۱۳

• موضوع: روابط بین ریشه‌ها • نوع آزمون: مبحثی

• صفحهٔ کتاب درسی: حسابان ۱ صفحات ۸ و ۹ • ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۴۱- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+m=0$، دو برابر ریشهٔ دیگر است. قدرمطلق اختلاف این دو ریشه، چه‌قدر از m کم‌تر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۴۲- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^4+2x^3+x^2=1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۳- به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجه‌دوم $(m+2)x^2+(5-m)x+4=m^2$، عکس یکدیگرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) هیچ مقدار m

۱۴۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ چه عددی است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $5\sqrt{3}$

۱۴۵- مقدار m کدام باشد، تا یکی از ریشه‌های $4x^2-5x+2m-1=0$ از نصف ریشهٔ دیگر، یک واحد کم‌تر باشد؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴۶- اگر $\alpha+1$ و $\beta+1$، ریشه‌های $x(2x-3)=1$ باشند، ریشه‌های $x^2+ax+b=0$، اعداد $\frac{\beta}{\alpha}$ و $\frac{\alpha}{\beta}$ هستند. مقدار a چه عددی است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴۷- حدود m کدام باشد تا معادلهٔ $x^4+(m-2)x^2+5-m=0$، دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد؟

۱) $m>4$ ۲) $m<-4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $-9<m<-4$

۱۴۸- اگر $2+\sqrt{3}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ باشد، به طوری که a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه حاصل ab کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -4 ۴) ۴

۱۴۹- معادلهٔ درجه‌دوم که هر ریشهٔ آن از عکس ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-4x-1=0$، یک واحد کم‌تر باشد، کدام است؟

۱) $x^2+6x+2=0$ ۲) $x^2-6=0$ ۳) $x^2-6x+2=0$ ۴) $x^2-2=0$

۱۵۰- اگر α و β، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{2\beta^2}{4\alpha-1}+\frac{2\alpha^2}{4\beta-1}$ کدام است؟

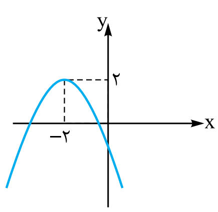
۱) $\frac{17}{2}$ ۲) ۱۷ ۳) ۳۴ ۴) $\frac{34}{3}$

۱۴

• موضوع: تابع درجه‌دوم و حل معادلات به روش هندسی • نوع آزمون: مبحثی

• صفحهٔ کتاب درسی: حسابان ۱ صفحات ۱۰ تا ۱۶ • ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۱۵۱- نمودار سهمی $f(x)=-x^2+bx+c$، به صورت مقابل است. حاصل‌ضرب صفرهای این سهمی کدام است؟

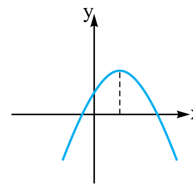
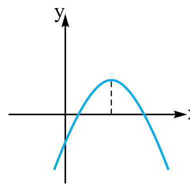
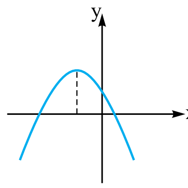
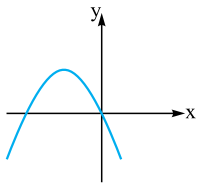


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵۲- اگر $(-2,a)$ و $(0,a)$، دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن سهمی کدام است؟

۱) $x=1$ ۲) $x=-1$
۳) $x=a$ ۴) $x=\frac{a}{2}$

۱۵۳- فرض کنید $f(x)=ax^2+bx+c$، $a<0$ و $bc>0$ باشد؛ در این صورت، نمودار سهمی f به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۵۴- ارتفاع یک موشک (h) در زمان t از رابطهٔ $h(t)=-16t^2+144t$ به دست می‌آید. ماکسیمم ارتفاع این موشک چه‌قدر است؟

۱) ۲۲۶ ۲) ۳۲۶ ۳) ۲۲۴ ۴) ۳۲۴

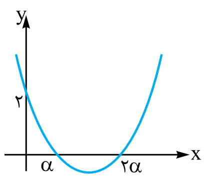
۱۵۵- به ازای کدام مقدار m، سهمی به معادلهٔ $y=mx^2-4x+2m+1$، زیر خط $y=3$ قرار دارد و بر این خط مماس است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -3 ۴) -1

۱۵۶- کم‌ترین فاصلهٔ نقاط منحنی $y=\sqrt{2x+5}$ از نقطهٔ $A(3,0)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{14}$ ۳) $\sqrt{18}$ ۴) $3/5$

۱۵۷- نمودار تابع $f(x)=x^2-mx+n$ به شکل مقابل است. مقدار m کدام است؟



۱) ۲
۲) -2
۳) ۳
۴) -3

۱۵۸- معادلهٔ $x=\frac{|x|}{x-2}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹- حدود m کدام باشد تا نمودار $f(x)=x^2+4mx+(m^2+1)$، از ناحیهٔ سوم عبور کند؟

۱) $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $m<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $m>\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۴) $m<-\frac{\sqrt{3}}{6}$

۱۶۰- اگر رأس یک سهمی، روی نیمساز ربع چهارم باشد و محور xها را در نقاطی به طول‌های ۲- و ۴ قطع کند، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{8}{9}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۵

• موضوع : جامع فصل
• صفحهٔ کتاب درسی: ریاضی ۱ صفحات ۷۰ تا ۷۷
حسابان ۱ صفحات ۷ تا ۱۶
• نوع آزمون: استاندارد
• ۱۵ تست در ۲۵ دقیقه

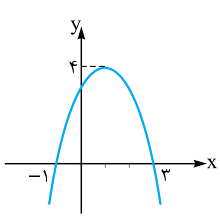
۱۶۱- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین صفر تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۶۲- زمینی مستطیل‌شکل به مساحت ۵۲/۸ متر مربع را با ۲ هزار کاشی مستطیل‌شکل پوشانده‌ایم. اگر طول کاشی‌ها یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن باشد، عرض هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

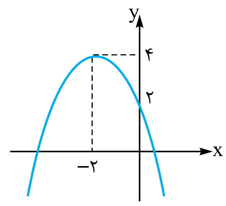
۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۳- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، به صورت زیر است. مقدار c کدام است؟



۱) $\frac{9}{4}$
۲) $\frac{13}{4}$
۳) ۳
۴) $\frac{7}{2}$

۱۶۴- اگر نمودار $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل باشد، abc چه عددی است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) $-۱/۵$
۴) $-۲/۵$

۱۶۵- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^{۲}-۱)^{۴}-(x^{۲}-۱)^{۲}-۶=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۲\sqrt{۱+\sqrt{۳}}$ ۳) ۲ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۱۶۶- تابع $f(x)=(x^{۲}-۲)^{۲}+x^{۲}+a$، چهار صفر متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}>a>-۴$ ۲) $a<-۴$ ۳) $a>۴$ ۴) $-\frac{۷}{۴}<a<۴$

۱۶۷- اگر a، ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $۳x^{۲}-۷x+۳=۰$ باشد، حاصل $\frac{a^{۲}+۱}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴۹}{۳۷}$ ۴) $\frac{۵۵}{۲۱}$

۱۶۸- هرگاه α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(۲x+۱)=m$ باشند، به طوری که $\alpha^{۳}-\alpha^{۲}=\beta^{۲}-\beta^{۳}$ برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $-\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) m یافت نمی‌شود.

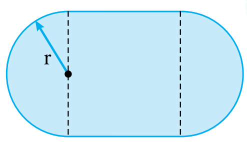
۱۶۹- به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر دو ریشهٔ معادلهٔ $۹x^{۲}-mx+۴=۰$ برابر $\frac{۷}{۳}$ است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۵ ۳) ۳۳ ۴) ۳۱

۱۷۰- اگر معادلهٔ $x^{۲}+x-۷=۰$، دارای ریشه‌های $x_۱=\frac{۲}{\alpha}-۱$ و $x_۲=\frac{۲}{\beta}-۱$ باشد، ریشه‌های کدام معادله α و β است؟

۱) $۷x^{۲}+۲x-۴=۰$ ۲) $۷x^{۲}-۴x+۴=۰$ ۳) $۷x^{۲}-۲x-۴=۰$ ۴) $۷x^{۲}+۴x+۴=۰$

۱۷۱- استادیومی با یک مستطیل و دو نیم‌دایره در دو انتهای آن ساخته شده است. اگر محیط استادیوم ۳۰۰ متر باشد، ماکزیمم مساحت آن کدام است؟ $(\pi\simeq ۳)$



۱) ۴۵۰۰ ۲) ۵۰۰۰
۳) ۷۵۰۰ ۴) ۹۰۰۰

۱۷۲- به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $۳x^{۲}+(m-۵)x-m+۲=۰$، دارای دو ریشهٔ متمایز مثبت است؟

۱) $m>۵$ ۲) $m<۲$ ۳) $m<۵$ و $m\neq۱$ ۴) $m<۲$ و $m\neq-۱$

۱۷۳- معادلهٔ $|x+۱|=x^{۲}+۳x+۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۴- به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $f(x)=(m-۱)x^{۲}+\sqrt{۳}x-m-۱$، همواره بالای محور xها است؟

۱) $\frac{۱}{۲}<m<۱$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) $m>۱$ ۴) $\varnothing$

۱۷۵- هرگاه α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۱=۰$ باشند، مقدار $(\alpha+\frac{۱}{\beta})^{۳}+(\beta+\frac{۱}{\alpha})^{۳}$ چه عددی است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۸ ۴) ۵۷۶

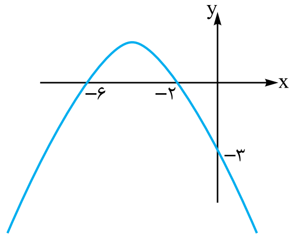
۱۶

• موضوع: جامع فصل
• نوع آزمون: به سوی ۱۰۰
• صفحهٔ کتاب درسی: ریاضی ۱ صفحات ۷۰ تا ۷۷
حسابان ۱ صفحات ۷ تا ۱۶
• ۱۵ تست در ۲۵ دقیقه

۱۷۶- اگر معادلهٔ $\frac{۱}{x-۱}+\frac{a+۱}{x-x^{۲}}=۱$، دارای ریشهٔ مضاعف باشد، a چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) مقداری برای a یافت نمی‌شود.

۱۷۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. حداکثر مقدار تابع چه عددی است؟



۱) 1
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۸- $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+ax+b=0$ هستند. مقدار $\frac{b}{a}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{6}}{24}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{18}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴) $\frac{-\sqrt{6}}{12}$

۱۷۹- اگر برد تابع $f(x)=3x^2+2x-1$ به صورت $[a,+\infty)$ باشد، محور تقارن تابع $g(x)=ax^2+3x-1$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۱۸۰- معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+ax+b=0$ به ازای مقادیر صحیح a و b، دارای ریشهٔ $3+\sqrt{2}$ است. معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن a و b باشد، کدام است؟

۱) $x^2+x-42=0$ ۲) $x^2-x-42=0$ ۳) $x^2-1=0$ ۴) $x^2-6x+7=0$

۱۸۱- هرگاه $x^3-(a-2)x^2+(a-1)x=2$، دارای ۳ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، کم‌ترین مقدار طبیعی برای a چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۲- اگر α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x-1=0$ باشد، مقدار $\alpha^3-17\alpha$ چه عددی است؟

۱) -8 ۲) 8 ۳) -4 ۴) 4

۱۸۳- سهمی $f(x)=(k+1)x^2-4x+k=0$ بر خط $y=-1$ مماس است. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور طول‌ها جدا می‌کند، چه عددی است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) 1

۱۸۴- اگر $f(x)=ax^2+bx+f(2)$ باشد و این تابع بر محور xها مماس باشد، حاصل $a+b$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $f(2)$ ۲) $2f(2)$ ۳) $-f(2)$ ۴) $-2f(2)$

۱۸۵- با فرض آن‌که $\alpha+1$ و $\beta+1$، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+2x-1=0$ باشند، $\alpha^2\beta$ و $\beta^2\alpha$، ریشه‌های $x^2+kx+k=0$ هستند. مقدار k چه عددی است؟

۱) 16 ۲) -16 ۳) 8 ۴) -8

۱۸۶- اگر ۱، α و β ریشه‌های $2x^3+ax^2-2x-3=0$ باشند، معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $\frac{1}{\beta}$ و $\frac{1}{\alpha}$ باشند، کدام است؟

۱) $2x^2-3x-2=0$ ۲) $2x^2-5x-3=0$ ۳) $3x^2+5x+2=0$ ۴) $3x^2-2x-3=0$

۱۸۷- α و β ریشه‌های $4x^2-3x-2=0$ و $(2\alpha-1)^2$ و $(2\beta-1)^2$ ریشه‌های $x^2+kx+n=0$ هستند. مقدار k چه عددی است؟

۱) $-\frac{27}{4}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $\frac{21}{4}$ ۴) $-\frac{21}{4}$

۱۸۸- اگر a و b اعداد صحیح باشند و یکی از ریشه‌های $x^4+ax^2+b=0$، عدد $\alpha=\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $a+b$ چه عددی است؟

۱) 2 ۲) 4 ۳) -2 ۴) -4

۱۸۹- حاصل‌ضرب ریشه‌های $x(1+\sqrt{x})^2-8\sqrt{x}(1+\sqrt{x})+12=0$ چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۶

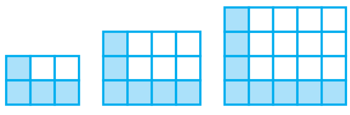
۱۹۰- نمودار $y=(a+3)x^2+ax-2$ از کدام ناحیه ممکن است عبور نکند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۶۶

• موضوع: ریاضی دهم
• صفحهٔ کتاب درسی: ریاضی ۱ صفحات ۱۴ تا ۱۰۹
• ۲۰ تست در ۳۵ دقیقه

۷۷۱- با توجه به الگوی مقابل در شکل دهم، تعداد خانه‌های سفید چند برابر تعداد خانه‌های رنگ‌شده است؟



۱) ۶ ۲) ۱۲
۳) ۱۰ ۴) ۵

۷۷۲- بین دو عدد ۵ و ۴۵ تعداد ۹ واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم، پنجمین واسطه چه عددی است؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۵ ۳) ۳۴ ۴) ۲۰

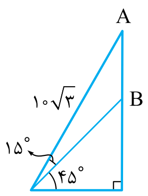
۷۷۳- حداقل عدد طبیعی n کدام باشد تا $\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}>۱۰$ برقرار باشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۰۱

۷۷۴- در مثلث ABC سادهٔ‌شدهٔ $\frac{c\sin\hat{B}}{a-c.\cos\hat{B}}$ کدام است؟

۱) $\tan\hat{C}$ ۲) $\cot\hat{C}$ ۳) $\tan\hat{B}$ ۴) $\cot\hat{B}$

۷۷۵- در شکل مقابل اندازهٔ AB چه عددی است؟

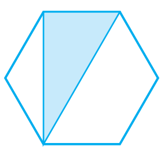


۱) $۵(۳-\sqrt{۲})$
۲) $۵(۳+\sqrt{۳})$
۳) $۵(۲+\sqrt{۳})$
۴) $۵(۳-\sqrt{۳})$

۷۷۶- به فرض آن‌که $۲\sin^۲ x+\cos^۲ x=\frac{۳}{۲}$ مقدار $\tan^۴ x$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۷۷۷- شکل مقابل یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ را نشان می‌دهد. مساحت مثلث رنگ‌شده کدام است؟



۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۷۷۸- سادهٔ‌شدهٔ $\frac{\cot^۲ x}{۱+\cot^۲ x}+\frac{\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $۲\cos^۲ x$ ۲) $۲\sin^۲ x$ ۳) ۱ ۴) ۲

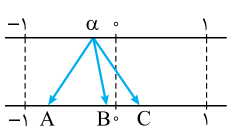
۷۷۹- مقدار عددی عبارت $۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۹$ به ازای $x=\frac{\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}$ چه عددی است؟

۱) -۸ ۲) -۵ ۳) -۱۱ ۴) -۴

۷۸۰- اگر $A=\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}$ کدام عدد گویا است؟

۱) $A\sqrt{۲}$ ۲) $A\sqrt{۶}$ ۳) $A\sqrt{۳}$ ۴) A

۷۸۱- در شکل مقابل A,B,C به ترتیب کدام می‌توانند باشند؟



۱) $\alpha^۳,\sqrt[۳]{\alpha},\sqrt{\alpha}$ ۲) $\alpha^۲,\sqrt[۳]{\alpha},\sqrt{-\alpha}$
۳) $\sqrt[۳]{\alpha},\alpha^۳,\alpha^۲$ ۴) $\sqrt[۳]{\alpha},\sqrt{-\alpha},\alpha^۳$

۷۸۲- اگر $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x+۱}=۲۷$، مقدار $\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) -۳ ۴) -۹

۷۸۳- اگر $a>۱$، مجموعه‌جواب $\frac{x-a}{ax-۱}<۰$ کدام بازه است؟

۱) $(\frac{۱}{a},a)$ ۲) $(۰,a)$ ۳) $(\frac{۱}{a},۱)$ ۴) $(۰,\frac{۱}{a})$

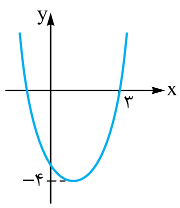
۷۸۴- مجموعه‌جواب $|۳x-۴|<x$ بازهٔ (a,b) است، مقدار $\frac{a+b}{۲}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۷۸۵- طول قطر یک مستطیل ۱۳ و محیط آن ۳۴ است. مساحت مستطیل چه‌قدر از محیط آن بیشتر است؟

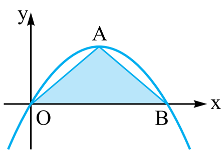
۱) ۵۶ ۲) ۲۶ ۳) ۴۳ ۴) ۳۸

۷۸۶- نمودار سهمی $y=x^۲-ax+b$ شکل زیر است. ریشهٔ کوچک‌تر چه عددی است؟



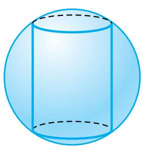
۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) -۱
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) -۲

۷۸۷- شکل مقابل معادلهٔ سهمی $y=-x^۲+۶x$ و A رأس سهمی است. محیط مثلث ABO چه عددی است؟



۱) $۳(۱+۲\sqrt{۱۰})$ ۲) $۳(۲+\sqrt{۱۰})$
۳) $۶(۲+\sqrt{۱۰})$ ۴) $۶(۱+\sqrt{۱۰})$

۷۸۸- استوانه‌ای داخل کره‌ای به شعاع ۵ مطابق شکل مقابل محاط شده است. حجم استوانه را به صورت تابعی بر حسب ارتفاع استوانه نوشته‌ایم، ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $V=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰-۳h^۲)$ ۲) $V=\pi(۱۰۰h-h^۳)$
۳) $V=\frac{\pi}{۴}(۱۰۰-h^۲)$ ۴) $V=\frac{\pi}{۴}(۱۰۰h-h^۳)$

۷۸۹- کدام تابع، تابعی ثابت نمی‌باشد؟

۱) $f(x)=\frac{۴-۶x}{۳x-۲}$ ۲) $f(x)=\sqrt{\sin x-۱}$ ۳) $f(x)=\frac{۲^x}{۲^x+۳\times۲^x}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

۷۹۰- اگر f تابعی خطی باشد، به طوری که $f(۲)=۴$ و $f(-۱)=-۵$ کدام تابع ثابت است؟

۱) $f(x)+۳x$ ۲) $f(x)-۴x$ ۳) $۳x-f(x)$ ۴) $۴x+f(x)$

۶۷

• موضوع: حسابان ۱
• صفحهٔ کتاب درسی: صفحات ۱ تا ۱۵۱
• ۲۰ تست در ۳۵ دقیقه

۷۹۱- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ ابتدایی آن $S_n=۲n-n^۲$ است. مجموع n جملهٔ دوم از کدام رابطه به دست می‌آید؟

۱) $۴n-۳n^۲$ ۲) $۴n-۴n^۲$ ۳) $۲n-۳n^۲$ ۴) $۴n-۲n^۲$

۷۹۲- نمودار $y=۲x^۲-۶x+m$ خط $y=۲x+۵$ را در ۲ نقطه به طول مثبت قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $۳<m<۱۳$ ۲) $m>۳$ ۳) $۵<m<۱۳$ ۴) $m>۵$

۷۹۳- حاصل‌ضرب ریشه‌های $۵=\frac{۲x+۲}{x}+\frac{۲x}{x+۱}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۷۹۴- معادلهٔ $\sqrt{x+۵}=\sqrt{۲x+\sqrt{x-۳}}$ یک ریشهٔ مشترک با معادلهٔ $ax^۲+۲x+۸=۰$ دارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۴۸- گزینهٔ ۳ در این معادله، جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-a}{1}=-a$ و ضرب ریشه‌ها برابر $b=\frac{b}{1}$ است. اگر a و b صحیح باشند، جمع و ضرب ریشه‌ها هم، صحیح هستند. تنها عددی که جمع و ضرب آن با $2+\sqrt{3}$، هر دو صحیح هستند، عدد $2-\sqrt{3}$ است. پس دو ریشهٔ معادله، $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ می‌باشند. حالا با توجه به جمع و ضرب ریشه‌ها که گفتیم، a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a \Rightarrow 4=-a \Rightarrow a=-4$$

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b \Rightarrow 2^2-\sqrt{3}^2=b \Rightarrow b=1$$

و در نتیجه داریم: $ab=-4$.

۱۴۹- گزینهٔ ۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-4x-1=0$ باشند، داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-(-4)}{3}=\frac{4}{3}\ ,\ \alpha\beta=\frac{-1}{3}$$

به دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن، $\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ باشند.

جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{\text{جدید}}=\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{\beta}-1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2 \\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{-1}{3}}-2=-4-2=-6 \\ P_{\text{جدید}}=(\frac{1}{\alpha}-1)(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1 \\ \frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{1}{\frac{-1}{3}}-\frac{\frac{4}{3}}{\frac{-1}{3}}+1=2 \end{cases}$$

حالا معادلهٔ جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-S_{\text{جدید}}x+P_{\text{جدید}}=0 \Rightarrow x^2-(-6)x+2=0$$

$$\Rightarrow x^2+6x+2=0$$

۱۵۰- گزینهٔ ۳ α و β ریشه‌های معادله هستند و در معادله صدق می‌کنند.

$$2x^2-4x+1=0 \begin{cases} 2\alpha^2-4\alpha+1=0 \Rightarrow 4\alpha-1=2\alpha^2 \\ 2\beta^2-4\beta+1=0 \Rightarrow 4\beta-1=2\beta^2 \end{cases}$$

حاصل $\frac{2\alpha^2}{4\beta-1}+\frac{2\beta^2}{4\alpha-1}$ را می‌خواهیم. به جای $4\alpha-1$ و $4\beta-1$ به ترتیب $2\alpha^2$ و $2\beta^2$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\alpha^2}{4\beta-1}+\frac{2\beta^2}{4\alpha-1}=\frac{2\alpha^2}{2\beta^2}+\frac{2\beta^2}{2\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$=(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha})^2-2=(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta})^2-2$$

می‌دانیم $S=-\frac{b}{a}=2$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ است؛ بنابراین حاصل عبارت بالا برابر است با:

$$(\frac{S^2-2P}{P})^2-2=(\frac{4-1}{\frac{1}{2}})^2-2=36-2=34$$

آزمون ۱۴

۱۵۱- گزینهٔ ۲ در سهمی، x رأس برابر است با $\frac{-b}{2a}$. بنابراین داریم:

$$\frac{-b}{2(-1)}=-2 \Rightarrow b=-4$$

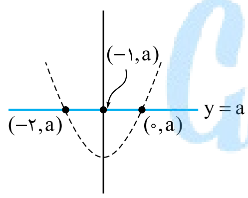
از طرفی نقطهٔ $(-2,2)$ روی سهمی قرار دارد و باید داشته باشیم $f(-2)=2$. در نتیجه: $-(-2)^2-4(-2)+c=2 \Rightarrow c=-2$

بنابراین، معادلهٔ تابع به صورت $f(x)=-x^2-4x-2$ درمی‌آید. صفرهای تابع در واقع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند:

$$-x^2-4x-2=0$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه۲، برابر $\frac{c}{a}$ است، در نتیجه جواب $\frac{-2}{-1}=2$ می‌باشد.

۱۵۲- گزینهٔ ۲ نقاط $(0,a)$ و $(-2,a)$، روی خط افقی $y=a$ قرار دارند.



محور تقارن سهمی، عمودمنصف پاره‌خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. پس خطی عمودی است که از نقطهٔ $(-1,a)$ عبور می‌کند. (-1 وسط ۰ و -2 است.)

بنابراین معادلهٔ محور تقارن، $x=-1$ است.

۱۵۳- گزینهٔ ۱ اگر bc مثبت باشد، دو حالت امکان دارد:

حالت ۱ b و c مثبت باشند. در این صورت:

$$\begin{cases} S=\frac{-b}{a}>0 \\ P=\frac{c}{a}<0 \end{cases}$$

(دقت کنید که a منفی است.)

پس ضرب ریشه‌ها منفی و جمعشان مثبت است. یعنی دو ریشه با علامت مختلف داریم که اندازهٔ ریشهٔ مثبت، بزرگ‌تر است. این اتفاق در ۱ افتاده است.

حالت ۲ b و c منفی باشند. در این صورت:

$$\begin{cases} S=\frac{-b}{a}<0 \\ P=\frac{c}{a}>0 \end{cases}$$

پس در حالت دوم حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت و مجموعشان منفی است. یعنی دو ریشهٔ منفی داریم که در هیچ‌کدام از گزینه‌ها چنین نموداری نمی‌بینیم.

پس همان ۱، جواب تست است. توجه داشته باشید که شرط $a<0$، باعث می‌شود که شاخه‌های سهمی رو به پایین باشد که در تمام گزینه‌ها همین‌طور است.

۱۵۴- گزینهٔ ۴ تابع ارتفاع موشک، درجه‌دوم (سهمی) است و چون ضریب $t^۲$ منفی است، سهمی دارای ماکسیمم است. ماکسیمم ارتفاع موشک، همان h رأس سهمی است.

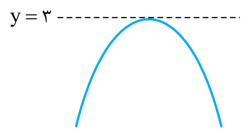
$$t_{\text{رأس}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۴۴}{۲(-۱۶)} = \frac{۹}{۲}$$

با جای‌گذاری $\frac{۹}{۲}$ در معادلهٔ تابع، h رأس به دست می‌آید:

$$\text{ماکسیمم ارتفاع} = h(\frac{۹}{۲}) = -۱۶ \times (\frac{۹}{۲})^۲ + ۱۴۴ \times \frac{۹}{۲}$$

$$= -۴ \times ۹ \times ۹ + ۷۲ \times ۹ = ۹(۷۲-۳۶) = ۳۶ \times ۹ = ۳۲۴$$

۱۵۵- گزینهٔ ۴ باید نمودار سهمی به صورت روبه‌رو باشد:



پس اولاً باید شاخه‌های سهمی رو به پایین باشند و در نتیجه ضریب $x^۲$، کوچک‌تر از صفر است، یعنی: $m<۰$. ثانیاً باید y رأس سهمی برابر ۳ باشد. x رأس سهمی از رابطهٔ $\frac{-b}{۲a}$ برابر است با: $\frac{-(-۴)}{۲m} = \frac{۲}{m}$. از جای‌گذاری این مقدار در معادلهٔ تابع، y رأس را به دست می‌آوریم و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$y_{\text{رأس}} = m(\frac{۲}{m})^۲ - ۴(\frac{۲}{m}) + ۲m + ۱ = ۳$$

$$\Rightarrow m \times \frac{۴}{m^۲} - \frac{۸}{m} + ۲m = ۲ \Rightarrow \frac{۴}{m} - \frac{۸}{m} + ۲m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۴}{m} + ۲m - ۲ = ۰ \xrightarrow{\times m} -۴ + ۲m^۲ - ۲m = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = -۱ \text{ یا } m = ۲$$

$$\xrightarrow{m<۰} m = -۱$$

۱۵۶- گزینهٔ ۱ مختصات هر نقطه روی $y = \sqrt{۲x+۵}$ به صورت $(x, \sqrt{۲x+۵})$ است. فاصلهٔ آن از A را پیدا می‌کنیم:

$$L = \sqrt{(x-۳)^۲ + (\sqrt{۲x+۵} - ۰)^۲} = \sqrt{x^۲ - ۶x + ۹ + ۲x + ۵}$$

$$= \sqrt{x^۲ - ۴x + ۱۴} = \sqrt{(x-۲)^۲ + ۱۰}$$

وقتی L کم‌ترین مقدار می‌شود که $x^۲ - ۴x + ۱۴$ کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد. کم‌ترین مقدار آن هم در $f(\frac{-b}{۲a}) = f(۲)$ رخ می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$L_{min} = \sqrt{۲^۲ - ۴(۲) + ۱۴} = \sqrt{۱۰}$$

۱۵۷- گزینهٔ ۳ از نقطهٔ $(۰,۲)$ که روی نمودار سهمی است، می‌فهمیم که باید $f(۰) = ۲$ باشد. بنابراین:

$$f(۰) = ۰^۲ - m \times ۰ + n = ۲ \Rightarrow n = ۲$$

از طرفی ریشه‌های تابع برابر α و ۲α هستند. ضرب ریشه‌ها هم از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$\alpha . ۲\alpha = \frac{n}{۱} = ۲ \Rightarrow ۲\alpha^۲ = ۲ \Rightarrow \alpha^۲ = ۱ \Rightarrow \alpha = ۱$$

توجه کنید که ریشه‌ها با توجه به شکل، هر دو مثبت هستند، پس جواب $\alpha = -۱$ قابل‌قبول نیست. به این ترتیب، ریشه‌ها، اعداد ۱ و ۲ هستند و جمع ریشه‌ها برابر ۳ است. در نتیجه داریم:

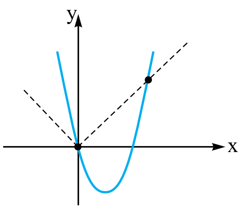
$$\frac{-b}{a} = ۳ \Rightarrow \frac{-(-m)}{۱} = ۳ \Rightarrow m = ۳$$

۱۵۸- گزینهٔ ۲ با طرفین‌وسطین، می‌توانیم معادله را به صورت زیر درآوریم:

$$|x| = x(x-۲) \Rightarrow |x| = x^۲ - ۲x$$

تعداد جواب‌های معادله را می‌توان به کمک رسم نمودار پیدا کرد. کافی است که تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = |x|$ و $y = x^۲ - ۲x$ را بیابیم.

(برای رسم $y = x^۲ - ۲x$، دقت کنید که یک سهمی با شاخهٔ رو به بالا با ریشه‌های ۰ و ۲ داریم.) با توجه به نمودار، واضح است که دو منحنی، دو نقطهٔ تلاقی دارند و در نتیجه، معادله دو جواب دارد.



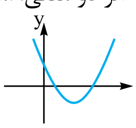
۱۵۹- گزینهٔ ۱ چون ضریب $x^۲$ مثبت است، شاخه‌های سهمی رو به بالا است. پس اگر سهمی ریشه نداشته باشد یا تنها یک ریشه داشته باشد، نه از ناحیهٔ سوم می‌گذرد و نه از ناحیهٔ چهارم. پس معادلهٔ سهمی، باید دو ریشه داشته باشد و در نتیجه $\Delta > ۰$ است و داریم:

$$\Delta = (۴m)^۲ - ۴(m^۲+۱) > ۰ \Rightarrow ۱۶m^۲ - ۴m^۲ - ۴ > ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴}} ۴m^۲ - m^۲ - ۱ > ۰ \Rightarrow m^۲ > \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow m > \frac{\sqrt{۳}}{۳} \text{ یا } m < -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad (۱)$$

از طرفی ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = \frac{m^۲+۱}{۱}$ و همواره مثبت است. پس یا هر دو ریشه، مثبت‌اند و یا هر دو منفی. اما اگر دو ریشهٔ مثبت داشته باشیم، نمودار به صورت



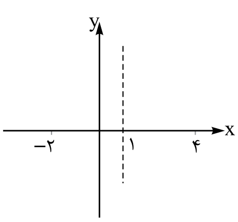
درمی‌آید و باز هم از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد، پس دو ریشهٔ منفی داریم و باید جمع ریشه‌ها منفی باشد. در نتیجه:

$$\frac{-b}{a} = \frac{-۴m}{۱} < ۰ \Rightarrow m > ۰ \qquad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲) به جواب می‌رسیم:

$$m > \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۶۰- گزینهٔ ۱ معادلهٔ یک سهمی، درجه۲ است. وقتی سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های ۲- و ۴ قطع می‌کند، باید ۲- و ۴، ریشه‌های معادلهٔ درجه۲ سهمی باشند. در نتیجه، معادلهٔ این سهمی به صورت $y = k(x+۲)(x-۴)$ است.



حالا باید ضریب k را تعیین کنیم. محور تقارن هر سهمی، خطی موازی محور yها است که از رأس سهمی می‌گذرد. از طرفی، باید محور تقارن دقیقاً از نقطهٔ وسط پاره‌خطی که نقاط برخورد با محور xها را به هم وصل می‌کند، بگذرد. پس محور تقارن خط $x=1$ است. (میانگین -2 و 4 برابر 1 است.) پس x رأس سهمی، برابر ۱ است و با توجه به این‌که رأس، روی خط $y=-x$ قرار دارد، y رأس برابر -1 خواهد بود. پس نقطهٔ $(1,-1)$ باید در معادلهٔ سهمی صدق کند، در نتیجه:

$$-1=k(1+2)(1-4) \Rightarrow k=\frac{1}{9}$$

یعنی معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{1}{9}(x+2)(x-4)$ است و برای پیداکردن y نقطهٔ برخورد با محور yها، کافی است در معادله، x را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=\frac{1}{9}(0+2)(0-4)=\frac{-8}{9}$$

آزمون ۱۵

۱۶۱- گزینهٔ ۴ اگر از تغییر متغیر $x^2=y$ استفاده کنیم به معادلهٔ درجه۲ روبه‌رو می‌رسیم: $y^2-10y+16=0$

از این معادله، دو جواب ۲ و ۸ برای y به دست می‌آید. در نتیجه:

$$\begin{cases} y=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ y=8 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین، بزرگ‌ترین ریشهٔ (صفر) تابع، $2\sqrt{2}$ و کوچک‌ترین ریشه، برابر $-2\sqrt{2}$ است و اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$2\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

۱۶۲- گزینهٔ ۴ هر متر مربع برابر با 100×100 سانتی‌متر مربع است. پس مساحت زمین، $52/8\times10000$ سانتی‌متر مربع است. اگر عرض هر کاشی را x بگیریم، طول کاشی برابر $4x+1$ است و مساحت یک کاشی برابر است با $x(4x+1)$. بنابراین مساحت کل زمین، $2000x(4x+1)$ خواهد بود و داریم:

$$2000x(4x+1)=52/8\times10000$$
$$\Rightarrow 2x(4x+1)=52/8\times10 \Rightarrow x(4x+1)=264$$

حالا کافی است که گزینه‌ها را امتحان کنید. (حل چنین معادلهٔ درجه۲ای با محاسبهٔ Δ، زمان زیادی لازم دارد.) با توجه به گزینه‌ها $x=8$ می‌باشد.

۱۶۳- گزینهٔ ۳ ریشه‌های سهمی -1 و 3 هستند و در نتیجه، معادلهٔ آن به صورت $y=k(x+1)(x-3)$ است. از طرفی، x رأس سهمی، درست وسط نقاط -1 و 3 است:

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-1+3}{2}=1$$

بنابراین مختصات رأس سهمی، $(1,4)$ است که باید در معادله صدق کند:

$$4=k(1+1)(1-3) \Rightarrow 4=-4k \Rightarrow k=-1$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$$

این معادله همان معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ است؛ در نتیجه باید ضریب جمله‌های متشابه، برابر باشد: $a=-1,\ b=2,\ c=3$

۱۶۴- گزینهٔ ۱ اگر رأس سهمی، نقطهٔ (α,β) باشد، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ خواهد بود. رأس سهمی در نمودار، نقطهٔ $(-2,4)$ است. بنابراین، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+2)^2+4$ است. از طرف دیگر، نقطهٔ $(0,2)$ روی سهمی قرار دارد، پس باید مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق کند.

در نتیجه:

$$2=a(0+2)^2+4 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

بنابراین، معادلهٔ سهمی به صورت زیر در می‌آید:

$$y=\frac{-1}{2}(x+2)^2+4=\frac{-1}{2}(x^2+4x+4)+4$$
$$=\frac{-1}{2}x^2-2x+2$$

پس $a=\frac{-1}{2}$، $b=-2$ و $c=2$ است و داریم: $abc=2$

۱۶۵- گزینهٔ ۱ در این معادله اگر عدد α ریشه باشد، قطعاً $-\alpha$ هم ریشه است، چون عبارت $(x^2-1)^4-(x^2-1)^2-6$ به ازای $x=\alpha$ و $x=-\alpha$، مقدار یکسانی دارد. بنابراین، این معادله هر چندتا ریشه که داشته باشد، این ریشه‌ها، دوتا دوتا قرینهٔ یکدیگرند و در نتیجه، مجموع تمام ریشه‌ها برابر صفر است.

۱۶۶- گزینهٔ ۱

$$f(x)=(x^2-2)^2+x^2+a$$
$$\Rightarrow f(x)=x^4-4x^2+4+x^2+a$$
$$=x^4-3x^2+4+a$$

اگر فرض کنیم $x^2=t$ باشد در این صورت داریم:

$$y=t^2-3t+4+a$$

برای این‌که معادلهٔ اولیه ۴ ریشه داشته باشد، باید معادلهٔ $t^2-3t+4+a=0$ دارای ۲ ریشهٔ مثبت باشد چون $x^2=t$ است هر جواب مثبت t، ۲ جواب برای x ایجاد می‌کند. شرط دو ریشهٔ مثبت این است که:

۱) $\Delta>0 \Rightarrow (-3)^2-4(4+a)(1)>0 \Rightarrow 9-16-4a>0$
$$\Rightarrow -7>4a \Rightarrow a<-\frac{7}{4}$$

۲) ضرب ریشه‌ها مثبت $\Rightarrow \frac{4+a}{1}>0 \Rightarrow a>-4$

۳) جمع ریشه‌ها مثبت $\Rightarrow \frac{-(-3)}{1}>0 \Rightarrow 3>0$ ✓

از اشتراک جواب‌های به دست آمده به $-4<a<-\frac{7}{4}$ می‌رسیم.

۱۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید $\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$ بوده و از طرفی حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله برابر است با: $\frac{c}{a}=\frac{3}{3}=1$. چون ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است، اگر یک ریشه برابر a باشد، ریشهٔ دیگر

$\frac{۱}{a}$ خواهد بود. پس عبارت $a+\frac{۱}{a}$ که در سؤال خواسته شده، جمع ریشه‌های معادله است و برابر است با: $\frac{-b}{a}=\frac{-(-۷)}{۳}=\frac{۷}{۳}$

۱۶۸- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت $۲x^۲+x-m=۰$ می‌نویسیم.
معلوم است که جمع و ضرب ریشه‌ها برابرند با:

$\alpha+\beta=\frac{-۱}{۲}$ و $\alpha\beta=\frac{-m}{۲}$

حالا معادلهٔ $\alpha^۳-\alpha^۲=\beta^۲-\beta^۳$ را ساده می‌کنیم:

$$\alpha^۳+\beta^۳=\alpha^۲+\beta^۲$$
$$\Rightarrow (\alpha+\beta)(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)=(a+\beta)^۲-۲\alpha\beta$$
$$\Rightarrow (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta-\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$$

حالا مقادیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را در معادلهٔ آخر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\frac{-۱}{۲})((\frac{-۱}{۲})^۲-۳(\frac{-m}{۲}))=(\frac{-۱}{۲})^۲-۲(\frac{-m}{۲})$$
$$\Rightarrow \frac{-۱}{۲}(\frac{۱}{۴}+\frac{۳m}{۲})=\frac{۱}{۴}+m \Rightarrow \frac{-۱}{۸}-\frac{۳m}{۴}=\frac{۱}{۴}+m$$
$$\xrightarrow{\times ۸} -۱-۶m=۲+۸m \Rightarrow ۱۴m=-۳ \Rightarrow m=\frac{-۳}{۱۴}$$

اما باید بررسی کنیم که آیا معادلهٔ اصلی به ازای $m=\frac{-۳}{۱۴}$، دو ریشه دارد یا نه. معادله به صورت $۲x^۲+x+\frac{۳}{۱۴}=۰$ است و در نتیجه:

$$\Delta=۱^۲-۴\times۲\times\frac{۳}{۱۴}=۱-\frac{۲۴}{۱۴}<۰$$

پس معادله جواب ندارد و لذا هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود.

۱۶۹- گزینهٔ ۱ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{۷}{۳}$$

از طرفی، می‌دانیم ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، در نتیجه $\alpha\beta=\frac{۴}{۹}$.

حالا دو طرف رابطهٔ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{۷}{۳}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\alpha}^۲+۲\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^۲=\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=\frac{۴۹}{۹}$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta+۲\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۴۹}{۹}-۲\times\frac{۲}{۳}=\frac{۳۷}{۹}$$

حالا در معادلهٔ درجه۲ سؤال به سراغ جمع ریشه‌ها می‌رویم. جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است. پس داریم:

$$\frac{-(-m)}{۹}=\frac{۳۷}{۹}\Rightarrow m=۳۷$$

۱۷۰- گزینهٔ ۱ S و P را برای معادلهٔ جدیدی که به دنبال آن هستیم، محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ است.
جمع و ضرب ریشه‌ها را در معادلهٔ $x^۲+x-۷=۰$ می‌نویسیم:

جمع ریشه‌ها : $\frac{-b}{a}=-۱\Rightarrow\frac{۲}{\alpha}-۱+\frac{۲}{\beta}-۱=-۱$

$$\Rightarrow\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۱$$

ضرب ریشه‌ها : $\frac{c}{a}=-۷$

$$\Rightarrow(\frac{۲}{\alpha}-۱)(\frac{۲}{\beta}-۱)=\frac{۴}{\alpha\beta}-(\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta})+۱=-۷$$

از قسمت قبل می‌دانیم $\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=۱$ است؛ پس:

$$\frac{۴}{\alpha\beta}-۱+۱=-۷\Rightarrow\frac{۴}{\alpha\beta}=-۷\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{۴}{۷}=P$$

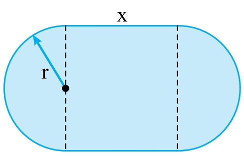
می‌دانیم $\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=\frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=۱$ است، پس:

$$\frac{۲(\alpha+\beta)}{\frac{-۴}{۷}}=۱\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=-\frac{۴}{۷}\Rightarrow(\alpha+\beta)=-\frac{۲}{۷}=S$$

حالا معادله را با داشتن S و P می‌نویسیم:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۲}{۷}x-\frac{۴}{۷}=۰$$
$$\xrightarrow{\times۷} ۷x^۲+۲x-۴=۰$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول مستطیل x باشد. محیط استادیوم برابر است با:



$$۲x+۲\pi r=۲x+۶r=۳۰۰$$
$$\xrightarrow{\div۲} x+۳r=۱۵۰$$
$$\Rightarrow x=۱۵۰-۳r$$

مساحت استادیوم برابر است با:

$$S=x(۲r)+\pi r^۲=x(۲r)+۳r^۲$$
$$\xrightarrow{x=۱۵۰-۳r} S=(۱۵۰-۳r)(۲r)+۳r^۲=۳۰۰r-۶r^۲+۳r^۲$$
$$=۳۰۰r-۳r^۲$$

روش ۱ مساحت به ازای $r=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳۰۰}{-۶}=۵۰$ ماکزیمم می‌گردد. پس:

$$S=۳۰۰(۵۰)-۳(۵۰)^۲=۷۵۰۰$$

روش ۲ مساحت استادیوم برابر است با:

$$S=x(۲r)+\pi r^۲=x(۲r)+۳r^۲$$
$$\xrightarrow{x=۱۵۰-۳r} S=(۱۵۰-۳r)(۲r)+۳r^۲$$
$$=۳۰۰r-۶r^۲+۳r^۲=۳۰۰r-۳r^۲$$
$$S'=۰\Rightarrow۳۰۰-۶r=۰\Rightarrow r=۵۰$$

پس ماکزیمم مساحت به ازای $r=۵۰$ ایجاد می‌شود:

$$S_{max}=S(۵۰)=۳۰۰(۵۰)-۳(۵۰)^۲=۷۵۰۰$$

۱۷۲- گزینهٔ ۴ معادله باید دو ریشه داشته باشد، پس $\Delta>۰$ است:

$$\Delta=(m-۵)^۲-۴(-m+۲)(۳)>۰$$
$$\Rightarrow m^۲-۱۰m+۲۵+۱۲m-۲۴=m^۲+۲m+۱$$
$$=(m+۱)^۲>۰\Rightarrow m\neq-۱$$

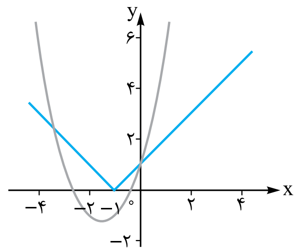
برای این‌که دو ریشهٔ مثبت داشته باشیم، باید مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، مثبت باشد:

$$P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-m+2}{3}>0 \Rightarrow -m+2>0 \Rightarrow m<2$$

$$S=\frac{-b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{m-5}{3}>0 \Rightarrow m-5<0 \Rightarrow m<5$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده به $m<2$ و $m \neq -1$ می‌رسیم.

۱۷۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار دو تابع $y=|x+1|$ و $y=x^2+3x+1$ رسم شود، تعداد نقاط برخورد دو نمودار، همان تعداد جواب‌های معادلهٔ داده‌شده است.



برای رسم $y=|x+1|$، کافی است که نمودار $y=|x|$ را یک واحد به سمت چپ ببریم. نمودار $y=x^2+3x+1$ یک سهمی با شاخه‌های رو به بالا است که در آن $x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2}$.

و در نتیجه داریم:

$$y_{\text{رأس}}=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+3\left(\frac{-3}{2}\right)+1=\frac{-5}{4}$$

بنابراین، نمودارها به این صورت هستند که با توجه به نمودارها، ۲ نقطهٔ برخورد وجود دارد، پس معادله ۲ جواب دارد.

۱۷۴- گزینهٔ ۴ برای این‌که نمودار سهمی، همواره بالای محور xها باشد، باید اولاً $\Delta<0$ بوده تا سهمی با محور xها برخورد نکند و ثانیاً ضریب x^2 مثبت باشد تا شاخه‌های سهمی رو به بالا باشند. بنابراین داریم:

$$\Delta=3-4(m-1)(-m-1)=3+4(m^2-1)<0$$

$$\Rightarrow 3+4m^2-4<0 \Rightarrow m^2<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2}<m<\frac{1}{2} \quad (1)$$

هم‌چنین باید داشته باشیم: $m-1>0 \Rightarrow m>1 \quad (2)$

اشتراک شرط‌های (۱) و (۲)، جواب مسئله است که چون اشتراکی ندارند، ۴ صحیح است.

۱۷۵- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ $x^2-3x+1=0$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=1$ است. در نتیجه داریم:

$$\alpha\beta=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\beta},\ \beta=\frac{1}{\alpha}$$

بنابراین، می‌توانیم عبارت موردنظر را به صورت زیر ساده کنیم:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^3+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^3=(\alpha+\alpha)^3+(\beta+\beta)^3=8\alpha^3+8\beta^3$$

$$=8(\alpha^3+\beta^3)=8((\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta))$$

از طرفی، در معادلهٔ اصلی می‌دانیم: $\alpha+\beta=3$ و $\alpha\beta=1$. در نتیجه حاصل عبارت برابر است با:

$$8((3)^3-3(1)(3))=8\times 18=144$$

آزمون ۱۶

۱۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف معادله را در $x-x^2$ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین برود:

$$a+1+\frac{x-x^2}{x-1}=x-x^2 \Rightarrow a+1+\frac{x(1-x)}{x-1}=x-x^2$$

$$\Rightarrow a+1-x=x-x^2 \Rightarrow x^2-2x+(a+1)=0$$

اگر این معادله، دارای ریشهٔ مضاعف باشد، Δی آن برابر صفر است:

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(a+1)=-4a=0 \Rightarrow a=0$$

اگر $a=0$ باشد، معادلهٔ درجه۲ به صورت $x^2-2x+1=0$ درمی‌آید که ریشهٔ مضاعف آن $x=1$ است، ولی $x=1$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، چون مخرج کسر را صفر می‌کند. پس مقداری برای a وجود ندارد.

۱۷۷- گزینهٔ ۱ چون نمودار در نقاط ۲- و ۶- با محور xها برخورد کرده، این دو عدد، ریشه‌های $f(x)=0$ هستند. پس باید در تجزیهٔ $f(x)$، عامل $x+2$ و عامل $x+6$ وجود داشته باشد و داریم: $f(x)=k(x+2)(x+6)$

از طرفی، با توجه به نمودار داریم $f(0)=-3$. در نتیجه:

$$k(0+2)(0+6)=-3 \Rightarrow k=\frac{-1}{4}$$

بنابراین، معادلهٔ f به صورت $f(x)=\frac{-1}{4}(x+2)(x+6)$ است.

از طرفی، بیشترین مقدار f، با توجه به تقارن نمودار، در نقطهٔ وسط نقاط برخورد با محور xها است. یعنی بیشترین مقدار به ازای $x=\frac{-2-6}{2}=-4$ به دست می‌آید و داریم:

$$f(-4)=\frac{-1}{4}(-4+2)(-4+6)=-\frac{1}{4}(-2)(2)=1$$

۱۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا جمع و ضرب ریشه‌های معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\frac{-a}{1} \\ \sin 15^\circ . \cos 15^\circ=\frac{b}{1} \end{cases}$$

حالا b را محاسبه می‌کنیم:

$$b=\sin 15^\circ \cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin(2\times 15^\circ)=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

حالا برای محاسبهٔ a، دو طرف معادلهٔ اول را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$-a=\sin 15^\circ+\cos 15^\circ$$

$$\Rightarrow a^2=\underbrace{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}_{1}+\underbrace{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}_{\sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow a^2=1+\sin 30^\circ \Rightarrow a^2=\frac{3}{2}$$

اما چون $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ$ مقداری مثبت است، a باید منفی باشد:

$$a=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{6}}{12}$$

۱۷۹- گزینه ۴

برد تابع $f(x)=3x^2+2x-1$ به صورت $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ است.

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4-4(3)(-1)}{4(3)}=-\frac{16}{4(3)}=-\frac{4}{3}$$

بنابراین $a=-\frac{4}{3}$ است. پس ضابطهٔ $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=-\frac{4}{3}x^2+3x-1$$

$\Rightarrow$ محور تقارن: $-\frac{b}{2a}=\frac{-3}{2(-\frac{4}{3})}=\frac{9}{8}$

۱۸۰- گزینه ۲

برای این‌که ضرایب a و b صحیح باشند، ریشهٔ دیگر معادله باید $3-\sqrt{2}$ باشد. ($3-\sqrt{2}$ تنها عددی است که جمع و ضرب آن در $3+\sqrt{2}$ گویا است.)

پس معادله به صورت زیر است:

$$(x-(3-\sqrt{2}))\,(x-(3+\sqrt{2}))=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+(3^2-\sqrt{2}^2)=0 \Rightarrow x^2-6x+7=0$$

از مقایسهٔ این معادله با $x^2+ax+b=0$ معلوم می‌شود: $a=-6$ و $b=7$ بوده و حالا باید معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌های آن، -6 و ۷ باشند. این معادله به شکل زیر است:

$$(x+6)\,(x-7)=0 \Rightarrow x^2-x-42=0$$

۱۸۱- گزینه ۴

عدد ۱ در معادله صدق می‌کند، پس عبارت $x^3-(a-2)x^2+(a-1)x-2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس می‌توان عبارت را با تقسیم‌کردن بر $x-1$ تجزیه کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-(a-2)x^2+(a-1)x-2 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+(3-a)x+2 \\ \hline (3-a)x^2+(a-1)x-2 & \\ -((3-a)x^2-(3-a)x) & \\ \hline 2x-2 & \\ -(2x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

در نتیجه داریم:

$$x^3-(a-2)x^2+(a-1)x-2$$
$$=(x-1)\,(x^2+(3-a)x+2)$$

برای این‌که معادله ۳ ریشهٔ متمایز داشته باشد، باید عبارت درجه۲ در پرانتز دوم، دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس باید Δ ی این عبارت مثبت باشد:

$$\Delta=(3-a)^2-4\times1\times2>0 \Rightarrow a^2-6a+9-8>0$$

$$\Rightarrow a^2-6a+1>0 \Rightarrow a<3-\sqrt{8} \;\text{ یا }\; a>3+\sqrt{8}$$

پس کم‌ترین مقدار طبیعی برای a از عبارت $a>3+\sqrt{8}$ به دست می‌آید که برابر است با شش.

ولی حواستان را جمع کنید اگر $a=6$ باشد، $x=1$ ریشهٔ مضاعف می‌شود؛ ببینید:

معادله: $(x-1)(x^2+(3-a)x+2)=0$

$$\xrightarrow{a=6}(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)(x-1)(x-2)$$
$$=(x-1)^2(x-2)$$

در این حالت ۳ ریشه با علامت متفاوت نداریم. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای a، ۷ می‌شود.

۱۸۲- گزینه ۴

α ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha^2-4\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha^2-1=4\alpha$$

حالا عبارت $\alpha^3-17\alpha$ را ساده می‌کنیم:

$$\alpha^3-17\alpha=\alpha(\alpha^2-17)=\alpha(\underbrace{\alpha^2-1}_{4\alpha}-16)=\alpha(4\alpha-16)$$
$$=4\alpha(\alpha-4)$$

حالا باز سراغ رابطهٔ $\alpha^2-4\alpha-1=0$ می‌رویم و این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\alpha^2-4\alpha=1 \Rightarrow \alpha(\alpha-4)=1 \xrightarrow{\times 4} 4\alpha(\alpha-4)=4$$

۱۸۳- گزینه ۲

وقتی سهمی بر خط $y=-1$ مماس است، y رأس سهمی برابر -1 است. x رأس سهمی، از رابطهٔ $\frac{-b}{2a}$ برابر است با: $\frac{-(-4)}{2(k+1)}=\frac{2}{k+1}$ و با جای‌گذاری $\frac{2}{k+1}$ در معادله و با داشتن y رأس، k به دست می‌آید:

$$f(\frac{2}{k+1})=(k+1)\times\frac{4}{(k+1)^2}-4\times\frac{2}{k+1}+k=-1$$

اگر دو طرف معادله را در $k+1$ ضرب کنیم، داریم:

$$4-8+k(k+1)=-(k+1) \Rightarrow k^2+2k-3=0$$

$$\Rightarrow k=-3 \;\text{ یا }\; k=1$$

اما اگر $k=-3$ باشد، ضریب x^2 در معادله، منفی می‌شود و در نتیجه شاخه‌های سهمی رو به پایین خواهد بود و چون سهمی بر خط $y=-1$ مماس است، با محور xها برخوردی ندارد. پس $k=1$ است و معادلهٔ سهمی به صورت $y=2x^2-4x+1$ درمی‌آید. برای پیداکردن نقاط برخورد با محور xها، معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم:

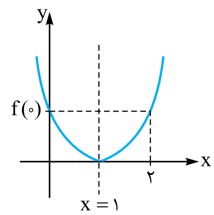
$$2x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس نقاط برخورد با محور xها، $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$(1+\frac{\sqrt{2}}{2})-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$$

۱۸۴- گزینهٔ ۳ با جاگذاری $x=0$ در تابع f خواهیم داشت:

$$f(0)=f(2)$$



چون دو نقطه با طول‌های صفر و ۲ روی f عرض برابر دارند می‌توان نتیجه گرفت که خط $x=1$ محور تقارن تابع است؛ بنابراین مطابق شکل، تابع در رأس خود که آن هم طول برابر ۱ دارد بر محور x ها مماس است:

$$f(1)=0 \Rightarrow a+b+f(2)=0 \Rightarrow a+b=-f(2)$$

۱۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا جمع و ضرب ریشه‌ها را برای معادلهٔ $x^2+2x-1=0$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \alpha+1+\beta+1=\frac{-2}{1} \Rightarrow \alpha+\beta=-4 \\ (\alpha+1)(\beta+1)=\frac{-1}{1} \Rightarrow \alpha\beta+\underbrace{\alpha+\beta}_{-4}+1=-1 \Rightarrow \alpha\beta=2 \end{cases}$$

حالا کافی است که مجموع ریشه‌ها را در معادلهٔ $x^2+kx+k=0$ پیدا کنیم:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\frac{-k}{1} \Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-k$$

$$\Rightarrow 2\times(-4)=-k \Rightarrow k=8$$

۱۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا ۱ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$2\times 1^3+a\times 1^2-2\times 1-3=0 \Rightarrow a=3$$

حالا که ضرایب معادله معلوم شده، آن را تجزیه می‌کنیم. البته می‌دانیم یکی از عوامل تجزیه، $x-1$ است:

$$2x^3+3x^2-2x-3=2x^3-2x+3x^2-3$$

$$=2x(x^2-1)+3(x^2-1)=(x^2-1)(2x+3)$$

$$=(x-1)(x+1)(2x+3)$$

بنابراین ریشه‌ها برابر ۱، ۱− و $\frac{-3}{2}$ هستند و حالا باید معادلهٔ درجه‌دومی بنویسیم که ریشه‌های آن، $\frac{1}{\alpha}=-1$ و $\frac{1}{\beta}=\frac{-2}{3}$ باشند. این معادله به شکل زیر است:

$$(x+1)(x+\frac{2}{3})=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3x^2+5x+2=0$$

۱۸۷- گزینهٔ ۴ جمع و ضرب ریشه‌ها در معادلهٔ $4x^2-3x-2=0$ برابر است با:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-(-3)}{4}=\frac{3}{4} \\ \alpha\beta=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

حالا جمع و ضرب ریشه‌های معادلهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم:

جمع ریشه‌ها $=(2\alpha-1)^2+(2\beta-1)^2$

$$=4\alpha^2-4\alpha+1+4\beta^2-4\beta+1$$

$$=4(\alpha^2+\beta^2)-4(\alpha+\beta)+2$$

$$=4((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)-4(\alpha+\beta)+2$$

$$=4((\frac{3}{4})^2-2(\frac{-1}{2}))-4(\frac{3}{4})+2=\frac{21}{4}$$

ضرب ریشه‌ها $=(2\alpha-1)^2(2\beta-1)^2=(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1)^2$

$$=(4(\frac{-1}{2})-2(\frac{3}{4})+1)^2=\frac{25}{4}$$

در نتیجه، معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-\frac{21}{4}x+\frac{25}{4}=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{21}{4} \\ n=\frac{25}{4} \end{cases}$$

۱۸۸- گزینهٔ ۴ برای این‌که به ضرایب صحیح برسیم، ریشهٔ $\beta=\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ را هم برای معادله در نظر می‌گیریم.
ابتدا معادلهٔ درجه‌دومی می‌نویسیم که α و β ریشه‌های آن باشند:

$$(x-(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}))(x-(\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}))=0$$

$$\Rightarrow x^2-2\sqrt{3+\sqrt{2}}\,x+(3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2})=0$$

$$\Rightarrow x^2+2\sqrt{2}=2\sqrt{3+\sqrt{2}}\,x$$

حالا دو طرف معادلهٔ آخر را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^4+8+4\sqrt{2}x^2=4(3+\sqrt{2})x^2$$

$$\Rightarrow x^4+8+4\sqrt{2}x^2=12x^2+4\sqrt{2}x^2$$

$$\Rightarrow x^4-12x^2+8=0$$

در نتیجه داریم $a=-12$ و $b=8$. $a+b=-4$

۱۸۹- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sqrt{x}(1+\sqrt{x}))^2-8(\sqrt{x}+x)+12=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+x)^2-8(\sqrt{x}+x)+12=0$$

حالا معادله را به صورت عبارتی درجه۲ برحسب $\sqrt{x}+x$ ببینید و آن را تجزیه کنید: $(x+\sqrt{x}-2)(x+\sqrt{x}-6)=0$

$$\begin{cases} x+\sqrt{x}-2=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2+t-2=0 \\ \Rightarrow (t-1)(t+2)=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \\ t=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \ (\text{غیرقابل قبول}) \end{cases} \\ x+\sqrt{x}-6=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2+t-6=0 \\ \Rightarrow (t+3)(t-2)=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \\ t=-3 \Rightarrow \sqrt{x}=-3 \Rightarrow (\text{غیرقابل قبول}) \end{cases} \end{cases}$$

پس ریشه‌ها $x=1$ و $x=4$ هستند و ضربشان برابر ۴ است.

۱۹۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$y=a(x^۲+x)+۳x^۲-۲$

حالا دو مقدار $x=۰$ و $x=-۱$ که باعث می‌شوند a حذف شود را جای‌گذاری می‌کنیم.

$x=۰ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow$ نمودار از نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌گذرد.

$\Rightarrow$ نمودار حتماً از ناحیه‌های ۳ و ۴ عبور می‌کند.

$x=-۱ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow$ نمودار از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد.

$\Rightarrow$ نمودار حتماً از ناحیهٔ دوم می‌گذرد.

دقت کنید که نقاط $(۰,-۲)$ و $(-۱,۱)$ به ازای هر مقدار a، روی منحنی قرار دارند.
پس تنها ممکن است که از ناحیهٔ یک عبور نکند.

آزمون ۱۷

۱۹۱- گزینهٔ ۱ برای این‌که $m^۲\in(۳m-۲,۲m)$ باشد، باید داشته باشیم: $۳m-۲<m^۲<۲m$

این دو نامعادله را به طور جداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳m-۲<m^۲ \Rightarrow m^۲-۳m+۲>۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۲)>۰ \\ \Rightarrow m<۱ \text{ یا } m>۲ \quad (۱) \\ m^۲<۲m \Rightarrow m^۲-۲m<۰ \Rightarrow m(m-۲)<۰ \\ \Rightarrow ۰<m<۲ \quad (۲) \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های (۱) و (۲)، جواب نهایی است: $۰<m<۱$

۱۹۲- گزینهٔ ۳ علامت عبارت درجه‌دوم خارج دو ریشه، موافق علامت ضریب $x^۲$ است، پس ۲- و b ریشه‌های عبارت $ax^۲+۳x-a$ هستند.
اگر $x=-۲$، ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲+۳x-a=۰$ باشد، باید در این معادله صدق کند. در نتیجه:

$۴a-۶-a=۰ \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow a=۲$

پس عبارت به صورت $۲x^۲+۳x-۲$ است و داریم:

$۲x^۲+۳x-۲=(x+۲)(۲x-۱)$

ریشه‌های عبارت برابر ۲- و $\frac{۱}{۲}$ هستند. در نتیجه $b=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۳- گزینهٔ ۳ برای حل نامعادله‌های $۴x-۵<x+۳<۴x+m$
در مرحلهٔ اول، از هر ۳ عبارت $۴x$ را کم کنید: $-۵<-۳x+۳<m$
حالا از ۳ طرف، ۳ واحد کم می‌کنیم: $-۸<-۳x<m-۳$
و در آخرین مرحله، ۳ طرف را بر ۳- تقسیم می‌کنیم. دقت کنید که ضرب و تقسیم نامعادله در عدد منفی، جهت نابرابری‌ها را عوض می‌کند:

$\frac{-۸}{-۳}>x>\frac{m-۳}{-۳} \Rightarrow \frac{۳-m}{۳}<x<\frac{۸}{۳}$

در نتیجه، با توجه به این‌که جواب بازه $(-۲,b)$ است، داریم:

$$\begin{cases} \frac{۳-m}{۳}=-۲ \Rightarrow ۳-m=-۶ \Rightarrow m=۹ \\ b=\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow b+m=\frac{۸}{۳}+۹=\frac{۳۵}{۳}$

۱۹۴- گزینهٔ ۲ برای این‌که نمودار تابع f، بالای خط $y=\frac{۵}{۲}$ قرار داشته باشد، باید داشته باشیم $f(x)>\frac{۵}{۲}$، بنابراین باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$\frac{۷}{۲}x-x^۲+۱>\frac{۵}{۲} \Rightarrow -x^۲+\frac{۷}{۲}x-\frac{۳}{۲}>۰$

$\xrightarrow{\times(-۲)} ۲x^۲-۷x+۳<۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x-۳)<۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x<۳$

در نتیجه داریم: $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=۳$ و $b-a=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$

۱۹۵- گزینهٔ ۲ جدول تعیین علامت عبارت درجه‌دوم، هرگز چنین شکلی ندارد. این جدول می‌تواند مربوط به یک عبارت درجه‌یک باشد، پس باید ضریب $x^۲$ در عبارت $A(x)$ را برابر صفر قرار دهیم: $a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$
اما چون علامت عبارت بعد از ریشه، منفی است، معلوم می‌شود که ضریب x در عبارت منفی بوده است، پس $b-۲$ منفی است و چون b عددی طبیعی است، فقط $b=۱$ قابل‌قبول است. حالا داریم $f(x)=-x+c$ و می‌دانیم عدد ۲، ریشهٔ f است. در نتیجه:

$f(۲)=۰ \Rightarrow -۲+c=۰ \Rightarrow c=۲$

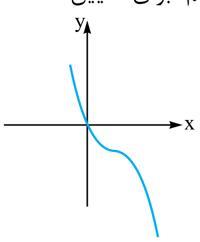
۱۹۶- گزینهٔ ۱ عبارت $(x^۲+ax+b)(x-۱)$ به خاطر پرانتز $(x-۱)$، ریشهٔ ۱ دارد. از طرفی، چون جواب نامعادله $[-۱,+\infty)$ است، باید ۱- هم، ریشهٔ این عبارت باشد. همچنین علامت عبارت، هم قبل از $x=۱$ و هم بعد از آن مثبت بوده، چون در تمام بازهٔ $[-۱,+\infty)$، علامت مثبت است. پس در $x=۱$ تغییر علامت نداریم و $x=۱$ باید ریشهٔ مضاعفِ عبارت باشد. این در صورتی اتفاق می‌افتد که $x=۱$، یک بار هم، ریشهٔ پرانتز $(x^۲+ax+b)$ باشد، پس دو ریشهٔ این پرانتز، اعداد ۱ و ۱- هستند و داریم:

$x^۲+ax+b=(x-۱)(x+۱)=x^۲-۱$

اگر ضریب جملات متشابه را برابر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$a=۰,b=-۱ \Rightarrow a-b=۱$

۱۹۷- گزینهٔ ۴ عبارت $x^۲$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس می‌توانیم از نامعادله حذفش کنیم. برای تعیین علامت $(f(x)-۲)$ کافی است نمودار را دو واحد به سمت پایین منتقل کنیم. مطابق شکل $(f(x)-۲)$ به ازای xهای کوچک‌تر از صفر مثبت و به ازای xهای بزرگ‌تر از صفر، منفی است.



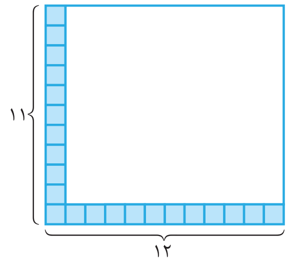
$\frac{f(x)-۲}{x+۱}\ge۰ \Rightarrow$

		۱-		۰	
$x+۱$	−	۰	+		+
$f(x)-۲$	+		+	۰	−
$\frac{f(x)-۲}{x+۱}$	−	ت‌ن	+	۰	−

با توجه به جدول، جواب نامعادلهٔ بازهٔ $(-۱,۰]$ است.

آزمون ۶۶

۷۷۱- گزینهٔ ۴ شکل اول مستطیلی با ابعاد 3×2 است، شکل دوم 4×3، شکل سوم 5×4 و ... شکل دهم مستطیلی 12×11 است.



در شکل دهم $22=11+11$ خانه رنگ شده است. بنابراین نسبت خانه‌های سفید به خانه‌های رنگ‌شده برابر است با:

$$\frac{11\times12-22}{22}=\frac{12-2}{2}=5$$

۷۷۲- گزینهٔ ۲ قدرنسبت برابر است با: $\frac{45-5}{9+1}=\frac{40}{10}=4$

بنابراین پنجمین واسطه، ششمین جملهٔ دنباله است و برابر است با:

$$a_6=a_1+5d=5+5\times4=25$$

۷۷۳- گزینهٔ ۳ مخرج هر کسر را با ضرب‌کردن در مزدوج مخرج، گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}>10$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\times\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}>10$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\dots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}>10 \Rightarrow \cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}$$

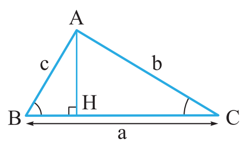
$$-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\dots+\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}}>10$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1}-1>10 \Rightarrow \sqrt{n+1}>11$$

$$\Rightarrow n+1>121 \Rightarrow n>120$$

پس حداقل مقدار طبیعی برای n برابر ۱۲۱ است.

۷۷۴- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل داریم:

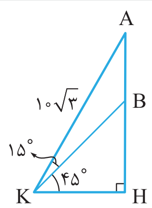


$$\begin{cases}\sin\hat{B}=\frac{AH}{c}\Rightarrow c.\sin\hat{B}=AH\\ \cos\hat{B}=\frac{BH}{c}\Rightarrow c.\cos\hat{B}=BH\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{c\sin\hat{B}}{a-c.\cos\hat{B}}=\frac{AH}{a-BH}=\frac{AH}{CH}=\tan\hat{C}$$

۷۷۵- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل داریم:



$$\sin60^\circ=\frac{AH}{10\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AH=10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15$$

$$\cos60^\circ=\frac{KH}{10\sqrt{3}}\Rightarrow KH=10\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=5\sqrt{3}$$

$$\tan45^\circ=\frac{BH}{KH}\Rightarrow BH=KH\times\tan45^\circ$$

$$=5\sqrt{3}\times1=5\sqrt{3}$$

در نتیجه داریم: $AB=AH-BH=15-5\sqrt{3}=5(3-\sqrt{3})$

۷۷۶- گزینهٔ ۴

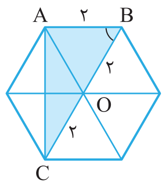
$$2\sin^2x+\cos^2x=\frac{3}{2}\Rightarrow \sin^2x+\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos^2x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$\tan^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1\Rightarrow \tan^4x=1$$

۷۷۷- گزینهٔ ۳ اگر در یک شش‌ضلعی منتظم قطرها را رسم کنیم، ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان ایجاد می‌شود. در مثلث ABC می‌دانیم $AB=OB=OC=2$ است.



مساحت مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها می‌شود:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin\hat{B}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

۷۷۸- گزینهٔ ۳

$$\frac{\tan^2x}{1+\tan^2x}+\frac{\cot^2x}{1+\cot^2x}=\frac{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}}+\frac{\frac{\cos^2x}{\sin^2x}}{\frac{1}{\sin^2x}}$$

$$=\sin^2x+\cos^2x=1$$

۷۷۹- گزینهٔ ۲ $8x^3-12x^2+6x-9=(2x-1)^3-8$

اگر به جای x عدد $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$ را قرار دهیم، داریم:

$$(2\times\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}-1)^3-8=\sqrt[3]{3}^3-8=3-8=-5$$

۷۸۰- گزینهٔ ۳ روش ۱

$$\begin{cases}5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\\ 5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$$

بنابراین $A\sqrt{3}$ عددی گویا است.

روش ۲

$$A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^2=5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+2(\sqrt{((5^2)-(2\sqrt{6})^2)})$$

$$A^2=10+2=12 \Rightarrow A=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

پس $\sqrt{3}A$ عددی گویا است.

۷۸۱- گزینهٔ ۳ α عددی بین صفر و ۱- است. پس α^2 مثبت و α^3 و $\sqrt[3]{\alpha}$ منفی هستند. از طرفی اعداد بین ۱- و ۱ هر چه توان بزرگ‌تری داشته باشند، از نظر اندازه (قدرمطلق) کوچک‌ترند. پس با توجه به منفی‌بودن α داریم: $\sqrt[3]{\alpha}<\alpha^3$

۷۸۲- گزینهٔ ۲

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=A$$

حالا طرفین عبارت $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=27$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1})=27A$$

$$x-2-(x+1)=27A \Rightarrow -3=27A \Rightarrow A=\frac{-1}{9}$$

۷۸۳- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که $a>1$ است، جدول تعیین علامت عبارت $\frac{x-a}{ax-1}$ به صورت زیر است:

x		$\frac{1}{a}$		a	
$\frac{x-a}{ax-1}$	+	ت	−	۰	+

در نتیجه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-a}{ax-1}<0$ به صورت بازهٔ $(\frac{1}{a},a)$ است.

۷۸۴- گزینهٔ ۲ **روش ۱** چون $|3x-4|<x$ در نتیجه x حتماً مثبت است و می‌توان دو طرف نامعادله را به توان ۲ رساند.

$$9x^2-24x+16<x^2 \Rightarrow 8x^2-24x+16<0$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2<0 \Rightarrow 1<x<2$$

بنابراین $a=1$ و $b=2$ است و داریم: $\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$

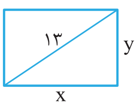
روش ۲ چون $|3x-4|<x$ است، مقدار x حتماً مثبت است.

پس داریم: $-x<3x-4<x \Rightarrow 3x-4<x$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(1)} 2x<4 \Rightarrow x<2 \\ \xrightarrow{(2)} 3x-4>-x \Rightarrow 4x>4 \Rightarrow x>1 \end{cases}$$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow 1<x<2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$$

۷۸۵- گزینهٔ ۲ **روش ۱**



$$x+y=17 \Rightarrow y=17-x$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^2+y^2=13^2$$

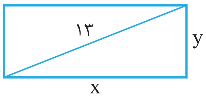
$$\Rightarrow x^2+(17-x)^2=169 \Rightarrow 2x^2-34x+120=0$$

$$\Rightarrow x^2-17x+60=0 \Rightarrow x=5 \text{ یا } 12$$

بنابراین دو ضلع مستطیل ۵ و ۱۲ هستند و مساحت آن برابر $5\times12=60$ است. در نتیجه: $\text{مساحت} - \text{محیط} = 60-34=26$

روش ۲ $2(x+y)=34 \Rightarrow x+y=17$

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم: $x^2+y^2=(13)^2$



$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$\Rightarrow 169=(17)^2-2xy$$

$$\Rightarrow xy=60$$

$\text{مساحت} - \text{محیط} = 60-34=26$

۷۸۶- گزینهٔ ۲ **روش ۱** با توجه به این‌که ضریب x^2 در تابع $y=x^2-ax+b$ برابر یک است با دو انتقال در راستای محور x و y می‌توان از $y=x^2$ به این تابع رسید. اول باید ۴ واحد به سمت پایین منتقل شود که معادلهٔ آن به صورت $y=x^2-4$ درمی‌آید که دارای دو ریشهٔ ±2 است. حالا برای این‌که ریشهٔ مثبت ۳ باشد x را به $x-1$ تبدیل می‌کنیم: $y=(x-1)^2-4$

در نتیجه ریشهٔ کوچک‌تر برابر ۱- است.

روش ۲ البته می‌توانستید در این سؤال برای a و b دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید.

۷۸۷- گزینهٔ ۴ اگر معادلهٔ سهمی $y=-x^2+6x$ باشد، مختصات A، (رأس سهمی) به صورت زیر است:

$$x_A=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2(-1)}=3 \Rightarrow y_A=-3^2+6\times3=9$$

از طرفی طول نقطهٔ B یکی از صفرهای تابع است:

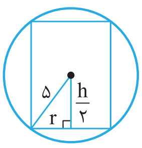
$$-x^2+6x=0 \Rightarrow -x(x-6)=0 \Rightarrow x=0,6$$

در نتیجه مختصات B به صورت $(6,0)$ است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AO=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{3^2(1+3^2)}=3\sqrt{10} \\ AB=\sqrt{(6-3)^2+(0-9)^2}=3\sqrt{10} \\ OB=\sqrt{(6-0)^2+(0-0)^2}=6 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{محیط}=6\sqrt{10}+6$$

۷۸۸- گزینهٔ ۴ شکل مقابل برشی از شکل اصلی است.



$\frac{h}{2}$ نصف ارتفاع استوانه و r شعاع استوانه است.

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$r^2+(\frac{h}{2})^2=5^2 \Rightarrow r^2=25-\frac{h^2}{4}$$

در نتیجه حجم استوانه برابر است با:

$$V=\pi r^2h=\pi(25-\frac{h^2}{4})h=\pi(25h-\frac{h^3}{4})$$

$$=\frac{\pi}{4}(100h-h^3)$$

۷۸۹- گزینهٔ ۴ در ۱ داریم:

$$f(x)=\frac{۴-۶x}{۳x-۲}=\frac{۲(۲-۳x)}{-(۲-۳x)}=-۲$$

در ۲ چون همواره $\sin x \le ۱$ است: $\sin x-۱\le ۰$

پس تابع فقط در نقاطی که $\sin x=۱$ باشد، تعریف شده است و در این نقاط هم مقدار ثابت صفر را دارد. پس ثابت است.

در ۳ داریم:

$$f(x)=\frac{۲^x}{۲^x+۳\times ۲^x}=\frac{۲^x}{۲^x(۱+۳)}=\frac{۲^x}{۲^۲\times ۲^x}=\frac{۱}{۴}$$

اما ۴ ثابت نیست و برابر است با:

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

۷۹۰- گزینهٔ ۳ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در نتیجه:

$$\begin{cases}f(۲)=۴ \Rightarrow ۲a+b=۴\\ f(-۱)=-۵ \Rightarrow -a+b=-۵\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۳\\ b=-۲\end{cases}$$

بنابراین: $f(x)=۳x-۲$

با توجه به گزینه‌ها، ۳ تابعی ثابت است.

$$۳x-f(x)=۳x-(۳x-۲)=۲$$