درسنامه ۱

توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

توابعی را که ضابطهٔ آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ که در آن a_0، a_1، … و a_n اعداد حقیقی، $a_n \neq 0$ و $n\in \mathbb{W}$، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم.

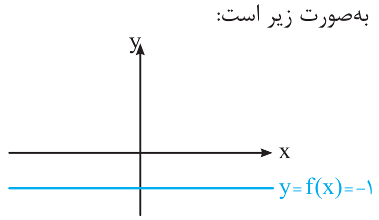
نکته

دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود.

به طور مثال هر یک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشند: $g(x)=-3x^2+5x+1$ $\quad f(x)=2x^5-4x^3-\frac{1}{2}x+3$

انواع توابع چندجمله‌ای که تا به حال با آن‌ها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر می‌باشند:

۱) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به‌صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد. به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x)=-1$ به‌صورت زیر است:



۲) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$، $a\neq 0$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطهٔ دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

۳) تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$، $a\neq 0$، است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S\left(x=-\frac{b}{2a}\ ,\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

اگر $a>0$، سهمی رو به بالا و اگر $a<0$، آن‌گاه سهمی رو به پایین است.

نکته

می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

مثال

نمودار تابع درجه دوم به معادلهٔ $f(x)=-x^2+6x-5$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

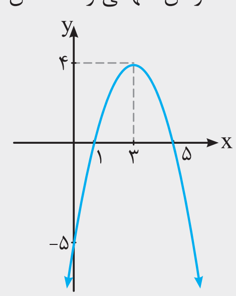
$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2(-1)}=3 \Rightarrow y=f(3)=-9+18-5=4$$

$$x=0 \Rightarrow y=-5\ ,\ y=0 \Rightarrow -x^2+6x-5=0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2-6x+5=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=5$$

S

x	۱	۳	۵
y	۰	۴	۰

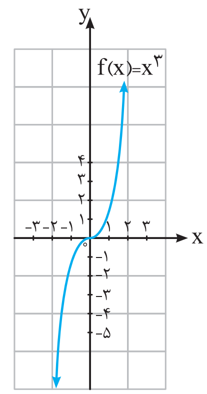


درسنامه ۱

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، $(a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

نمودار تابع $y=x^3$ به کمک نقطه‌یابی به‌صورت زیر است:



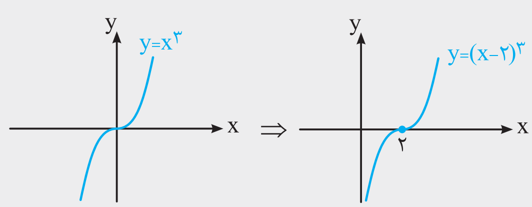
x	$f(x)=x^3$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8

با اطلاعاتی که داریم، نمی‌توان نمودار تابع درجه ۳ را در حالت کلی رسم کرد اما می‌توان نمودار برخی از توابع درجه سوم را با استفاده از انتقال، قرینه و... به کمک نمودار $y=x^3$ رسم کرد.

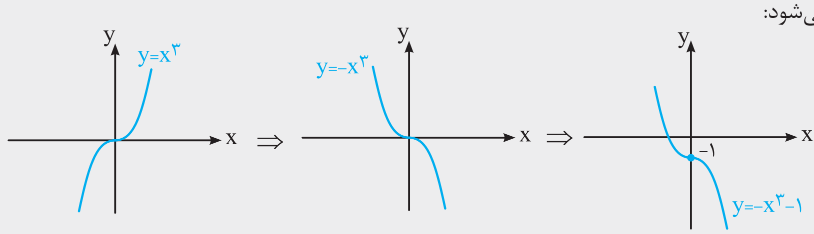
مثال **نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.**

آ) $y=(x-2)^3$ ب) $y=-x^3-1$

پاسخ: آ) اگر نمودار $y=x^3$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=(x-2)^3$ به‌دست می‌آید.



ب) ابتدا نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^3$ به‌دست آید. با انتقال نمودار $y=-x^3$ به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^3-1$ رسم می‌شود:

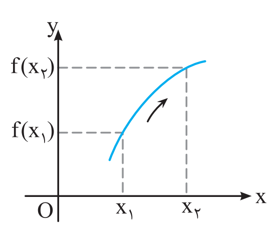


توابع صعودی و نزولی

تعریف: اگر D بازه‌ای در دامنهٔ تابع f باشد، می‌گوییم f در بازهٔ D اکیداً صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$\boxed{x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)}$$

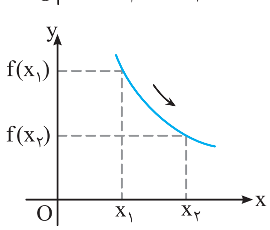
در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ تابع f افزایش می‌یابد، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.



تعریف: می‌گوییم f در بازهٔ D اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$\boxed{x_1<x_2 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)}$$

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد.



درسنامه ۱

تعریف: به تابعی که فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

تعریف: تابع f روی بازهٔ D صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in D$:

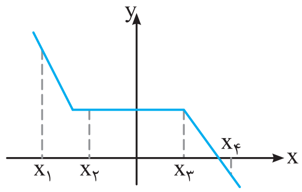
$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

و تابع f روی بازهٔ D نزولی است اگر و تنها اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in D$:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۲) \le f(x_۱)$$

در نمودار مقابل، با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$x_۱ < x_۲ < x_۳ < x_۴ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲) = f(x_۳) > f(x_۴)$$



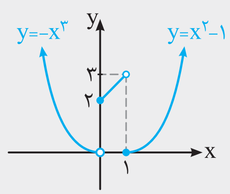
تعریف: به تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

تعریف: تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

مثال

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \ge ۱ \\ x + ۲ & ۰ \le x < ۱ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.

پاسخ: با رسم سهمی $y = x^۲ - ۱$ در بازهٔ $[۱, +\infty)$، خط $y = x + ۲$ در بازهٔ $[۰, ۱)$ و تابع درجه سوم $y = -x^۳$ در بازهٔ $(-\infty, ۰)$، نمودار تابع f به‌صورت مقابل رسم می‌شود:

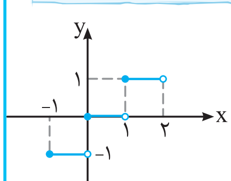


با توجه به نمودار تابع f، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, ۰)$، تابعی اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[۰, ۱)$، تابعی اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۱, +\infty)$، تابعی اکیداً صعودی است.

نکته

تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور x ها باشد.

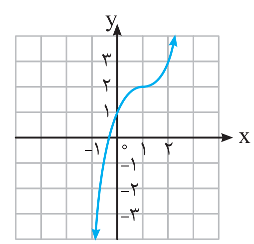
به عنوان مثال، تابع $y = [x]$ که نمودار آن به‌صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

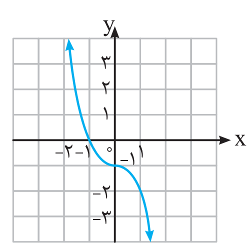


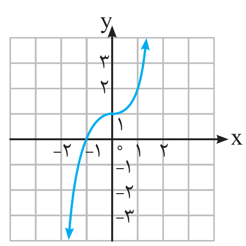
سؤالات امتحانی

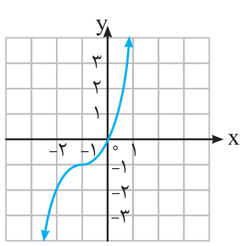
۱. **ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.** (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

آ) $y = x^۳ + ۱$ ب) $y = -x^۳ - ۱$ پ) $y = (x - ۱)^۳ + ۲$ ت) $y = (x + ۱)^۳ - ۱$


(۱)


(۲)


(۳)

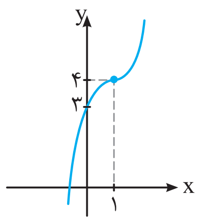

(۴)

۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

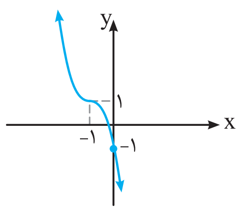
آ) $y = x^{۳} - ۱$ ب) $y = -x^{۳} - ۲$ پ) $y = (x+۲)^{۳} - ۱$

ت) $y = (x-۱)^{۳} + ۲$ ث) $y = -(x-۱)^{۳} - ۱$ ج) $y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x$

۳. نمودار تابع $y = a(x-b)^{۳} + c$ به‌صورت مقابل است. مقادیر a، b و c را مشخص کنید.



۴. نمودار تابع $f(x) = a(x+b)^{۳} + c$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f(۱)$ را به‌دست آورید.



۵. نمودار تابع $f(x) = x^{۳}$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ ۵ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

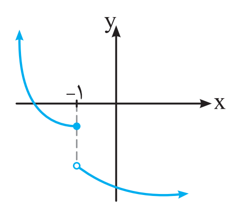
۶. نمودار $f(x) = x^{۳}$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

۷. تابع چندجمله‌ای از درجهٔ دوم f مفروض است. اگر $f(۰) = ۲$، $f(۱) = ۰$ و $f(-۱) = ۱۰$ باشند، ضابطهٔ f را مشخص کنید.

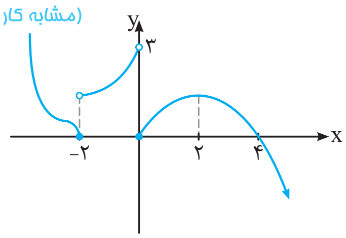
۸. تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم f مفروض است. اگر ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$، $x = -۱$، $x = -۲$ و $x = ۲$ باشند و $f(۰) = -۴$، مقدار $f(۳)$ را به‌دست آورید.

۹. در هر کدام از توابع زیر، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

آ)



ب)



۱۰. آ) روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[۱,۲]$ اکیداً نزولی باشد.

ب) روی بازهٔ $[-۱,۱]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازهٔ $(-۱,۰]$ و $[۰,۱]$ اکیداً صعودی باشد ولی روی بازهٔ $[-۱,۱]$ اکیداً صعودی نباشد.

۱۱. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x+۱ & x < -۲ \\ ۱ & -۲ < x < ۱ \\ -۲x & x > ۱ \end{cases}$$

۱۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

آ) $f(x) = -x^{۲} + ۴x$ ب) $f(x) = x + |x|$ پ) $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ ت) $f(x) = \frac{۱}{x}$

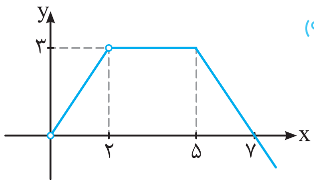
ث) $f(x) = -x^{۳} + ۲$ ج) $f(x) = ۲^{x} - ۲$ چ) $f(x) = \log_{۳} x$ ح) $f(x) = x^{۲}|x|$

خ) $f(x) = \cos x , x \in [-\pi, ۲\pi]$

۱۳. ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیریکنوا باشد.

۱۴. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (نهایی ـ خرداد ۹۱)

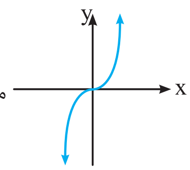
تابع در بازهٔ .... اکیداً صعودی و در بازهٔ .... اکیداً نزولی و در بازهٔ [۲،۵)، .... است.



پاسخ‌های تشریحی

۱

آ) اگر نمودار $y=x^3$ که به‌صورت



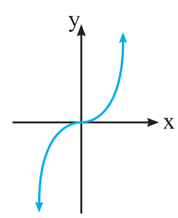
می‌باشد را به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=x^3+1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال‌یافتهٔ نمودار $y=x^3$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا است.

ب) اگر نمودار $y=x^3$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=-x^3-1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y=-x^3-1$ می‌باشد.

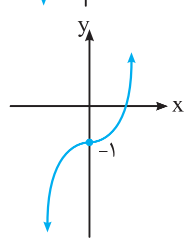
پ) اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3+2$ به‌دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y=(x-1)^3+2$ می‌باشد.

ت) اگر نمودار $y=x^3$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=(x+1)^3-1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y=(x+1)^3-1$ می‌باشد.

۲ نمودار تابع $y=x^3$ به‌صورت مقابل است:

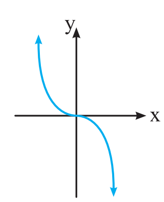


آ) اگر نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=x^3-1$ به‌دست می‌آید:

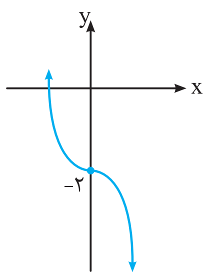


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

ب) ابتدا نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^3$ به‌دست آید:

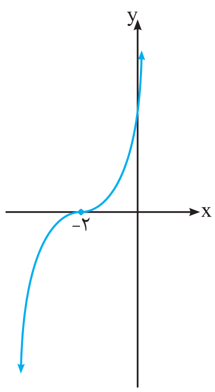


با انتقال نمودار $y=-x^3$ به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^3-2$ به‌دست می‌آید:

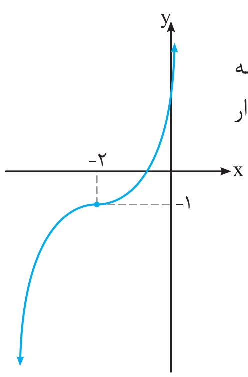


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

پ) با انتقال نمودار $y=x^3$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y=(x+2)^3$ به‌دست می‌آید:

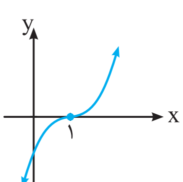


نمودار $y=(x+2)^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y=(x+2)^3-1$ به‌دست آید:

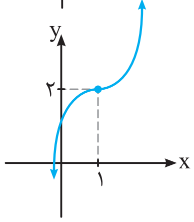


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

ت) اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3$ به‌دست می‌آید:



با انتقال نمودار $y=(x-1)^3$، به اندازهٔ دو واحد به سمت بالا نمودار $y=(x-1)^3+2$ به‌دست می‌آید.



دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

دانش‌آموزان عزیز! سؤالات با آدرس نهایی مربوط به امتحانات کشوری ریاضی رشتهٔ تجربی و ریاضی سال‌های گذشته می‌باشد.

۹ تابع f اکیداً صعودی است، هرگاه:

$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$

تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه:

$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$

تابع f صعودی است، هرگاه:

$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$

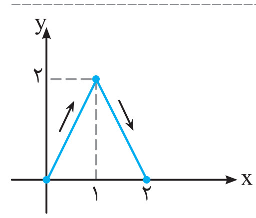
تابع f نزولی است، هرگاه:

$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲)$

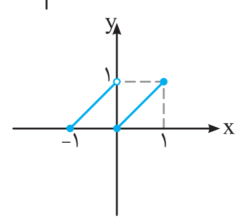
آ) با توجه به شکل و با افزایش x، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

ب) با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty , -۲]$ و $[۲ , +\infty)$، اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-۲ , ۰)$ و $[۰ , ۲]$، تابعی اکیداً صعودی است.

۱۰ آ) اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار f در بازهٔ $[۰ , ۱]$ در حال صعود و در بازهٔ $[۱ , ۲]$ در حال نزول است.



ب) اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه f روی بازه‌های $[-۱ , ۰)$ و $[۰ , ۱]$ در حال صعود است ولی در بازهٔ $[-۱ , ۱]$ نه صعودی و نه نزولی است.

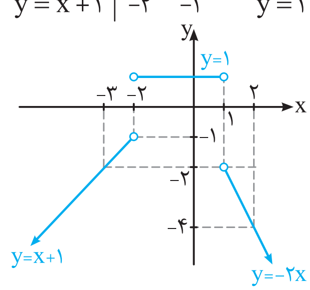


۱۱ برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای f، باید خط $y = x + ۱$ را در محدودهٔ $(-\infty , -۲)$، خط $y = ۱$ را در محدودهٔ $(-۲ , ۱)$ و خط $y = -۲x$ را در محدودهٔ $(۱ , +\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	-۳	-۲
$y = x + ۱$	-۲	-۱

x	-۲	۱
$y = ۱$	۱	۱

x	۱	۲
$y = -۲x$	-۲	-۴



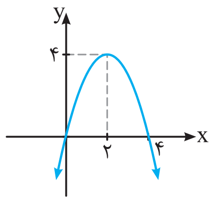
با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty , -۲)$، تابعی اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲ , ۱)$، تابعی ثابت و در بازهٔ $(۱ , +\infty)$، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.

۱۲ آ) برای رسم نمودار $y = -x^۲ + ۴x$، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{۲(-۱)} = ۲ \Rightarrow y = -(۲)^۲ + ۴(۲) = ۴$$

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \,,\, y = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x(-x + ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۴$$



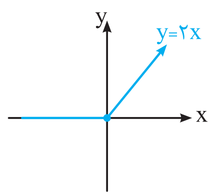
با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty , ۲)$ اکیداً صعودی و تابع در بازهٔ $(۲ , +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) با حذف قدرمطلق، تابع را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

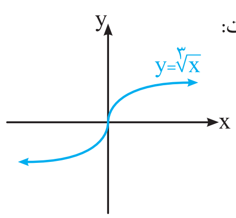
$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq ۰ \\ x + (-x) & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۲x & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

با رسم تابع ثابت $y = ۰$ برای $x < ۰$ و نیم‌خط $y = ۲x$ برای $x \geq ۰$، نمودار تابع f رسم می‌شود:



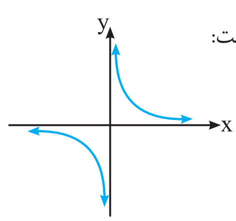
نمودار f در بازهٔ $[۰ , +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-\infty , ۰]$، هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازهٔ $(-\infty , +\infty)$ صعودی است.

پ) نمودار تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ به‌صورت زیر است:



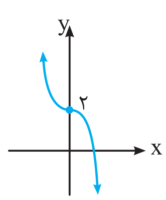
با توجه به نمودار، تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

ت) نمودار تابع گویای $y = \frac{۱}{x}$ به‌صورت زیر است:



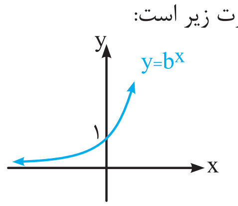
تابع در بازه‌های $(-\infty , ۰)$ و $(۰ , +\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است.

ث) نمودار تابع $y = -x^۳ + ۲$ به‌صورت زیر است:

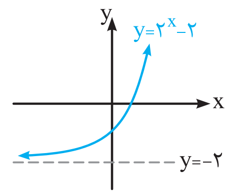


تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

ج) نمودار تابع نمایی $y = b^x$ $(b > ۱)$، به‌صورت زیر است:

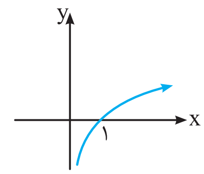


اگر نمودار تابع $y=2^x$ را به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=2^x-2$ به‌دست می‌آید:



تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی است.

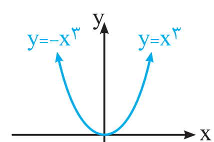
چ) نمودار تابع $y=\log_b x$، وقتی که $b>1$ باشد، به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

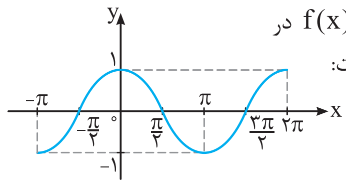
ح) $y=x^2|x|=\begin{cases} x^2(x) & x\ge 0\\ x^2(-x) & x<0\end{cases}=\begin{cases} x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$

نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$، اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[0,+\infty)$، اکیداً صعودی است.

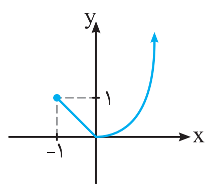
خ) نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازهٔ $[-\pi,2\pi]$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi,0]$ و $[\pi,2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[0,\pi]$، اکیداً نزولی است.

۱۳ ابتدا نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطهٔ آن را می‌نویسیم:

ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-x & -1\le x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ است.



۱۴ $(0,2)$، $[5,+\infty)$، ثابت

درسنامه ۲

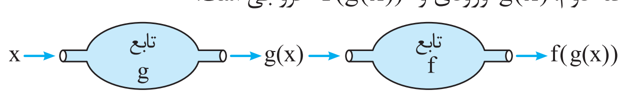
ترکیب توابع

تعریف: ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُ جی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog: x\longrightarrow f(g(x))$ تعریف می‌کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به‌صورت مقابل است:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "(fog)(x)=f(g(x))"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

مراحل ساخت تابع fog : x باید در دامنهٔ g باشد. در مرحلهٔ اول، x ورودی و $g(x)$ خروجی است. $g(x)$ باید در دامنهٔ f باشد. در مرحلهٔ دوم، $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



بنابراین برای به‌دست آوردن ضابطهٔ $(fog)(x)$، در تابع f به جای x ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم و اگر بخواهیم ضابطهٔ $(gof)(x)$ را به‌دست بیاوریم، کافی است در ضابطهٔ تابع g به جای x ضابطهٔ $f(x)$ را قرار دهیم.

مثال

اگر $f(x)=3x-2$ و $g(x)=4x-3$ دو تابع باشند، ضابطهٔ هر یک از توابع fog و gof را مشخص کنید.

پاسخ: اگر در ضابطهٔ تابع f به جای x، $g(x)$ قرار دهیم، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(4x-3)=3(4x-3)-2=12x-9-2=12x-11$$

همچنین با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطهٔ تابع g، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x-2)=4(3x-2)-3=12x-8-3=12x-11$$

درسنامه ۲

مثال

اگر $f(x)=x^2-5x+2$ و $g(x)=2x-1$ باشند، جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=-4$ را مشخص کنید.

پاسخ: ضابطهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم و آن را مساوی ۴- قرار می‌دهیم:
$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)^2-5(2x-1)+2$

$(fog)(x)=-4 \Rightarrow (2x-1)^2-5(2x-1)+2=-4$

با فرض $2x-1=A$، داریم: $A^2-5A+2=-4 \Rightarrow A^2-5A+6=0 \Rightarrow (A-2)(A-3)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

مثال

اگر $f(x)=3x+a$، $g(x)=2x-1$ و $(fog)(x)=(gof)(x)$ باشد، مقدار gof را به ازای $x=2$ به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x-1)\ \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم } 2x-1]{\text{در ضابطهٔ } f \text{ به جای } x\text{،}}\ 3(2x-1)+a=6x-3+a$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x+a)\ \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم } 3x+a]{\text{در ضابطهٔ } g \text{ به جای } x\text{،}}\ 2(3x+a)-1=6x+2a-1$$

$$(fog)(x)=(gof)(x) \Rightarrow 6x-3+a=6x+2a-1 \Rightarrow a-3=2a-1 \Rightarrow a=-2$$

$$(gof)(2)=g(f(2)), f(x)=3x-2 \Rightarrow f(2)=6-2=4 \Rightarrow g(f(2))=g(4)\ \xrightarrow{g(x)=2x-1}\ 2(4)-1=7$$

مثال

اگر $f=\{(5,2),(3,0),(1,4),(2,-1)\}$ و $g=\{(1,6),(2,1),(3,1),(4,2)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع fog و gog را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

پاسخ: برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع روی g اثر می‌کند:

$3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4$, $(fog)(3)=4$

$4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1$, $(fog)(4)=-1$

$1 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ?$, $(fog)(1)$ وجود ندارد.

$2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4$, $(fog)(2)=4$

$\Rightarrow fog=\{(4,-1),(3,4),(2,4)\}$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$(gog)(4)=g(g(4))=g(2)=1 \Rightarrow (4,1)\in gog$ ، $(gog)(3)=g(g(3))=g(1)=6 \Rightarrow (3,6)\in gog$

$(gog)(2)=g(g(2))=g(1)=6 \Rightarrow (2,6)\in gog$ ، $(gog)(1)=g(g(1))=g(6)$ تعریف‌نشده

بنابراین: $gog=\{(4,1),(3,6),(2,6)\}$

مثال

تابع $h(x)=(x^3-1)^2$ را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو طریق).

پاسخ: **روش اول:** تابع $y=x^3$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای x^3، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:
$g(x)=x^3, f(x)=(x-1)^2 \Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^3)=(x^3-1)^2$

روش دوم: تابع $y=x^3-1$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای x^3-1، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:
$g(x)=x^3-1, f(x)=x^2 \Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^3-1)=(x^3-1)^2$

درسنامه ۲

دامنهٔ تابع مرکب

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof دو روش وجود دارد:

روش اول: تابع $gof(x)$ را تشکیل دهیم و دامنهٔ تابع به‌دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطهٔ تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

مثال اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع fog را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲$$

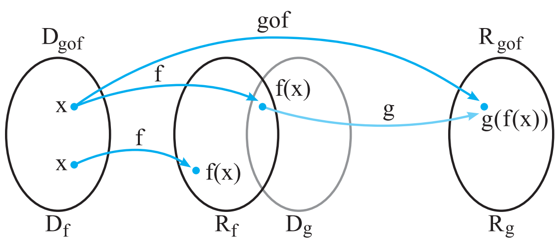
دامنهٔ تابع $y=(\sqrt{x})^۲$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است، بنابراین: $D_{fog}=[۰,+\infty)\ ,\ x\geq ۰ \Rightarrow (fog)(x)=x$

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^۲$، x بنویسیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $(fog)(x)=x$ درمی‌آید که دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنهٔ تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

روش دوم: دامنهٔ تابع مرکب gof، مجموعهٔ x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

توجه کنید که اگر $f(x)$ در دامنهٔ تابع g وجود نداشته باشد، آن‌گاه مقدار $g(f(x))$ تعریف نشده است.

نکته

با توجه به تعریف دامنهٔ gof، شرط آن‌که تابع gof تشکیل شود، آن است که: $R_f\cap D_g\neq\varnothing$

مثال اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند. آن‌گاه:

آ) دامنهٔ تابع gof را به کمک تعریف به‌دست آورید.

ب) مقدار تابع fog را به ازای $x=۱۱$ به‌دست آورید.

پاسخ: آ) دامنهٔ تابع درجه اول f برابر $\mathbb{R}$ است. برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع رادیکالی g، داریم: $x-۲\geq۰\Rightarrow x\geq ۲\Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof به‌صورت مقابل است: $D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x-۱}{۲}\geq ۲\}$

$$\frac{x-۱}{۲}\geq ۲\Rightarrow x-۱\geq ۴\Rightarrow x\geq ۵\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۵\}=[۵,+\infty)$$

ب) مقدار تابع fog به ازای $x=۱۱$، برابر $f(g(۱۱))$ است: $g(x)=\sqrt{x-۲}\Rightarrow g(۱۱)=\sqrt{۹}=۳\Rightarrow f(g(۱۱))=f(۳)=\frac{۳-۱}{۲}=۱$

محاسبهٔ $f(x)$ با در اختیار داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$

اگر ضابطهٔ توابع $g(x)$ و $f(g(x))$ داده شده باشند و بخواهیم ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست آوریم، کافی است به جای $g(x)$، A قرار دهیم و از این تساوی x را برحسب A به‌دست آوریم و در ضابطهٔ $f(g(x))$ جایگزین کنیم.

مثال اگر $g(x)=\frac{x-۱}{x}$ و $f(g(x))=۲x$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

پاسخ:

$$g(x)=A\Rightarrow \frac{x-۱}{x}=A\Rightarrow x-۱=Ax\Rightarrow x-xA=۱\Rightarrow x(۱-A)=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱-A}$$

$$f(g(x))=۲x\Rightarrow f(A)=۲\times\frac{۱}{۱-A}=\frac{۲}{۱-A}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۱-x}$$

درسنامه ۲

محاسبهٔ $g(x)$ با در اختیار داشتن $f(g(x))$ و $f(x)$

اگر $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند و $g(x)$ را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطهٔ تابع f، $f(g(x))$ را به‌دست می‌آوریم و سپس آن را با ضابطهٔ $f(g(x))$ داده‌شده برابر قرار می‌دهیم و از این تساوی ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می‌کنیم.

مثال **اگر $f(g(x))=۲x$ و $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ را مشخص کنید.**

پاسخ: از ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، $f(g(x))$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}\ ,\ f(g(x))=۲x \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{۲x}{۱}$$

$$\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۲x \Rightarrow g(x)-۲xg(x)=-۲x \Rightarrow g(x)(۱-۲x)=-۲x \Rightarrow g(x)=\frac{-۲x}{۱-۲x}$$

تبدیل نمودار توابع

با رسم نمودار توابع جدید به کمک انتقال از روی نمودار برخی از توابع خاص آشنایی دارید. ابتدا این مطالب را یادآوری می‌کنیم و سپس رسم‌های جدیدی را بیان می‌کنیم.

تغییرات نمودار در راستای محور y ها: فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و k **عددی حقیقی و مثبت** باشد. اگر نقطهٔ $A(a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a,b+k)$، نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=f(x)+k$ می‌باشد. پس برای رسیدن به نقطهٔ A' از نقطهٔ A، کافی است نقطهٔ A را به اندازهٔ k واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بنابراین:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور y ها (به بالا) انتقال دهیم.

به همین ترتیب:

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)-k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور y ها (به پایین) انتقال دهیم.

رسم نمودار $y=kf(x)$

اگر نقطهٔ $A(a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a,kb)$ $\left(f(a)=b \xrightarrow{y=kf(x)} y=kf(a)=kb\right)$، نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=kf(x)$ است. پس برای مشخص کردن نقطهٔ A' از روی نقطهٔ A، کافی است عرض نقطهٔ A را k برابر کنیم. بنابراین:

۳) برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است **عرض** همهٔ نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته

در حالت خاص برای رسم نمودار $y=-f(x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

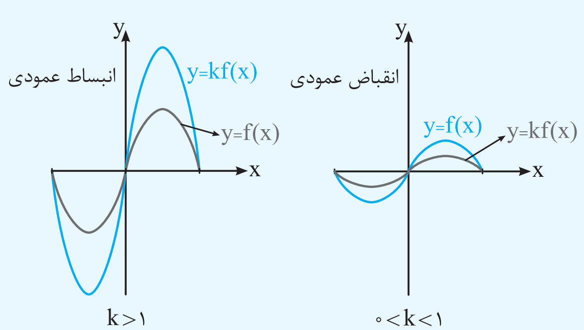
نکته

نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید:

ـ اگر $k>۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

ـ اگر $۰<k<۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k جمع می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

ـ اگر $k<۰$، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



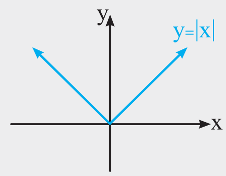
نکته

دامنهٔ تابع $y=kf(x)+a$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ یکی است ولی برد آن‌ها لزوماً یکی نیست.

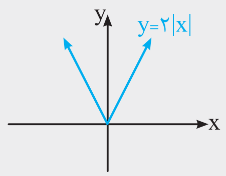
درسنامه ۲

مثال **نمودار تابع $f(x)=۲|x|-۱$ را به کمک نمودار تابع $y=|x|$ رسم کنید.**

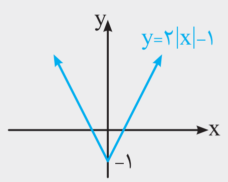
پاسخ: نمودار تابع $y=|x|$ به‌صورت مقابل است:



عرض نقاط روی نمودار تابع $y=|x|$ را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y=۲|x|$ به‌دست بیاید:



نمودار تابع $y=۲|x|$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=۲|x|-۱$ رسم شود:



تغییرات نمودار در راستای محور xها: فرض کنید نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k>۰$ عددی حقیقی باشد.

اگر $A(a،b)$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد $(f(a)=b)$، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a+k،b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x-k)$ است، زیرا:

$$f((a+k)-k)=f(a)=b$$

برای مشخص کردن نقطهٔ A' از روی نقطهٔ A، کافی است نقطهٔ A را به اندازهٔ k واحد به سمت راست انتقال دهیم. بنابراین:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور xها (به سمت راست) منتقل کنیم.

به همین ترتیب:

۲) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور xها (به سمت چپ) منتقل کنیم.

در واقع با تبدیل x به $x-k$ $(x+k)$ در تابع f و انتقال نمودار f به اندازهٔ k واحد به سمت راست (چپ)، نمودار $f(x-k)$ $(f(x+k))$ به‌دست می‌آید.

رسم نمودار $|f|$

مقدار تابع $y=|f(x)|$، به ازای تمام مقادیر $x\in D_f$ غیرمنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) می‌باشد:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq ۰ \\ -f(x) & f(x)<۰ \end{cases}$$

پس هیچ قسمتی از نمودار $y=|f(x)|$ در پایین محور xها قرار نمی‌گیرد.

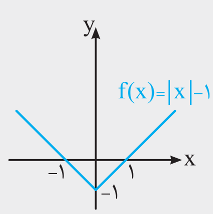
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، بدون تعیین علامت $f(x)$ و حذف قدرمطلق، از نکتهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

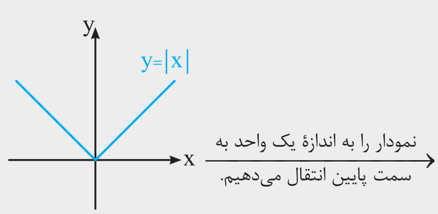
نکته

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

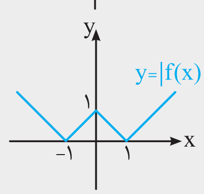
مثال **نمودار تابع $y=||x|-۱|$ را رسم کنید.**

پاسخ: ابتدا نمودار $f(x)=|x|-۱$ را رسم می‌کنیم.





در بازهٔ $(-۱،۱)$، نمودار f زیر محور xها قرار دارد. نمودار این قسمت را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=|f(x)|$ به‌دست آید:



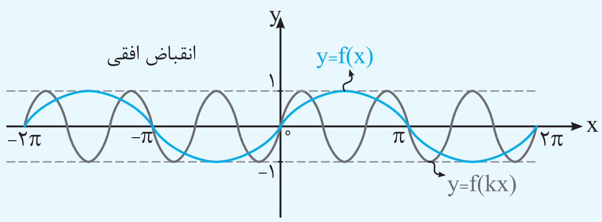
درسنامه ۲

نکته

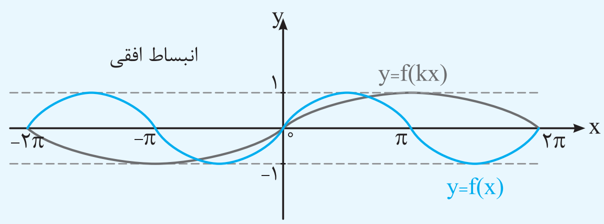
برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول همهٔ نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را بر k تقسیم کنیم، بدون آن‌که عرض نقاط متناظر تغییری کند.

نکته

نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید:
اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (نمودار در راستای محور xها جمع‌تر می‌شود) و در حالتی که $0<k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (نمودار در راستای محور xها بازتر می‌شود) می‌شود.

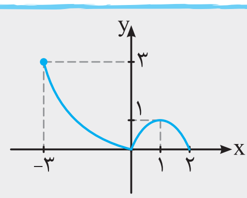


$k>1$

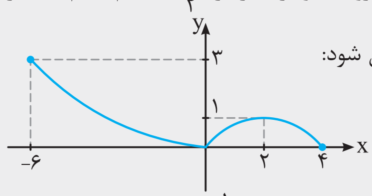


$0<k<1$

مثال نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-1$ را رسم کنید.

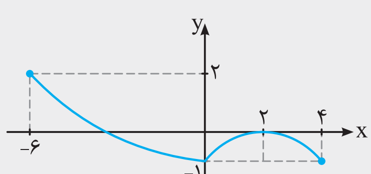


پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، کافی است طول نقاط روی نمودار f را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم (یا در ۲ ضرب کنیم). پس طول نقاط را دو برابر می‌کنیم تا طول نقاط روی نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ مشخص شود:



$y=f(\frac{1}{2}x)$

نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:



$y=f(\frac{1}{2}x)-1$

اگر $A(a,b)$ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(-a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(-x)$ است. می‌دانیم A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور yها است، بنابراین:

نکته

اگر نمودار تابعی را نسبت به محور yها قرینه کنیم، برای به‌دست آوردن ضابطهٔ آن، کافی است در ضابطهٔ تابع اولیه، به جای x، عبارت $-x$ را قرار دهیم، بدون آن‌که y را تغییر دهیم.

درسنامه ۲

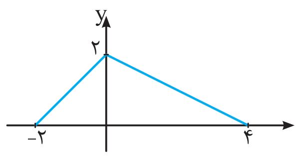
نکته

برای رسم نمودار $y=f(-x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

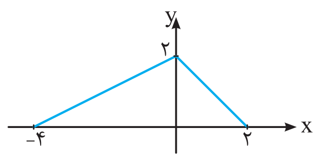
نکته

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار $y=f(x)$ در حالتی که $k<۰$ باشد، ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه و سپس با ضریب $\frac{۱}{|k|}$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌کنیم.

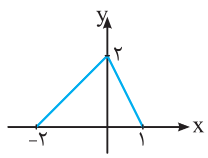
به عنوان مثال، اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت



باشد، برای رسم نمودار $y=f(-۲x)$، ابتدا نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



حال این نمودار را با ضریب $\frac{۱}{۲}$، منقبض می‌کنیم (طول نقاط را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم، بدون آن‌که عرض نقطهٔ متناظر تغییری کند):



سؤالات امتحانی

۱۵. اگر $f=\{(۱،۴)،(۲،۳)،(۵،-۱)،(۰،۲)\}$ و $g=\{(۴،-۲)،(-۱،۵)،(۲،۱)،(۳،۰)\}$ دو تابع باشند، توابع fog، gof و gog را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۱۶. برای دو تابع $f=\{(۱۱،۷)،(-۲،۴)،(۳،-۵)،(۲،-۵)\}$ و $g=\{(۲،۱۱)،(۴،-۲)،(۶،۳)،(۳،۲)\}$، تابع fog را به‌صورت زوج مرتب بنویسید. (نهایی ـ دی ۹۵)

۱۷. اگر $f(x)=۲x-\sqrt{x}$ و $g=\{(۱،۵)،(۶،۳)،(۲،۶)\}$ دو تابع باشند به طوری‌که $g(f(a))=۳$ باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

۱۸. کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) اگر $f(۲)=۱$ و $g(۱)=-۱$، آن‌گاه $(gof)(۲)=-۱$

ب) اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۳}$، آن‌گاه $(fog)(۱)=f(۱)$

پ) اگر f تابعی با دامنهٔ D_f و برد R_f و g تابعی با دامنهٔ D_g و برد R_g باشد، آن‌گاه شرط تشکیل تابع fog آن است که $D_f \cap R_g \neq \varnothing$ باشد.

۱۹. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

آ) اگر $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=x+۲$ باشد، مقدار تابع fog به ازای $x=۱$، .... است.

ب) در رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، اگر $۰<k<۱$، آن‌گاه نمودار در امتداد محور x ها، .... می‌شود.

پ) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر .... و برد آن‌ها یکسان .... $(k\neq \pm۱)$

ت) برای رسم نمودار تابع $g(x)=|x+۱|-۲$ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار f، یک واحد روی محور .... به سمت .... و .... واحد روی محور .... به سمت پایین انتقال پیدا می‌کند.

۲۰. توابع $f(x)=\frac{۳x}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ داده شده‌اند. (نهایی- خرداد ۹۳)

آ) تابع fog را تشکیل دهید.

ب) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۲۱. توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ داده شده‌اند. (نهایی- خرداد ۹۴)

آ) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.
ب) تابع gof را تشکیل دهید.

۲۲. دو تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. (نهایی- خرداد ۹۵)

آ) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.
ب) مقدار $(gof)(-3)$ را به‌دست آورید.

۲۳. اگر $f(x)=x+3$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ دو تابع باشند. (نهایی- خرداد ۹۱)

آ) دامنهٔ توابع f و g را به‌دست آورید.
ب) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.
پ) ضابطهٔ fog را بنویسید.

۲۴. دو تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ داده شده‌اند. (نهایی- شهریور ۹۰)

آ) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.
ب) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

۲۵. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=2x-4$ و $g(x)=\sqrt{x-6}$ داده شده‌اند. (نهایی- خرداد ۹۲)

آ) ضابطهٔ تابع gof را بنویسید.
ب) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۲۶. توابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ داده شده‌اند. (نهایی- خرداد ۸۹)

آ) ضابطهٔ تابع gof را تعیین کنید.
ب) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف آن به‌دست آورید.

۲۷. اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=x^2+bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^2+4x+1$ (نهایی- شهریور ۹۲)

۲۸. اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=3x+k$ باشد، مقدار k را طوری بیابید که $(fog)(x)=(gof)(x)$ (نهایی- شهریور ۸۷)

۲۹. اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^2+bx+c$ باشند، a، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^2-3x+4$ (نهایی- شهریور ۸۸)

۳۰. هر یک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

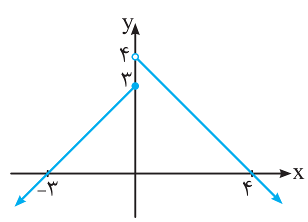
آ) $y=\sqrt[3]{x^3-1}$
ب) $y=(2x^3-x^2+5)^4$
پ) $y=\sqrt{x^2+3}$
ت) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

۳۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، با توجه به ضابطه‌های f(x) و g(x)، معادلات مورد نظر را تشکیل دهید و آن‌ها را حل کنید. (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

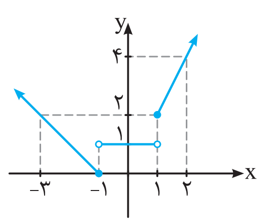
آ) $g(x)=5x+2$ ، $f(x)=4x-1$ ، $(fog)(x)=-23$
ب) $f(x)=3x^2-4x-7$ ، $g(x)=2x+5$ ، $(gof)(x)=-1$

۳۲. با توجه به نمودار توابع f و g، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $(fog)(2)$
ب) $(gof)(0)$
پ) $(gof)(4)$
ت) $(fog)(-1)$
ث) $(fof)(-4)$
ج) $(gog)(5)$



نمودار تابع f



نمودار تابع g

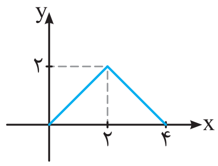
۳۳. اگر $f(3x+2)=9x^2-6x$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

۳۴. اگر $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ و $f(g(x))=x+3$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

۳۵. اگر $(fog)(x) = 8x + 12$ و $f(x) = 2x + 4$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید. (نهایی - دی ۹۰)

۳۶. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۳۷. نمودار تابع f با ضابطهٔ $y = f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار توابع $y = f(x+2)$ و $y = -2f(x)+1$ را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را تعیین کنید.



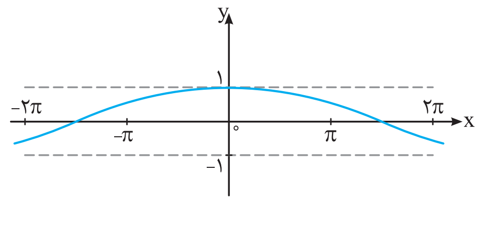
۳۸. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 3|$ را در بازهٔ $[2, 4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن، نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید. (نهایی - دی ۹۱)

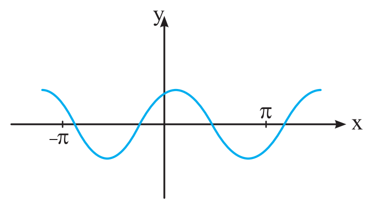
۳۹. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (نهایی - خرداد ۹۲)

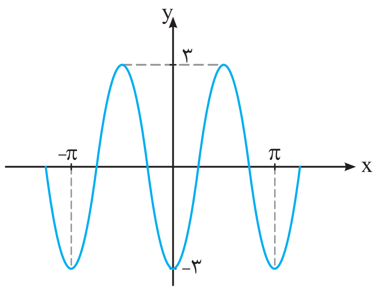
۴۰. با استفاده از نمودار تابع $y = \cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است. ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

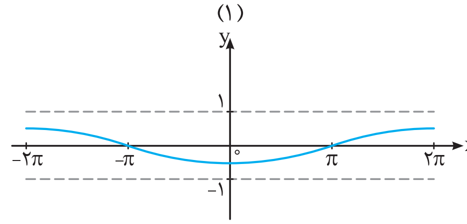
آ) $y = \cos 3x$ ب) $y = \cos(\frac{1}{3}x)$ پ) $y = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$

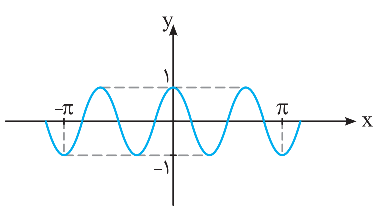
ت) $y = -3\cos 2x$ ث) $y = -\frac{1}{3}\cos x$ ج) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$

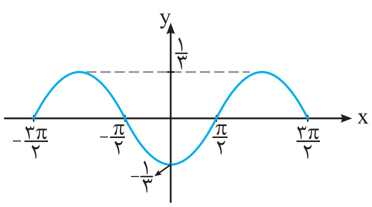

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


(۵)


(۶)

۴۱. با استفاده از نمودار $y = \sin x$، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $y = \sin(\frac{x}{2})$ ب) $y = -2\sin(3x)$ پ) $y = 3\sin(3x) - 1$ ت) $y = \cos(2(x + \frac{\pi}{4})) - 1$

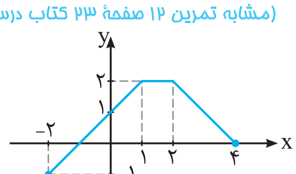
۴۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

آ) $f(x) = |\cos x|, x \in [-\pi, 2\pi]$ ب) $g(x) = |x^2 - 2x|$ پ) $h(x) = |x^3|$ ت) $t(x) = ||x-1|-1|$

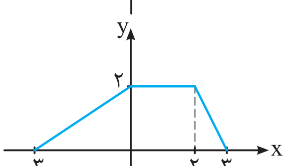
۴۳. با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته‌شده را رسم کنید. (مشابه تمرین ۱۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

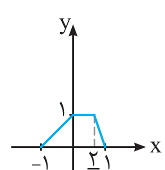
آ) $y = f(2x) + 1$ ب) $y = \frac{1}{2}f(-x) - 1$

پ) $y = 2f(x+1) - 1$ ت) $y = -f(\frac{x}{2})$



۴۴. نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = af(bx) + c$ به‌صورت مقابل می‌باشند. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید.


نمودار f


نمودار $y = af(bx) + c$

پاسخ‌های تشریحی

۱۵ در تابع fog، x را باید از دامنهٔ تابع g اختیار کنیم:

$$\begin{cases}(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۲) & \text{تعریف‌نشده}\\(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۵)=-۱\\(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۰)=۲\\(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog=\{(-۱,-۱),(۳,۲),(۲,۴)\}$$

در تابع gof، x را باید از دامنهٔ تابع f اختیار کنیم:

$$\begin{cases}(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۰\\(gof)(۵)=g(f(۵))=g(-۱)=۵\\(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۴)=-۲\\(gof)(۰)=g(f(۰))=g(۲)=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow gof=\{(۲,۰),(۵,۵),(۱,-۲),(۰,۱)\}$$

در تابع gog، x را باید از دامنهٔ تابع g اختیار کنیم:

$(gog)(۴)=g(g(۴))=g(-۲)$ تعریف نشده

$(gog)(-۱)=g(g(-۱))=g(۵)$ تعریف‌نشده

$(gog)(۲)=g(g(۲))=g(۱)$ تعریف‌نشده

$(gog)(۳)=g(g(۳))=g(۰)$ تعریف‌نشده

بنابراین تابع gog تشکیل نمی‌شود.

۱۶ x ها را باید از دامنهٔ g انتخاب کنیم:

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱۱)=۷$$
$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۲)=۴$$
$$(fog)(۶)=f(g(۶))=f(۳)=-۵$$
$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۲)=-۵$$
$$\Rightarrow fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$

۱۷

$$f(x)=۲x-\sqrt{x}\Rightarrow f(a)=۲a-\sqrt{a}\ ,\ g(f(a))=۳\ ,\ g(۶)=۳$$
$$\Rightarrow f(a)=۶\Rightarrow ۲a-\sqrt{a}=۶\Rightarrow ۲a-۶=\sqrt{a}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}(۲a-۶)^۲=a\Rightarrow ۴a^۲-۲۴a+۳۶=a$$
$$\Rightarrow ۴a^۲-۲۵a+۳۶=۰\ ,\ \Delta=(-۲۵)^۲-۴(۴)(۳۶)=۴۹$$
$$a=\frac{۲۵\pm ۷}{۲(۴)}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۳۲}{۸}=۴\\a=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}\end{cases}$$

هر دو عدد به‌دست آمده برای a را در معادلهٔ $۲a-۶=\sqrt{a}$ قرار می‌دهیم. $a=۴$، در معادله صدق می‌کند ولی $a=\frac{۹}{۴}$ در این معادله صدق نمی‌کند. پس فقط $a=۴$ قابل قبول است.

۱۸ آ) درست است، زیرا: $(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۱)=-۱$

ب) نادرست است، زیرا:

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(\sqrt{۱^۲+۳})=f(۲)=۴-۳=۱$$
$$f(۱)=۲-۳=-۱\Rightarrow (fog)(۱)\neq f(۱)$$

پ) درست است، زیرا برای آن‌که مقدار $f(g(x))$ تعریف شده باشد، باید $g(x)$ در دامنهٔ تابع f قرار داشته باشد، پس باید داشته باشیم $D_f\cap R_g\neq\varnothing$

۱۹ آ) $(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳)=۳^۲-۱=۸$

ب) منبسط پ) است ـ نیست ت) x ها ـ چپ ـ دو ـ y ها

۲۰ آ) اگر در تابع f به جای x، $g(x)=\sqrt{x}$ قرار دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ تابع $(fog)(x)=f(g(x))$ به‌دست می‌آید:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$$

ب) طبق تعریف، داریم: $D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}$

دامنهٔ توابع f و g به‌صورت زیر هستند:

$$f(x)=\frac{۳x}{x-۱}\ ,\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$
$$g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow x\geq ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$$
$$g(x)\in D_f\Rightarrow \sqrt{x}\in\mathbb{R}-\{۱\}\Rightarrow\sqrt{x}\neq ۱\Rightarrow x\neq ۱$$

بنابراین:

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x\in[۰,+\infty)\mid x\neq ۱\}=[۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

۲۱ آ) طبق تعریف، داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$

دامنهٔ تابع $f(x)=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$g(x)=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow ۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۱$$
$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم.}}|x|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$
$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sin x\in[-۱,۱]\Rightarrow -۱\leq\sin x\leq ۱$$

می‌دانیم $\sin x$ همواره عددی از ۱- تا ۱ است، بنابراین نامساوی $-۱\leq\sin x\leq ۱$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار است. پس داریم:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

ب)

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sin x)$$
$$=\sqrt{۱-\sin^۲ x}=\sqrt{\cos^۲ x}=|\cos x|$$

۲۲ آ) طبق تعریف، داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$

دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$$
$$g(x)=\sqrt{x-۱}\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$$
$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sqrt{۱-x}\in[۱,+\infty)\Rightarrow\sqrt{۱-x}\geq ۱$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}۱-x\geq ۱\Rightarrow x\leq ۰\Rightarrow x\in(-\infty,۰]$$
$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\in(-\infty,۱]\mid x\in(-\infty,۰]\}=(-\infty,۰]$$

ب) مقدار $(gof)(-3)$ با مقدار $g(f(-3))$ برابر است، داریم:

$f(x)=\sqrt{1-x} \Rightarrow f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=2$

$\Rightarrow g(f(-3))=g(2) \xrightarrow{g(x)=\sqrt{x-1}} \sqrt{2-1}=1$

۲۳ آ) $f \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ دوجمله‌ای از درجهٔ یک می‌باشد.

$g \Rightarrow 1-x\ge 0 \Rightarrow x\le 1$ تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج می‌باشد.

$\Rightarrow D_g=(-\infty,1]$

ب) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x+3\in(-\infty,1]\}$

$=\{x\in\mathbb{R} \mid x+3\le1\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le-2\}=(-\infty,-2]$

پ) $(fog)(x)=f(g(x)) \xrightarrow{g(x)=\sqrt{1-x}} f(\sqrt{1-x})$

$\xrightarrow{f(x)=x+3} \sqrt{1-x}+3$

۲۴ آ) $(fog)(x)=f(g(x)) \xrightarrow{g(x)=\frac{1}{x-1}} f(\frac{1}{x-1})$

$\xrightarrow{f(x)=\frac{x+2}{x-3}} \dfrac{\frac{1}{x-1}+2}{\frac{1}{x-1}-3} = \dfrac{\frac{1+2(x-1)}{\cancel{x-1}}}{\frac{1-3(x-1)}{\cancel{x-1}}} = \dfrac{2x-1}{4-3x}$

ب) f و g هر دو تابع کسری گویا هستند، بنابراین:

$f(x)=\frac{x+2}{x-3} \xrightarrow{x-3\neq0} D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$g(x)=\frac{1}{x-1}\xrightarrow{x-1\neq0} D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{1\} \mid \frac{1}{x-1}\in\mathbb{R}-\{3\}\}$

$\frac{1}{x-1}\in\mathbb{R}-\{3\}\Rightarrow \frac{1}{x-1}\neq3\Rightarrow x-1\neq\frac{1}{3}\Rightarrow x\neq\frac{4}{3}$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}-\{1\} \mid x\neq\frac{4}{3}\}=\mathbb{R}-\{1,\frac{4}{3}\}$

۲۵ آ) $(gof)(x)=g(f(x))\xrightarrow{f(x)=2x-4} g(2x-4)$

$\xrightarrow{g(x)=\sqrt{x-6}} \sqrt{(2x-4)-6}=\sqrt{2x-10}$

ب) دامنهٔ تابع gof با استفاده از تعریف به‌صورت زیر است:

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ ، $f(x)=2x-4\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x-6}\Rightarrow x-6\ge0\Rightarrow x\ge6\Rightarrow D_g=[6,+\infty)$

بنابراین: $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid 2x-4\in[6,+\infty)\}$

$2x-4\in[6,+\infty)\Rightarrow 2x-4\ge6\Rightarrow 2x\ge6+4\Rightarrow x\ge5$

$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge5\}=[5,+\infty)$

۲۶ آ) $(gof)(x)=g(f(x))\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x-4}} g(\sqrt{x-4})$

$\xrightarrow{g(x)=\frac{1}{x^2-1}} \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2-1}=\frac{1}{(x-4)-1}=\frac{1}{x-5}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-4}\Rightarrow x-4\ge0\Rightarrow x\ge4\Rightarrow D_f=[4,+\infty)$

$g(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow x^2-1\neq0\Rightarrow x^2\neq1\Rightarrow x\neq\pm1\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\ge4 \mid \sqrt{x-4}\neq\pm1\}$

$\sqrt{x-4}\neq1\Rightarrow x-4\neq1\Rightarrow x\neq5$ ، $\sqrt{x-4}\neq-1$ (برقرار است.)

$\Rightarrow D_{gof}=\{x\ge4 \mid x\neq5\}=[4,5)\cup(5,+\infty)$

۲۷ ضابطهٔ $(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم و آن را برابر عبارت x^2+4x+1 قرار می‌دهیم:

$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+bx)$

$=(x^2+bx)+a=x^2+bx+a$

$(fog)(x)=x^2+4x+1\Rightarrow x^2+bx+a=x^2+4x+1$

$\Rightarrow b=4$ ، $a=1$

۲۸ ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$(fog)(x)=f(g(x))\xrightarrow{g(x)=3x+k} f(3x+k)$

$\xrightarrow{f(x)=2x+1} 2(3x+k)+1=6x+2k+1 \quad (1)$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=3(2x+1)+k=6x+3+k \quad (2)$

$(fog)(x)=(gof)(x)\xrightarrow{(1),(2)} \cancel{6x}+2k+1=\cancel{6x}+3+k$

$\Rightarrow 2k-k=3-1\Rightarrow k=2$

۲۹ ضابطهٔ $(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم و آن را مساوی عبارت x^2-3x+4 قرار می‌دهیم:

$(fog)(x)=f(g(x))=f(ax^2+bx+c)$

$=(ax^2+bx+c)+a=ax^2+bx+(a+c)$

$(fog)(x)=x^2-3x+4$

$\Rightarrow ax^2+bx+(a+c)=x^2-3x+4\Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=-3\\a+c=4\xrightarrow{a=1}c=3\end{cases}$

۳۰ آ) تابع $y=x^3$ را به عنوان تابع $g(x)$ و با قرار دادن x به جای x^3، تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ را به عنوان تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$g(x)=x^3$ ، $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^3)=\sqrt[3]{x^3-1}$

ب) تابع $y=2x^3-x^2+5$ را به عنوان تابع $g(x)$ و با قرار دادن x به جای $g(x)$، تابع $y=x^4$ را به عنوان تابع $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$g(x)=2x^3-x^2+5$ ، $f(x)=x^4$

$\Rightarrow (fog)(x)=f(2x^3-x^2+5)=(2x^3-x^2+5)^4$

پ)

$g(x)=x^2, f(x)=\sqrt{x+3}\Rightarrow(fog)(x)=f(x^2)=\sqrt{x^2+3}$

ت) $g(x)=x^2, f(x)=\frac{x+2}{x-1}\Rightarrow f(g(x))=f(x^2)=\frac{x^2+2}{x^2-1}$