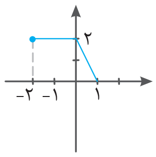
آزمـــــــون نـوبت اول (۴)

۱ اگر تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y=-f(-x)$ را رسم کنید. (فصل ۱) ۱



---

۲ مقادیر b, a را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=x^{3}+ax+b$ بر $(x-1)(x+2)$ بخش‌پذیر باشد. (فصل ۱) ۱/۵

---

۳ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. ۱

الف) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ اگر $k<0$ کافیست تابع $f(x)$ را به اندازهٔ k به سمت .... انتقال دهیم. (راست - چپ)

ب) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ اگر $k<0$ کافیست تابع $f(x)$ را k واحد به سمت .... انتقال دهیم. (پایین - بالا)

ج) اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع .... به‌دست می‌آید. $(y=-f(x), y=f(-x))$

د) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند $f(a)\le f(b)$ باشد، آن‌گاه .... $(a\le b , a\ge b)$

---

۴ نمودار تابع مقابل را رسم کنید و مشخص کنید آیا این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً یکنوا است یا خیر. (فصل ۵) ۱

$y=2^{-x}$

---

۵ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2} & , x\ge -1 \\ 2 & , x<-1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است. (فصل ۱) ۱/۵

---

۶ اگر چندجمله‌ای $x^{2}+ax-2$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. (فصل ۱) ۱

---

۷ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید. (فصل ۲) ۱

$\sin x+\sin 2x=0$

---

۸ درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید. (فصل ۲) ۱/۵

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin^{3}\theta}=\frac{1}{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}$$

---

۹ اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید. (فصل ۲) ۱/۵

---

۱۰ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^{2}+x}{x^{2}-x}$ را به‌دست آورید. (فصل ۳) ۱

---

۱۱ مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}$ را به‌دست آورید. (فصل ۳) ۱/۵

---

۱۲ حدود زیر را به‌دست آورید. (فصل ۳) ۲

الف) $\lim\limits_{x\to 3^{-}}\frac{x^{2}+2x-1}{x^{2}+x-12}$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^{-}}\frac{x+2}{x-2}$

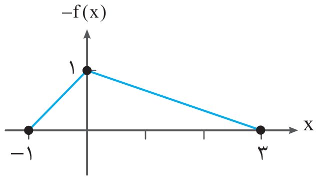
ج) $\lim\limits_{x\to 2^{-}}\frac{[x]-2}{x-2}$

آزمـون نـوبت دوم (۵)

۱ در چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۳}+x^{۲}+x+b$ مقادیر a و b را طوری محاسبه کنید که چندجمله‌ای بر $x-۱$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x+۱$ برابر -۴ باشد. (فصل ۱) — ۰/۵

---

۲ اگر نمودار $y=f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، نمودار $y=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ را رسم کنید. (فصل ۱) — ۰/۵



---

۳ نمودار تابع $y=\log_{۲}(x+۱)$ را رسم کنید. (فصل ۱) — ۰/۷۵

---

۴ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin\frac{۲}{۳}x+\cos\frac{۱}{۶}x$ را محاسبه کنید. (فصل ۲) — ۰/۷۵

---

۵ عبارت زیر را ساده کنید. (فصل ۲) — ۰/۷۵

$$A=\frac{۱+\cos x+\cos ۲x}{\sin x+\sin ۲x}$$

---

۶ معادلهٔ زیر را حل کنید. (فصل ۲) — ۱

$$\sin ۲x=\tan x$$

---

۷ حدود زیر را به‌دست آورید. (فصل ۳) — ۱/۵

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}-x)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{x-۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۴^{-}}\frac{x-۲}{x^{۲}-۲x-۸}$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x+۱}}{۵x-۱}$

---

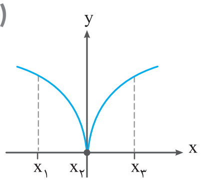
۸ مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{x^{۳}-۴x^{۲}+۳}{x^{۲}-۳x+۲}$ را به‌دست آورید. (فصل ۳) — ۰/۵

---

۹ نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع $f(x)=\begin{cases}x & , \quad x<۰\\ x^{۲} & , \quad x\geq ۰\end{cases}$ می‌باشد. (فصل ۴) — ۱

---

۱۰ با توجه به شکل زیر مشخص کنید که کدام‌یک از نقاط $x_{۱}$، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ جزو نقاط مشتق‌ناپذیر تابع است. (فصل ۴) — ۱



آزمـــــــــون نـوبت دوم (۱۰)

۱ مقادیر m و n را طوری محاسبه کنید که چندجمله‌ای $x^{۲}+mx+n$ بر $(x-۲)(x+۱)$ بخش‌پذیر باشد. (فصل ۱) ۰/۵

۲ نمودار تابع $y=\sqrt{۱-x}+۱$ را رسم کنید. (فصل ۱) ۰/۵

۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq -۱ \\ ۲ & x<-۱ \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌ای این تابع صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است؟ (فصل ۱) ۰/۷۵

۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos ۳x$ متناوب است، دورهٔ تناوب آن را محاسبه کنید. (فصل ۲) ۰/۵

۵ اگر $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ باشد مقدار $\cos\alpha$ را حساب کنید. (α در ناحیه اول) (فصل ۲) ۰/۵

۶ معادلهٔ زیر را حل کنید. (فصل ۲) ۰/۵

$\cos ۲x-۳\cos x+۲=۰$

۷ حدود زیر را محاسبه کنید. (فصل ۳) ۱/۵

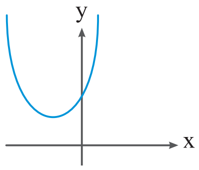
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x-\sqrt{x^{۲}+۱}}{۲x-\sqrt{x^{۲}-۱}}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^{۳}-x+۱}{x^{۲}+x-۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to۰^-}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}\right)$

۸ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-x}{|x|-۱}$ را تعیین کنید. (فصل ۳) ۰/۵

۹ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار مشتق آن را رسم کنید. (فصل ۴) ۱



۱۰ ثابت کنید نقطه‌ای به طول $x=۱$ برای تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ نقطهٔ گوشه‌ای است. (فصل ۴) ۱/۲۵

۱۱ مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (فصل ۴) ۴

الف) $y=\sin^{۳}۲x+\cot\sqrt{x}$

ب) $y=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

ج) $y=\sqrt{۳x+۲(x^{۳}+۱)}$

د) $y=\frac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

آزمون نوبت دوم (۱۱) (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

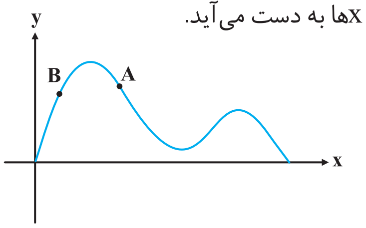
۱ **درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.** ۱

الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.

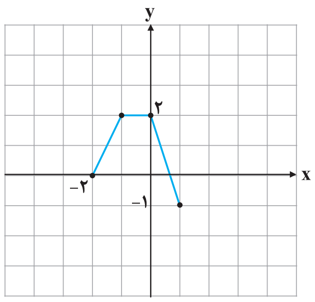
ب) نقاطی به فرم $k \in \mathbb{Z}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ در دامنه تابع تانژانت قرار ندارند.

پ) حاصل $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.

ت) در شکل روبه‌رو شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.



۲ **نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.** ۱



۳ **اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.** ۰/۷۵

۴ **چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید.** ۰/۵

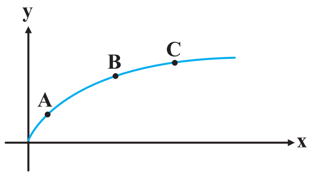
۵ **جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.** ۱

الف) دوره تناوب تابع $y = 3\cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با .... است.

ب) حاصل حد $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$ برابر با .... است.

پ) با توجه به شکل روبه‌رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه .... بزرگ‌تر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.

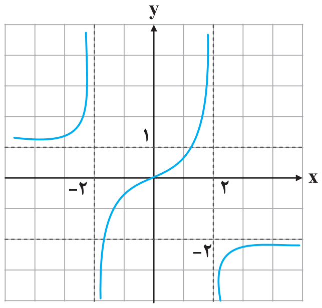
ت) نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است، نقطه .... نام دارد.



۶ **معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.** ۱/۵

۷ **کدام‌یک از خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشد؟ دلیل ارائه کنید.** ۱/۵

۸ **با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است، مجانب‌های افقی تابع را بنویسید.** ۰/۵



آزمون نوبت دوم (۱۱) (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

۹ نشان دهید نقطه‌ای به طول $x=-1$ ، نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x)=|x^{2}+x|$ می‌باشد. ۱/۷۵

---

۱۰ <u>قضیه</u>: ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع f در $x=a$ پیوسته است. ۱/۲۵

---

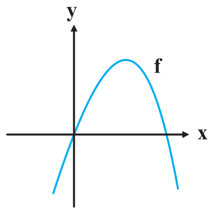
۱۱ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ۱/۷۵

الف) $f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}+2x+1}$

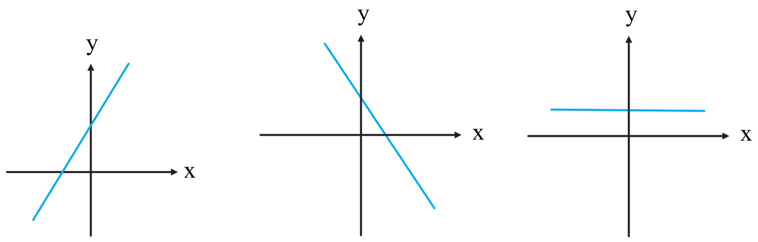
ب) $g(x)=\cos^{3}(2x)$

---

۱۲ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است. ۰/۷۵



با بیان دلیل مشخص کنید کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.



(الف) (ب) (پ)

---

۱۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^{3}-2x$ را در بازه $[0,2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x=1$ محاسبه کنید. ۱

---

۱۴ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^{2}-2x+4}$ را در بازه $[0,2]$ تعیین کنید. ۱/۵

---

۱۵ تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+1}$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است. ۱/۲۵

---

۱۶ مقادیر a و b را در تابع $f(x)=ax^{3}+bx^{2}-1$ چنان بیابید که $A(1,1)$ نقطه عطف منحنی باشد. ۱/۲۵

---

۱۷ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید. ۱/۷۵

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^۲+۱}-x}{۲x+۱} \overset{\text{هم ارزی}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-x}{۲x+۱}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-x}{۲x+۱} \overset{(۰/۲۵)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-۲x}{۲x+۱} = -۱$ (۰/۲۵)

ج) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \dfrac{x+۲}{x^۲+۴x+۴} = \lim\limits_{x\to -۲^+} \dfrac{(x+۲)}{(x+۲)^۲}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= \lim\limits_{x\to-۲^+}\dfrac{۱}{x+۲} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۳

$\lim\limits_{x\to ۶^-}\dfrac{۵-[x]}{x-۶} = \dfrac{۵-[۶^-]}{۶^- - ۶} = \dfrac{۵-۵}{۰^-} = \dfrac{۰}{۰^-} = ۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۴

به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

$y=۲x+۱$

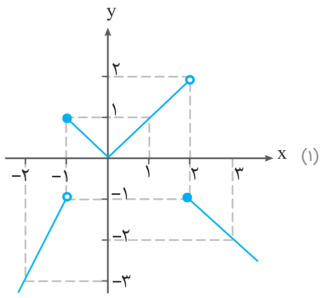
x	-۱	-۲
y	-۱	-۳

$y=|x|$

x	-۱	۲
y	۱	۲

$y=۱-x$

x	۲	۳
y	-۱	-۲



(۱)

$(-\infty, -۱)$ صعودی است. (۰/۲۵)

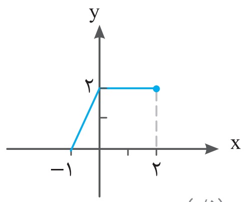
$[-۱, ۰]$ نزولی است. (۰/۲۵)

$[۰, ۲)$ صعودی است. (۰/۲۵)

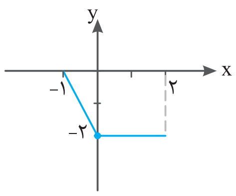
$[۲, +\infty)$ نزولی است. (۰/۲۵)

حسابان (۲) — پاسخ‌نامه آزمون (۴)

۱



$f(-x)$ (۰/۵)



$-f(-x)$ (۰/۵)

۲

$(x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱ & (۰/۲۵)\\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ & (۰/۲۵)\end{cases}$

$\begin{cases} p(۱)=۰ \Rightarrow \\ p(-۲)=۰\Rightarrow\end{cases} \begin{cases} (۱)^۳+a(۱)+b=۰\\ (-۲)^۳+a(-۲)+b=۰\end{cases}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases}a+b=-۱\\ -۲a+b=۸\end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\begin{cases}a+b=-۱\\ ۲a-b=-۸\end{cases}$

$\Rightarrow ۳a=-۹\Rightarrow \boxed{a=-۳}$ (۰/۲۵)

$-۳+b=-۱\Rightarrow b=۳-۱\Rightarrow \boxed{b=۲}$ (۰/۲۵)

۳

الف) راست (۰/۲۵) ب) پایین (۰/۲۵)

ج) $y=f(-x)$ (۰/۲۵) د) $a\geq b$ (۰/۲۵)

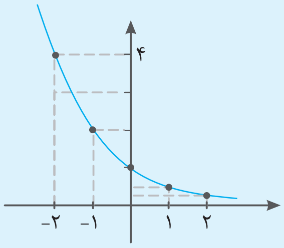
۴

$y=۲^{-x} \rightarrow$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

(۰/۲۵)

چون تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی می‌باشد، پس اکیداً یکنوا می‌باشد. (۰/۲۵)



(۰/۵)

۵

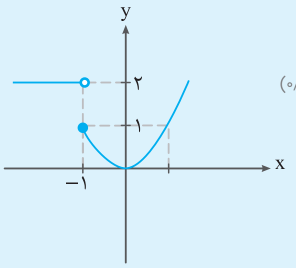
به روش نقطه‌یابی نمودار تابع را رسم می‌کنیم. (۰/۲۵)

x	-۱	۱
y	۱	۱

$x\in(-\infty, -۱)$ تابع ثابت است. (۰/۲۵)

$x\in[-۱, ۰]$ تابع نزولی است. (۰/۲۵)

$x\in[۰, +\infty)$ تابع صعودی است. (۰/۲۵)



(۰/۵)

۶

اگر یک چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای دیگر بخش‌پذیر باشد، باید ریشهٔ آن در چندجمله‌ای صدق کند. لذا داریم: (۰/۲۵)

$x-a=۰\Rightarrow x=a$ (۰/۲۵)

$(a)^۲+a(a)-۲=۰\Rightarrow ۲a^۲-۲=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۲a^۲=۲\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=\pm۱$ (۰/۲۵)

۷

$\sin x+\sin ۲x=۰ \Rightarrow \sin x+۲\sin x\cos x=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \sin x(۱+۲\cos x)=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi \ ,\ (k\in\mathbb{Z}) & (۰/۲۵)\\ \cos x=\dfrac{-۱}{۲}=\cos\dfrac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\dfrac{۲\pi}{۳} \ ,\ (k\in\mathbb{Z}) & (۰/۲۵)\end{cases}$

۸

$\dfrac{۱+\cos\theta}{\sin^۳\theta} \overset{(۰/۲۵)}{=} \dfrac{(۱+\cos\theta)}{\sin\theta(\sin^۲\theta)} = \dfrac{(۱+\cos\theta)}{\sin\theta(۱-\cos^۲\theta)}$ (۰/۲۵)

$$= \frac{\cancel{(1+\cos\theta)}}{\sin\theta(1-\cos\theta)\cancel{(1+\cos\theta)}}$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$= \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)} = \frac{1}{\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۹

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ (۰/۲۵)

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2(\frac{3}{5})^2 = 1 - 2(\frac{9}{25})$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= 1 - \frac{18}{25} = \frac{25-18}{25} = \frac{7}{25}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۰

ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم: $y \to \pm\infty \Rightarrow x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-1)} = \frac{1}{-1} = -1$ (۰/۲۵)

پس $x = 0$ مجانب نیست.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

پس $x = 1$ مجانب قائم است. (۰/۲۵)

۱۱

مجانب افقی تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1$ (۰/۲۵)

مجانب‌های افقی تابع برابر است با $y = 1$ ، $y = -1$. (۰/۲۵)

برای مجانب‌های قائم ابتدا ریشه‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم.

$\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (۰/۲۵)

پس $x = 1$ مجانب قائم است.

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (۰/۲۵)

پس $x = -1$ مجانب قائم است.

۱۲

الف) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \frac{14}{0^-} = -\infty$ (۰/۷۵)

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$ (۰/۵)

ج) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (۰/۷۵)

۱۳

می‌دانیم که $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$، بنابراین (۰/۲۵)

$\alpha = 45$ ، $\beta = 30$ (۰/۲۵)

$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۴

الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{3x^2-2x}{x^2-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$ (۰/۲۵)

ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+\sqrt{x^2+7}}{2x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+|x|}{2x}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x}{2x} = 3$ (۰/۲۵)

د) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x^2-5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2(1+\frac{2}{3x^2})}{4x^2(1-\frac{5x}{4x^2})}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$ (۰/۲۵)

حسابان (۲) | پاسخ‌نامه آزمون (۵)

۱

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow a(1)^3 + (1)^2 + (1) + b = 0$

$\Rightarrow a + 1 + 1 + b = 0 \Rightarrow a + b = -2$ (۰/۲۵)

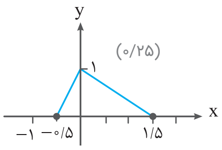
$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = -4$

$\Rightarrow a(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + b = -4 \Rightarrow -a + 1 - 1 + b = -4$

$\begin{cases} a + b = -2 \\ -a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow b = -3, a = 1$ (۰/۲۵)

۲

مرحلهٔ (۱): $y = f(2x)$



تغییرات روی محور افقی $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود

۱۳

آهنگ تغییر متوسط $= \underbrace{\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}}_{(۰/۲۵)} = \frac{۴}{۲} = ۲$ (۰/۲۵)

آهنگ تغییر لحظه‌ای $f'(x)=۳x^۲-۲$ (۰/۲۵) $\Longrightarrow f'(۱)=۱$ (۰/۲۵)

۱۴

$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۴}}$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{f'=۰} x=۱$ (۰/۲۵)

مقدار ماکزیمم مطلق (۰/۲۵) $f(۰)=f(۲)=۲$ (۰/۲۵)

مقدار مینیمم مطلق (۰/۲۵) $f(۱)=\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)

۱۵

$f'(x)=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{f'(x)=۰} x=۰$

نزولی $(-\infty,۰)$ (۰/۲۵)

صعودی $(۰,+\infty)$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		−	۰	+	
f		↘	۰	↗	

(۰/۵)

۱۶

$f'(x)=۳ax^۲+۲bx$
$f''(x)=۶ax+۲b$ (۰/۲۵) $\Longrightarrow \xrightarrow[f''=۰]{(۰/۲۵)} ۶a+۲b=۰$

$f(۱)=۱ \Longrightarrow a+b-۱=۱ \Longrightarrow a+b=۲$ (۰/۲۵)

$\Longrightarrow a=-۱$ (۰/۲۵) ، $b=۳$ (۰/۲۵)

۱۷

$x=۱$ مجانب قائم (۰/۲۵)

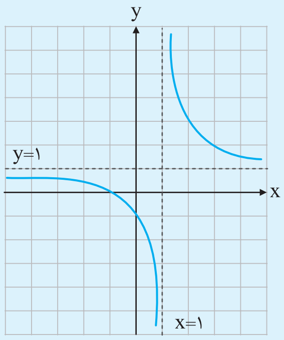
$y=۱$ مجانب افقی (۰/۲۵)

$y'=\frac{-۲}{(x-۱)^۲}<۰$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
f'		−		−	‖	−		−	
f	۱	↘	-۱	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۳	↘	۱

(۰/۲۵)



(۰/۵)

حسابان (۲) — **پاسخ‌نامه آزمون (۱۲)**

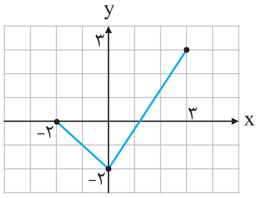
۱

الف) ۷ (۰/۲۵)   ب) $g(x)=x^۳$ (۰/۲۵)

پ) محور طول‌ها (۰/۲۵)   ت) $(-۲,+\infty)$ (۰/۲۵)

۲

$D_g=[-۲,۳]$ (۰/۵)



(۰/۵)

۳

$۸+۴a+۲b+۱=۰ \Longrightarrow ۴a+۲b=-۹$ (۰/۲۵)

$-۱+a-b+۱=۰ \Longrightarrow a-b=۰$ (۰/۲۵)

$\Longrightarrow a=\frac{-۳}{۲}$ (۰/۲۵) ، $b=\frac{-۳}{۲}$ (۰/۲۵)

۴

$x+۱\le ۲x-۳$ (۰/۲۵) $\Longrightarrow x\ge ۴$ (۰/۲۵)

۵

$T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$ (۰/۵) و $\max=|-۳|+۱=۴$ (۰/۵) و $\min=-|-۳|+۱=-۲$ (۰/۵)

۶

الف) درست (۰/۲۵)   ب) نادرست (۰/۲۵)

۷

$۳x=۲k\pi+۲x$ (۰/۲۵) $\Longrightarrow x=۲k\pi\ (k\in z)$ (۰/۲۵)

$۳x=(۲k+۱)\pi-۲x$ (۰/۲۵) $\Longrightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}\ (k\in z)$ (۰/۲۵)

۸

الف) $+\infty$ (۰/۲۵)   ب) ۱ (۰/۲۵)

۹

الف) $\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)^۲}$ (۰/۲۵) $=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۱}{x-۱}$ (۰/۲۵) $=+\infty$ (۰/۲۵)

ب) $\lim_{x\to-\infty} x^۳(-۲+\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۳}) = \lim_{x\to-\infty}(-۲x^۳)$ (۰/۲۵) $=+\infty$ (۰/۲۵)

پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳}{۲x^۳}$ (۰/۲۵) $=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

۱۰

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+۳}{۲-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{-x}$ (۰/۲۵) $=-۱ \Longrightarrow y=-۱$ (۰/۲۵) مجانب افقی

مجانب قائم $x=۲$ (۰/۲۵)

۱۱

I) ب (E) (۰/۲۵)   II) الف (مثبت) (۰/۲۵)

III) ب (کمتر) (۰/۲۵)

۱۲

$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\overset{(۰/۲۵)}{\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}$

تقسیم و بخش‌پذیری

قضیهٔ تقسیم: اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه توابع چندجمله‌ای منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کم‌تر است.

محاسبهٔ باقی ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-a$

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ صفر باشد، $f(x)=p(x)q(x)$ می‌شود که در این حالت می‌گوییم $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

نکته اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $(x-a)$ برابر $f(a)$ است و آن را با $f(a)=r$ نمایش می‌دهند.

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=2x^2-3x+5$ را بر $x-1$ به‌دست آورید.

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$p(1)=2(1)^2-3(1)+5=7-3=4$$

توجه اتحادهای زیر همواره برقرار هستند.

$$1)\ x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

nهای فرد
$$2)\ x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

$$3)\ x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+1)$$

nهای زوج
$$4)\ x^n-1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-1)$$

nهای فرد
$$5)\ x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$$

مثال به کمک تجزیه، کسر زیر را ساده کنید.

$$\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^4-x^3+x^2-x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

فصل دوم مثلثات

تابع متناوب: تابع f در $\mathbb{R}$ با دامنهٔ D_f را یک تابع متناوب گویند، هرگاه عدد مثبتی مانند $T\neq 0$ وجود داشته باشد که:

$$1)\ \forall x\in D_f:(x+T)\in D_f$$
$$2)\ \forall x\in D_f: f(x+T)=f(x)$$

کوچک‌ترین T را دورهٔ تناوب تابع می‌گویند.

مثال ثابت کنید $f(x)=\sin x$ دارای دورهٔ تناوب $T=2\pi$، می‌باشد.

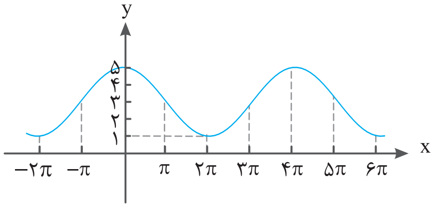
$$1)\ D_f=\mathbb{R}\ ,\ x\in D_f\Rightarrow(x+2\pi)\in D_f$$
$$2)\ f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$$

بین دوره‌ها متناوب $f(x)$ (مثلاً 4π، 6π، ...)، 2π از همه کوچک‌تر است. پس تابع فوق متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است.

نکته توابع به شکل $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

$$-|a|+c\le a\sin bx+c\le |a|+c$$
$$-|a|+c\le a\cos bx+c\le |a|+c$$

مثال نمودار زیر مربوط به تابع $y = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.



با توجه به شکل، ماکزیمم این تابع برابر ۵ و مینیمم آن برابر ۱ است، پس:

$$-\begin{cases} |a|+c=۵ \\ -|a|+c=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲|a|=۴ \Rightarrow |a|=۲$$

$$|a|+c=۵ \Rightarrow ۲+c=۵ \Rightarrow c=۳$$

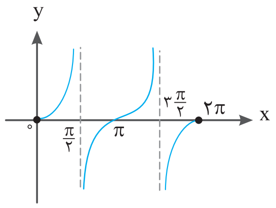
با توجه به تأثیری که منفی بودن a بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محور xها دارد، بایدa مثبت باشد.

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \Rightarrow ۲\pi=۴\pi|b| \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=+\frac{۱}{۲}$$

$$y=۲\cos(\frac{+۱}{۲}x)+۳=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$$

توجه دارید که برای cos،منفی بودن یا مثبت بودن b تأثیری ندارد.

توجه در مورد تابع $y=\tan x$ ، با توجه به نمودار آن، در بازهٔ $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ تابعی صعودی است.



اتحادهای مثلثاتی

۱) $\sin^۲ a+\cos^۲ a=۱$

۲) $\sin ۲a=۲\sin a\cos a$

۳) $\cos ۲a=\begin{cases}\cos^۲ a-\sin^۲ a\\ ۲\cos^۲ a-۱\\ ۱-۲\sin^۲ a\end{cases}$

۴) $\sin ۳a=۳\sin a-۴\sin^۳ a$

۵) $\cos ۳a=۴\cos^۳ a-۳\cos a$

۶) $\sin a+\cos a=\sqrt{۲}\sin(a+\frac{\pi}{۴})$

۷) $\tan ۲a=\frac{۲\tan a}{۱-\tan^۲ a}$

۸) $\cot ۲a=\frac{\cot^۲ a-۱}{۲\cot a}$

۹) $\sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲ a}$

۱۰) $\cos ۲a=\frac{۱-\tan^۲ a}{۱+\tan^۲ a}$

۱۱) $\sin(\frac{\pi}{۲}+a)=\cos a$

۱۲) $\cos(\frac{\pi}{۲}+a)=-\sin a$

۱۳) $\tan(\frac{\pi}{۲}+a)=-\cot a$

۱۴) $\cot(\frac{\pi}{۲}+a)=-\tan a$

۱۵) $\sin(\frac{\pi}{۲}-a)=\cos a$

۱۶) $\cos(\frac{\pi}{۲}-a)=\sin a$

۱۷) $\tan(\frac{\pi}{۲}-a)=\cot a$

۱۸) $\cot(\frac{\pi}{۲}-a)=\tan a$

۱۹) $\sin(\pi+a)=-\sin a$

۲۰) $\cos(\pi+a)=-\cos a$

۲۱) $\tan(\pi+a)=\tan a$

۲۲) $\cot(\pi+a)=\cot a$

۲۳) $\sin(\pi-a)=\sin a$

۲۴) $\cos(\pi-a)=-\cos a$

مثال معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$1)\ \sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin^2 x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$2)\ \cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{+1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

$3)\ \tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{-\pi + 3},\ k \in \mathbb{Z}$

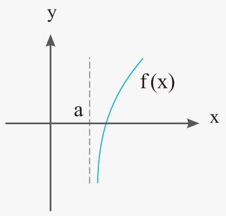
$4)\ \sin 2x = \tan x \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2\sin x \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin x\cos^2 x - \sin x = 0$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x(\cos 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

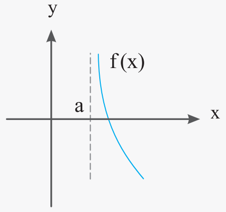
فصل سوم | حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت

حدهای یک‌طرفه نامتناهی

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی، بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

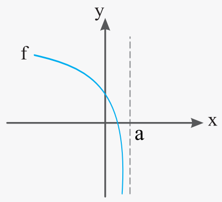


$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

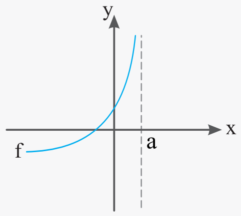


$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

همچنین فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، در این‌صورت $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر کنیم، به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$، یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه، از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرطی که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثال

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{|x|}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{|x|}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

قضیه (۱): اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^n}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{زوج باشد } n\\ -\infty & \text{فرد باشد } n\end{cases}$

قضیه (۲):

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ آن‌گاه، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ آن‌گاه، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

قضیه (۳): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ باشد، آن‌گاه:

الف) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ب) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

پ) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ت) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

تذکر قضیهٔ (۳) در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال حدود زیر را حساب کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{۱-x}{x+۲}=\frac{۱+۲^+}{(-۲)^+ +۲}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۲}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[۲^-]-۲}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱-۲}{۲^- -۲}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$

قضیه (۴): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=۰$

مثال

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{x-۱}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{۲}-۱}{\pm\infty}=۰$$

زیرا: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=-\infty$