فهرست

۱) ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک ماتریس نامیده می‌شود.

اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌گوییم A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳\\ ۵ & ۶ & ۴\end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس، درایهٔ آن ماتریس می‌گوییم و محل هر درایه را با شمارهٔ سطر و ستون آن معلوم می‌کنیم. به طور مثال درایهٔ واقع در سطر ۲ و ستون ۳ را با $a_{۲۳}$ نمایش می‌دهیم. به طور کلی درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A را با a_{ij} نمایش می‌دهیم و به اختصار می‌نویسیم $A=\left[a_{ij}\right]$.

تست در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$، $a_{ij}=\begin{cases}۲i-mj & i>j\\ i^{۲}+mj & i\le j\end{cases}$، اگر $a_{۲۳}=-۲$ باشد، مجموع درایه‌های سطر سوم کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

پاسخ گزینهٔ «۲» چون در $a_{۲۳}$، $i=۲$ و $j=۳$ است، با توجه به این‌که $i<j$ است، از ضابطهٔ $i^{۲}+mj$ استفاده می‌کنیم:

$$i^{۲}+mj=۲^{۲}+m(۳)=-۲\Rightarrow m=-۲\Rightarrow\begin{cases}a_{۳۱}=۲(۳)-(-۲)(۱)=۸\\ a_{۳۲}=۲(۳)-(-۲)(۲)=۱۰\\ a_{۳۳}=۳^{۲}+(-۲)(۳)=۳\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} & & \\ ۸ & ۱۰ & ۳\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم $=۸+۱۰+۳=۲۱$

معرفی چند ماتریس خاص

۱- ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۴\\ ۵ & ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

ماتریس A در مثال فوق یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ است و درایه‌های مشخص‌شده را قطر اصلی ماتریس A می‌نامیم. اگر $i=j$، در این صورت درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار می‌گیرد. قطر دیگر این ماتریس، قطر فرعی نامیده می‌شود.

۲- ماتریس سطری

اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد، آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. در واقع مرتبهٔ A، $۱\times n$ است. $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\end{bmatrix}_{۱\times۳}$

۳- ماتریس ستونی

اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می‌نامیم. در واقع مرتبهٔ A، $m\times۱$ است.

$$A=\begin{bmatrix}۲\\ -۱\\ ۴\end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

۴- ماتریس قطری

ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

توجه درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

۵- ماتریس اسکالر

اگر در ماتریس قطری، تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$$

۶- ماتریس همانی (واحد)

ماتریس اسکالری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن ۱ باشد را همانی می‌گوییم. ماتریس همانی از مرتبهٔ $n\times n$ را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I_{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

۷- ماتریس صفر

ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

توجه دو ماتریس خاص دیگر نیز وجود دارد که در کتاب درسی به آن اشاره‌ای نشده است که در زیر آن‌ها را معرفی می‌کنیم:

۸- ماتریس بالا مثلثی

ماتریس مربعی که در آن درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی همگی صفر هستند را بالامثلثی می‌نامیم.

اگر $i>j:\ a_{ij}=۰$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۴ & ۵\\ ۰ & ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

۹- ماتریس پایین مثلثی

ماتریس مربعی که در آن درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی همگی صفر هستند را پایین مثلثی می‌نامیم.

اگر $i<j:\ a_{ij}=۰$

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۳ & ۴ & ۰\\ ۵ & ۶ & ۷\end{bmatrix}$$

تست اگر ماتریس $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & ۳m+۴ & - \\ ۲n+۴ & - & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، $m+n$ برابر است با:

۱) -۴ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ **گزینهٔ «۱»** می‌دانیم که در ماتریس اسکالر عناصر غیر قطر اصلی همگی صفر هستند و عناصر روی قطر اصلی همه با هم برابرند.

$$۲n+۴=۰ \Rightarrow n=-۲ \Rightarrow ۳m+۴=-۲ \Rightarrow m=-۲ \Rightarrow n+m=-۴$$

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها باهم برابر باشند.

$$\forall i,j:\ a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow \left[a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ x & x-y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+۲y & ۲ \\ z+۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به تساوی دو ماتریس داریم:

$$\begin{cases} x+۲y=۵ \\ x-y=-۱ \end{cases} \Rightarrow x=۱, y=۲ \quad , \quad z+۲=x=۱ \Rightarrow z=-۱ \quad , \quad x+y+z=۲$$

جمع یا تفاضل دو ماتریس: ماتریس‌های هم‌مرتبه قابل جمع و یا تفریق هستند و کافی است درایه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع و یا تفریق کنیم.

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \pm \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]_{m\times n}$$

تست مجموع درایه‌های سطر دوم مجموع دو ماتریس $\left[j+۲i^۲\right]_{۳\times۲}$ و $\left[j^۲-j-i^۲\right]_{۳\times۲}$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** برای محاسبهٔ مجموع دو ماتریس، کافی است ضابطه‌های آن دو را با هم جمع کنیم.

$$C=A+B=(j+۲i^۲)+(j^۲-j-i^۲)=i^۲+j^۲ \quad , \quad C=\left[i^۲+j^۲\right]_{۳\times۲} \Rightarrow \begin{cases} c_{۲۱}=۲^۲+۱^۲=۵ \\ c_{۲۲}=۲^۲+۲^۲=۸ \end{cases} \Rightarrow c_{۲۱}+c_{۲۲}=۵+۸=۱۳$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A، کافی است آن عدد را در تمام درایه‌ها ضرب کنیم.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\ ,\ r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$$

تست اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}$ و $۳A+B=\begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ ۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A=۲B$ ۲) $A=B-I$ ۳) $A=B+I$ ۴) $۳A=B$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** این سؤال مثل حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است.

$$\left.\begin{matrix} A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix} \\ ۳A+B=\begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ ۱۲ & ۱ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

با جای‌گذاری این دو ماتریس در گزینه‌ها مشخص است که در رابطهٔ $A=B-I$ صدق می‌کند.

تست اگر $A=\left[۲i-j\right]_{m\times n}$، $B=\left[i-۲j\right]_{m\times n}$ باشد و $۳A-۲B=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ و یکی از درایه‌های C عدد ۷ باشد، حداقل تعداد ستون A چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$۳A-۲B=C=\left[۳(۲i-j)-۲(i-۲j)\right]=\left[۴i+j\right] \qquad ۴i+j=۷ \Rightarrow i=۱\ ,\ j=۳$$

ملاحظه می‌کنید که اگر $i\geq ۲$ باشد، j باید منفی شود که نادرست است. یعنی تعداد ستون‌ها حداقل ۳ است.

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

برای دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B و اعداد حقیقی r و s داریم:

الف) خاصیت جابه‌جایی: $A+B=B+A$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری: $A+(B+C)=(A+B)+C$

پ) خاصیت عضو خنثی برای جمع ماتریس‌ها: $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$

ت) خاصیت عضو قرینه: $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq 0 \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

ضرب ماتریس در ماتریس: ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.
اگر $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$ باشد، در این صورت AB قابل تعریف بوده و حاصل، ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ می‌باشد. $A_{m\times p}B_{p\times n}=C_{m\times n}$

برای محاسبهٔ درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم C کافی است درایه‌های سطر iاُم A را در درایه‌های نظیرشان در ستون jاُم B ضرب کرده و با هم جمع کنیم.

$$c_{ij}=A \text{ سطر } i\text{اُم} \times B \text{ ستون } j\text{اُم} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots \\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

تست اگر عبارت $A_{3\times m}B_{4\times 3}C_{p\times n}=D_{k\times 5}$ برقرار باشد، $m+n+p+k$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** برای این‌که ضرب قابل تعریف باشد باید تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. از طرفی ماتریس حاصل از ضرب این چند ماتریس، تعداد سطرهایش با تعداد سطرهای ماتریس اول و تعداد ستون‌هایش با تعداد ستون‌های ماتریس آخر برابر است.

$$\underbrace{A_{3\times 4}\quad B_{4\times 3}\quad C_{3\times n}}_{D_{3\times n}}=D_{k\times 5} \Rightarrow m=4\ ,\ p=3\ ,\ n=5\ ,\ k=3 \Rightarrow m+n+p+k=15$$

تست اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 5}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{5\times 3}$ و $AB=C$ باشد، کدام گزینه c_{23} را نمایش می‌دهد؟

۱) $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{24}b_{42}$ ۲) $a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+\cdots+a_{25}b_{53}$

۳) $a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+\cdots+a_{34}b_{43}$ ۴) $a_{22}b_{22}+a_{33}b_{33}+\cdots+a_{55}b_{55}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** باید سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم.

$$c_{23}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{13}\\ b_{23}\\ \vdots\\ b_{53}\end{bmatrix}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+\cdots+a_{25}b_{53}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix} 4 & 12 & 13\\ 0 & 4 & 12\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A کدام است؟ (a، b و c اعداد طبیعی‌اند.)

۱) ۶ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ **گزینهٔ «۴»** ابتدا A را در خودش ضرب می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2\\ 0 & a^2 & 2ab\\ 0 & 0 & a^2\end{bmatrix}$$

با مقایسه با A^2 داده‌شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} a^2=4 \Rightarrow a=2\ ,\ 2ab=12 \Rightarrow b=3\\ 2ac+b^2=13 \Rightarrow 4c+9=13 \Rightarrow c=1\end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=13$$

تست اگر $A=[i+j]_{2\times 3}$، $B=[2i-j]_{3\times 2}$ و $C=3AB-4I$، c_{22} کدام گزینه است؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۰ ۳) ۶۴ ۴) ۶۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا باید درایه سطر دوم و ستون دوم AB را محاسبه کنیم. برای این کار سطر دوم A را در ستون دوم B ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [3 \quad 4 \quad 5]\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 28$$

درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون دوم I برابر ۱ است.

$$c_{22} = 3(28) - 4(1) = 80$$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

الف ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد: $AB \neq BA$

ب عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌ها: $I_n A_{n\times n} = A_{n\times n} I_n = A$

پ توزیع‌پذیری: $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$

ت شرکت‌پذیری: $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$

ث ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت حذف نیست: $B=C \not\Leftarrow A\times B = A\times C$

تست اگر A یک ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $A^2 = I - A$، حاصل $(2A+I)(A^2+A-I)$ کدام است؟

۱) $2A^2$ ۲) A^2 ۳) $\bar{O}$ ۴) $2A$

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$(2A+I)(\underbrace{A^2}_{I-A}+A-I) = (2A+I)(I-A+A-I) = (2A+I)(\bar{O}) = \bar{O}$$

نکته به دلیل وجودنداشتن خاصیت جابه‌جایی برای ضرب ماتریس‌ها، اتحادهای جبری برقرار نیستند.

مثال اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، طرف دوم عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $(A+B)^2 =$ ب) $(A-B)(A+B) =$ پ) $(AB)^3 =$

پاسخ

الف $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$

ب $(A-B)(A+B) = A^2+AB-BA-B^2$

پ $(AB)^3 = ABABAB$

تست اگر $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا $A+B$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + AB+BA \quad , \quad \begin{bmatrix} 4 & 25 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + AB+BA \Rightarrow AB+BA = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های $A^2+AB+BA+B^2$ برابر است با:

۱) ۱۸ ۲) ۱۰۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** می‌دانیم $A^2+AB+BA+B^2 = (A+B)^2$ است، پس:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^2 = (6I)^2 = 36I = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 3\times 36 = 108$$

ماتریس‌های تعویض‌پذیر

دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه $AB = BA$ باشد.

تست **اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ x & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -x & ۳ \\ -۱ & y \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، $x + y$ برابر است با:**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا AB و BA را تشکیل داده و سپس با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$BA = \begin{bmatrix} -x & ۳ \\ -۱ & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ x & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & ۳x - ۳ \\ -۲ + xy & ۳ - y \end{bmatrix} \quad , \quad AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x & ۳ \\ -۱ & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲x + ۳ & ۶ - ۳y \\ -x^۲ + ۱ & ۳x - y \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} -۲x + ۳ = x \Rightarrow x = ۱ \\ ۶ - ۳y = ۳x - ۳ \Rightarrow y = ۲ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۳$$

نکته اگر دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند، اتحادهای جبری نیز برقرار می‌شوند و بالعکس.

نکته ماتریس‌های $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم‌نوع خود یعنی $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ با هم‌نوع خود یعنی $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند.

تست **اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix}$ با ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، $a + b$ کدام است؟**

۱) ۹   ۲) ۷   ۳) ۱۱   ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix}$ با هم‌نوع خود تعویض‌پذیر است. یعنی در ماتریس B باید درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های روی قطر فرعی قرینه باشند. $a = ۵ \ , \ b = ۴ \Rightarrow a + b = ۹$

نکته اگر S ماتریس اسکالر با درایه‌های قطری a و A ماتریسی هم‌مرتبه با آن باشد، آن‌گاه: $AS = SA = aA$

در نتیجه هر ماتریس با ماتریس اسکالر تعویض‌پذیر است.

نکته اگر ماتریس قطری با ماتریسی غیرقطری تعویض‌پذیر باشد، حتماً باید اسکالر باشد.

تست **اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x + ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲x - ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & y - ۱ \end{bmatrix}$ با ماتریس غیرقطری B تعویض‌پذیر باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟**

۱) ۷   ۲) ۹   ۳) ۱۳   ۴) ۱۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در نکتهٔ قبل گفته شد که اگر ماتریس قطری با ماتریسی غیرقطری تعویض‌پذیر باشد، حتماً باید اسکالر باشد، یعنی عناصر روی قطر اصلی آن برابر باشد. $x + ۲ = ۲x - ۳ \Rightarrow x = ۵ \quad , \quad y - ۱ = ۵ + ۲ \Rightarrow y = ۸ \Rightarrow x + y = ۱۳$

تست **اگر A ماتریس ۲×۲ باشد و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}A = A\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد و x مجموع عناصر روی قطر اصلی A و y مجموع درایه‌های ستون دوم A باشد، کدام رابطه برقرار است؟**

۱) $x = y$ ۲) $x = ۲y$ ۳) $۳x = y$ ۴) $x = -y$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ ۳a + c & ۳b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ۳b & b \\ c + ۳d & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a + ۳b \Rightarrow b = ۰ \\ ۳a + c = c + ۳d \Rightarrow a = d \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ c & a \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی : $x = ۲a$ و مجموع درایه‌های ستون ۲ : $y = a$

بهتر است قضیهٔ زیر را که به قضیهٔ کیلی ـ همیلتون معروف است بدانید:

در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

نوجه دترمینان ماتریس ۲×۲، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت $ad-bc$ محاسبه می‌شود و آن را با $|A|$ نشان می‌دهند.

اثر ماتریس A یا $trace(A)$ برابر است با مجموع عناصر روی قطر اصلی.

با توجه به مطالب بالا، قضیهٔ کیلی ـ همیلتون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A^۲-(trace(A))A+|A|I=\bar{O}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ باشد، حاصل $۲\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ گزینهٔ «۴» **روش اول:** در این روش، عبارت داده‌شده را می‌سازیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha+\beta & ۲\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=۷ \\ ۲\alpha=۱۰\end{cases}\Rightarrow \alpha=۵ \text{ و } \beta=۲ \quad , \quad ۲\alpha+\beta=۲(۵)+۲=۱۲$$

روش دوم: با توجه به قضیهٔ کیلی ـ همیلتون داریم:

$$A^۲-(۱+۴)A+(۴(۱)-۳(۲))I=\bar{O}\Rightarrow A^۲-۵A-۲I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=۵A+۲I\Rightarrow \alpha=۵ \text{ و } \beta=۲\Rightarrow ۲\alpha+\beta=۱۲$$

تست اگر $A^۲=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۶ \\ ۹ & -۵ \end{bmatrix}$ و $A^۲-۳A=-۲I$ باشد، A کدام گزینه است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۳» اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، با توجه به قضیهٔ کیلی ـ همیلتون داریم:

$$A^۲-۳A+۲I=\bar{O}\Rightarrow\begin{cases}a+d=۳ \\ ad-bc=۲\end{cases}$$

که تنها درایه‌های ماتریس ۳ در این عبارت صدق می‌کند.

نکته

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+b & ۱ \end{bmatrix}$$

تست حاصل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۰ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳۶ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲۷ & ۱ \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به نکتهٔ گفته‌شده داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲+\cdots+۱۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است.

$$trace(AB)=trace(BA)$$

هم‌چنین دترمینان AB نیز با دترمینان BA برابر است.

تست اگر $AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix}$ باشد، BA کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۶ & ۵ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به نکتهٔ مطرح‌شده در بالا، تنها گزینه‌ای که مجموع درایه‌های روی قطر اصلی آن با مجموعه درایه‌های روی قطر اصلی AB برابر است، ۲ می‌باشد.

توان ماتریس: توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود و داریم:

$$A^2 = A \times A \quad , \quad A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = A \times A^2 \quad , \quad A^n = A^{n-1} \times A = A \times A^{n-1}$$

در محاسبهٔ توان‌های بزرگ یک ماتریس، ابتدا چند توان اولیه از آن را محاسبه می‌کنیم و به یکی از حالات زیر خواهیم رسید:

۱ به الگوی خاصی
۲ به ضریبی از ماتریس I
۳ به ضریبی از ماتریس داده‌شده
۴ به ماتریس $\bar{O}$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۳n-۴$ ۴) $۲n-۴$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ابتدا چند توان اول A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^n = ۲$

تست اگر $A^3 = ۴I$ باشد، A^{20} کدام است؟

۱) $۴^۶A$ ۲) $۴^۷A$ ۳) $۴^۶A^۲$ ۴) $۴^۷A^۲$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** از روی عبارت داده‌شده، A^{20} را می‌سازیم:

$$A^{20} = (A^3)^6 \times A^2 = (۴I)^6 A^2 = ۴^6 A^2$$

تست اگر $A^2 - A + I = \bar{O}$ باشد، حاصل A^{21} کدام است؟

۱) $-۲^۵I$ ۲) $۲^۵I$ ۳) $(-۲)^۷I$ ۴) $-I$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** ابتدا چند توان اول A را بررسی می‌کنیم:

$$A^2 = A - I \Rightarrow A^3 = A(A^2) = A(A-I) = A^2 - A \Rightarrow A^3 = (A-I) - A = -I$$

حال A^{21} را می‌سازیم:

$$(A^3)^7 = (-I)^7 \Rightarrow A^{21} = (-1)^7 I = -I$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & -۳ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{45} چند برابر A است؟

۱) $۲^{۱۱}$ ۲) $۲^{۲۲}$ ۳) $۲^{۳۳}$ ۴) $۲^{۴۴}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا چند توان از A را بررسی می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۲I$$

حال از روی $A^2 = ۲I$ توان ۴۵ را می‌سازیم:

$$A^{45} = (A^2)^{22} \times A = (۲I)^{22} A = ۲^{22} A$$

تست اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{50} برابر است با:

۱) $۴^{۵۰}$ ۲) ۲×۴^{۵۰}
۳) $۴^{۴۹}$ ۴) ۲×۴^{۴۹}

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا چند توان از A را بررسی می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ ۸ & ۸ \end{bmatrix} = ۴A \quad , \quad A^2 = ۴A \Rightarrow A^3 = ۴A^2 = ۴(۴A) = ۴^2 A$$

$$A^4 = ۴^2 A^2 = ۴^3 A \Rightarrow A^{50} = ۴^{49} A \quad , \quad \text{مجموع درایه‌های } A^{50} = ۸ \times ۴^{49} = ۲ \times ۴^{50}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(2A^2+4A-I)(A^2+A+I)$ کدام است؟

۱) $5A^2$ ۲) $5A^2-I$ ۳) $3A-I$ ۴) $5A^2+3A-I$

پاسخ گزینهٔ «۴» ابتدا توان‌های A را بررسی می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A^3=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow A^n=\bar{O}\ (n\geq 3)$$

$$(2A^2+4A-I)(A^2+A+I)=\underbrace{2A^4}_{\bar{O}}+\underbrace{2A^3}_{\bar{O}}+2A^2+\underbrace{4A^3}_{\bar{O}}+4A^2+4A-A^2-A-I=5A^2+3A-I$$

تست A و B دو ماتریس مربعی و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و داریم $B^{50}A=AB^{23}$، ماتریس A کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا توان‌های B را بررسی می‌کنیم:

$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I \Rightarrow B^3=BB^2=BI=B \Rightarrow B^{50}=I \quad , \quad B^{23}=B$$

در نتیجه توان‌های زوج B برابر I و توان‌های فرد B برابر B می‌شود.

$$B^{50}A=AB^{23} \Rightarrow IA=AB \Rightarrow A=AB$$

فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ آن‌گاه در مورد ماتریس $2A+B$ چه می‌توان گفت؟

۱) ماتریس همانی است. ۲) مجموع درایه‌های آن ۴ است.

۳) مجموع درایه‌های آن از $A+B$ کم‌تر است. ۴) ماتریس صفر است.

۲- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد و مجموع این دو ماتریس $C=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & n \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $2m+n$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳- اگر $A=\left[i^2-j\right]_{3\times 3}$ ، $B=\left[j^2+i+1\right]_{3\times 3}$ و $C=A-B$ باشد، آن‌گاه تفاضل مجموع درایه‌های قطر اصلی و مجموع درایه‌های قطر فرعی C کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱

۴- اگر A و B ماتریس‌هایی 2×2 باشند و داشته باشیم $5A+B=I$ و $B-2A=\begin{bmatrix} -14 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول $2A+3B$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۳

۵- اگر ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]$ از مرتبهٔ $3\times(k-1)$ یک ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $a_{ij}=kij$، حاصل $\sum_{i=1}^{k-1} a_{ii}$ چه‌قدر است؟

۱) ۵۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۶۴

۶- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$ آن‌گاه با کدام‌یک از تعاریف زیر، ماتریس A بالامثلثی است؟ (عناصر زیر قطر اصلی آن صفر است.)

۱) $a_{ij}=\begin{cases}[\frac{i+j}{2}]-2 & i>j\\ i-j & i\le j\end{cases}$

۲) $a_{ij}=\begin{cases}[\frac{i+j}{2}] & i>j\\ i+j & i\le j\end{cases}$

۳) $a_{ij}=\begin{cases}[\frac{i+j}{3}]-1 & i>j\\ i-j & i\le j\end{cases}$

۴) $a_{ij}=\begin{cases}[\frac{i-2j}{3}] & i>j\\ i+j & i\le j\end{cases}$

۷- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}0 & i>j\\ j-i+2 & i=j\\ [\frac{i+j}{5}] & i<j\end{cases}$ باشد، کدام گزینه در مورد ماتریس A درست است؟

۱) قطری
۲) همانی
۳) پایین‌مثلثی
۴) بالامثلثی

۸- اگر $A=\left[-2i+3j\right]_{3\times4}$ باشد، حاصل عبارت $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}a_{ij}$ کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۲۰

۹- در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i>j\\ -2i+2j & i=j\\ -j^3 & i<j\end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی چه‌قدر است؟

۱) ۸
۲) ۲۷-
۳) ۱۰-
۴) ۶۲-

۱۰- تفاضل مجموع درایه‌های ماتریس $[j^2-2ij]_{2\times2}$ و مجموع درایه‌های ماتریس $[i^2-2ij]_{2\times2}$ چند است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) صفر
۴) ۱

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ باشد، $A\times B-B\times A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-8 & -8\\ 12 & 8\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}8 & -8\\ -12 & 8\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}8 & 8\\ -12 & -8\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}-8 & 8\\ 12 & -8\end{bmatrix}$

۱۲- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول $B\times A$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۲-
۳) ۷
۴) ۴

۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های سطر اول $A\times B$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۲۱
۳) ۱۹
۴) ۵-

۱۴- اگر $A=\begin{bmatrix}x & 1-x & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 7 & -5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2x & 1\\ 3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ستون دوم AB برابر ۱۴ باشد، x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱۲
۳) ۳
۴) ۱۴

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ m & 0\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix}n & a_{12}\\ 3 & a_{22}\end{bmatrix}$ باشد، m^n کدام است؟

۱) ۹
۲) ۸۱
۳) $-\frac{1}{9}$
۴) $\frac{1}{9}$

۱۶- اگر A، B و C ماتریس‌های ۲×۲، $CB=2I$ و $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $(AB+2B)(CA+C)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}10 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}5 & 7\\ 7 & 5\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}7 & 5\\ 5 & 7\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}14 & 10\\ 10 & 14\end{bmatrix}$

۱۷- اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری که $A+C=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$، سادهٔ $BAC+BC^2$ برابر با کدام ماتریس است؟

۱) $3BC$ ۲) $3AC$ ۳) $3BA$ ۴) $3CB$

۱۸- مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ 20 & 1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۱۱ ۳) ۲۱۲ ۴) ۲۱۴

۱۹- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$، $A^2=\alpha A+\beta I$ دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,13)$

۲۰- چند ماتریس مانند $A_{2\times2}$ وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) بی‌شمار ۴) ۲

۲۱- اگر $A\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}A$ باشد و درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی باشند، کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های ستون اول منهای مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ b & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$ باشد و درایه سطر اول و ستون سوم A^2 برابر با -2 و مجموع درایه‌های قطر و زیر قطر اصلی ماتریس A برابر $\frac{9}{2}$ باشد، مقدار براکت $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) -3 ۴) -2

۲۳- از رابطهٔ ماتریس $\begin{bmatrix}16 & 7\\ 12 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+1 & 1\\ 2 & x-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x-1\\ x & x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -2

۲۴- اگر A ماتریسی سطری با k ستون و B ماتریسی ستونی با $2k-3$ سطر باشد، در مورد $A\times B$ چه می‌توان گفت؟

۱) ماتریس AB از مرتبهٔ ۳ می‌باشد.
۲) ماتریس AB از مرتبهٔ ۱ می‌باشد.
۳) اگر $k=3$ باشد، مرتبهٔ AB، ۱ است.
۴) چنین ضربی با هیچ مقداری از k امکان‌پذیر نیست.

۲۵- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & n & -1\\ 4 & m & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & -2\\ n & 5\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس AB بالامثلثی می‌باشد؛ مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۲۶- اگر $A=\begin{bmatrix}a & b & 0\\ a & c & b^2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & c & -1\\ a+b & a & 2+a\\ 1 & b & 3\end{bmatrix}$ باشند و A ماتریس پایین‌مثلثی بوده و درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم BA برابر ۳ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۵ ۴) -5

۲۷- اگر $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ و $AB=B+I$ باشد، ماتریس $4A$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 8 & 0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 8 & 0\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

۲۸- اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A^2-AB-2B)^4$ کدام است؟

۱) $128I$ ۲) $512I$ ۳) $256I$ ۴) $64I$

۲۹- اگر ماتریس A به گونه‌ای باشد که $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $(A-B)^2+(A-B)B$

۱) $A-AB$ ۲) $A-BA$ ۳) AB ۴) A

۳۰- اگر $A^2 = I$، آن‌گاه $(A+I)^3-(A^2-A)^2$ کدام است؟

۱) $5A-I$ ۲) $4A^2+4I$ ۳) $6A+2I$ ۴) $5A+3I$

۳۱- در معادلهٔ $\begin{bmatrix}1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\x&2&1\\0&0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\-3\\x\end{bmatrix}=\bar{O}$ مجموع عکس ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{15}{2}$ ۲) $\frac{2}{15}$ ۳) $-\frac{15}{2}$ ۴) $-\frac{2}{15}$

۳۲- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}x&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\3&-1&1\\1&2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=\bar{O}$، $x=0$ باشد، آن‌گاه جواب دیگر کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) $-\frac{9}{2}$

۳۳- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b&b\\a&b&b\\0&0&0\end{bmatrix}$ یک چهارم مجموع درایه‌های ماتریس A^2 باشد، با فرض $a+2b=1$ مقدار a کدام است؟

۱) $-1\pm\sqrt{2}$ ۲) ۷ ۳) $1\pm\sqrt{2}$ ۴) ۸

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&2&0\\0&4&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&2&0\\0&-4&0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینهٔ زیر صحیح است؟

۱) $C(A-B)=(A-B)C$ ۲) $(A+B)C=C(A+B)$ ۳) $AB=BA$ ۴) $ABC=ACB$

۳۵- اگر A و B ماتریس‌هایی از مرتبهٔ ۲ باشند، $AB-BA$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}3&2\\1&-2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}4&0\\1&3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3&-1\\3&2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-3&1\\2&3\end{bmatrix}$

۳۶- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، $a_{ij}=\begin{cases}0 & i>j\\ 1 & i=j\\ j-i & i<j\end{cases}$، $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ و $b_{ij}=\begin{cases}i+j & i<j\\ i^2 & i=j\\ [\frac{i+j}{6}] & i>j\end{cases}$ باشد، مجموع مجذور درایه‌های قطر اصلی AB کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۹۸ ۳) ۱۱۴ ۴) ۲۵

۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ و $A^{1397}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۳۹۷ ۲) ۱۳۹۶ ۳) ۱۳۹۸ ۴) ۱۳۹۹

۳۸- اگر $A=[i]_{3\times3}$ ، $A^{10}=x^yA$ و x و y اعداد حقیقی باشند، $x+y$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۳۹- اگر A ماتریس مربعی بوده و $A^2-A+I=\bar{O}$ باشد، ماتریس A^{97} برابر کدام است؟

۱) $A-I$ ۲) $I-A$ ۳) A ۴) $-A$

۴۰- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ حاصل A^n-A^{n-1} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\0&0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\0&1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$

۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & -3\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{15!}$ کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $-A$ ۴) $-I$

۴۲- اگر $A=2A^2$، آن‌گاه ماتریس A^{100} کدام است؟

۱) $\frac{1}{2^{101}}A$ ۲) $\frac{1}{2^{100}}A^{99}$ ۳) $\frac{1}{2^{99}}A$ ۴) $\frac{1}{2^{99}}A^{99}$

۴۳- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$، حاصل $A^{20}-A^{19}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\bar{O}$

۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+A^4+A^5$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) ۲

۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ در ماتریس A^{100} حاصل جمع درایه‌های بالای قطر اصلی کدام است؟

۱) 2^{99} ۲) 2^{100} ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰۳

۴۶- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی A^5 چه‌قدر است؟

۱) ۲۴۳ ۲) ۲۴۵ ۳) ۳۱۱ ۴) ۸۳

۴۷- $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ است. اگر مجموع درایه‌های A^n، ۷۲۹ باشد، n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۸- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۴

۴۹- اگر $A^2=A$ بوده و $(A-I)^5=mA+nI$ باشد، آن‌گاه حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۳

۵۰- A و I دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اند. با فرض $A^2=A$ و $A^5+2A=I$، حاصل ماتریس $(3A-2I)^4$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $-A$ ۴) $\bar{O}$

۵۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس A^6 کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۹ ۳) $2\times3^6+1$ ۴) $2\times3^5+1$

۵۲- اگر A ماتریسی مربعی باشد، به طوری‌که $A^3=\bar{O}$؛ حاصل $A(A-2I)^3$ کدام است؟

۱) $16A-4A^2$ ۲) $16A-32A^2$ ۳) $12A^2-8A$ ۴) $6A^2-8A$

۵۳- اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB - B^{2}A = \bar{O}$ و $(B^{4} + I)(B^{4} - I) = \bar{O}$ ماتریس AB^{4} کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) B ۴) $\bar{O}$

۵۴- اگر $BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های A و B مربعی باشند، مجموع درایه‌های $B(AB)^{9}A$ کدام است؟

۱) ۲×۳^{۹} ۲) ۳×۲^{۹} ۳) ۲×۳^{۱۰} ۴) ۳×۲^{۱۰}

۱- گزینهٔ ۱ ابتدا ماتریس $۲A+B$ را تشکیل می‌دهیم.

$$۲A+B=۲\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۴ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس حاصل یک ماتریس همانی است.

۲- گزینهٔ ۲ با جمع دو ماتریس A و B و مساوی قراردادن آن با ماتریس C به روابط زیر می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & -۱ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۱ & m\\ ۲ & ۱ & ۴\\ ۳ & ۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۴\\ ۱ & ۱ & ۸\\ n & ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۱+m\\ ۱ & ۱ & ۸\\ ۵ & ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۴\\ ۱ & ۱ & ۸\\ n & ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱+m=۴ \Rightarrow m=۳\\ n=۵\end{cases}\Rightarrow ۲m+n=۲(۳)+۵=۱۱$$

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به ضابطه‌های A و B، ضابطهٔ ماتریس C به صورت زیر است:

$$C=A-B=[i^۲-j-j^۲-i-۱]=[i^۲-i-(j^۲+j)-۱]$$

حال عناصر روی قطر اصلی و فرعی را می‌سازیم:

$$C=\begin{bmatrix}-۳ & & -۱۳\\ & -۵ & \\ ۳ & & -۷\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر فرعی − مجموع درایه‌های روی قطر اصلی

$$=(-۳-۵-۷)-(-۱۳-۵+۳)=۰$$

۴- گزینهٔ ۴ با حل دستگاه زیر ماتریس‌های A و B به دست می‌آید.

$$\begin{cases}۵A+B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\\ -۲A+B=\begin{bmatrix}-۶ & -۱۴\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{کم کنیم}}۷A=\begin{bmatrix}۷ & ۱۴\\ -۷ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-۴ & -۱۰\\ ۵ & ۱\end{bmatrix}$$

$$۲A+۳B=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱۲ & -۳۰\\ ۱۵ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰ & -۲۶\\ ۱۳ & ۳\end{bmatrix}$$

عنصر واقع در سطر دوم و ستون اول ۱۳ می‌باشد.

۵- گزینهٔ ۱ چون ماتریس A مربعی است بنابراین باید تعداد سطر و ستون آن برابر باشد. $k-۱=۳ \Rightarrow k=۴$

حال با توجه به ضابطهٔ داده‌شده، عناصر روی قطر اصلی را می‌سازیم:

$$A=[k\times i\times j]=[۴ij]\Rightarrow a_{۱۱}=۴,\ a_{۲۲}=۱۶,\ a_{۳۳}=۳۶$$

$$a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۵۶$$

۶- گزینهٔ ۳ ماتریس بالامثلثی ماتریسی است که عناصر زیر قطر اصلی آن همگی صفرند.

درایهٔ $a_{۳۲}$ را در گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

۱) $a_{۳۲}=\left[\dfrac{۳+۲}{۲}\right]-۲=۰$ ✓

۲) $a_{۳۲}=\left[\dfrac{۳+۲}{۲}\right]=۲$ ✗

۳) $a_{۳۲}=\left[\dfrac{۳+۲}{۳}\right]-۱=۰$ ✓

۴) $a_{۳۲}=\left[\dfrac{۳-۴}{۳}\right]=-۱$ ✗

حال در ۱ و ۳ درایهٔ $a_{۲۱}$ را نیز بررسی می‌کنیم:

۱) $\left[\dfrac{۲+۱}{۲}\right]-۲=-۱$ ✗

۳) $\left[\dfrac{۲+۱}{۳}\right]-۱=۰$ ✓

بنابراین پاسخ ۳ است.

۷- گزینهٔ ٤ ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A بالامثلثی است.

۸- گزینهٔ ۱ ابتدا سیگمای داده‌شده را باز می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۲}^{۳}a_{ij}=a_{۱۲}+a_{۱۳}+a_{۲۲}+a_{۲۳}=۴+۷+۲+۵=۱۸$$

۹- گزینهٔ ٤ در عناصر بالای قطر اصلی $i<j$ است. حال درایه‌های بالای قطر اصلی را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} & -۸ & -۲۷\\ & & -۲۷\\ & & \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی}=-۸+(-۲۷)+(-۲۷)=-۶۲$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا دو ماتریس را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ -۳ & -۴\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های }A=-۱-۳-۴=-۸$$

$$B=\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های }B=-۱-۳-۴=-۸$$

اختلاف این دو مجموع برابر صفر است.

۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا $A\times B$ و $B\times A$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۲ & -۳\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷ & -۴\\ ۱۰ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A\times B-B\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۲ & -۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۷ & -۴\\ ۱۰ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۸\\ -۱۲ & -۸\end{bmatrix}$$

۱۲- گزینه۴ برای محاسبهٔ درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول $B\times A$ کافی است سطر دوم ماتریس B را در ستون اول ماتریس A ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}=1+0+3=4$$

۱۳- گزینه۲ برای محاسبهٔ درایه‌های سطر اول $A\times B$ کافی است سطر اول ماتریس A را در کل ماتریس B ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\3 & 4 & 2\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 13 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=7+13+1=21$$

۱۴- گزینه۴ چون مجموع درایه‌های ستون دوم AB داده شده، کافی است کل A را در ستون دوم B ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}x & 1-x & 2\\0 & 3 & 1\\4 & 7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+4\\2\\-6\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها}=x+4+2-6=14\Rightarrow x=14$$

۱۵- گزینه۴ اول A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\m & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\m & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-m & -1\\m & -m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-m & -1\\m & -m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & a_{12}\\3 & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1-m=n\\m=3\end{cases}\Rightarrow n=-2$$

$$m^n=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

۱۶- گزینه۴ **نکته** فرض می‌کنیم B و C دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، اگر $BC=\lambda I$ باشد آن‌گاه CB نیز برابر λI است.

ابتدا از B در پرانتز اول و C در پرانتز دوم فاکتور می‌گیریم:

$$(AB+2B)(CA+C)=(A+2I)\underbrace{BC}_{2I}(A+I)$$

$$=(A+2I)2I(A+I)$$

$$=2(A^2+A+2A+2I)=2(A^2+3A+2I)$$

حال A^2 را محاسبه کرده و در عبارت بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(A^2+3A+2I)$$

$$=2\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}14 & 10\\10 & 14\end{bmatrix}$$

۱۷- گزینه۱ $A+C=3I$ است. حال از دو طرف $BAC+BC^2$ از B و C فاکتور می‌گیریم:

$$BAC+BC^2=B(\underbrace{A+C}_{3I})C=B(3I)C=3BC$$

۱۸- گزینه۳ با توجه به رابطهٔ زیر می‌توانیم تست را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\b & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\a+b & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\20 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1+2+3+\dots+20 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\\frac{20(21)}{2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\210 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=212$$

۱۹- گزینه۲ اول A^2 را محاسبه می‌کنیم و سپس در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-2 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2\\10 & 21\end{bmatrix}$$

$$A^2=\alpha A+\beta I\Rightarrow\begin{bmatrix}9 & 2\\10 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha & \alpha\\5\alpha & 4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & 0\\0 & \beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\alpha+\beta=9\\\alpha=2\end{cases}\Rightarrow\beta=13\Rightarrow(\alpha,\beta)=(2,13)$$

۲۰- گزینه۱ فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ باشد.

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\6 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3a & 2a\\3c & 2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\6 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3c=6\Rightarrow c=2\\2c=3\Rightarrow c=\frac{3}{2}\end{cases}$$

که این تناقض است پس ماتریس A وجود ندارد.

۲۱- گزینه۲ فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ باشد، عبارت داده‌شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a+b & 2a\\2c+d & 2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+2c & 2b+2d\\a & b\end{bmatrix}$$

حالا درایه‌های متناظر را مساوی می‌گذاریم:

$$\begin{cases}2a+b=2a+2c\Rightarrow b=2c\\2a=2b+2d\Rightarrow a=b+d\end{cases}$$

$$\text{مجموع ستون اول}-\text{مجموع ستون دوم}=(a+c)-\overbrace{(b+d)}^{a}=c$$

که کم‌ترین مقدار طبیعی c برابر ۱ است.

۲۲- گزینهٔ ۴ برای این‌که درایهٔ سطر اول و ستون سوم A^2 را حساب کنیم کافی است سطر اول A را در ستون سوم A ضرب کنیم:

$$[a\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=a+1+1=-2 \Rightarrow a=-4$$

مجموع درایه‌های قطر و زیر آن $=-4+2+1+b+0+3=\frac{9}{2}$

$$\Rightarrow b=\frac{5}{2}$$

$$[a+b]=[-4+\frac{5}{2}]=[-\frac{3}{2}]=-2$$

۲۳- گزینهٔ ۳ لازم نیست کامل هر سه ضرب را انجام دهیم. کافی است درایهٔ سطر اول و ستون اول را محاسبه کنیم. برای این کار سطر اول ماتریس اول را در کل ماتریس دوم ضرب کرده و حاصل را در ستون اول ماتریس سوم ضرب می‌کنیم و برابر ۱۶ قرار می‌دهیم.

$$[-1\ \ 2]\begin{bmatrix}x & x-1\\ x & x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x+1\\ 2\end{bmatrix}=16$$

$$[x\ \ \ x+3]\begin{bmatrix}x+1\\ 2\end{bmatrix}=16 \Rightarrow x^2+3x+6=16$$

$$\Rightarrow x^2+3x-10=0 \Rightarrow x=-5\ ,\ x=2$$

که $x=2$ در گزینه‌ها است. اگر $x=-5$ نیز در گزینه‌ها بود باید یک درایهٔ دیگر نیز بررسی می‌شد.

۲۴- گزینهٔ ۳ چون A ماتریس سطری با k ستون است پس $A_{1\times k}$ است و B ماتریس ستونی با $2k-3$ سطر است. پس $B_{(2k-3)\times 1}$ است. برای این‌که حاصل‌ضرب AB تعریف شود باید تعداد ستون‌های A با سطرهای B برابر باشد: $k=2k-3 \Rightarrow k=3$

از طرفی حاصل AB ماتریس ۱×۱ خواهد بود.

۲۵- گزینهٔ ۴ ماتریس بالامثلثی، ماتریسی است که عناصر زیر قطر اصلی آن صفر باشند. چون AB ماتریس ۲×۲ می‌شود، پس درایهٔ سطر دوم و ستون اول آن باید صفر باشد.

ستون اول B × سطر دوم A $=[4\ \ m\ \ 0]\begin{bmatrix}2\\4\\n\end{bmatrix}=8+4m+0=0$

$$\Rightarrow m=-2$$

۲۶- گزینهٔ ۱ چون A پایین‌مثلثی است، بالای قطر اصلی آن صفر می‌باشد، در نتیجه $b=0$ است.

ستون سوم A × سطر دوم B = درایهٔ سطر دوم و ستون سوم BA

$$=[a\ \ a\ \ 2+a]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=3 \Rightarrow 2+a=3 \Rightarrow a=1$$

۲۷- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد.

$$AB=B+I \Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2a+4b & a+b\\ 2c+4d & c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}2a+4b=3\\ a+b=1\end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}\\ \begin{cases}2c+4d=4\\ c+d=2\end{cases} \Rightarrow c=2\ ,d=0\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow 4A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا A^2 و AB را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ -6 & 8\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^2-AB-2B=\begin{bmatrix}8 & 6\\ -6 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=4I$$

$$(A^2-AB-2A)^4=4^4I=256I$$

۲۹- گزینهٔ ۲ توجه: در ماتریس‌ها اتحادها برقرار نیستند.

$$(A-B)^2+(A-B)B=(A-B)(A-B)+(A-B)B$$

$$=(A-B)(A-\cancel{B}+\cancel{B})=A^2-BA \overset{A^2=A}{=} A-BA$$

۳۰- گزینهٔ ۳ حواستان جمع باشد که از $A^2=I$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A=I$ است.

راستی چون A با I تعویض‌پذیر است، اتحادها برقرارند.

$$(A+I)^3-(\underbrace{A^2}_{I}-A)^2=A^3+3A^2+3A+I-(A^2-2A+I)$$

از این‌که $A^2=I$، نتیجه می‌گیریم $A^3=A$.

$$=A+3I+3A+I-(I-2A+I)=6A+2I$$

۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا ضرب‌ها را انجام می‌دهیم.

$$[1\ 2\ 0]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ x & 2 & 1\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -3\\ x\end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow [2x\ \ 5\ \ 2]\begin{bmatrix}x\\ -3\\ x\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow 2x^2+2x-15=0 \Rightarrow x^2+x-\frac{15}{2}=0$$

فرض کنیم ریشه‌های این معادله x_1 و x_2 باشند، داریم:

مجموع عکس ریشه‌ها: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}=\frac{-1}{\frac{-15}{2}}=\frac{2}{15}$

نکته: در معادلهٔ درجه دوم $x^2-Sx+P=0$، S جمع ریشه‌ها و P ضرب ریشه‌هاست.

۳۲- گزینه ۴ ابتدا ضرب‌ها را انجام می‌دهیم:

$$[x \quad ۲ \quad ۱]\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & -۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow [۲x+۷ \quad x \quad ۲+a]\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۷x+۲x+۲+a=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۹x+۲+a=۰$$

چون یکی از ریشه‌ها صفر است آن را در معادله قرار می‌دهیم و $a=-۲$ به دست می‌آید. حال ریشهٔ دیگر معادله را به دست می‌آوریم:

$$۲x^۲+۹x+۰=۰ \Rightarrow x(۲x+۹)=۰ \Rightarrow x=-\frac{۹}{۲}$$

۳۳- گزینه ۲ $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & b & b\\ a & b & b\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & b\\ a & b & b\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^۲+ab & ab+b^۲ & ab+b^۲\\ a^۲+ab & ab+b^۲ & ab+b^۲\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های } A=\frac{۱}{۴}(\text{مجموع درایه‌های } A^۲)$$

$$\Rightarrow ۲a+۴b=\frac{۱}{۴}(۲a^۲+۴b^۲+۶ab)$$

$$\Rightarrow ۲(a+۲b)=\frac{۱}{۴}(a^۲+۲ab+a^۲+۴b^۲+۴ab)$$

$$\Rightarrow ۲(۱)=\frac{۱}{۴}(a^۲+۲ab+(\underbrace{a+۲b}_{۱})^۲)$$

$$\Rightarrow ۸=a^۲+۲ab+۱ \Rightarrow a(\underbrace{a+۲b}_{۱})=۷ \Rightarrow a=۷$$

۳۴- گزینه ۲ ابتدا $A+B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & -۴ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

چون $A+B$ قطری است و C نیز قطری است پس تعویض‌پذیرند، یعنی:

$$(A+B)C=C(A+B)$$

۳۵- گزینه ۴ نکته مجموع عناصر روی قطر اصلی AB با مجموع عناصر روی قطر اصلی BA برابر است.
در نتیجه مجموع عناصر روی قطر اصلی $AB-BA$ برابر صفر است که تنها ۴ دارای این ویژگی است.

۳۶- گزینه ۲ ابتدا دو ماتریس A و B را تشکیل می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۴\\ ۰ & ۴ & ۵\\ ۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس بالامثلثی هستند، AB نیز بالامثلثی بوده و عناصر روی قطر اصلی آن برابر است با حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی A و B.

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & \bigcirc & \bigcirc\\ ۰ & ۴ & \bigcirc\\ ۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع مجذور درایه‌های قطر اصلی}=۱^۲+۴^۲+۹^۲=۹۸$$

۳۷- گزینه ۴ ابتدا چند توان از A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۱۳۹۷}=\begin{bmatrix}۱ & ۱۳۹۷\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$a+b+c+d=۱+۱۳۹۷+۰+۱=۱۳۹۹$$

۳۸- گزینه ۲ اول بیاییم ماتریس A و $A^۲$ را تشکیل دهیم.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۲\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۲\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix}۶ & ۶ & ۶\\ ۱۲ & ۱۲ & ۱۲\\ ۱۸ & ۱۸ & ۱۸\end{bmatrix}=۶\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۲\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}=۶A$$

$$A^۳=A^۲A=۶A^۲=۶(۶A)=۶^۲A$$

در نتیجه $A^{۱۰}=۶^۹A$ پس $y=۹$ و $x=۶$ یعنی $x+y=۱۵$ است.

۳۹- گزینه ۳ اول باید $A^۲$ و $A^۳$ و ... را حساب کنیم تا ببینیم چه می‌شود:

$$A^۲-A+I=\bar{O} \Rightarrow A^۲=A-I$$

$$A^۳=A\times A^۲=A(A-I)=A^۲-A \xrightarrow{A^۲=A-I}$$

$$A^۳=\cancel{A}-I-\cancel{A}=-I$$

پس $A^۳=-I$ شده است. برای ساختن $A^{۹۷}$، عبارت $A^۳=-I$ را به توان ۳۲ می‌رسانیم و در آخر در A ضرب می‌کنیم:

$$(A^۳)^{۳۲}A=(-I)^{۳۲}A \Rightarrow A^{۹۷}=A$$

۴۰- گزینه ۲ ماتریس‌های قطری وقتی به توان می‌رسند قطری باقی می‌مانند و درایه‌های روی قطرشان به توان می‌رسد.

$$A^n-A^{n-۱}=\begin{bmatrix}۲^n & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲^{n-۱} & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^n-۲^{n-۱} & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۲^{n-۱}(۲-۱) & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{n-۱} & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۴۱- گزینه ۲ اول چند توان از A را حساب می‌کنیم تا ببینیم چه اتفاقی پیش می‌آید.

$$A^2=\begin{bmatrix}3&5\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

حال $A^2=-I$ را باید به توانی برسانیم که $15!$ ساخته شود.

$$(A^2=-I)^{1\times3\times4\times\ldots\times15}\Rightarrow A^{15!}=I$$

۴۲- گزینه ۳ چند توان اول A را محاسبه می‌کنیم:

$$2A^2=A\Rightarrow A^2=\frac{1}{2}A$$

$$A^3=A^2A=(\frac{1}{2}A)A=\frac{1}{2}A^2\xrightarrow{A^2=\frac{1}{2}A}\frac{1}{2^2}A$$

$$A^4=A^3A=(\frac{1}{2^2}A)A=\frac{1}{2^2}A^2\xrightarrow{A^2=\frac{1}{2}A}\frac{1}{2^3}A$$

با توجه به روند بالا نتیجه می‌گیریم که $A^n=\frac{1}{2^{n-1}}A$؛ بنابراین $A^{100}=\frac{1}{2^{99}}A$ است.

۴۳- گزینه ۳ اول A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

چون $A^2=I$ است پس توان‌های زوج I و توان‌های فرد A می‌شود.

$$A^{20}-A^{19}=I-A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

۴۴- گزینه ۱ اول A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=A$$

چون $A^2=A$ شد، هر توانی از آن نیز A می‌شود (به ماتریس A خودتوان می‌گویند).

$$A+A^2+A^3+A^4+A^5=5A=\begin{bmatrix}5&0\\5&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $=10$

۴۵- گزینه ۳ بیایید اول چند توان از A را حساب کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A^{100}=\begin{bmatrix}1&100&100\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی $=200$

۴۶- گزینه ۲ ماتریس‌های مثلثی وقتی به توان می‌رسند، مثلثی باقی می‌مانند و درایه‌های روی قطر آن‌ها نیز به توان می‌رسد.

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&4\\0&0&1\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}1^5&\bigcirc&\bigcirc\\0&3^5&\bigcirc\\0&0&1^5\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی A^5 $=1^5+3^5+1^5=245$

۴۷- گزینه ۳ اول A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}=3A$$

$$A^2=3A\xrightarrow{\times A}A^3=3A^2\xrightarrow{A^2=3A}=3^2A$$

$\Rightarrow A^n=3^{n-1}A\Rightarrow$ مجموع درایه‌های A^n $=3^{n-1}=729=3^6$

$\Rightarrow n=7$

۴۸- گزینه ۱ برای ماتریس C کافی است ماتریس B را زیر ماتریس A بنویسیم.

$$C=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$$

با محاسبهٔ عناصر روی قطر اصلی C^2 متوجه می‌شویم که همگی ۴ هستند بنابراین مجموع آن‌ها برابر ۱۶ است.

۴۹- گزینه ۱ نکته بسط دوجمله‌ای نیوتن به صورت زیر است:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n}a^0b^n$$

نکته اگر $A^2=A$ باشد، هر توانی از آن نیز A می‌شود.

$$(A-I)^5=\binom{5}{0}A^5(-I)^0+\binom{5}{1}A^4(-I)^1+\binom{5}{2}A^3(-I)^2$$

$$+\binom{5}{3}A^2(-I)^3+\binom{5}{4}A(-I)^4+\binom{5}{5}(-I)^5$$

$$=A-5A+10A-10A+5A-I=A-I=mA+nI$$

$$\Rightarrow m=1,\ n=-1\Rightarrow m+n=0$$

۵۰- گزینه۱ چون $A^2 = A$ است، A به هر توانی برسد برابر A می‌شود.
$$A^5 + 2A = I \Rightarrow A + 2A = I \Rightarrow 3A = I$$
حال $(3A - 2I)^4$ را تشکیل می‌دهیم: $(3A-2I)^4 = (I-2I)^4 = I$

۵۱- گزینه۱
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\times3 & 2\times3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2\times3 & 2\times3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3\times3 & 3\times3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
به این نتیجه می‌رسیم که:
$$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 6\times3 & 6\times3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
جمع درایه‌های سطر اول $= 1 + 6\times3 + 6\times3 = 37$

۵۲- گزینه۳ چون $A^3 = \bar{O}$ است هر توان بزرگ‌تر مساوی ۳ در آن نیز صفر می‌شود.
حال اتحاد داده‌شده را باز می‌کنیم:
$$A(A-2I)^3 = A(A^3 - 6A^2 + 12A - 8I)$$
$$= \underbrace{A^4}_{\bar{O}} - 6\underbrace{A^3}_{\bar{O}} + 12A^2 - 8A = 12A^2 - 8A$$

۵۳- گزینه۲
$$(B^4 + I)(B^4 - I) = 0 \Rightarrow B^8 - I = 0 \Rightarrow B^8 = I$$
$$AB - B^2A = 0 \Rightarrow AB = B^2A$$
$$AB^4 = \underbrace{AB}_{B^2A}BBB = B^2\underbrace{AB}_{B^2A}BB = B^4\underbrace{AB}_{B^2A}B$$
$$= B^6\underbrace{AB}_{B^2A} = B^8A = IA = A$$

۵۴- گزینه۴ دقت کنید که چون $AB \neq BA$ بنابراین $(AB)^n \neq A^nB^n$.
$$B(AB)^9A = B\underbrace{(AB)\dots(AB)}_{\text{۹تا}}A$$
$$= (BA)(BA)\dots(BA) = (BA)^{10}$$
حالا برای محاسبهٔ $(BA)^{10}$ ابتدا چند توان اول BA را محاسبه می‌کنیم:
$$(BA)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2(BA)$$
$$(BA)^2 = 2(BA)$$
$$\Rightarrow (BA)^3 = (BA)^2(BA) = 2(BA)^2 = 2^2(BA)$$
پس می‌توان نتیجه گرفت که:
$$(BA)^{10} = 2^9(BA) = \begin{bmatrix} 2^9 & 2^9 & 2^9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}$$
مجموع درایه‌ها $= 6\times2^9 = 3\times2^{10}$