

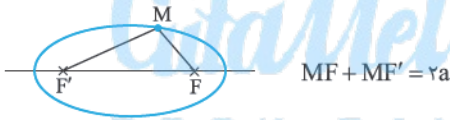


۷	فصل ۱: ترکیببات (آنالیز ترکیبی)
۱۵	فصل ۲: احتمال
۴۴	فصل ۳: دنباله‌های حسابی و هندسی
۵۷	فصل ۴: جزء صحیح و قدر مطلق
۷۱	فصل ۵: توابع نمایی و لگاریتم
۸۲	فصل ۶: مثلثات
۱۰۷	فصل ۷: تابع
۱۳۱	فصل ۸: معادله، نامعادله و تعیین علامت
۱۵۲	فصل ۹: حد و پیوستگی
۱۷۰	فصل ۱۰: دنباله
۱۷۸	فصل ۱۱: مجانب
۱۸۶	فصل ۱۲: مشتق
۲۱۵	فصل ۱۳: کاربرد مشتق
۲۴۸	فصل ۱۴: هندسه‌ی مختصات (دستگاه معادلات خطی)
۲۶۰	فصل ۱۵: منحنی‌های درجه دوم (مقاطع مخروطی)
۲۸۹	فصل ۱۶: انتگرال
۳۰۹	فصل ۱۷: ماتریس
۳۱۷	فصل ۱۸: آمار و مدل‌سازی
۳۴۰	فصل ۱۹: هندسه و استدلال
۳۴۹	فصل ۲۰: مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس
۳۶۶	فصل ۲۱: تشابه و قضیه‌ی تالس
۳۷۶	فصل ۲۲: شکل‌های فضایی



۲- بیضی

تعریف بیضی: بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که جمع فاصله‌ی آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد. دو نقطه‌ی ثابت را F و F' و مقدار ثابت را $2a$ می‌نامیم. پس نقطه‌ی M در صورتی روی بیضی است که $MF + MF' = 2a$ باشد.

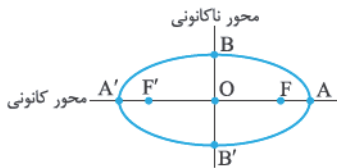


F و F' را کانون‌های بیضی می‌نامیم.

برای رسم بیضی نخی به طول $2a$ را در نقاط F و F' محکم می‌کنیم و سپس قلم را می‌چرخانیم.

ویژگی‌های بیضی

با F ، F' و مقدار $2a$ آشنا شدیم. هر بیضی دو محور تقارن دارد. محور کانونی (که هر دو کانون روی آن هستند) و محور غیر کانونی. در محل برخورد دو محور با هم، مرکز بیضی قرار دارد و در محل برخورد بیضی با محورها، رأس‌ها را داریم.



A و A' : رئوس کانونی

B و B' : رأس‌های ناکانونی

F و F' : کانون

O : مرکز

مقادیر فاصله‌ها را هم باید بلد باشیم:

$$OF = OF' = c \quad OA = OA' = a \quad OB = OB' = b$$

فاصله‌ی $F'F = 2c$ را فاصله‌ی کانونی می‌نامند. $B'B = 2b$ را قطر کوچک

می‌نامیم. قطر بزرگ $AA' = 2a$ همان طول نخ یا ثابت بیضی است. البته

AA' طول بلندترین وتر و بیشترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی بیضی است.

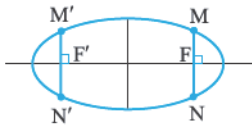
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
جمع‌بندی ریاضی تشریحی
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲

میزان کشیدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز تعیین می‌شود. $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ خروج از مرکز بیضی

حاصل e عددی بین صفر و یک است و هر چه e بیشتر باشد، بیضی کشیده‌تر است. وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی را وتر کانونی می‌نامیم. طول این وتر $MN = M'N' = \frac{2b^2}{a}$ است.

فرمول دیگری برای MN به صورت $MN = 2b\sqrt{1 - e^2}$ هم داریم.

وتر کانونی را ببینید:



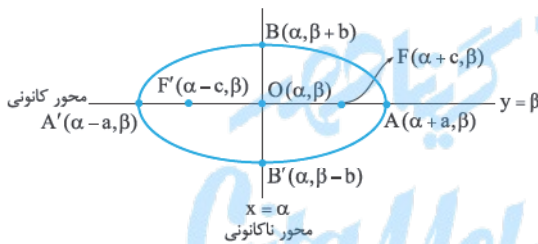
$$MN = \frac{2b^2}{a} = 2b\sqrt{1 - e^2} = M'N'$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

در بیضی بین a ، b و c رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$FB = a$ = فاصله‌ی رأس ناکانونی از کانون و بنابراین:

انواع قرارگیری بیضی در صفحه



الف) در بیضی افقی، محور کانونی افقی (موازی محور

x ها) است. در صورت تست گفته بودند «هر دو کانون

روی خطی موازی محور x ها قرار دارند». معادله‌ی

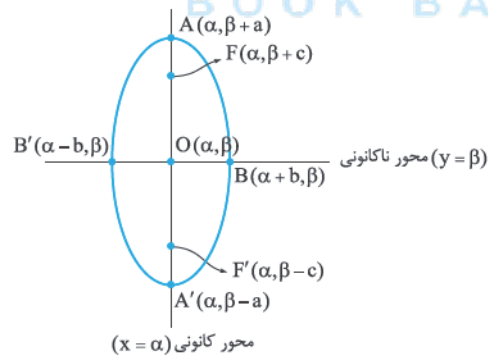
محور کانونی $y = \beta$ و معادله‌ی محور ناکانونی

$x = \alpha$ است. در این بیضی، مرکز و رأس‌های

کانونی و کانون‌ها، عرض مساوی دارند.

در این بیضی‌ها: $\alpha - a \leq x \leq \alpha + a$ و $\beta - b \leq y \leq \beta + b$. معادله‌ی خط‌های مماس بر بیضی در رئوس کانونی

$x = \alpha \pm a$ است. معادله‌ی خطوط مماس در رئوس ناکانونی به صورت $y = \beta \pm b$ است.



ب) در بیضی قائم، محور کانونی موازی محور y ها

است و رأس‌های کانونی و کانون‌ها و مرکز، دارای

یک طول هستند. در این بیضی‌ها داریم:

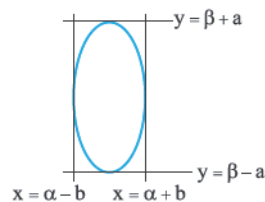
$$\alpha - b \leq x \leq \alpha + b$$

$$\beta - a \leq y \leq \beta + a$$

ج) در محل رئوس، خط‌های مماس بر بیضی را

می‌بینیم:

مساحت مستطیل برابر $4ab$ است.



معادله بیضی

معادله بیضی به مرکز $O(\alpha, \beta)$ به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ نوشته می شود و در مخروطیها باید a^2 و b^2 قرار دهیم.

با توجه به رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در بیضی، همیشه $a^2 > b^2$ است. قانون انتخاب مخروطیها خیلی ساده است: در بیضی افقی، مخروط بزرگتر (یعنی a^2) را برای x می گذاریم و در بیضی قائم، مخروط بزرگتر را برای y می گذاریم.

مثلاً در بیضی $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$ داریم:

الف) مرکز بیضی $O(-3, 2)$ است. ب) چون مخروط x^2 بیشتر است بیضی افقی می شود.

ج) $a^2 = 16$ و $b^2 = 12$ است؛ بنابراین $a = 4$ و $b = 2\sqrt{3}$

د) پس طول قطر بزرگ یا مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون یا بلندترین وتر $MF + MF' = 2a = 8$ است.

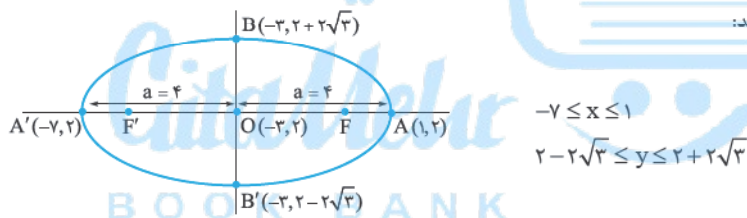
(سراسری ۸۶ و سنهش ۹۳)

ه) مساحت محدود به مماسها در رؤس، $S = 4ab = 32\sqrt{3}$ است. (فارج ۹۰)

و) طول وتر گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، $MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 12}{4} = 6$ است. (سراسری ۸۷ و ۹۰)

ز) با توجه به رابطه فیثاغورس $c^2 = a^2 - b^2 = 4$ است. پس $c = 2$ و مقدار خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ است. مختصات کانونها هم به صورت $F(-1, 2)$ و $F'(-5, 2)$ است.

ح) مختصات رؤس را بیابید:



رؤس A و A' دورترین نقاط بیضی تا مرکز هستند. (فارج ۸۶)

ط) بیشترین و کمترین فواصل نقاط بیضی تا کانون برابر $AF' = a + c = 6$ و $AF = a - c = 2$ هستند. (سنهش ۹۳)

ی) بیشترین فاصله بیضی از محور y ها یعنی بیشترین مقدار $|x|$ در این بیضی برابر 7 است. (سنهش ۹۳)

استفاده از معادله گسترده بیضی

در معادله گسترده بیضی جملات x^2 و y^2 داریم که ضریب آنها مساوی نیست اما هم علامت است. مثلاً

$$2x^2 + 3y^2 - 6x + y = 1$$

بعد از مربع کامل کردن، باید طرف راست عددی مثبت باشد.

الف) مرکز بیضی را با مشتق نسبت به x و نسبت به y به دست می آوریم. مثلاً مرکز بیضی به معادله $4x^2 + y^2 - 8x + 6y = 3$

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f'_y &= 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow O(1, -3)$$

به صورت روبه رو پیدا می شود:

ب) اگر ضریب x^2 کم تر باشد، بیضی افقی است و برعکس. پس مثلاً در بیضی بالا (چون ضریب x^2 بیشتر است) شکل

قائم داریم.

$$e = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

ضریب کم‌ترین x^2 و y^2 و
ضریب بیشتر بین x^2 و y^2

ج خروج از مرکز بیضی همیشه برابر است با:

پس خروج از مرکز بیضی موردنظر $e = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵- اگر مرکز یک بیضی افقی در نقطه‌ی $(-4, -1)$ ، خروج از مرکز $\frac{4}{5}$ و طول یک رأس کانونی آن ۱ باشد، آن‌گاه

(کتاب درسی)

مجموع طول قطرهای و فاصله‌ی کانونی بیضی چه قدر است؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۳۰ (۴)

۱۶- مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(3, 6)$ و $(3, -2)$ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{4}$ می‌باشد. این بیضی محور x ها را

(شماره ۹۲)

با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

- ۱، ۵ (۱) -۱، ۷ (۲) ۰، ۶ (۳) ۱، ۵ (۴)

۱۷- مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-1, 3)$ و $(-1, -1)$ است. این بیضی از نقطه‌ی $(-4, 2)$ می‌گذرد، خروج

(سراسری ۹۲)

از مرکز آن کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

۱۸- کانون‌های یک بیضی در نقاط $F(1 + \sqrt{5}, -1)$ و $F'(1 - \sqrt{5}, -1)$ قرار دارند. اگر اندازه‌ی وتر گذرنده از کانون و

عمود بر محور کانونی بیضی $\frac{1}{3}$ باشد، فاصله‌ی یک کانون از رأس ناکانونی کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{14}$ (۴)

۱۹- بیضی به معادله‌ی $x^2 + 4y^2 + ay + bx + c = 0$ ، در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و از نقطه‌ی

(شماره ۹۳)

$(-1, -2)$ می‌گذرد. عرض مرکز آن کدام است؟

- ۲ (۱) -۳ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{17}{8}$ (۴)

۲۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، معادله‌ی $3x^2 + y^2 - 6x + ay + a + 6 = 0$ نمایش یک بیضی است؟

(سنجش ۹۳ و ۹۴)

- $-2 < a < 6$ (۱) $-6 < a < 2$ (۲)

- $a < -2$ یا $a > 6$ (۳) $a < -6$ یا $a > 2$ (۴)

۲۱- کانون‌های بیضی به معادله‌ی $2x^2 + 7y^2 - 4x = 12$ دو سر قطری از دایره‌اند. این دایره نیمساز ناحیه‌ی اول را با

کدام طول قطع می‌کند؟

- ۲ (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) ۳ (۴)

۲۲- نقطه‌ی M بر روی یک منحنی طوری حرکت می‌کند که فاصله‌ی آن از خط $x = 8$ دو برابر فاصله‌ی آن از نقطه‌ی

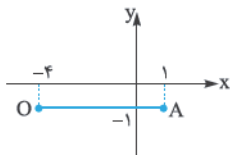
$(2, 0)$ است. اندازه‌ی بزرگ‌ترین وتر این منحنی کدام است؟

- $4\sqrt{10}$ (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) ۸ (۳) $8\sqrt{5}$ (۴)



پاسخ نامه‌ی تشریحی

۱۵- گزینه‌ی «۲» شکل را ببینید:



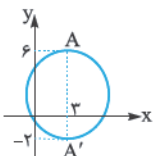
فاصله‌ی OA یعنی a برابر $1 - (-4) = 5$ است. پس با تعریف خروج از مرکز داریم:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 4$$

و طبق رابطه‌ی فیثاغورس: $b = 3$. پس داریم:

$$\Rightarrow 2(a + b + c) = 2(5 + 3 + 4) = 24$$

۱۶- گزینه‌ی «۳» شکل را ببینید:



از $A(3, 6)$ و $A'(3, -2)$ سه نتیجه می‌گیریم:

اولاً بیضی قائم است، ثانیاً $AA' = 2a = 8$ ، ثالثاً $O = \frac{A + A'}{2} = (3, 2)$. حالا با کمک خروج از مرکز، مقدار b را حساب کنیم:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \xrightarrow{\frac{e}{a} = \frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{16}} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = 12$$

حالا معادله‌ی بیضی قائم را می‌نویسیم: $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$ $\xrightarrow{O(3,2), b^2=12, a^2=16}$ $\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

$$\xrightarrow{\text{محور } x \text{ را قطع کند } y=0} \frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(0-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{12} = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 9 \Rightarrow x-3 = \pm 3 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 6$$

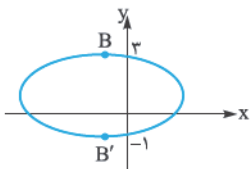
پس می‌توان گفت این بیضی وتری به طول ۶ روی محور x ‌ها می‌سازد. (دوباره به شکل بیضی نگاه کنید)

۱۷- گزینه‌ی «۳» مرکز بیضی در وسط قطر کوچک قرار دارد. یعنی: $O = \frac{B + B'}{2} = (-1, 1)$

$$b = BO = 3 - 1 = 2$$

مقدار b هم برابر فاصله‌ی BO است:

از طرفی چون B و B' طول مساوی دارند، قطر کوچک بیضی موازی محور y ‌ها است، پس بیضی افقی است. نگاهی به شکل داشته باشید:



معادله‌ی بیضی افقی به مرکز $O(-1, 1)$ و با دانستن $b = 2$ به صورت زیر است:

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

حالا سؤال گفته این بیضی از $(-4, 2)$ می‌گذرد:

$$\xrightarrow{(-4, 2)} \frac{(-4+1)^2}{a^2} + \frac{(2-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^2 = 12$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

خروج از مرکز برابر است با:

نقطه‌ی داده‌شده روی محورهای تقارن بیضی نبود پس ویژگی خاصی نداشت جز این که در معادله صدق می‌کرد.

فاصله‌ی کانونی این بیضی $FF' = 2c = 4\sqrt{2}$ هم می‌تواند مورد سؤال قرار گیرد.

۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
جمع‌بندی ریاضی تجربی
خبرنگار
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲

۱۸- گزینه‌ی «۲» جای کانون‌ها (عرض مساوی دارند) نشان می‌دهد بیضی افقی است. مرکز بیضی در وسط آن‌ها

یعنی $O(1, -1)$ است و فاصله‌ی کانونی هم $FF' = 2\sqrt{5} = 2c$ است. پس داریم:

$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$$

از طرفی طول وتر کانونی را در صورت سؤال داده:

با توجه به فیثاغورس و مقدار c هم می‌نویسیم: $c^2 = a^2 - b^2 = 5$ ، پس باید a و b را از معادلات زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow[\frac{4}{3}a \text{ را قرار می‌دهیم}]{\text{از پایین به جای } b^2 \text{ عبارت}} a^2 - \frac{4}{3}a = 5 \Rightarrow 3a^2 - 4a - 15 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{حل معادله}]{a > 0} a = 3 \Rightarrow b = 2$$

$FB = a = 3$ فاصله‌ی کانون از رأس ناکانونی را می‌خواهیم:

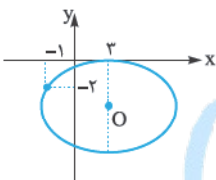
۱۹- گزینه‌ی «۱» در تست خارج ۹۴، خروج از مرکز این بیضی را می‌خواستند که بدون حل و بدون محاسبه‌ی

$$a, b, c \text{ از رابطه‌ی } e = \sqrt{1 - \frac{\min(A, B)}{\max(A, B)}} \text{ به دست می‌آمد. (جوابش } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ بود)}$$

اما حل این سؤال: اولاً بیضی افقی است. (چون ضریب x^2 کم‌تر است)

ثانیاً در $(3, 0)$ بر محور x ‌ها مماس است. پس با توجه به شکل، باید طول مرکز 3 باشد:

در واقع $(3, 0)$ یک رأس ناکانونی بیضی است.



$$f'_x = 2x + b = 0 \xrightarrow{x=3} 2 \times 3 + b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$\xrightarrow{\text{صدق می‌کند}} (3, 0) \rightarrow 9 + 0 + 0 + (-6)(3) + c = 0 \Rightarrow c = 9$$

$$\xrightarrow{\text{صدق می‌کند}} (-1, -2) \rightarrow (-1)^2 + 4(-2)^2 + a(-2) + (-6)(-1) + 9 = 0 \Rightarrow 1 + 16 - 2a + 15 = 0 \Rightarrow a = 16$$

$$f'_y = 0 \Rightarrow 8y + \frac{a}{16} = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{-16}{8} = -2$$

پس عرض مرکز برابر است با:

وقتی منحنی در $(3, 0)$ بر محور x ‌ها مماس است باید با قراردادن $y = 0$ ، به عبارتی برسیم که ریشه‌ی مضاعف

$$x^2 + 4y^2 + ay + bx + c = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 + bx + c = 0$$

آن $x = 3$ است.

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \frac{x^2 + bx + c}{x=3} = (x-3)^2 \Rightarrow b = -6, c = 9$$

$$\xrightarrow{(-1, -2)} 1 + 16 + a(-2) + (-6)(-1) + 9 = 0 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow y_0 = -2$$

را صدق می‌دهیم: $(-1, -2)$

۲۰- گزینه‌ی «۳» در معادله‌ی گسترده‌ی بیضی، ضرایب x^2 و y^2 هم علامت هستند و برابر نیستند. هم‌چنین باید

پس از مربع کامل شدن، عدد سمت راست مثبت باشد:

$$3x^2 - 6x + y^2 + ay + a + 6 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + ay + (\frac{a}{4})^2) = -a - 6 + 3 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow 3(x-1)^2 + (y + \frac{a}{4})^2 = -a - 6 + 3 + \frac{a^2}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} - a - 3 > 0 \xrightarrow{\times 4} a^2 - 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a-6)(a+2) > 0$$

پس باید $\frac{a^2}{4} - a - 3$ مثبت باشد:

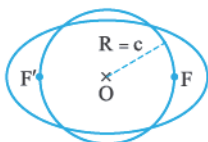
چون خارج دو ریشه موافق علامت ضریب درجه دوم است پس:

$$a > 6 \text{ یا } a < -2$$

۲۱- گزینه‌ی «۱»

وقتی کانون‌های بیضی دو سر قطر دایره باشند، مرکز بیضی

همان مرکز دایره است و شعاع دایره برابر c بیضی خواهد بود:



پس باید مرکز و اندازه‌ی c در بیضی را بیابیم.

$$2x^2 + 7y^2 - 4x = 12 \Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) + 7y^2 = 12 + 2$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 + 7y^2 = \frac{12+2 \times 1}{14} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow O(1, 0), c^2 = a^2 - b^2 = 7 - 2 = 5$$

بنابراین مرکز و شعاع دایره، به ترتیب $(1, 0)$ و $\sqrt{5}$ هستند و معادله‌ی آن $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 5$ خواهد بود. برای

تلاقی با نیمساز ناحیه‌ی اول، $y = x$ را قرار می‌دهیم و داریم: $(x-1)^2 + x^2 = 5$ که با کمی دقت $x = 2$ می‌خورد.

۲۲- گزینه‌ی «۳» صورت سؤال می‌گوید: فاصله‌ی $M(x, y)$ از $M(x, y)$ $= 2 \times (F(2, 0))$ (فاصله‌ی $M(x, y)$ از $M(x, y)$ از $x = 8$)

$$\Rightarrow |x-8| = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} \xrightarrow[|a|^2 = a^2]{\text{به توان ۲}} x^2 - 16x + 64 = 4(x-2)^2 + 4y^2$$

حواستان هست که ضرب ۲ مال کل عبارت بود!

$$x^2 - 16x + 64 = 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 \Rightarrow 48 = 3x^2 + 4y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow AA' = 2a = 2 \times 4 = 8$$

نقطه‌ی $(2, 0)$ یک کانون و خط $x = 8$ خط هادی این بیضی است. خروج از مرکز آن هم $\frac{1}{4}$ است. (چرا؟)