5$$

پس ۵ نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال.

**مثال** اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**مثال** تعداد عددهای طبیعی از ۱ تا  $n$  که مضرب  $k$  هستند را به ما می‌دهد،  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

محاسبه تعداد توابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$

اگر مجموعه  $A$  دارای  $m$  عضو باشد و تعداد عضوهای مجموعه  $B$ ،  $n$  تا باشد تعداد تابع‌هایی که از  $A$  به  $B$  می‌توان نوشت به این صورت است که هر عضو  $A$  یکی از  $n$  عضو  $B$  را می‌تواند انتخاب کند، پس تعداد کل توابع  $n \times n \times \dots \times n = n^m$  است.



مثال از مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 4\}$  چند تابع می توان نوشت؟

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

پاسخ:

◆ تعداد توابع پوشا

برای محاسبه تعداد توابع پوشا کافی است، تعداد تابع های غیر پوشا را از تعداد کل توابع کم کنیم.

مثال از مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  چند تابع پوشا می توان نوشت؟

$$|S| = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$|\bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3}| = |\bar{1}| + |\bar{2}| + |\bar{3}| - |\bar{1} \cap \bar{2}| - |\bar{1} \cap \bar{3}| - |\bar{2} \cap \bar{3}| + |\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3}| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - 1^4 - 1^4 - 1^4 + 0 = 45$$

$$|S| - |\bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3}| = 81 - 45 = 36$$

پس تعداد توابع پوشا از A به B برابر است با:

پاسخ:

◆ تعداد توابع یک به یک

برای محاسبه تعداد توابع یک به یک از مجموعه A با m عضو به مجموعه B با n عضو با شرط  $m \leq n$  برای اولین عضو از مجموعه A، n انتخاب، دومین عضو  $n-1$  انتخاب و ... آخرین عضو  $(n-m+1)$  انتخاب دارید. پس به طور کلی تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با:

$$(n)_m = n \times n-1 \times n-2 \times \dots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال به چند طریق می توان 5 کتاب مختلف را بین 8 نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

پاسخ: این سؤال مانند تابع یک به یک از یک مجموعه 5 عضوی به یک مجموعه 8 عضوی است.

$$(8)_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6720$$

◆ اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر n لانه داشته باشیم و  $m > n$  و همه کبوترها درون لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه های وجود دارد که حداقل 2 کبوتر در آن قرار گرفته است.

◆ تعمیم اصل لانه کبوتری

هرگاه  $(nk+1)$  کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه های وجود دارد که حداقل  $(k+1)$  کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال 54 شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل 5 شاخه گل قرار گرفته است؟

پاسخ:

$$k+1=5 \Rightarrow k=4$$

$$nk+1=54 \Rightarrow 4n+1=54 \Rightarrow 4n=53 \Rightarrow n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13$$