مقدمهٔ مؤلف

سلام

معمولاً مؤلف‌ها عادت دارند در مقدمه‌هایشان اول کلی فلسفه و داستان تعریف کنند و بعد در مورد خوبی‌های کتابشان حرف بزنند و آخر هم برای خواننده آرزوی موفقیت کنند. چون این‌ها جزء مراحل تکراری این کار است این بار ترجیح می‌دهم هیچ‌کدام از این کارها را نکنم و فقط کمی در مورد این کتاب توضیح بدهم:

۱- این کتاب با توجه کامل و دقیق به کتاب درسی ریاضی ۳ نوشته شده و شامل تمام نکات، مفاهیم، نمونه تمرین و مثال‌های کتاب درسی است. (*این‌که گفتم تعریف نیست ویژگی این کتاب است!*)

۲- در همهٔ فصل‌ها سعی شده است تعداد تمرین‌ها، حجم توضیح‌ها و حجم کلی فصل مناسب‌ترین مقدار ممکن باشد. می‌دانیم شما در سال دوازدهم خیلی وقت ندارید که کار اضافی بکنید. (*قابل توجه آنهایی که همیشه برای درس خواندن وقت کم می‌آورند.*)

۳- در انتهای هر فصل یک آزمون جمع‌بندی داریم که علاوه بر جمع‌بندی مطالب، سؤالات جدی‌تر و ترکیبی دارد توصیه می‌کنم به این آزمون‌ها به طور جدی توجه کنید.

۴- برای آزمون‌های جمع‌بندی علاوه بر حل تشریحی سؤالات، حل ویدیویی هم آماده کرده‌ایم. برای دیدن پاسخ‌های ویدیویی این آزمون‌ها، QRCode صفحه‌ی شناسنامه را اسکن کنید.

۵- پیشنهاد می‌کنم به جای این‌که تعدادی زیاد از سؤال‌ها را زیاد حل کنید سؤال‌های این کتاب را زیاد حل کنید. مهم یادگرفتن است؛ یادگرفتن روش حل، روش فکرکردن و روش استدلال. (*بازهم تعریف نیست، فقط یک پیشنهاد است.*)

۶- توضیحات و درس‌نامه‌ها و سؤال امتحانی هر درس، تکمیل‌کنندهٔ یکدیگرند. از هر کدام که غفلت کنید قسمتی از درس را از دست می‌دهید.

۷- پیشنهاد می‌کنم حتماً در بار اول استفاده از کتاب، نکته‌های مهم، سؤال‌هایی به نظرتان سخت است، سؤال‌هایی را که نتوانستید حل کنید و ... را مشخص کنید تا در زمان مرور و جمع‌بندی مطالب از مواردی که مشخص کرده‌اید استفاده کنید.

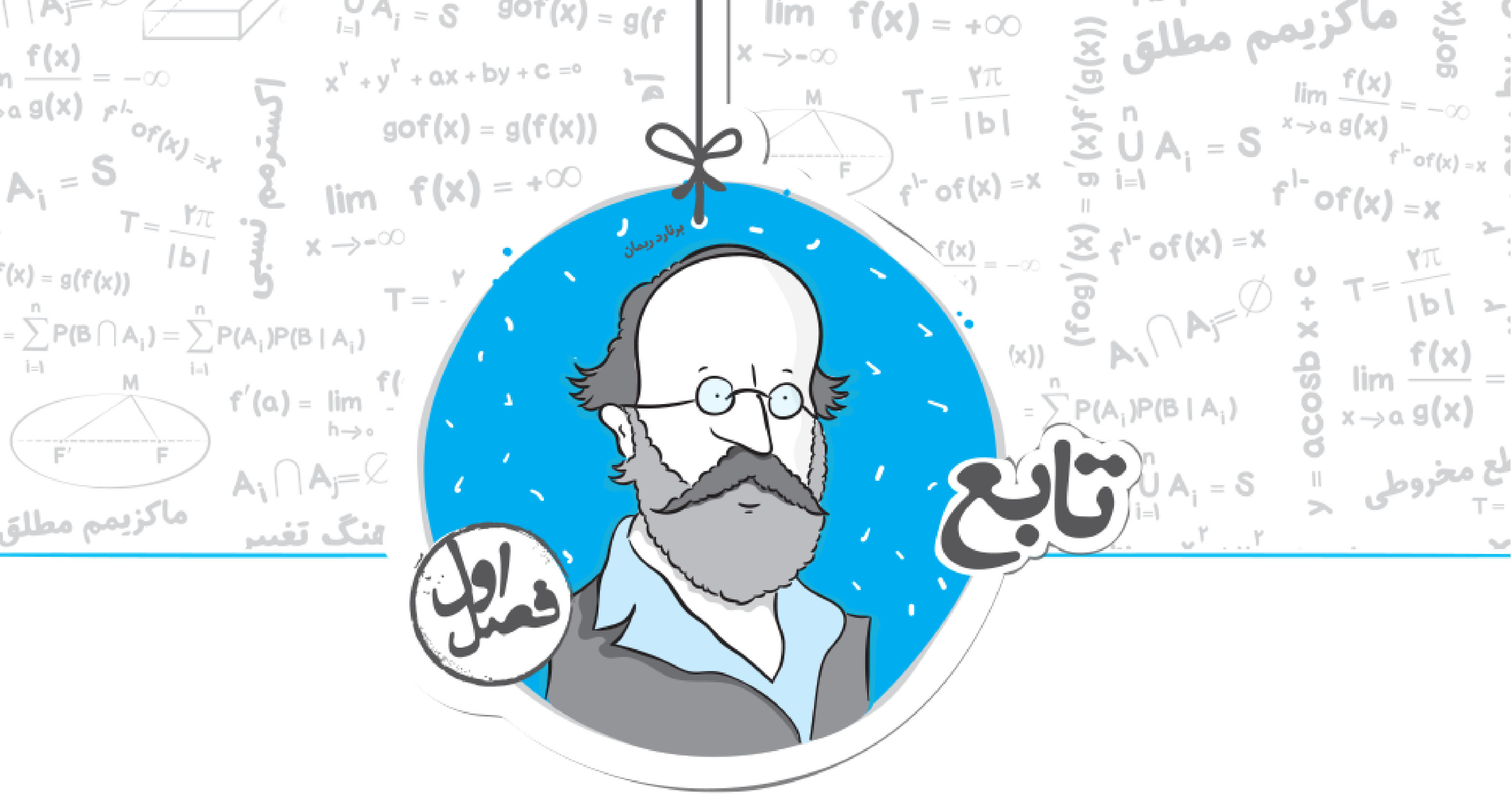
۸- امسال امتحان تشریحی دارید، پس نحوهٔ نوشتن پاسخ کتبی برایتان بسیار مهم است (*یا باید باشد*) پاسخ‌نامهٔ این کتاب با توجه به این موضوع به شیوه‌ای نوشته شده که راهنمای پاسخ به امتحانات کتبی باشد.

با همهٔ دقت و نیرویی که برای نوشتن این کتاب گذاشته‌ام و تلاش کرده‌ام که کتاب خوبی شود، مطمئنم که شما می‌توانید پیشنهادهای خیلی خوبی برای بهترشدن کتاب بدهید. منتظر شنیدن نظراتتان هستم.

در مورد درسنامه‌ها، سؤال‌ها و پاسخ‌ها، هر چه را که فکر می‌کنید کم یا زیاد است یا اگر تغییر کند بهتر می‌شود برایم بنویسید. اگر توانستید نظر معلم‌هایتان را هم در مورد کتاب بپرسید و برایم بنویسید. بهتر از دیروز، موفق‌تر از گذشته و سرحال‌تر از همیشه باشید.

از تمامی عزیزانی که در بهبود کتاب به ما کمک کرده‌اند به ویژه سرکار خانم جالینوسی بسیار سپاس‌گزارم.

فهرست



فصل اول
تابع

۱ توابع چندجمله‌ای

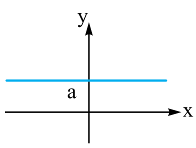
در دو سال گذشته با تابع آشنا شدیم. دیدیم تابع را می‌توانیم به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار پیکانی، نمودار مختصاتی یا یک ضابطهٔ جبری نمایش دهیم.

دیدیم تابع یعنی مجموعهٔ مقادیری از x که تابع به ازای آن‌ها تعریف می‌شود و برد تابع یعنی مجموعهٔ مقادیر تابع یا y. یکی از انواع توابعی که در سال‌های دهم و یازدهم شناختیم **توابع چندجمله‌ای** بود.

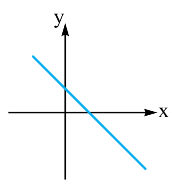
می‌دانیم **هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ که در آن $a_n,\dots,a_2,a_1,a_0$ اعداد حقیقی و توان‌های x یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یک تابع چندجمله‌ای است.** *(ساده‌ترش این‌که توان‌های x باید اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند)* مثلاً $f(x)=5$ و $g(x)=3x$ و $h(x)=-2x+3$ و $k(x)=x^2+2x-10$ همه یک تابع چندجمله‌ای‌اند ولی مثلاً $t(x)=\frac{2}{x}$، $p(x)=\sqrt{x}+2$ و $q(x)=\sin x+3$ توابع چندجمله‌ای نیستند. به بزرگ‌ترین توان x در تابع می‌گوییم درجهٔ چندجمله‌ای. در مثال‌های بالا f از درجهٔ صفر، g و h از درجهٔ ۱ و k از درجهٔ ۲ است.

دامنهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است و اگر n فرد باشد، برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است. چند مثال از تابع چندجمله‌ای:

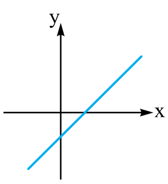
۱ **تابع $f(x)=a$ (از درجهٔ صفر) یک تابع ثابت است.**
حتماً یادمان هست که برد برابر است با $R_f=\{a\}$.



۲ **تابع $f(x)=ax+b$ (از درجهٔ ۱) یک تابع خطی است که برد برابر است با $R_f=\mathbb{R}$.**

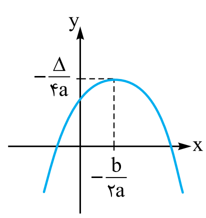


$a<0$
$f(x)=ax+b$



$a>0$
$f(x)=ax+b$

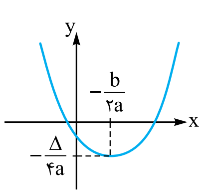
۳ **تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ (از درجهٔ ۲) یک سهمی است که برد برابر است با:**



$a<0$

$R_f=(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$

برد $=(-\infty\,,$ ماکزیمم$]$



$a>0$

$R_f=[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$

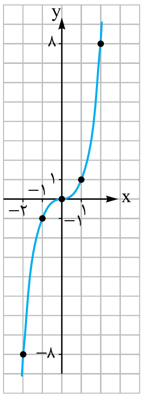
برد $=[$مینیمم$\,,+\infty)$

این‌ها تابع‌هایی بودند که در سال دهم و یازدهم با آن‌ها آشنا شدیم. امسال با تابع $f(x)=x^3$ آشنا می‌شویم.

تابع $f(x)=x^3$

نمودار تابع $f(x)=x^3$ را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	−۸	−۱	۰	۱	۸



نمودار تابع به صورت روبه‌رو است:

همان‌طور که در شکل می‌بینیم دامنه و برد تابع برابر است با $\mathbb{R}$.

حالا می‌خواهیم نمودار تابع‌های به شکل $y=m(kx+a)^3+b$ را با استفاده از نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنیم. قسمتی از روش رسم در درس تبدیل توابع (درس۴) توضیح داده شده است اما بهتر است همین‌جا همه‌چیز را در مورد رسم نمودار تابع‌های درجه‌سوم به شکل بالا یاد بگیریم. پس بهتر است نگاهی به درس انتقال توابع و به ویژه جدول خلاصهٔ این روش‌ها بیندازید.

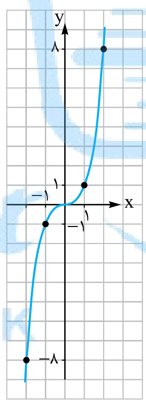
مثال **نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$ رسم کنید.**

الف) $g(x)=-x^3$ **ب) $g(x)=x^3-1$**   **پ) $g(x)=(x-1)^3$**

ت) $g(x)=(x+2)^3$ **ث) $g(x)=-(x+1)^3+2$**   **ج) $g(x)=(-x+2)^3$**

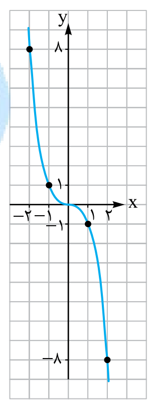
پاسخ اول نمودار تابع $f(x)=x^3$ را می‌کشیم و بعد هر کدام از نمودارها را با انتقال مناسب از روی نمودار $f(x)=x^3$ رسم می‌کنیم.

الف تابع $g(x)=-x^3$ برابر است با $y=-f(x)$ و می‌دانیم برای رسم نمودارش باید نمودار تابع $f(x)=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم:



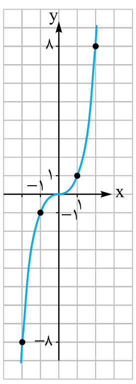
$f(x)=x^3$

قرینه نسبت به محور xها



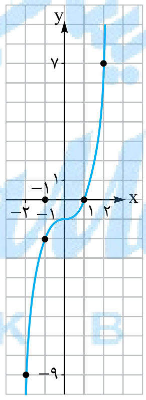
$g(x)=-x^3$

ب تابع $g(x)=x^3-1$ برابر است با $y=f(x)-1$ و می‌دانیم برای رسم نمودار $f(x)-1$، باید نمودار تابع f را یک واحد در راستای محور yها به پایین انتقال دهیم:



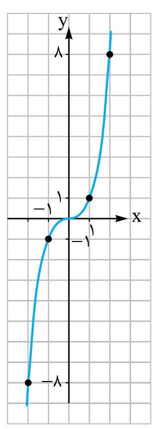
$f(x)=x^3$

$\Rightarrow$



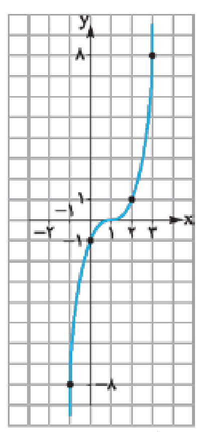
$g(x)=x^3-1$

پ تابع $g(x)=(x-1)^3$ برابر است با $y=f(x-1)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x-1)$ باید نمودار f را ۱ واحد در راستای محور xها به سمت راست انتقال دهیم:



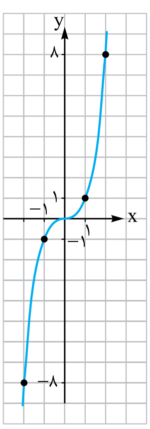
$f(x)=x^3$

$\Rightarrow$



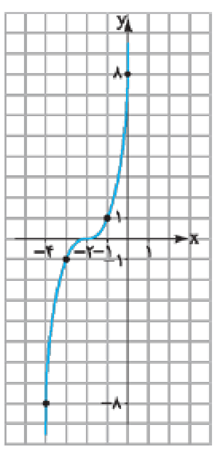
$g(x)=(x-1)^3$

ت تابع $g(x)=(x+2)^3$ برابر است با $y=f(x+2)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x+2)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور xها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم:



$f(x)=x^3$

$\Rightarrow$



$g(x)=(x+2)^3$

۲۹- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد: (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.

۳۰- مقدار $(fog)(0)$ و $(fog)(1)$ را در هر کدام از موارد زیر (در صورت وجود) پیدا کنید.

الف) $f(x)=x^2+2\ ,\ g(x)=\sqrt{2x-1}$

ب) $f(x)=\cos(\pi x)\ ,\ g(x)=x^2-\frac{1}{2}x$

پ) $f(x)=\tan x\ ,\ g(x)=\frac{\pi}{2}(x+1)$

ت) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^4-1}$

۳۱- در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. (نهایی دی ۹۷)

تابع $h(x)=(2x^2-5x+1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=2x^2-5x+1$ و $g(x)=$ .... است.

۳۲- هر کدام از تابع‌های زیر را به شکل ترکیب دو تابع بنویسید.

الف) $h(x)=\sqrt{3x^2-1}$

ب) $h(x)=\dfrac{2x^3+1}{3x^3-5}$

۳۳- در هر کدام از موارد زیر با توجه به ضابطه‌های f و g، معادلهٔ داده‌شده را حل کنید.

الف) $f(x)=3x+2\ ,\ g(x)=x^2+x+5\ ,\ (gof)(x)=17$

ب) $f(x)=x^2-x\ ,\ g(x)=x^3-5\ ,\ (fog)(x)=6$

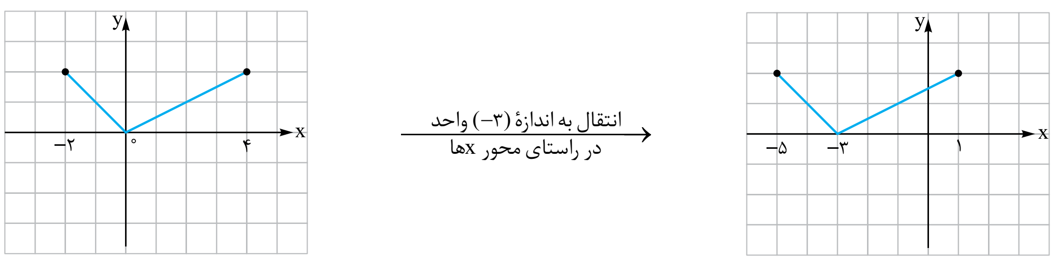
۴ تبدیل توابع

در سال دهم و یازدهم طریقهٔ رسم نمودار تابع با استفاده از انتقال را یاد گرفتیم. *احتمالاً یادتان هست اما برای این‌که خیالمان راحت باشد یک مرور سریع می‌کنیم:*

الف. رسم نمودار تابع y=f(x+a)

برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازهٔ $(-a)$ واحد در امتداد محور x ها انتقال بدهیم ($(-a)$ ریشهٔ عبارت $x+a$ است).

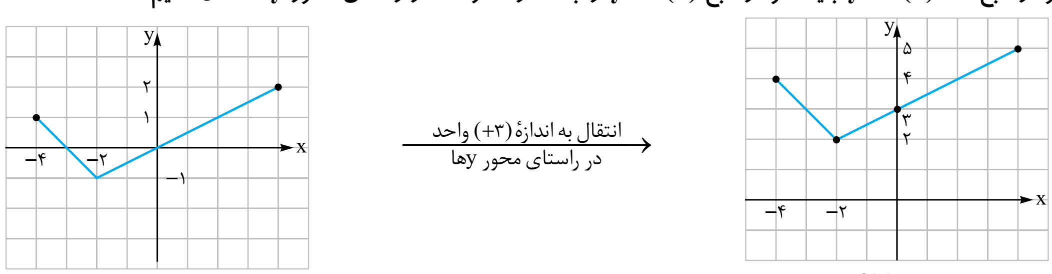
f(x)   f(x−۲)



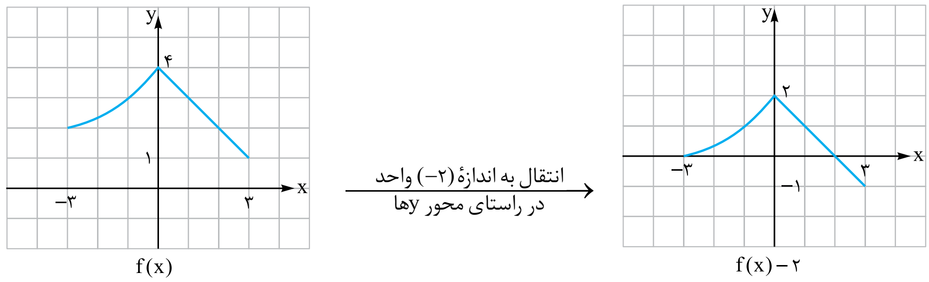
f(x)   f(x+۳)

ب. رسم نمودار تابع y=f(x)+a

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها انتقال دهیم. مثلاً:



f(x)   f(x)+۳



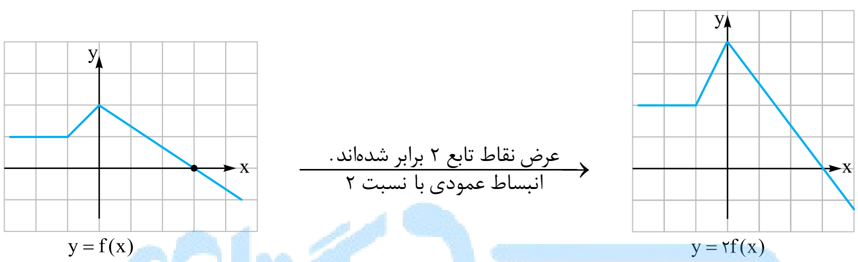
حالا برویم سراغ بقیهٔ درس که مربوط است به امسال:

پ. رسم نمودار تابع y=kf(x)

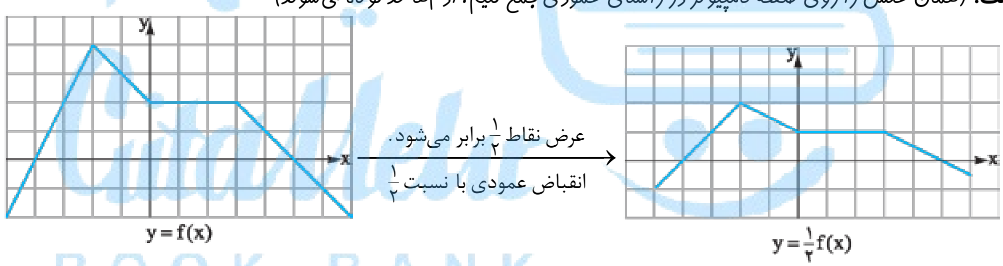
اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، عرض هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.

با توجه به مقدار k، داریم:

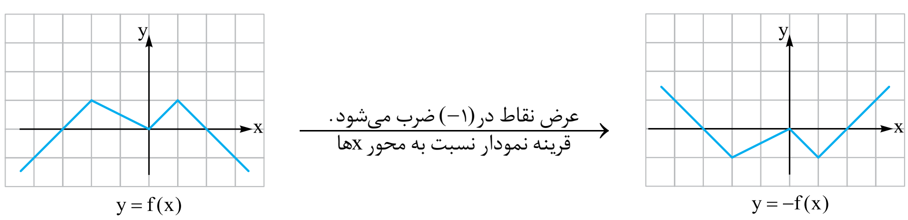
۱ **اگر $k > 1$ باشد، عرض نقاط تابع $kf(x)$ بزرگ‌تر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور y ها با نسبت k انبساط عمودی یافته است:** *(درست مثل این‌که عکس چند آدم را روی صفحهٔ کامپیوتر در راستای عمودی بکشید، آدم‌ها قدشان بلند می‌شود!)*



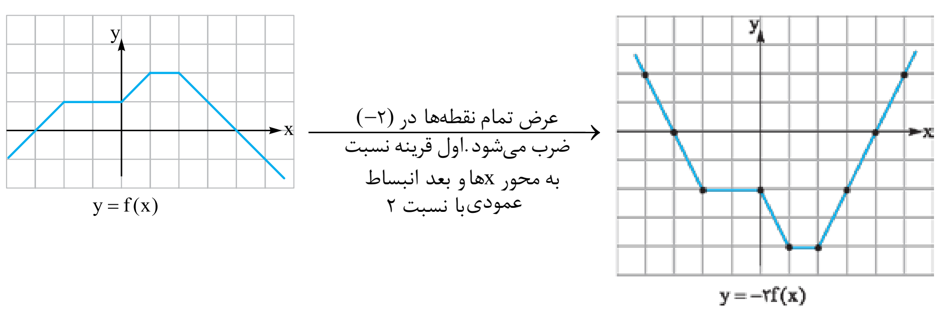
۲ **اگر $0 < k < 1$ باشد، عرض نقاط تابع $kf(x)$ کوچک‌تر از عرض نقاط تابع $f(x)$ می‌شود و می‌گوییم نمودار تابع f در راستای محور y ها انقباض عمودی یافته است:** *(همان عکس را روی صفحهٔ کامپیوتر در راستای عمودی جمع کنیم، آدم‌ها قدکوتاه می‌شوند)*



۳ **اگر $k = -1$ باشد (یعنی تابع $y = -f(x)$)، نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه می‌شود:**



۴ **اگر $k < 0$ باشد، عرض تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی‌بودن k، مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه و بعد عرض نقاط در $|k|$ ضرب می‌شود:**



۵ **دامنهٔ تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ یکسان است.**

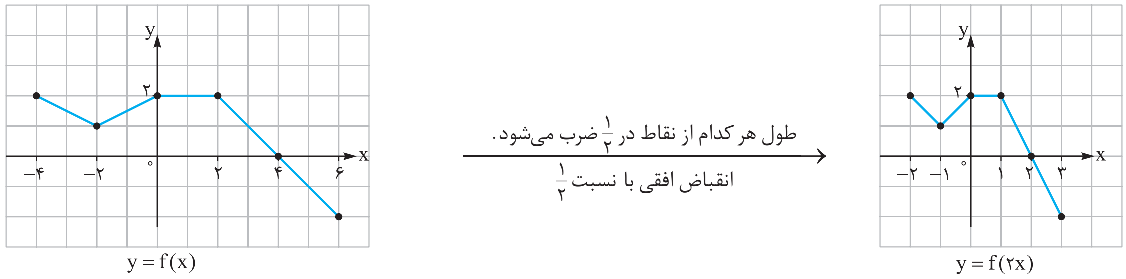
۶ **برد تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ معمولاً با هم متفاوت است.**

۷ **نقاط برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ با محور x ها، یکسان است.**

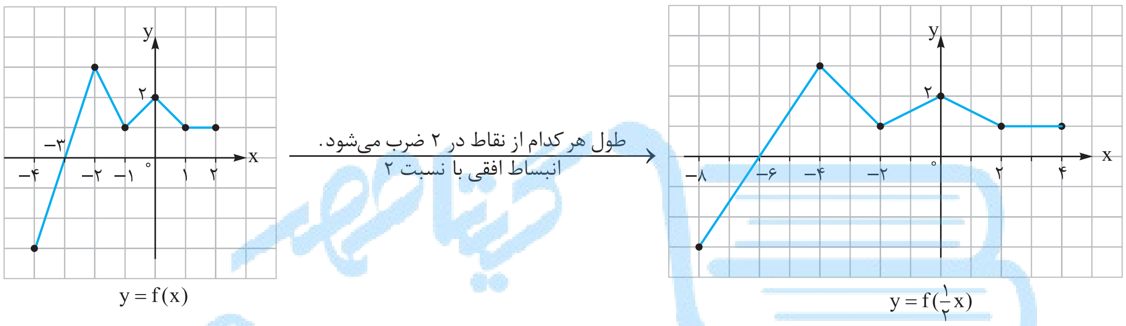
ت. رسم نمودار $y=f(kx)$

نمودار تابع $y=f(kx)$ با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.

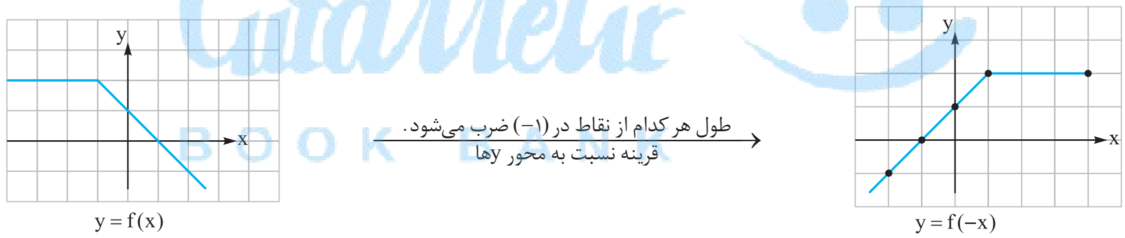
۱ اگر $k>1$ باشد، نمودار تابع در راستای محور x ها با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود، یعنی طول هر کدام از نقاط تابع $y=f(kx)$ برابر $\frac{1}{k}$ برابر طول نقطهٔ متناظرش در نمودار تابع $y=f(x)$ است: *(چون $k>1$ است پس $\frac{1}{k}<1$ می‌شود. برای همین می‌گوییم با نسبت $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود)*



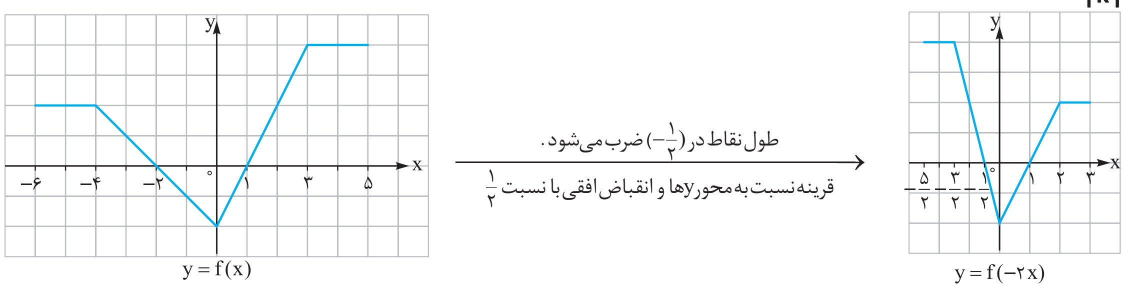
۲ اگر $0<k<1$ باشد، نمودار تابع در راستای محور x ها با نسبت $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود *(چون $0<k<1$ است، پس $\frac{1}{k}>1$ می‌شود و برای همین می‌شود انبساط!)*، **یعنی طول هر کدام از نقاط تابع $f(x)$ در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود:**



۳ اگر $k=-1$ باشد (یعنی $f(-x)$)، نمودار تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود:



۴ اگر $k<0$ باشد، طول تمام نقاط k برابر می‌شود، یعنی با توجه به منفی‌بودن k مثل این است که اول نمودار تابع نسبت به محور y ها قرینه و بعد با نسبت $\frac{1}{|k|}$ منقبض یا منبسط شود:



۵ دامنهٔ تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ معمولاً با هم متفاوت است.

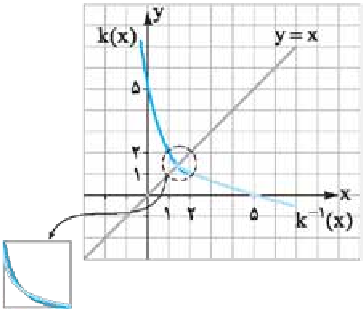
۶ برد تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ یکسان است.

۷ نقاط برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ و محور y ها، یکسان است.

ث. رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

می‌دانیم قدرمطلق تمام مقادیر منفی را به مثبت تبدیل می‌کند، **پس برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ باید قسمت‌های منفی نمودار تابع $f(x)$ را (یعنی قسمت‌هایی که y منفی دارند) نسبت به محور xها قرینه کنیم.**

پس $k(x)$ وارون‌پذیر است و تابع وارونش برابر است با $k^{-1}(x)=2-\sqrt{x-1}$، نمودار $k(x)$ و وارونش را هم رسم می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودارهای رسم‌شده می‌بینیم که: $k(x)=(x-2)^2+1, D_k=(-\infty,2], R_k=[1,+\infty)$

$k^{-1}(x)=2-\sqrt{x-1}\ , D_{k^{-1}}=[1,+\infty)\ , R_{k^{-1}}=(-\infty,2]$

نکته

بد نیست بدانیم که **نقاط برخورد نمودار تابع و نمودار تابع وارون معمولاً روی خط $y = x$ قرار دارند.** کلمهٔ معمولاً در این جمله یعنی این‌که همیشه این‌طور نیست.

اگر به نمودارهای رسم‌شده دقت کنیم می‌بینیم که:

$h(x)$ و $h^{-1}(x)$ در یک نقطه که روی خط $y=x$ قرار دارد متقاطع‌اند.

$k(x)$ و $k^{-1}(x)$ در سه نقطه متقاطع‌اند که یکی از این نقاط روی خط $y=x$ قرار دارد. یعنی می‌توانیم بگوییم:

اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، نمودار f و f^{-1} همواره روی خط $y = x$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

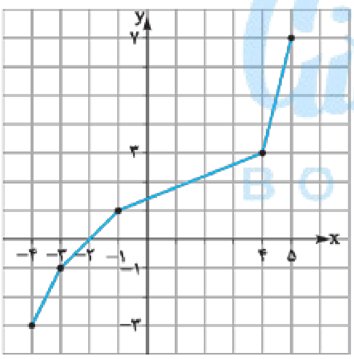
اگر تابع f اکیداً صعودی نباشد، نقاط برخورد f و f^{-1} ممکن است روی خط $y = x$ قرار داشته باشند یا نداشته باشند.

سؤال‌های امتحانی

۴۴- ضابطهٔ وارون هر کدام از تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$ ب) $g(x)=2x^3-1$ پ) $h(x)=\sqrt{2x-1}+2$ ت) $k(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

۴۵- نمودار وارون تابع روبه‌رو را رسم کنید.



۴۶- اگر $f(x)=x^3-3x^2+3x$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(-7)$ را بیابید.

۴۷- اگر $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ و $g(x)=x^3-1$ باشند، ضابطهٔ تابع $(fog)^{-1}(x)$ را به دو روش بیابید.

۴۸- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2 & x\geq 0\\ \frac{1}{2}x-1 & x<0\end{cases}$ و تابع وارونش (f^{-1}) را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و مختصات نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} را تعیین کنید.

۴۹- دامنهٔ هر کدام از تابع‌های زیر را طوری تعریف کنید که تابعی یک‌به‌یک به دست بیاید و سپس برای هر کدام دو تابع وارون به دست آورید. دامنه و برد تابع‌های تعریف‌شده و تابع وارون را تعیین کنید.

الف) $f(x)=|x-3|+1$ ب) $g(x)=-x^2+1$ پ) $h(x)=x^2+2x+2$

۵۰- الف) نمودار تابع $f(x)=2\sqrt{x-1}-3$ را رسم کنید و نشان دهید وارون‌پذیر می‌باشد و دامنه و برد تابع وارون را بنویسید.

ب) ضابطهٔ وارون را به دست آورید.

۵۱- اگر $f=\{(1,4),(2,3)\}$، مطلوب است (fof^{-1}).

فصل سوم

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۱ رفع ابهام

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$

روش تقسیم چندجمله‌ای بر $(x-a)$ را قبلاً یاد گرفته‌ایم. مثلاً در تقسیم چندجمله‌ای $2x^3+x^2-x+5$ بر $x-1$ داریم:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3+x^2-x+5 & x-1 \\
\hline
 & -(2x^3-2x^2) & 2x^2+3x+2 \\
\hline
 & 3x^2-x+5 & \\
 & -(3x^2-3x) & \\
\hline
 & 2x+5 & \\
 & -(2x-2) & \\
\hline
 & 7 &
\end{array}$$

با توجه به این تقسیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\underbrace{2x^3+x^2-x+5}_{\text{مقسوم}} = \underbrace{(x-1)}_{\text{مقسوم‌علیه}}\underbrace{(2x^2+3x+2)}_{\text{خارج‌قسمت}}+\underbrace{7}_{\text{باقی‌مانده}}$$

رابطهٔ بالا یعنی: «باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم» را در هر تقسیمی می‌توان نوشت. *(تا این‌جا شبیه چیزهایی است که در دبستان خوانده بودیم!)* پس اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت تقسیم برابر $Q(x)$ و باقی‌مانده برابر R باشد، این رابطه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

حالا اگر در این رابطه به جای x بگذاریم a، نتیجه‌اش می‌شود: $f(a)=R$

یعنی: **در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.**

نتیجهٔ بالا سه کاربرد دارد:

۱. **برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$، مقدار $f(a)$ را حساب می‌کنیم.** (a ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی $x-a$ است.)

۲. **اگر $f(a)=0$ باشد (یعنی باقی‌مانده برابر صفر باشد)، چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.**

۳. **اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد، برای تجزیهٔ $f(x)$ می‌توانیم آن را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم.**

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=5x^3-2x^2-3x+1$ را بر $x+1$ پیدا کنید.

پاسخ اگر $x+1$ را برابر صفر قرار دهیم نتیجه می‌شود $x=-1$، پس باید $f(-1)$ را حساب کنیم:

$$f(-1)=5(-1)^3-2(-1)^2-3(-1)+1=-5-2+3+1=-3$$

مثال مقدار m را طوری پیدا کنید که چندجمله‌ای $f(x)=x^3+mx^2+4x-6$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ چون $f(x)$ باید بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، پس باید داشته باشیم $f(2)=0$:

$$f(2)=2^3+m(2^2)+4(2)-6=0 \Rightarrow 8+4m+8-6=0 \Rightarrow m=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$$

مثال چندجمله‌ای $f(x)=3x^3-5x^2+x+1$ را تجزیه کنید.

پاسخ تجزیهٔ چندجمله‌ای بالا با روش دسته‌بندی سخت است، پس سعی می‌کنیم برای x عددی پیدا کنیم که $f(x)$ به ازای آن صفر شود. عددهای ±1، ±2 و ... را در $f(x)$ امتحان می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow f(1)=3-5+1+1=0$$

حال چون $f(1)=0$ شد، پس $f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. برای تجزیهٔ $f(x)$، آن را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-5x^2+x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(3x^3-3x^2) & 3x^2-2x-1 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^2+x+1 & \\
\quad -(-2x^2+2x) & \\ \cline{1-1}
\qquad -x+1 & \\
\qquad -(-x+1) & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

پس داریم $f(x)=(x-1)(3x^2-2x-1)$، حالا برای ادامهٔ تجزیه باید $3x^2-2x-1$ را تجزیه کنیم. چندجمله‌ای $3x^2-2x-1$ هم به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود پس برای تجزیهٔ این چندجمله‌ای هم می‌توانیم آن را بر $x-1$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
3x^2-2x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(3x^2-3x) & 3x+1 \\ \cline{1-1}
\quad x-1 & \\
\quad -(x-1) & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}$$

پس $3x^2-2x-1=(x-1)(3x-1)$ و در نتیجه چندجمله‌ای $f(x)$ به صورت روبه‌رو تجزیه می‌شود:

$$f(x)=(x-1)(x-1)(3x+1)=(x-1)^2(3x-1)$$

حدتوابع کسری

در سال یازدهم یاد گرفتیم که برای پیداکردن حد یک کسر به صورت $\frac{f}{g}$ *(تقسیم تابع f بر تابع g)* وقتی که $x \to a$، به جای x مقدار a را قرار می‌دهیم. مثلاً در حد $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x+5}{x^2+4x-2}$ داریم:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+5}{x^2+4x-2}=\frac{1+3+5}{1+4-2}=\frac{9}{3}=3$$

و دیدیم بعضی وقت‌ها کسر به شکل $\frac{0}{0}$ *(حالت مبهم)* تبدیل می‌شود. برای پیداکردن حاصل این حدها *(کاری که اسمش بود رفع ابهام)* باید عامل صفرکننده را در صورت و مخرج پیدا و با هم ساده کنیم. **وقتی که $x \to a$، عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج برابر $(x-a)$ است.** برای رفع ابهام این حدها از سه روش استفاده می‌کنیم:

روش‌های رفع ابهام

۱. تجزیه

اگر بتوانیم صورت و مخرج را با استفاده از اتحادها، تجزیه می‌کنیم. فقط باید حواسمان باشد که وقتی $x \to a$ باید بعد از تجزیه عامل $(x-a)$ ایجاد شود.

مثال حاصل حدهای زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^3-64}$

ب) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+3x+2}$

پاسخ هر دو کسر وقتی که به جای x، عددی را که به آن میل می‌کند قرار می‌دهیم، به شکل $\frac{0}{0}$ در می‌آیند، پس:

الف صورت را با استفاده از اتحاد مزدوج و مخرج را با استفاده از اتحاد تفاضل مکعب‌ها *(همان چاق و لاغر!)* تجزیه می‌کنیم:

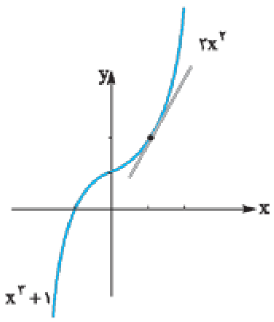
$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^3-64}=\lim_{x\to4}\frac{x^2-4^2}{x^3-4^3}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2+4x+16)}=\lim_{x\to4}\frac{x+4}{x^2+4x+16}=\frac{8}{48}=\frac{1}{6}$$

ب صورت را با استفاده از اتحاد مجموع مکعب‌ها *(باز هم چاق و لاغر)* و مخرج را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

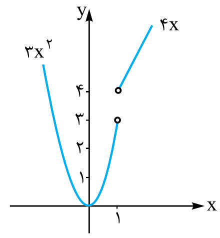
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{x+1}=\frac{12}{-1}=-12$$

پس ضابطهٔ تابع مشتق به صورت $f'(x)=\begin{cases}4x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$ است. دامنهٔ f برابر است با $\mathbb{R}$ و چون تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست، پس دامنهٔ f' برابر است با $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$. حالا نمودار f و نمودار f' را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\geq 1\\ x^3+1 & x<1\end{cases}$$



$$f'(x)=\begin{cases}4x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$$



محاسبهٔ مشتق برخی از توابع

دیدیم با استفاده از $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}$ می‌توانیم ضابطهٔ مشتق تابع‌های مختلف را پیدا کنیم. اما استفاده از این حد برای پیداکردن ضابطهٔ مشتق معمولاً وقت‌گیر و پردردسر است. به همین علت به جای این‌که مشتق هر تابعی را به این روش به دست آوریم از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم. حواسمان باشد که همهٔ روابط را باید خوبِ خوب یاد بگیریم و حفظ باشیم.

تابع	مشتق	مثال
تابع ثابت $f(x)=c$	$f'(x)=0$ (مشتق تابع ثابت همیشه برابر است با صفر)	$f(x)=2 \Rightarrow f'(x)=0$ $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x)=0$ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=0$
$f(x)=ax^n$	$f'(x)=nax^{n-1}$ توان در ضریب ضرب می‌شود و یکی از توان کم می‌شود.	$f(x)=2x^4 \Rightarrow f'(x)=8x^3$ $f(x)=\dfrac{3}{x^2}=3x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-6x^{-3}=\dfrac{-6}{x^3}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{3x}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}x^{-2}=\dfrac{-\sqrt{2}}{3x^2}$
$f(x)=\sqrt{ax+b}$	$f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ $\left(\dfrac{\text{مشتق زیر رادیکال}}{2\times\text{رادیکال}}\right)$	$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $f(x)=\sqrt{4x+5} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{4x+5}}=\dfrac{2}{\sqrt{4x+5}}$ $f(x)=\sqrt{1-3x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\dfrac{\text{مشتق زیر رادیکال}}{3\times\sqrt[3]{(\text{رادیکال})^2}}$	$f(x)=\sqrt[3]{2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}$ $f(x)=\sqrt[3]{3x-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{3\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$ $f(x)=\sqrt[3]{5-2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(5-2x)^2}}$
$y=f\pm g$	$y'=f'\pm g'$ (در جمع و تفریق جداگانه مشتق می‌گیریم و جمع یا تفریق می‌کنیم.)	$y=x^3+2x^2-1 \Rightarrow y'=3x^2+4x$ $y=2x^5-\sqrt{x} \Rightarrow y'=10x^4-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $y=\dfrac{5}{x}+x^2 \Rightarrow y'=-5x^{-2}+2x=\dfrac{-5}{x^2}+2x$

تابع	مشتق	مثال
$y=kf(x)$	$y'=kf'(x)$ ضریب در مشتق ضرب می‌شود.	$y=۵(۳x^۲+x-۱) \Rightarrow y'=۵(۶x+۱)$ $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{۷x-۱} \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۷}{۲\sqrt{۷x-۱}}$ $y=۳\sqrt[۳]{\frac{x}{۵}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}}\sqrt[۳]{x} \Rightarrow y'=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$
$y=f.g$	$y'=f'g+g'f$ (مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی + مشتق دومی در خود اولی)	$y=x^۲(\sqrt{x}-۱) \Rightarrow y'=۲x(\sqrt{x}-۱)+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^۲)$ $y=(x^۳-۲)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow y'=۳x^۲(\sqrt[۳]{x})+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۳-۲)$ $y=(\frac{۱}{x}-۱)(x^{۱۰}+۲) \Rightarrow y'=(-\frac{۱}{x^۲})(x^{۱۰}+۲)+۱۰x^۹(\frac{۱}{x}-۱)$
$y=\frac{f}{g}$	$y'=\frac{f'g-g'f}{g^۲}$ (مشتق‌صورت×مخرج − مشتق‌مخرج×صورت) / (مخرج)^۲	$y=\frac{۲x+۱}{x-۳} \Rightarrow y'=\frac{۲(x-۳)-۱(۲x+۱)}{(x-۳)^۲}$ $y=\frac{x^۲+۴}{x^۳-۱} \Rightarrow y'=\frac{۲x(x^۳-۱)-(۳x^۲)(x^۲+۴)}{(x^۳-۱)^۲}$ $y=\frac{x^۶+x^۳+۱}{x-۱} \Rightarrow y'=\frac{(۶x^۵+۳x^۲)(x-۱)-(۱)(x^۶+x^۳+۱)}{(x-۱)^۲}$

مثال مشتق تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $y=\frac{۵}{x}$ ب) $y=\sqrt{x}(x^۳-۲)$ پ) $y=\frac{x^۲+۱}{۲x-۱}$

ت) $y=\frac{\sqrt{x}}{۳x^۲-x+۲}$ ث) $y=(۲x+۱)\sqrt{x}$ ج) $y=(\frac{x^۲}{x-۱})(\sqrt{x}+۲)$

پاسخ هر کدام از مشتق‌ها را با استفاده از روابط جدول قبل پیدا می‌کنیم:

الف) $y=\frac{۵}{x}=۵x^{-۱} \Rightarrow y'=-۵x^{-۲}=\frac{-۵}{x^۲}$

ب) $y=\sqrt{x}(x^۳-۲) \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^۳-۲)+۳x^۲(\sqrt{x})$

پ) $y=\frac{x^۲+۱}{۲x-۱} \Rightarrow y'=\frac{۲x(۲x-۱)-۲(x^۲+۱)}{(۲x-۱)^۲}=\frac{۴x^۲-۲x-۲x^۲-۲}{(۲x-۱)^۲}=\frac{۲(x^۲-x-۱)}{(۲x-۱)^۲}$

ت) $y=\frac{\sqrt{x}}{۳x^۲-x+۲} \Rightarrow y'=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲-x+۲)-(۶x-۱)(\sqrt{x})}{(۳x^۲-x+۲)^۲}$

ث) $y=(۲x+۱)\sqrt{x} \Rightarrow y'=۲(\sqrt{x})+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲x+۱)=\frac{۴x+۲x+۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۶x+۱}{۲\sqrt{x}}$

ج) $y=(\frac{x^۲}{x-۱})(\sqrt{x}+۲) \Rightarrow y'=\frac{۲x(x-۱)-(۱)(x^۲)}{(x-۱)^۲}(\sqrt{x}+۲)+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\frac{x^۲}{x-۱})$

$$=\frac{(x^۲-۲x)(\sqrt{x}+۲)(۲\sqrt{x})+x^۲(x-۱)}{۲(x-۱)^۲\sqrt{x}}=\frac{۲x^۳+۴x^۲\sqrt{x}-۴x^۲-۸x\sqrt{x}+x^۳-x^۲}{۲(x-۱)^۲\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۳x^۳+۴x^۲\sqrt{x}-۵x^۲-۸x\sqrt{x}}{۲(x-۱)^۲\sqrt{x}}$$

مثال اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مقادیر $(3f+2g)'(1)$ را به دست آورید. *(نهایی دی ۱۴۰۰)*

پاسخ با استفاده از رابطه‌های $(kf)'=kf'$ و $(f+g)'=f'+g'$ داریم:

$$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=19$$

حالا که روابط مشتق‌گیری تابع‌های مختلف را یاد گرفته‌ایم می‌توانیم از این روابط برای نوشتن ضابطهٔ تابع مشتق تابع‌های چندضابطه‌ای استفاده کنیم و همین‌طور با استفاده از این ضابطه نمودار تابع مشتق را رسم کنیم.

مثال تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. *(نهایی خرداد ۹۸)*

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پاسخ **الف** مشتق راست و چپ تابع را در $x=0$ پیدا می‌کنیم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1-(-1)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=0$$

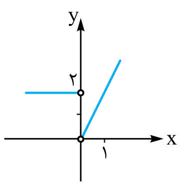
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-1-(-1)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2$$

چون مشتق راست و چپ در $x=0$ مساوی نیستند، پس $f'(0)$ وجود ندارد.

ب از هر کدام از ضابطه‌ها مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ 2x & x>0\end{cases}$$

پ نمودار f' را با استفاده از ضابطه‌اش رسم می‌کنیم:



سؤال‌های امتحانی

۲۴- (۱۹) تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$ داده شده است: *(نهایی شهریور ۹۹)*

الف) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ 3x-2 & x<1\end{cases}$ باشد،

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) $f'(1)$ را پیدا کنید.

پ) دامنهٔ تابع f' و ضابطه‌اش را بنویسید.

ت) نمودار f' را رسم کنید.

۲۶- نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید و به کمک نمودار تعیین کنید تابع در چه نقاطی مشتق‌پذیر نیست و سپس دامنهٔ تابع مشتق را بنویسید.

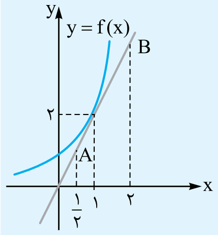
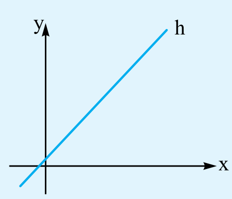
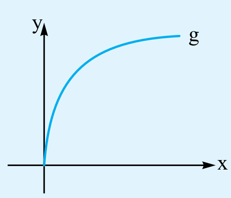
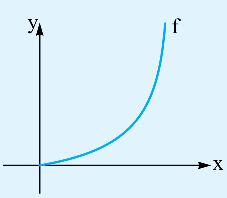
الف) $f(x)=|x^2-4|$

ب) $f(x)=x|x+2|$

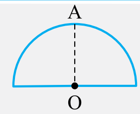
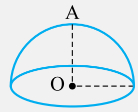
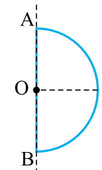
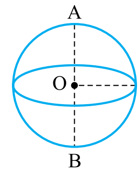
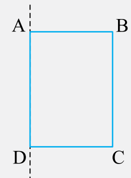
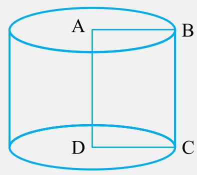
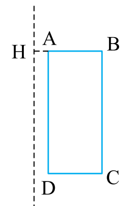
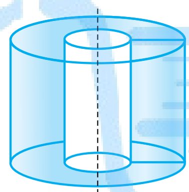
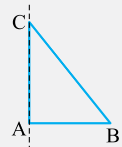
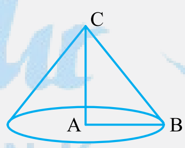
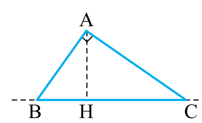
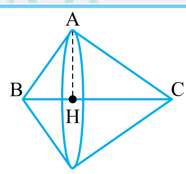
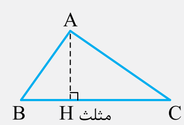
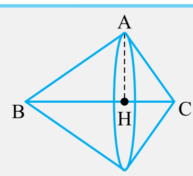
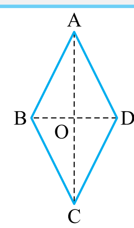
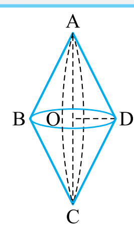
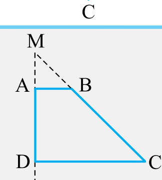
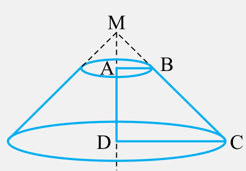
پ) $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geq 1\\ 2x^3+1 & x<1\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x+1 & 0\leq x<1\\ x^3+1 & 1\leq x\end{cases}$

آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون جمع‌بندی — رشتهٔ علوم تجربی — مدت امتحان: ۹۰ دقیقه — Kheilisabz.com	نمره
۱	شکل روبه‌رو نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x=1$ است: الف) معادلهٔ خط مماس را بنویسید. ب) عرض نقاط A و B را پیدا کنید. 	۱
۲	اگر $f'(-1)=4$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(-1)-f(x)}{2x+2}$ را پیدا کنید.	۱
۳	مقدار مشتق تابع زیر را در نقاط داده شده با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید. $f(x)=\sqrt[3]{x}+2,\ x=1$	۱
۴	معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{5x-1}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.	۱
۵	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\|x^2-x\|$ را در نقاط $x=0$ و $x=1$ بررسی کنید، سپس نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.	۱
۶	اگر $f(x)=\begin{cases}2x & x\le 0\\ x^2 & 0<x<1\\ x^2+1 & 1\le x\end{cases}$ باشد، الف) $f'(0)$ و $f'(1)$ را پیدا کنید. ب) ضابطهٔ f' و دامنهٔ f' را پیدا کنید. پ) نمودار f و f' را رسم کنید.	۲/۵
۷	معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر منحنی بنویسید.	۱
۸	مشتق تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $f(x)=(x^2-x+2)(x^3-1)^3$ ب) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x+2}}{3x-2}$	۲
۹	مقدار مشتق تابع زیر را در نقطهٔ داده‌شده پیدا کنید. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^4+\sqrt{x}}\ ,\ x=1$	۱
۱۰	اگر $f(x)=x^2+\sqrt{x}-2$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{x}$ باشد، مقدار مشتق تابع fog را در نقطهٔ $x=1$ پیدا کنید.	۱
۱۱	اگر $f(x-f(x))=3f(3x-4)$ و $f(2)=0$ و مشتق تابع f در هیچ نقطه‌ای صفر نشود، مقدار $f'(2)$ را پیدا کنید.	۱
۱۲	مشتق اول، دوم و سوم تابع روبه‌رو را پیدا کنید. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$	۱/۵
۱۳	در هرکدام از توابع زیر، با توجه به نمودار تعیین کنید، خود تابع و آهنگ تغییر لحظه‌ای آن، صعودی، نزولی و یا ثابت‌اند. (پ) (ب) (الف)	۱/۵

حتماً تا حالا متوجه شده‌اید که در این سؤال‌ها توانایی تجسم‌کردن دوران در فضا خیلی مهم است. برای این‌که در این کار مسلط شویم باید سعی کنیم که شکل‌ها را در ذهنمان تجسم کنیم و هم‌چنین بتوانیم آن‌ها را روی کاغذ رسم کنیم. در جدول زیر جسم حاصل از دوران شکل‌های مختلف را حول یک خط (محور) می‌بینیم:

شکل اولیه	دوران حول	حجم حاصل	توصیف
 نیم‌دایره	شعاع OA		نیم‌کره به شعاع $r=OA$
 نیم‌دایره	قطر AB		کره به شعاع $r=OA$
 مستطیل	ضلع AD		استوانه به شعاع AB و ارتفاع AD
 مستطیل	خط موازی ضلع AD		استوانه به شعاع BH و ارتفاع AD که یک استوانه به شعاع AH و ارتفاع AD از آن برداشته شده است.
 مثلث قائم‌الزاویه	ضلع قائم AC		مخروط به شعاع AB و ارتفاع AC
 مثلث قائم‌الزاویه	وتر BC		دو مخروط به شعاع AH و ارتفاع‌های BH و CH که از قاعده به هم چسبیده‌اند.
	حول یک ضلع BC		دو مخروط به شعاع AH و ارتفاع‌های BH و CH که از قاعده به هم چسبیده‌اند.
	قطر AC		دو مخروط با حجم مساوی به شعاع OD و ارتفاع OA یا OC
 ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه	ساق قائم AD		یک مخروط به شعاع CD و ارتفاع MD که یک مخروط به شعاع AB و ارتفاع MA از آن برداشته شده است.

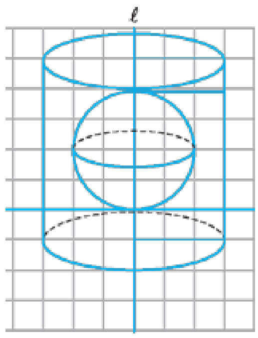
۱- الف) نادرست ـ شکل حاصل سهمی است.

ب) استوانه　　پ) درست

ت) کره　　ث) مقطع یا سطح مقطع

ج) بیضی

۲- طبق شکل روبه‌رو از دوران شکل، حول خط ℓ یک استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع ۶ ایجاد می‌شود که یک کره به شعاع ۲ از آن خارج شده است. پس حجم جسم برابر است با تفاضل حجم استوانه و کره، پس:



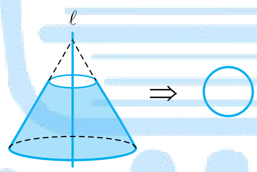
$$V = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = \pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \pi(3^2)(6) - \frac{4}{3}\pi(2^3) = 54\pi - \frac{32\pi}{3} = 130\frac{\pi}{3}$$

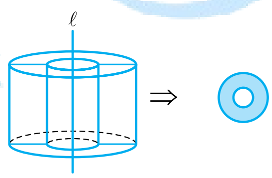
۳- شکل (۱): الف) یک مخروط بزرگ‌تر که یک مخروط کوچک‌تر از آن خارج شده است.

ب) دایره

پ) دو خط مورب و متقارن نسبت به ℓ



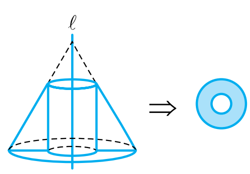
شکل (۲): الف) یک استوانهٔ بزرگ‌تر که یک استوانهٔ کوچک‌تر از آن خارج شده است.



ب) مساحت بین دو دایرهٔ هم‌مرکز

پ) دو مستطیل موازی و برابر یکدیگر

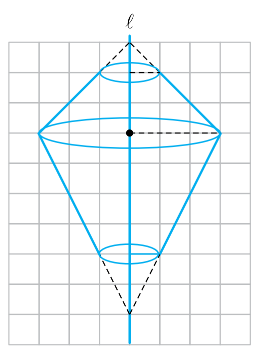
شکل (۳): الف) یک مخروط بزرگ که یک مخروط کوچک و یک استوانه از آن خارج شده است.



ب) مساحت بین دو دایرهٔ هم‌مرکز که با توجه به موقعیت صفحه، دایرهٔ بیرونی بزرگ یا کوچک (به اندازهٔ دایرهٔ درونی) می‌شود.

پ) دو مثلث قائم‌الزاویه.

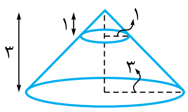
۴- طبق شکل روبه‌رو از دوران شکل داده‌شده حول محور ℓ دو مخروط در بالا و پایین ایجاد می‌شوند که از قاعده به هم چسبیده‌اند و از هر کدام از مخروط‌ها یک مخروط کوچک جدا شده است.



پس برای به دست آوردن حجم جسم باید حجم قسمت بالایی و پایینی را حساب و با هم جمع کنیم:

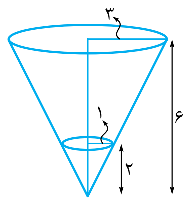
$$(1)\ \text{حجم جسم بالایی} = \frac{1}{3}\pi(3^2)(3) - \frac{1}{3}\pi(1^2)(1)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(27-1) = \frac{26\pi}{3}$$



$$(2)\ \text{حجم جسم پایینی} = \frac{1}{3}\pi(3^2)(6) - \frac{1}{3}\pi(1^2)(2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(54-2) = \frac{52}{3}\pi$$



پس حجم کل جسم برابر است با: $\frac{26\pi}{3} + \frac{52\pi}{3} = \frac{78\pi}{3} = 26\pi$

۵- الف) دایره

ب) کوچک‌تر یا به صفر نزدیک‌تر

پ) نادرست، طول قطر کوچک می‌تواند کوچک‌تر، بزرگ‌تر یا مساوی فاصلهٔ کانونی باشد.

ت) درست، چون داریم: $a^2 = b^2 + c^2$

ث) $\frac{\sqrt{2}}{2}$، چون $b = c$ پس $a^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$ در نتیجه

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad \text{و} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶- چون فاصلهٔ کانونی $FF' = 2c$ است و $c^2 = a^2 - b^2$، پس:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow c = 4 \Rightarrow FF' = 2c = 8$$

۷- داریم: $2a = 8 \Rightarrow a = 4$ و $2b = 6 \Rightarrow b = 3$ پس:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

پس فاصلهٔ کانونی $FF' = 2c = 2\sqrt{7}$ است.

۸-

$$F(-8,4), F'(2,4) \Rightarrow \text{بیضی افقی}\ O\left|\begin{matrix}\frac{-8+2}{2}\\ \frac{4+4}{2}\end{matrix}\right. \Rightarrow O(-3,4)$$

$$FF' = 2c \Rightarrow |-8-2| = 2c \Rightarrow c = 5$$

قطر بزرگ: $2a = 26 \Rightarrow a = 13\ ,\ c^2 = a^2 - b^2$

$$\Rightarrow 25 = 169 - b^2 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$$

دو سر قطر بزرگ: $A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right., A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}10\\ 4\end{matrix}\right., A'\left|\begin{matrix}-16\\ 4\end{matrix}\right.$

دو سر قطر کوچک: $B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right., B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-3\\ 16\end{matrix}\right., B'\left|\begin{matrix}-3\\ -8\end{matrix}\right.$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{13}$

-۹ بیضی قائم $A(-۳,۴)\,,\,A'(-۳,-۶) \Rightarrow$

$$O\left|\begin{matrix}\frac{(-۳)+(-۳)}{۲}\\ \frac{۴-۶}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow O'(-۳,-۱)$$

$AA'=۲a \Rightarrow |۴-(-۶)|=۲a \Rightarrow a=۵$,

قطر کوچک: $۲b=۶ \Rightarrow b=۳$

$c^۲=a^۲-b^۲ \Rightarrow c^۲=۲۵-۹ \Rightarrow c^۲=۱۶ \Rightarrow c=۴$

دو سر قطر کوچک: $B\left|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right.,B'\left|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix}۰\\ -۱\end{matrix}\right. ,\ B'\left|\begin{matrix}-۶\\ -۱\end{matrix}\right.$

کانون‌ها: $F\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right.,F'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix}-۳\\ ۳\end{matrix}\right. \quad F'\left|\begin{matrix}-۳\\ -۵\end{matrix}\right.$,

خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{۴}{۵}$

-۱۰ بیضی افقی $B(۷,۳)\,,\,B'(-۱,۳) \Rightarrow$

$$O\left|\begin{matrix}\frac{۷-۱}{۲}\\ \frac{۳+۳}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow O(۳,۳)$$

$BB'=۲b \Rightarrow |۷-(-۱)|=۲b \Rightarrow b=۴$

فاصلهٔ کانونی: $FF'=۲c \Rightarrow ۲c=۶ \Rightarrow c=۳ \Rightarrow$

$c^۲=a^۲-b^۲ \Rightarrow ۹=a^۲-۱۶ \Rightarrow a^۲=۲۵ \Rightarrow a=۵$

کانون‌ها: $F\left|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right. ,\ F'\left|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix}۶\\ ۳\end{matrix}\right. ,\ F'\left|\begin{matrix}۰\\ ۳\end{matrix}\right.$

دو سر قطر بزرگ: $A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right. ,A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۸\\ ۳\end{matrix}\right. \quad A'\left|\begin{matrix}-۲\\ ۳\end{matrix}\right.$

خروج از مرکز: $e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{۳}{۵}$

-۱۱ بیضی افقی FF' وسط $O(-۱,۲)$

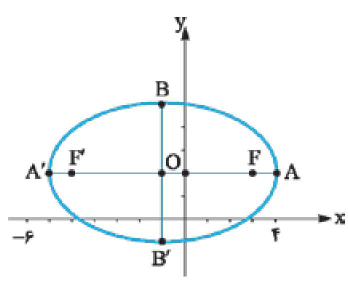
$F(۳,۲)\,,\,F'(-۵,۲) \Rightarrow$

$FF'=۲c \Rightarrow |۳-(-۵)|=۲c \Rightarrow c=۴$

$e=۰/۸ \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \frac{۴}{a}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow a=۵$

$c^۲=a^۲-b^۲ \Rightarrow ۱۶=۲۵-b^۲ \Rightarrow b^۲=۹ \Rightarrow b=۳$

برای رسم بیضی مختصات دو سر قطر بزرگ و دو سر قطر کوچک را پیدا می‌کنیم:



$A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right. ,\ A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۴\\ ۲\end{matrix}\right. ,\ A'\left|\begin{matrix}-۶\\ ۲\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right. ,\ B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\ ۵\end{matrix}\right. ,\ B'\left|\begin{matrix}-۱\\ -۱\end{matrix}\right.$

-۱۲ الف) داریم: $۲a=۶ \Rightarrow a=۳$ و $۲b=۴ \Rightarrow b=۲$، پس:

$c^۲=a^۲-b^۲ \Rightarrow c^۲=۹-۴=۵ \Rightarrow c=\sqrt{۵}$

پس فاصلهٔ کانونی برابر $FF'=۲c=۲\sqrt{۵}$ است.

ب) بیضی افقی است، پس: $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right. ,\ A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$

$O\left|\begin{matrix}۴\\ ۵\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۴+۳\\ ۵\end{matrix}\right. ,\ A'\left|\begin{matrix}۴-۳\\ ۵\end{matrix}\right.$

پس مختصات دو سر قطر بزرگ $A(۷,۵)$ و $A'(۱,۵)$ است.

-۱۳ الف) درست، زیرا: $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۸^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰}=۵$

ب) نادرست، زیرا:

محور yها $x=۰ \Rightarrow y^۲-۴y=۰ \Rightarrow y=۰,y=۴$

$\Rightarrow$ نقاط برخورد $(۰,۰),(۰,۴)$

محور xها $y=۰ \Rightarrow x^۲-۳x=۰ \Rightarrow x=۰,x=۳$

$\Rightarrow$ نقاط برخورد $(۰,۰),(۳,۰)$

چون $(۰,۰)$ مشترک است، پس سه نقطهٔ برخورد داریم.

پ) نادرست، وضعیت نقطه نسبت به دایره:

$x^۲+y^۲-۴x-۶y-۱=۰$

$\Rightarrow O(۲,۳),r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۶)^۲-۴(-۱)}$

$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶+۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۶}=\frac{۲}{۲}\sqrt{۱۴}=\sqrt{۱۴}$

$O(۲,۳),A(۳,۲) \Rightarrow OA=\sqrt{(۲-۳)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲}$

$\sqrt{۲}<\sqrt{۱۴} \Rightarrow OA<R$ نقطه داخل دایره است:

ت) $\frac{\pi}{۲}$، زیرا:

$x^۲+y^۲-x-y=۰ \Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱)^۲+(-۱)^۲-۴(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$S=\pi r^۲ \Rightarrow S=\pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{\pi}{۲}$

ث) متخارج، زیرا: $x^۲+y^۲-۲x-y+۱=۰$

$\Rightarrow O_۱(۱,\frac{۱}{۲}),r_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(-۱)^۲-۴(۱)}=\frac{۱}{۲}$

$x^۲+y^۲+۲x+y+۱=۰$

$\Rightarrow O_۲(-۱,-\frac{۱}{۲}),r_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲)^۲+(۱)^۲-۴(۱)}=\frac{۱}{۲}$

$O_۱O_۲=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲}))^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

$O_۱O_۲>r_۱+r_۲ \Rightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.

ج) $a=۴$ و $a=-۴$

$x^۲+y^۲+۴x+ay+۴=۰,O_۱(-۲,-\frac{a}{۲})$

$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+a^۲-۴(۴)}=\frac{|a|}{۲}$

برای این‌که دایره بر هر دو محور مماس باشد، باید:

$\frac{|a|}{۲}=۲ \Rightarrow a=۴,a=-۴$

ردیف	نمونهٔ امتحان نیم‌سال اول — امتحان شمارهٔ ۱	رشتهٔ علوم تجربی — مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ریاضی ۳ — Kheilisabz.com	نمره
۱	اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,-1),(4,2)\}$ و $g=\{(1,0),(2,1),(3,-2),(4,-1)\}$ باشد، fog و gof را پیدا کنید.			۱/۵
۲	کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ الف) fog و gof وقتی با هم برابرند که $f=g$ باشد. ب) $D_{f(f^{-1}(x))}=D_{f(x)}$ پ) وارون وارون یک تابع برابر با خود آن تابع است.			۱/۵
۳	نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^3+2$ را رسم کنید و بگویید تابع نزولی است یا صعودی؟			۱/۵
۴	ضابطه، دامنه و برد وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ را پیدا کنید.			۱
۵	نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید و تعیین کنید صعودی‌اند یا نزولی. الف) $f(x)=\lvert x\rvert-3x$ ب) $g(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ x^3+2 & x<1\end{cases}$			۱
۶	دورهٔ تناوب و مقدار مینیمم و ماکزیمم تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $y=2\sin(-\pi x)$ ب) $y=3\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})-2$ پ) $y=\frac{1}{2\cos x+5}$ ت) $y=-3\cos(2x)+1$			۲
۷	اگر دورهٔ تناوب تابع $y=1-\cos 2x$ برابر T باشد، نمودار تابع را در بازهٔ $[0,T]$ رسم کنید.			۲
۸	مقدار $\sin 75^\circ$ را پیدا کنید.			۱
۹	معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب‌های کلی معادله را بنویسید. الف) $2\sin^2 x-\sin x=0$ ب) $\cos 2x+\cos x=-1$			۲
۱۰	اگر $\sin x=\frac{3}{5}$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید. الف) $\sin 2x-2\cos 2x$ ب) $\tan 2x+\cot 2x$			۲
۱۱	حاصل حدهای زیر را پیدا کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+[x]-2}{x-1}$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2x+7}{2x^2-4}$ ت) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6}$			۲
۱۲	معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+\sqrt{x}-1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی بنویسید.			۱/۵
۱۳	مقدار مشتق تابع $f(x)=x\sin x-x^2\cos x$ را در نقطهٔ $x=0$ پیدا کنید.			۱
	جمع نمرات			۲۰

امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۱		رشتهٔ علوم تجربی	ریاضی ۳	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۵	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره

۱ — درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نمره: ۰/۷۵)

الف) تابع $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ یک تابع درجه‌دوم است.

ب) تابع $f(x)=x^3$، تابعی اکیداً صعودی است.

پ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.

۲ — در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (نمره: ۰/۷۵)

الف) اگر $f=\{(2,3),(3,5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر .... است.

ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $2x^2-5x+1$ بر $x-3$ برابر .... است.

پ) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر .... است.

۳ — سوالات چهارگزینه‌ای: (نمره: ۱/۵)

I. برد تابع f بازهٔ $[-3,1)$ است. برد تابع $y=-2f(3x-1)+3$ کدام‌یک از موارد زیر است؟

۱) $(-8,0]$ ‏ ۲) $(-12,0]$ ‏ ۳) $[1,9)$ ‏ ۴) $[-10,2)$

II. کدام‌یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ قرار دارد؟

۱) $(0,0)$ ‏ ۲) $(1,0)$ ‏ ۳) $(0,-1)$ ‏ ۴) $(-1,0)$

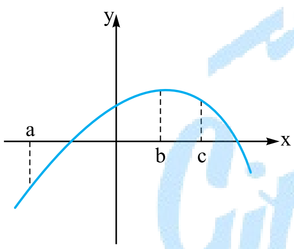
III. با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط a و b و c به ترتیب m_a، m_b و m_c نمایش داده شود، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $m_c>m_b>m_a$

۲) $m_b>m_a>m_c$

۳) $m_a>m_b>m_c$

۴) $m_c=m_b=m_a$



۴ — اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چه‌قدر است؟ (نمره: ۰/۷۵)

ورودی $x \to 2x-2 \to \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \to$ خروجی

۵ — معادلهٔ یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-4,4]$ و دورهٔ تناوب اصلی آن ۲ است. (نمره: ۱)

۶ — معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x=\sin x$ را حل کنید. (نمره: ۱)

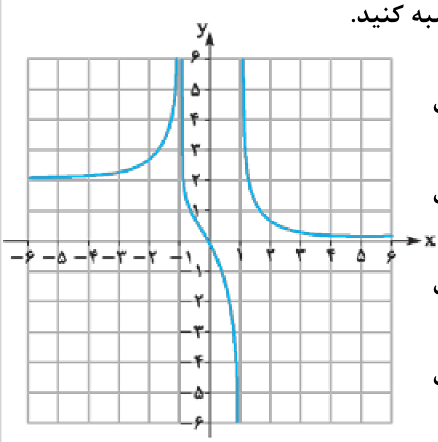
۷ — نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته‌شده را محاسبه کنید. (نمره: ۱)

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

پ) $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=$

ت) $\lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=$



۸ — حد مقابل را در صورت وجود محاسبه کنید. (نمره: ۰/۷۵)

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}$$

۹ — اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=5$، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$، حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید. (نمره: ۱)

۱- الف) درست، در نقاط اکسترمم نسبی مشتق یا صفر است یا وجود ندارد.

ب) درست، $c^2=a^2-b^2 \quad e\to 0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow a=b$

۲- الف) $[-1,1]$

$$f(x)=x^3-3x \Rightarrow f'(x)=3x^2-3\le 0 \Rightarrow x^2\le 1$$

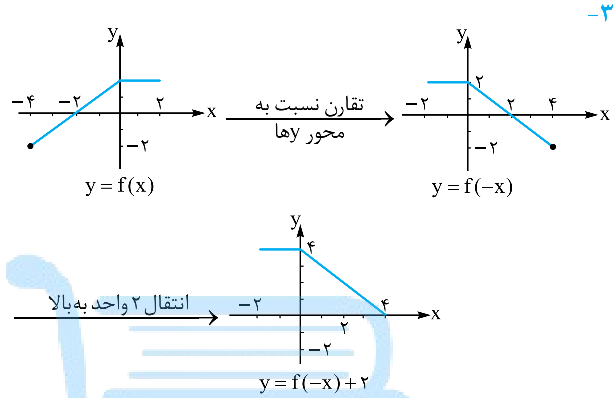
$$\Rightarrow |x|\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1$$

ب) ۲

$$x^2+y^2-2x-3=0 \Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(0)^2-4(-3)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

۳-



۴- الف)

$$f(x)=\sqrt{x-1} \quad D_f: x\ge 1$$

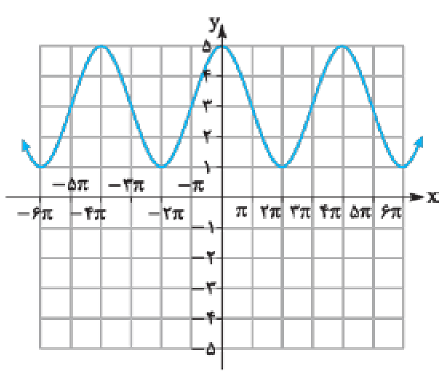
$$g(x)=2x^2-1 \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}\begin{cases} x\in D_g: x\in\mathbb{R} \\ g(x)\in D_f: 2x^2-1\ge 1 \Rightarrow 2x^2\ge 2 \\ \Rightarrow x^2\ge 1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\ge 1 \Rightarrow x\le -1 \text{ یا } x\ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

ب) $(gof)(2)=g(f(2))=g(\sqrt{2-1})=g(1)=2(1)^2-1=2-1=1$

۵-



$$y=a\cos bx+c$$

دورهٔ تناوب $=4\pi \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \text{ماکزیمم}=5 \\ \text{مینیمم}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|+c=5 \\ -|a|+c=1 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 2c=6$$

$$\Rightarrow c=3 \Rightarrow |a|=2$$

شروع منحنی در $x=0$ مثل تابع $\cos x$ است، پس $a=2$.

ضابطهٔ تابع $y=2\cos(\frac{1}{2}x)+3$ یا $y=2\cos(-\frac{1}{2}x)+3$

۶-

$$\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha} \frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ 2x=2k\pi+\underbrace{\pi-\frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=k\pi+\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۷- الف)

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\overbrace{4-x+1}^{5-x}}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{-1}{2+\sqrt{x-1}}=-\frac{1}{4}$$

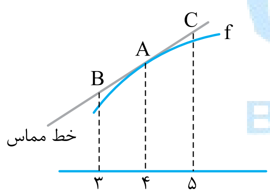
ب)

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{[x]}{|3x+1|}=\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{[-\frac{1}{3}]}{|3x+1|}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

پ)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}=\frac{3+0}{0-5}=-\frac{3}{5}$$

۸-



$$f(4)=24 \Rightarrow A(4,24)$$

$$f'(4)=1/5 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ A $\quad y=\frac{3}{2}x+18$

$$x_B=3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}(3)+18=\frac{9}{2}+18$$

$$=\frac{9+36}{2}=\frac{45}{2} \Rightarrow B(3,\frac{45}{2})$$

$$x_C=5 \Rightarrow y=\frac{3}{2}(5)+18=\frac{15}{2}+18$$

$$=\frac{15+36}{2}=\frac{51}{2} \Rightarrow C(5,\frac{51}{2})$$

۹-