مقدمهٔ ناشر

می‌خواستم یه مقدمهٔ بلندبالا بنویسم راجع به «آمار و احتمال و گسسته و اهمیت آن در زندگی امروز...!!» می‌خواستم بگم: توو این دوره زمونه تا دکمهٔ کنترل تلویزیون رو می‌زنی، چندتا آدم می‌بینی نشستن دور هم دارن آمار می‌دن و براساس آماراشون، پیش‌بینی می‌کنن و احتمال می‌دن که فلان می‌شه و بهمان می‌شه. روزنامه، اینستاگرام، تلگرام، صفحات مجازی و ... پر از آمار و احتمال‌های رنگارنگه. دیگه همه یادگرفتن چندتا عدد بدن و نمودار بکشن و بعد بگن فقط منم که راست می‌گم، اصلاً من خوبم!

توو همین فکرا بودم که مقدمهٔ مؤلفا رسید به دستم. دیدم اووَه چه دل پری دارن مؤلفامون! جا نذاشتن چار کلوم هم ما با شما اختلاط کنیم. برای همین با شعر قیصر امین‌پور مقدمه رو ناتموم می‌ذارم و حرفام رو می‌ذارم برا یه وقت خوب که بشینیم دور هم چای و بیسکوئیت بخوریم و گپ بزنیم:

ما در عصر احتمال به سر می‌بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش‌بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید

عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم.

خیلی‌خیلی ممنونم از مؤلفای دوست‌داشتنی این کتاب عطا صادقی و مصطفی دیداری، مسئول پروژه‌های واحد تألیف،خانم هدی ملک‌پور، خانم ملیکا مهری و خانم ریحانه محمدی‌نژاد و ویراستارای خوبمون و همکارای پرتوان در تولید؛ دم همتون گرم.

مقدمهٔ مؤلفان

... خطوط را رها خواهم کرد / و هم‌چنین شمارش اعداد را رها خواهم کرد

و از میان شکل‌های هندسی محدود / به پهنه‌های حسی وسعت پناه خواهم برد...

۱ شاید برای شما عجیب باشد چرا یک مؤلف کتاب‌های ریاضی و معلم ریاضیات گسسته ـ که یکی از مباحث آن نظریهٔ اعداد است ـ مقدمهٔ کتابش را با شعری از فروغ فرخزاد شروع کند که در آن آمده «شمارش اعداد را رها خواهم کرد» دلیل آن ساده است، به خاطر آن‌که ریاضیات، که از قضا خیلی هم دوستش دارم، همهٔ زندگی من نیست، بلکه بخشی از آن است. کل این کتاب هم در مورد ریاضی است، بنابراین این یک مقدمه را دیگر نمی‌خواهم دربارهٔ ریاضی حرف بزنم.

۲ کنکور در جای خودش مهم است. در سرنوشت شما تا حدی تأثیر دارد و اگر دانشگاه خوبی بروید و رشته‌ای که دوست دارید بخوانید ـ البته اگه واقعن بدانید چه چیزی را دوست دارید ـ احتمالن در زندگی‌تان آدم موفق‌تری خواهید شد. اما کنکور و دانشگاه همه چیز نیست و چیزهای خیلی‌خیلی مهم‌تری هم وجود دارد. همیشه سعی کرده‌ام توی کلاس‌هایم، اگر فرصتی پیش بیاید، به‌جز درس از چیزهای دیگری هم حرف بزنم، فیلم‌ها و کتاب‌های خوبی که تازگی دیده‌ام و خوانده‌ام را به بچه‌ها معرفی کنم. تماشای تئاترهای خوبی که رفته‌ام و هنوز روی صحنه است را به آن‌ها پیشنهاد کنم و ...

کنکور تمام می‌شود و می‌رود و من حتی اگر معلم خوبی باشم، در زمینهٔ کنکور فقط برای یک سال می‌توانم به دانش‌آموزهایم کمک کنم، اما بعضی نوشته‌ها، نقاشی‌ها و طرح‌ها، موسیقی‌ها، نمایش‌ها، شعرها، فیلم‌ها و کتاب‌ها ممکن است در کل زندگی یک نفر اثرگذار باشد. من خودم بخشی بزرگ از زندگیم را مدیون خوانده‌ها، دیده‌ها و شنیده‌هایم هستم. به نظرم بسیار مهم است که آدم چند بعدی باشد در زندگی‌اش و فقط در یک شاخه پیش نرود، که بداند دنبال چه چیزی می‌گردد و رؤیاهایش را فراموش نکند.

۳ محمد یعقوبی که به نظر من یکی از بهترین نمایش‌نامه‌نویس‌های معاصر است و بیشتر کارهایش را دوست دارم، نمایش‌نامه‌ای دارد به نام «ماه در آب» که در بخشی از آن یکی از شخصیت‌های نمایش می‌گوید: «مادرم یادداشت اون روزش رو با یه سؤال شروع کرده. کیه که حتی یه بار آرزو نکرده باشه، کاش می‌تونست همه چیز رو بذاره بره و یه زندگی دیگه رو شروع کنه؟

یادداشت‌های مادرم رو می‌خونم و می‌بینم من هم مثل پدرم اهل خداحافظی‌ام. اولین خداحافظی با مادرم بود. بعد با پسری که می‌گفت عاشقمه خداحافظی کردم، بعد با کشوری که توش به دنیا اومدم، بعد خداحافظی با پدرم. خاله آلما می‌گه: آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که می‌مونن، آدم‌هایی که می‌رن. دایی آروین هم می‌گه: آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که به رؤیاشون خیانت می‌کنن، آدم‌هایی که دنبال رؤیاشون می‌رن. مادرم آی‌سودا هم می‌گفت: آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که به ماه بالای سرشون خیره شدن و آدم‌هایی که به ماه توی آب».

یادم است وقتی داشتم برای اولین بار این نمایش را توی سالن سایهٔ تئاتر شهر می‌دیدم، شنیدن این جمله که: «آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که به رؤیاشون خیانت می‌کنن، آدم‌هایی که دنبال رؤیاشون می‌رن.» تکانم داد. همهٔ ما به‌خصوص وقتی جوان‌تر هستیم حتمن آرزوهایی داریم و رؤیاهایی در سرمان می‌پرورانیم، اما واقعن چند درصد از ما دنبال آرزوهای‌مان می‌رویم و چند درصد، آن‌قدر غرق در جریان روزمرهٔ زندگی می‌شویم که آرام آرام رویاهای‌مان را فراموش می‌کنیم و به قول میلان کوندرا حل می‌شویم در این سبکی تحمل‌ناپذیر هستی؟

من فکر می‌کنم خیلی مهم است که ما هر چند وقت یک‌بار چک کنیم مسیری که برای زندگی انتخاب کرده‌ایم، در راستای رسیدن به رؤیاهایمان هستند یا نه. ما آدم‌ها نباید به کم قانع شویم. باید تلاش کنیم به چیزی که می‌خواهیم برسیم، چرا که به قول برناردشاو: «اگر چیزهایی که دوست داریم به دست نیاوریم، مجبوریم چیزهایی که به دست آورده‌ایم، دوست داشته باشیم.» ما حق نداریم به رؤیاهایمان خیانت کنیم، اگر این کار را بکنیم، در واقع به هویتمان خیانت کرده‌ایم. شاید شما دوست داشته باشید نویسندهٔ موفقی شوید، باید سخت کار کنید و هدفتان را گم نکنید وگرنه می‌بینید چندین سال گذشته و تبدیل به مهندس یا کارمندی شده‌اید که از زندگی‌اش راضی نیست، یا بچه به بغل دارید توی آشپزخانه قرمه‌سبزی درست می‌کنید!

۴ چند شب پیش رفته بودم توی بالکن تا به گلدان‌ها آب بدهم، دیدم که اوه این وقت تابستان چه بادی دارد می‌آید و نگران شدم نکند درخت‌ها بشکنند. بعد توی ذهنم آمد: «در کوچه باد می‌آید.» و ناخودآگاه ادامه‌اش: «این ابتدای ویرانی است» و فکرکردم این شاید واقعن هم ابتدای ویرانی باشد. این شرایط را می‌گویم. وضع نابه‌سامان مملکت و گران‌شدن روزبه‌روز همه چیز، کم آبی، کاهش مدام ارزش پول ملی، فقیرشدن عدهٔ بیشتری از مردم و مشکلات ناشی از کرونا. بعد، نشستم با خودم فکرکردم: «خب می‌خوای چی‌کار کنی الان؟» چیزی که می‌دانم این است که هنوز نمی‌خواهم مملکت و خانواده‌ام را رها کنم و بروم خارج از کشور. البته این یک انتخاب شخصی است، فضیلتی برای آن قائل نیستم و به کسی هم چنین توصیه‌ای نمی‌کنم. چون ممکن است اوضاع خیلی بدتر شود، وضع اقتصادی مردم و خودم بدتر و بدتر شود، برق بیشتر برود، آب جیره‌بندی شود و بدتر از همه، جنگ شود. به بقیه کاری ندارم، اما خودم هنوز هم تصمیم دارم سختی‌ها را تاب بیاورم و سعی کنم درست‌ترین رفتار را داشته باشم. تنها کاری که در این شرایط از دست من برمی‌آید این است که مسئولانه‌تر از قبل زندگی کنم. چه در زندگی شخصی و چه در رفتارم به عنوان یک شهروند جامعه. مثلن در این کمبودها حواسم بیشتر به مصرف درست آب و برق باشد ، حرص نزنم، سعی کنم بهتر از قبل درس بدهم و رفتار درست‌تری با شاگردهایم و آدم‌هایی که با آن‌ها در ارتباطم داشته باشم، انرژی بیش‌تری‌بگذارم تا کیفیت کتاب‌هایی که می‌نویسم بالاتر برود و به درد آدم‌های بیش‌تری بخورد، به منفعت خود تنهایم فکر نکنم و خودم را بخشی از جامعه ببینم. این مملکت روزهای سخت کم نداشته است، تا آن‌جایی که من یادم می‌آید و به چشم دیده‌ام ما روزهای سخت جنگ و همهٔ مشکلات دههٔ شصت را پشت سر گذاشتیم و زنده ماندیم. ماها ممکن است ناراحت باشیم، دل‌گیر باشیم، فحش بدیم، حتی وطنمان را ترک کنیم، اما شک ندارم در وجود تک‌تکمان یک بخشی عاشق این آب و خاک است. این‌جا وطنمان است، دوستش داریم و دلمان برایش می‌تپد. چه‌طور بی‌خیالش شویم؟

۵ در چاپ جدید این کتاب تلاش کرده‌ام همه چیز در بهترین حالت خودش باشد. درس‌نامه‌ها حسابی مفصل و کامل شده است و با خواندنش هیچ نکته‌ای برایتان ناگفته باقی نمی‌ماند. تست‌ها با دقت طبقه‌بندی شده‌اند و تلاش کرده‌ام در آن‌ها همهٔ ایده‌های ممکن پوشش داده شوند. به آخر هر درس یک آزمون اضافه شده تا بعد از زدن تست‌های درس بفهمید وضعیتتان چه‌طور است و درس را یادگرفته‌اید یا نه و پاسخ‌ها هم واقعن تشریحی است و خیلی از تست‌ها به دو روش پاسخ داده شده است. در پایان این مقدمه دوست دارم از همهٔ کسانی که در نوشتن این کتاب به من کمک کرده‌اند، تشکر کنم. ممنونم از آقای دیداری که در تألیف این کتاب به من کمک کرد، متشکرم از رسول محسنی‌منش که نظراتش در مورد کتاب بسیار به درد من خورد. تشکر می‌کنم از دکتر کمیل نصری، مهندس نوید شاهی، مهندس رضا سبزمیدانی، خانم‌ها ملک‌پور و مهری و همهٔ همکاران انتشارات خیلی سبز و تشکر می‌کنم از ویراستارهای کتاب که نظرات خوبشان به ما کمک کرد. از شما دانش‌آموزان و همکاران عزیزی که این کتاب را می‌خوانید نیز می‌خواهم حتمن نظرها، پیشنهادات و انتقادات خود را دربارهٔ این کتاب از طریق ایمیل یا هر روش دیگری که خودتان صلاح می‌دانید به ما برسانید. عمیقن بر این باورم هر کتابی، هر چه‌قدر هم خوب باشد، باز می‌تواند بهتر شود. خیلی خوش‌حال می‌شوم بتوانم از نظرات شما در چاپ‌های بعدی این کتاب استفاده کنم. خب! حرف‌هایی که می‌خواستم بزنم را زدم. حالا دوست دارم همان‌طور که این نوشته را با بخشی از یکی از شعرهای فروغ فرخزاد آغاز کردم، آن را با بخشی از شعر دیگری از همین شاعر بلندمرتبه به پایان برسانم:

من از زمانی / که قلب خود را گم کرده‌است، می‌ترسم / من از تصور بیگانگی این همه دست / و از تجسم بیگانگی این همه صورت می‌ترسم ...

من مثل دانش‌آموزی که / درس هندسه‌اش را دیوانه‌وار دوست دارد، تنها هستم / و فکر می‌کنم که باغچه را می‌شود به بیمارستان برد / من فکر می‌کنم ...

من فکر می‌کنم ... / من فکر می‌کنم ... / و قلب باغچه در زیر آفتاب ورم کرده است / و ذهن باغچه دارد آرام آرام / از خاطرات سبز تهی می‌شود.

عطا صادقی

ata.sadeghi@gmail.com

«پل اردوش» ریاضی‌دان نابغهٔ مجارستانی (*۲۰ سال پیش مرحوم شده*) است که در ترکیبیات (*همین گسسته خودمون*) کارهای زیادی انجام داده است. کل زندگی‌اش یک چمدان بوده و از طریق سخنرانی‌هایی که در دانشگاه‌های مختلف انجام می‌داده، گذران زندگی می‌کرده است. بیش از ۱۵۰۰ مقاله (*ان شا ا... رفتی دانشگاه می‌فهمی به مقاله دادن یعنی چی!*) نوشته است، آن هم چه مقاله‌هایی! برخی از آن‌ها، اصلن شاخه‌ای در ریاضی باز کرده است (*مثلاً مدلی برای اثبات برخی از قضیه‌ها، معروف به روش‌های احتمالاتی ارائه کرده است که سکه می‌اندازید و قضیه اثبات می‌شود!*) بعد از فوت او کتابی چاپ شد به نام «اثبات» که داستان جالبی دارد. اردوش معتقد بود کتابی مقدس، در عالم بالا وجود دارد که در آن اثبات‌های خارق‌العاده قضیه‌های ریاضی، نوشته شده است. هر زمان خودش از این‌جور اثبات‌های خفن، ارائه می‌داد می‌گفت: این اثبات از «کتاب» است. بعد از فوتش، بسیاری از این‌جور اثبات‌های او، در این کتاب گردآوری شده است. حتی این‌قدر برایش احترام قائل هستند که در ریاضی عددی داریم به نام عدد اردوش. مثلاً اگر کسی با اردوش مقاله داده باشد عدد اردوش او برابر یک است (*مثلاً دکتر مهدی بهزاد خودمون که پدر علم گراف ایرانه عدد اردوشش یکه*). کسی که با فردی که با اردوش مقاله دارد، مقاله داشته باشد، عدد اردوشش می‌شود دو و همین‌جوری! این خودش یک رزومه برای ریاضی‌دانان محسوب می‌شود. اردوش حدس‌های حل‌نشدهٔ زیادی دارد که اتفاقاً در کتابی به نام «حدس‌های اردوش» جمع‌آوری شده است. یکی از حدس‌های او در مورد عدد تقاطع گراف (*کم‌ترین تعداد برخورد یال‌ها در رسم گراف*) بود. همین چند سال پیش، یک ریاضی‌دان دانمارکی به اسم «توماسون» درستی آن حدس را ثابت کرد آن هم در دو خط! بعد از آن، خودش گفته بود: «*فقط دوس داشتم اردوش زنده بود، این اثبات رو می‌دید.*» خلاصه حرف در مورد اردوش و کارهایش زیاد است.

غرضم از این همه تعریف و تمجید از اردوش، این بود که به این‌جا برسم. اول این‌که: دیدید دست روی دست زیاد است! اردوش با آن همه عظمت، هم ممکن است چیزی به ذهنش نرسد، ولی به فکر فرد دیگری مثل شما برسد. بچه‌ها هر کدام از شماها مثل یک عدد اول هستید. دیدید اعداد اول، شخصیت منحصربه‌فردی دارند یعنی با ضرب اعداد دیگر ساخته نمی‌شوند. واقعاً ایده‌هایی درون فکر هر کدام از شما، وجود دارد که درون ذهن من که سهل است به عقل جن هم نمی‌رسد! این را اول باور کنید بعد آن را بارور کنید، خواهید دید که چه درهایی باز می‌شود!

اما نکتهٔ دوم: استاد راهنمای ارشد بنده (*دکتر حاج ابوالحسن که واقعاً علاقه و سوادم در گسسته رو مدیون ایشون هستم*) می‌گفت: برای شمایی که می‌خواهید در گرایش ترکیبیات کار کنید یک ترسی همیشه وجود دارد، این‌که یک بچه ممکن است سؤالی از شما بپرسد و نتوانید پاسخ دهید! بچه‌ها ذات این درس، معماگونه است. اصلاً سرآغاز برخی از مباحث گسسته، مثل گراف، همین معماها بوده‌اند. ذات این درس دیریاب است، یعنی طول می‌کشد تا توی مغزتان بنشیند، ولی امان از وقتی که بنشیند خوب هم بنشیند، می‌بینید که خیلی از تست‌ها به سادگی و در زمان کوتاهی حل می‌شوند، مخصوصاً این‌که محاسبات آن‌چنانی در این درس (مثل حسابان) نداریم. مطالب درس گسسته، کاملاً برای شما جدید است، پس صبور باشید تا مفاهیم به صورت آهسته و پیوسته در ذهن شما بنشیند نه این‌که با حل‌نشدن چند تست دچار یأس فلسفی بشوید.

خوب است یک چند کلمه‌ای هم، در مورد این کتابی که دستتان است بگویم:

۱ کلاً سؤال‌های کنکور را می‌توانیم در سه شاخهٔ حسابان (حدود ۱۹ سؤال)، هندسه (حدود ۱۸ سؤال) و گسسته (حدود ۱۸ سؤال) دسته‌بندی کنیم. خیالتان راحت باشد، هر چیزی که در شاخهٔ گسسته، نیاز دارید این‌جا جمع کرده‌ایم، یعنی دو فصل پایانی ریاضی دهم به علاوهٔ کل آمار و احتمال (*می‌شوند پایه*) و خب گسسته (*می‌شود دوازدهم*)! در تغییر نسل کتاب‌های درسی، بیشتر سؤال‌های کنکور از تمرین‌های کتاب درسی مطرح می‌شوند، پس واو به واو کتاب‌های درسی را بررسی کردیم، مثال‌ها، تمرین‌ها را تبدیل به تست کرده‌ایم، تازه کنکورهای سال‌های قبل (*که در چهارچوب کتاب‌های جدید بوده*) را هم آورده‌ایم، پس دیگر چاره‌ای جز صد زدن آن ۱۵ سؤال کذایی ندارید! قطعاً طراحان کنکور، خارج از کتاب درسی سؤالی را نخواهند داد، پس ما هم این اصل را رعایت کرده‌ایم یعنی همهٔ تست‌ها در چهارچوب کتاب درسی و خط کنکور طراحی شده‌اند.

۲ در هر قسمت، اول درس‌نامه را بخوانید. تمام تست‌های آموزشی را (بدون زمان) حل کنید و نکته‌های مهم را خلاصه‌نویسی کنید. این کارها چند فایدهٔ بزرگ دارند. باعث می‌شود ذهن شما از آشفتگی درآمده، دارای چهارچوب و ساختار منظمی در آن مبحث بشود، هم‌چنین به تست‌ها راحت‌تر می‌توانید پاسخ دهید. با پاسخ‌نامه هم ارتباط بهتری می‌توانید برقرار کنید. درس‌نامه‌ها اصلاً حالت خلاصه و نکته‌ای ندارند، بلکه مثل یک کلاس کنکور، همهٔ مباحثی که لازم (*دقت کردی لازم برای کنکور، نه هر چیزی*) است را باز کرده‌ایم.

۳ حالا نوبت به حل تست‌ها می‌رسد. تست‌ها با وسواس زیاد و از ساده به مشکل در هر موضوع اصلی و فرعی قرار داده شده‌اند. اگر چند تست اول برایتان ساده بود جوگیر نشوید، اگر در آخری‌ها هم به مشکل برخوردید، عزا نگیرید! حواستان باشد برای تسلط روی همهٔ مفاهیم کتاب، حل یک بارهٔ تست‌ها کافی نیست، بلکه تست‌ها باید حداقل دو بار، حل شوند. پس بار اول تست‌ها را بدون زمان حل کنید. اگر تستی، حل نشد هیچ اشکالی ندارد. چرا؟ چون یک پاسخ‌نامهٔ نسبتاً مفصل را برای همین نوشته‌ایم. فقط یک چیزی! پاسخ هر سؤالی را حتما ببینید، ولی خواهشاً سریع به پاسخ‌نامه مراجعه نکنید! اول کمی با تست کلنجار بروید! سعی کنید بین آموزش‌های درس‌نامه یا جزوهٔ معلم محترم و هر تست ارتباط برقرار کنید. هر مقدار از راه‌حل را که می‌توانید بروید جلو، بعد اگر حل نشد جواب را ببینید. اگر این کار را بکنید، ارتباط ذهن با آن مطلب برقرار شده، بعد می‌بینید که پاسخ چه‌قدر خوب و راحت می‌رود درون حافظهٔ بلندمدتتان! تازه لذت «*آهان فهمیدم*» را هم خواهید چشید.

۴ حدود یک‌چهارم تست‌ها رنگی هستند. اشتباه نکنید! این‌ها تست‌های خفنی که از روی آن‌ها بپرید! نیستند. اگر فرصت کافی دارید که بحثی نیست باید همهٔ تست‌ها را بزنید، اما اگر واقعاً چند روزی بیشتر تا کنکور نمانده (*دیگه اوضاع اورژانسیه*) و دنبال جمع‌بندی هستید، می‌توانید به این تست‌های مهم‌تر رنگی، اکتفا کنید.

فکر نمی‌کنم دیگر حرفی جز تشکر مانده باشد! تشکر از آقای دکتر نصری و مهندس سبزمیدانی به خاطر اعتماد دوباره، تشکر از دوست خوبم مهندس صادقی برای یک همکاری خوب، تشکر از سرکار خانم مهری که زحمت کارهای واقعاً زیاد اجرایی بر دوش ایشان بود، تشکر از ویراستاران محترم، دوستان تولید و از بچه‌های خوب دبیرستان نیک‌اندیشان (مخصوصاً آرین مجیدی‌نیا) که کتاب را با حوصله خواندند و خلاصه تشکر از همهٔ کسانی که بدون کمک آن‌ها، این کتاب به دست شما نمی‌رسید. امیدوارم بخوانید و حالش را ببرید. حق نگه‌دارتان.

دوستدار شما دیداری

فهرست

درس ۲

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

$(10)^{12} \cdot 88$

این درس از سه قسمت تشکیل شده است. در بخش اول با مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن و ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم؛ در قسمت دوم دربارهٔ ب.م.م و ک.م.م صحبت می‌کنیم و بالأخره به قضیهٔ تقسیم و افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک آن می‌پردازیم.

- بخش‌پذیری در اعداد صحیح
  - عادکردن
    - مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن
    - ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن
    - ضرب و مقسوم‌علیه
    - معادله‌های عادکردن
    - اعداد اول
    - باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم بر ۸
  - ب.م.م و ک.م.م
    - مفهوم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک
    - مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک
    - ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م
    - متباین‌سازی
  - قضیهٔ تقسیم و کاربردها
    - قضیهٔ تقسیم
    - پیداکردن باقی‌مانده و خارج قسمت
    - افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

خب! حالا وقتش است برویم سراغ این درس و ببینیم چه خبر است؟

مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن

تساوی $3 \times 5 = 15$ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵، از سه دستهٔ ۵تایی تشکیل شده است. جور دیگری نیز می‌توانیم بگوییم که در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵، خارج قسمت برابر ۳ می‌شود و باقی‌مانده صفر است. به همین خاطر، می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵، عدد ۱۵ را می‌شمارد؛ چون می‌توان ۱۵ را با دسته‌های ۵تایی شمرد. (*۳ دستهٔ پنج تاییِ سیب می‌شود، ۱۵ سیب و سیبی باقی نمی‌ماند.*)
این شمارش یا عادکردن را در ریاضی با علامت «|» نشان می‌دهند و می‌نویسند: $5 \mid 15$

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد، به‌طوری که: $a = bq$

در این صورت می‌گویند b عاد می‌کند a را یا b می‌شمارد a را و می‌نویسند: $b \mid a$

از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

$$a = bq \iff \begin{cases} \text{a بر b بخش‌پذیر است.} \\ \text{b می‌شمارد a را (b عاد می‌کند a را)} \end{cases}$$

(خیلی چیز ساده‌ایه! مثلاً وقتی می‌گیم ۶ بر ۲ بخش‌پذیره یعنی ۲ عاد می‌کند ۶ رو، یعنی $۲ \mid ۶$)

دو نکتهٔ مهم:

۱ تبدیل عادکردن به تساوی خیلی‌خیلی مهم است و زیاد استفاده می‌شود: $a = bq \Leftrightarrow b \mid a$

۲ منظور از عدد در بخش نظریهٔ اعداد، عدد صحیح است، بخش‌پذیری توی عددهای گنگ، کسری و ... تعریف نمی‌شود.

قانون ۹۰ درجه

اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن مثل $۲۱ \mid ۶۳$، دچار اشکال شدید، می‌توانید آن را **نود درجه به خلاف عقربه‌های ساعت** بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود:

$$۲۱ \mid ۶۳ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۶۳}{۲۱} = ۳$$

حالا اگر مثل این‌جا، حاصل عددی صحیح شد، رابطهٔ عادکردن، یک رابطهٔ درست بوده و در غیر این صورت، درست نیست.

مثال **رابطه‌های $۲^۸ \mid ۲^۵$ و $۷ \mid -۱$ را در نظر بگیرید.**

همان‌طور که گفتیم، برای این‌که بفهمیم این رابطه‌ها درست‌اند یا نه آن‌ها را تبدیل به کسر می‌کنیم:

$$۲^۸ \mid ۲^۵ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۲^۵}{۲^۸} = \frac{۱}{۲^۳} \quad \times$$

رابطه درست نیست، زیرا $\frac{۱}{۲^۳}$ یا $\frac{۱}{۸}$ عددی صحیح نیست. جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم. $۲^۸$ ضربدر هیچ عدد صحیحی، برابر $۲^۵$ نمی‌شود.

$$-۱ \mid ۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۷}{-۱} = -۷ \quad \checkmark$$

رابطه درست است، زیرا -۷ عددی صحیح است؛

تست **کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟**

۱) $۷ \mid -۶۳$ ۲) $۱۳ \mid ۹۱$ ۳) $۳^۵ \mid ۳^۷$ ۴) $۲^۷ \mid ۴^۴$

پاسخ **گزینهٔ ۴** اگر $a = bq$ باشد، آن‌گاه $b \mid a$. در این سؤال داریم:

۱ درست است. $-۶۳ = ۷ \times (-۹) \Rightarrow ۷ \mid -۶۳$

۲ درست است. $۹۱ = ۷ \times ۱۳ \Rightarrow ۱۳ \mid ۹۱$

۳ درست است. $۳^۷ = ۳^۵ \times ۳^۲ \Rightarrow ۳^۵ \mid ۳^۷$

اما ۴ درست نیست. توجه کنید که $۲^۸ = (۲^۲)^۴ = ۴^۴$ بنابراین رابطهٔ $۲^۷ \mid ۲^۸$ نادرست است و برعکس آن یعنی $۲^۸ \mid ۲^۷$ درست است، زیرا:

$$۲^۸ = ۲ \times ۲^۷ \Rightarrow ۲^۷ \mid ۲^۸$$

البته با نکته‌ای که گفتیم هم می‌توانید نادرستی ۴ را بررسی کنید. عبارت $۲^۷ \mid ۴^۴$ را به یک کسر تبدیل می‌کنیم:

$$۴^۴ \mid ۲^۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۲^۷}{۴^۴} = \frac{۲^۷}{۲^۸} = \frac{۱}{۲}$$ عددی صحیح نیست.

پس رابطه برقرار نیست.

تست **کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $۴۵۵ \mid n!$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟**

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

پاسخ **گزینهٔ ۱** عدد ۴۵۵ را تجزیه می‌کنیم: $۴۵۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۳$

قرار است رابطهٔ $۴۵۵ \mid n!$ برقرار باشد، یعنی باید کوچک‌ترین مقدار n را پیدا کنیم به شرط آن‌که کسر $\frac{n!}{۵ \times ۷ \times ۱۳} = \frac{n!}{۴۵۵}$ برابر عددی صحیح شود.

مشخص است که اگر بخواهیم $n!$ هر سه عامل ۵، ۷ و ۱۳ را داشته باشد کوچک‌ترین مقدار n برابر ۱۳ است. $۱ + ۳ = ۴ =$ مجموع ارقام ۱۳

سه ویژگی ساده و ابتدایی از بخش‌پذیری

۱ همهٔ عددها یا عبارت‌های جبری بر خودشان بخش‌پذیرند بر قرینه‌شان هم بخش‌پذیرند:

$$a \mid a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{a} = ۱ \quad \checkmark$$

$$a \mid -a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{-a}{a} = -۱ \quad \checkmark$$

۲) همهٔ عددها بر ۱ و ۱− بخش‌پذیرند. به بیان دیگر ۱ و ۱− همهٔ عددها را عاد می‌کنند: $\pm۱ | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{\pm۱}=\pm a$ ✓

۳) صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است اما هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست: $a | ۰ \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{۰}{a}=۰$ ✓

$۰ | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{۰}$ ✗

طبق قرارداد صفر بر خودش بخش‌پذیر است. به بیان دیگر **تنها عددی** که بر صفر بخش‌پذیر است، خود صفر است.

صفر خودش را می‌شمارد. $۰ | ۰ \Leftrightarrow ۰ = ۰ \times q$

(یعنی اگه یه‌جا دیدین صفر یه چیزی رو می‌شماره، اون چیز صفره:) $(۰ | \quad \Rightarrow \quad = ۰$

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x، رابطهٔ $۰ | x^۴ - ۴x^۲ + ۳$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ ۳ گفتیم که عدد صفر، هیچ عددی را نمی‌شمارد به‌جز خودش؛ بنابراین اگر بخواهیم رابطهٔ بالا برقرار باشد، باید:

$$x^۴ - ۴x^۲ + ۳ = ۰$$

$$x^۴ - ۴x^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۱)(x^۲ - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

چون x باید عددی صحیح باشد پس $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ غیرقابل‌قبول هستند و در نتیجه ۳) پاسخ سؤال است.

$a | \quad \Rightarrow ?$

وقتی که a عددی را می‌شمارد چه نتایجی می‌توان گرفت؟

۱) $a | ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$ *(اگر عددی ۱ یا ۱− رو می‌شمره واضحه فقط می‌تونه ۱ یا ۱− باشه.)*

۲) $a | p \Rightarrow a = \pm ۱, \pm p$ (p عددی اول است.) *(برای مثال اگر $a | ۷$، a فقط می‌تونه ۱، ۱−، ۷ و ۷− باشه.)*

۳) $a | k \Rightarrow$ a می‌تواند هر کدام از مقسوم‌علیه‌های k باشد.

توان عدد اول p در تجزیهٔ !n

⚠ این بخش در کتاب درسی نیست، اما از آن‌جایی که از آن در کنکور سراسری ۱۴۰۰ سؤال آمده، بهتر است آن را بلد باشید.

توان عدد اول p در تجزیهٔ !n برابر است با: $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^۲}] + [\frac{n}{p^۳}] + \cdots$

برای مثال اگر بخواهیم بدانیم در تجزیهٔ !۴۱ توان عدد ۲ چند است داریم:

$$[\frac{۴۱}{۲}] + [\frac{۴۱}{۴}] + [\frac{۴۱}{۸}] + [\frac{۴۱}{۱۶}] + [\frac{۴۱}{۳۲}] + \underbrace{[\frac{۴۱}{۶۴}] + \cdots}_{\text{از اینجا به بعد صفر می‌شود}}$$

$$۲۰ + ۱۰ + ۵ + ۲ + ۱ = ۳۸$$

تست اگر $\frac{۵۰!}{۲^x \times ۳^y}$ عددی صحیح باشد، بیش‌ترین مقدار $x + y$ کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۰ ۳) ۷۱ ۴) ۷۳

پاسخ گزینهٔ ۱ با توجه به رابطهٔ داده‌شده توان عددهای ۲ و ۳ را در تجزیهٔ !۵۰ پیدا می‌کنیم.

$$[\frac{۵۰}{۲}] + [\frac{۵۰}{۴}] + [\frac{۵۰}{۸}] + [\frac{۵۰}{۱۶}] + [\frac{۵۰}{۳۲}] = ۲۵ + ۱۲ + ۶ + ۳ + ۱ = ۴۷$$

$$[\frac{۵۰}{۳}] + [\frac{۵۰}{۹}] + [\frac{۵۰}{۲۷}] = ۱۶ + ۵ + ۱ = ۲۲$$

بنابراین اگر بخواهیم $\frac{۵۰}{۲^x \times ۳^y}$ عددی صحیح باشد. x حداکثر برابر ۴۷ و y حداکثر برابر ۲۲ است. بنابراین بیشترین مقدار xy برابر است با:

$$۴۷ + ۲۲ = ۶۹$$

مضرب و مقسوم‌علیه

این دو رابطه را نگاه کنید:

الف) $6 \mid x$ ب) $x \mid 12$

الف) اگر همان‌طور که گفتیم رابطهٔ (الف) را به یک کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{x}{6}$ درمی‌آید. حالا به نظر شما این کسر به ازای چه مقادیری از x تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ مشخص است که به ازای ±6، ±12، ±18 و ... . خب! حالا این‌ها چه عددهایی هستند؟ بله! مضارب ۶.

ب) اما اگر رابطهٔ $x \mid 12$ را به یک کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{12}{x}$. خب حالا به ازای چه مقادیری از x این کسر تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ عددهای $\pm12, \pm6, \pm4, \pm3, \pm2, \pm1$. همان‌طور که می‌بینید این عددها همان مقسوم‌علیه‌های ۱۲ هستند.

یادتان باشد:

$a \mid x \Rightarrow$ x مضرب a است.

$x \mid a \Rightarrow$ x مقسوم‌علیه a است.

تست به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطهٔ $5 \mid x$ و $x \mid 90$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ بهترین روش برای پاسخ‌دادن به این مدل سؤال‌ها این است که رابطهٔ اول را به تساوی تبدیل کنیم و در رابطهٔ دوم قرار دهیم:

$5 \mid x \Rightarrow x = 5q$

$x \mid 90 \Rightarrow 5q \mid 90 \Rightarrow q \mid 18$

حالاباید مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ را پیدا کنیم: مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸: $1, 2, 3, 6, 9, 18$

تست چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ اگر قرار باشد که عدد a، عدد -4 را بشمارد؛ یعنی داریم: $a \mid -4 \Leftrightarrow -4 = aq$

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، یعنی این‌که کسر $\frac{-4}{a}$ باید عددی صحیح باشد. به بیان دیگر، باید پیدا کنیم که عدد -4 بر چه عددهای صحیحی بخش‌پذیر است. روشن است که در مخرج کسر، می‌توان هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد -4 را قرار داد؛ یعنی هر کدام از عددهای زیر را:

$1, -1, 2, -2, 4, -4$

بنابراین ۶ عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد و پاسخ ۴ است.

از رابطهٔ $a \mid b$ چه نتایجی می‌توان گرفت؟

فرض کنید که یک رابطهٔ عادکردن مثل $a \mid b$ داریم. می‌خواهیم ببینیم چه کارهایی را مجازیم روی آن انجام دهیم. سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توانیم در هر عدد صحیحی، ضرب کنیم. اما سمت چپ آن را نمی‌توانیم؛ به عنوان مثال، رابطهٔ $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید. این رابطه، یک رابطهٔ درست است؛ زیرا کسر $\frac{36}{12}$ برابر عددی صحیح است. حالا وقتی می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ اگر آن را در هر عدد صحیح دیگری ضرب کنیم حاصل، باز هم عددی صحیح می‌شود. *(یعنی سمت راست هر رابطهٔ عادکردن رو می‌شه تو هر عدد صحیحی ضرب کرد.)* مثلاً $5 \times \frac{36}{12}$ نیز عددی صحیح است؛ یعنی می‌توان نتیجه گرفت:

$12 \mid 36 \Rightarrow 12 \mid 36 \times 5$

در حالت کلی: $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

اما مشخص است که سمت چپ رابطهٔ عادکردن را نمی‌توان در هر عددی ضرب کرد؛ مثلاً همین رابطهٔ $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، اگر سمت چپ رابطه را در ۵ ضرب کنیم، می‌شود $60 \mid 36$ که رابطه‌ای نادرست است.

حالا دوباره همین رابطهٔ $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، کسر معادل با آن برابر $\frac{36}{12}$ است. می‌دانیم وقتی عدد ۳۶ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، بدیهی است که بر هر کدام از عددهای ۶، ۴، ۳، ۲ و ۱ یعنی بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های ۱۲ نیز بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، از رابطهٔ $12 \mid 36$ هر یک از رابطه‌های مقابل قابل نتیجه‌گیری است:

$$12 \mid 36 \Rightarrow \begin{cases} \pm6 \mid 36 \\ \pm4 \mid 36 \\ \pm3 \mid 36 \\ \pm2 \mid 36 \\ \pm1 \mid 36 \end{cases}$$

۱ به عبارت دیگر، سمت چپ رابطهٔ $a|b$ را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. در نتیجه می‌توان گفت:

$$ac|b \Rightarrow a|b \wedge c|b$$

۲ به طور خلاصه این نکات یادتان باشد:

	نکته	توضیح	مثال
۱	$a\|b \Rightarrow ma\|mb$	طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$5\|15 \xrightarrow{\text{طرفین}\times 4} 20\|60$
۲	$a\|b \Rightarrow a\|mb$	سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$6\|12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} 6\|36$
۳	$a\|b \Rightarrow$ هر یک از مقسوم‌علیه‌های a $\|b$	سمت چپ یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان به هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد سمت چپ تقسیم کرد.	$6\|18 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div 2} 3\|18 \\ \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div 3} 2\|18 \end{cases}$
۴	$ab\|c \Rightarrow \begin{cases} a\|c \\ b\|c \end{cases}$	در واقع همان نکتهٔ قبلی است. وقتی حاصل‌ضرب دو یا چند عدد، عددی را می‌شمارد، هر کدام از آن اعداد را نیز عاد می‌کند.	$3\times 5\|45 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div 3} 5\|45 \\ \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div 5} 3\|45 \end{cases}$
۵	$a\|b \Rightarrow a^n\|b^n$	طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان به توان رساند.	$2\|4 \xrightarrow{\text{به توان } 4} 2^4\|4^4\ (16\|256)$
۶	$a^n\|b^n \Rightarrow a\|b$	از طرفین یک رابطهٔ عادکردن می‌شود ریشه گرفت به شرط آن‌که بعد از ریشه‌گرفتن هر دو عبارت عددی صحیح باشد.	$27\|216 \Rightarrow 3^3\|6^3 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{ریشهٔ سوم}} 3\|6$ $8\|16 \Rightarrow 2^3\|2^4$ $\xrightarrow[\text{عدد سمت چپ صحیح نمی‌شود.}]{\text{نمی‌توان ریشهٔ چهارم گرفت چون}} \sqrt[4]{8} \nmid 2$
۷	$a\|b \Rightarrow \|a\| \le \|b\|, b\ne 0$	در یک رابطهٔ عادکردن اگر عدد سمت راست صفر نباشد حتماً قدرمطلق سمت چپ کوچک‌تر و یا مساوی از قدرمطلق عدد سمت راست است.	$4\|12 \Rightarrow 4\le 12$ $6\|-18 \Rightarrow 6\le\|-18\|$

مثال بررسی کنید کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست و کدام غلط است؟

الف) $a|b \Rightarrow a|3b$

ب) $a|b \Rightarrow 3a|b$

پ) $a|b^2 \Rightarrow a|3b^3$

ت) $a^2|b \Rightarrow a|b$

ث) $2a|b \Rightarrow a|3b$

ج) $a^2|b^5 \Rightarrow a^3|b^4$

پاسخ نکتهٔ مهم در پاسخ‌گویی به این سؤالات در این است که بدانیم اگر $a|b$ سمت راست رابطه را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد و سمت چپ رابطه را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. *(یعنی فرمولیش کنید که راست رو می‌شه گنده کرد و چپ رو می‌شه کوچیک کرد و رابطه درست باقی بمونه.)*

الف) درست است، چون راست را بزرگ کردیم: $a|b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} a|3b$ ✓

ب) چپ رو الکی نمی‌شود بزرگ کرد. بنابراین این رابطه درست نیست. برای مثال اگر $a=3$ و $b=9$ باشد: $3|9 \Rightarrow 3\times 2 \nmid 9$

پ) درست است چون سمت راست را بزرگ کردیم: $a|b^2 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3b} a|3b^3$

ت) درست است چون سمت چپ را کوچک کردیم: $a^2|b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } a} a|b$

ث) درست است. همزمان دو کار را انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم هم سمت چپ را کوچک:

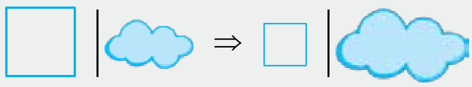
$$2a|b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } 2} a|b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3} a|3b$$

ج) این خیلی غلط است، چون دوتا کار اشتباه انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم و هم سمت چپ را کوچک. برای مثال اگر $a=4$ و $b=2$ باشد رابطهٔ $a^2|b^5$ درست است، زیرا: $4^2|2^5 \Rightarrow 16|32$ درست

اما رابطهٔ $a^3|b^4$ نادرست است، زیرا: $4^3=64, 2^4=16 \Rightarrow 16 \nmid 64$

حالا که این رابطه‌ها را تعریف کردیم به تست صفحهٔ بعد پاسخ دهید.

در یک رابطهٔ عادکردن، سمت چپ را می‌توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد.



تست از رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟

۱) $a^2 \mid b^3$ ۲) $2a^2 \mid 5b^3$ ۳) $a^2 \mid b^4$ ۴) $a \mid b$

پاسخ گزینهٔ ۴ ۱ درست است؛ زیرا گفتیم که می‌توان سمت چپ رابطه را بر مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کرد و این‌جا نیز همین اتفاق افتاده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a^2 \mid b^3$$

۲ درست است؛ زیرا سمت راست رابطه را می‌توان در هر عددی ضرب کرد.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} 2a^2 \mid 5b^3$$

۳ نیز درست است؛ زیرا هر دو اتفاق با هم رخ داده، یعنی همزمان، سمت چپ رابطه، بر عددی تقسیم شده و سمت راست در عددی ضرب شده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} a^2 \mid b^4$$

اما دلیلی ندارد که ۴ حتماً درست باشد؛ به عنوان مثال اگر $b = 2^4$ و $a = 2^5$ باشد، داریم:

$$2a^2 \mid b^3 \Rightarrow 2\times(2^5)^2 \mid (2^4)^3 \Rightarrow 2^{11} \mid 2^{12} \checkmark$$

اما $2^5 \nmid 2^4$.

به تست بعد نگاه کنید. برای حل‌کردن این مدل تست‌ها به‌جز روش تشریحی یک تکنیک هم وجود دارد که خوب است آن را بلد باشید:

تست از رابطهٔ $a^5 \mid b^9$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a^{10} \mid b^{17}$ ۲) $a^7 \mid b^{12}$ ۳) $a^8 \mid b^{15}$ ۴) $a^9 \mid b^{16}$

پاسخ گزینهٔ ۳ یک راه ساده برای جواب دادن به این مدل تست‌ها این است که یک کاری کنیم که دو طرف رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال با هم برابر شوند. یعنی a و b را عددهای توان‌داری فرض کنیم که وقتی به توان ۵ و ۹ می‌رسند طرفین رابطهٔ عادکردن صورت سؤال مساوی هم شود. برای این کار یک پایهٔ فرضی مثل x را در نظر بگیرید و توان b را به پایهٔ a بدهید و توان a را به پایهٔ b. یعنی چی؟ یعنی این‌که مثلاً در این سؤال a و b را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a = x^9 \ , \ b = x^5$$

چون اگر به ازای این a و b صورت سؤال را بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$a^5 \mid b^9 \Rightarrow x^{45} \mid x^{45}$$

و می‌بینید که طرفین رابطه برابر می‌شود.

خوبی این کار این است که حالا اگر گزینه‌ها را به ازای این مقادیر a و b بررسی کنیم، معلوم می‌شود کدام رابطه درست است و کدام نه. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^{10} \mid b^{17} \Rightarrow (x^9)^{10} \mid (x^5)^{17} \Rightarrow x^{90} \mid x^{85}$ ×

۲ $a^7 \mid b^{12} \Rightarrow (x^9)^7 \mid (x^5)^{12} \Rightarrow x^{63} \mid x^{60}$ ×

۳ $a^8 \mid b^{15} \Rightarrow (x^9)^8 \mid (x^5)^{15} \Rightarrow x^{72} \mid x^{75}$ ✓

۴ $a^9 \mid b^{16} \Rightarrow (x^9)^9 \mid (x^5)^{16} \Rightarrow x^{81} \mid x^{80}$ ×

درستی ۳ را به روش تشریحی به صورت مقابل می‌توان ثابت کرد:

$$a^5 \mid b^9 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۵ می‌رسانیم}} a^{25} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{سمت چپ را بر a تقسیم می‌کنیم}} a^{24} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{از طرفین ریشهٔ سوم می‌گیریم}} a^8 \mid b^{15}$$

که خب کار ساده‌ای نیست و تازه ردکردن بقیهٔ گزینه‌ها کار سخت‌تری است!

این نکته را این‌جوری هم می‌توان توضیح داد:

از رابطهٔ $a^m \mid b^n$ زمانی می‌توان رابطهٔ $a^{m'} \mid b^{n'}$ را نتیجه گرفت که: $nm' \le mn'$

(اینو این‌جوری هم می‌شه گفت. درکش آسون‌تره: دور × نزدیک ≤ نزدیک × دور $a^m \mid b^n \Rightarrow a^{m'} \mid b^{n'}$)

چند ویژگی مهم دیگر از رابطهٔ عادکردن

این رابطه‌ها را خوب نگاه کنید و یاد بگیرید. چون کمی جلوتر از همهٔ آن‌ها در حل معادله‌های عادکردنی و سایر سؤال‌ها استفاده می‌کنیم.

۱ اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

(برای مثال: $4 \mid 8, 8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 24$)

۲ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow \begin{cases} a|b+c \\ a|b-c \\ a|bc \end{cases}$$

(برای مثال: $\begin{cases} ۳|۶ \\ ۳|۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳|۱۵+۶ \Rightarrow ۳|۲۱ \\ ۳|۱۵-۶ \Rightarrow ۳|۹ \\ ۳|۱۵\times۶ \Rightarrow ۳|۹۰ \end{cases}$)

۳ تعمیم نکتهٔ قبل: اگر عددی دو عدد را بشمارد مجموع یا تفاضل هر مضرب یکی و هر مضربی از دیگری را می‌شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow \begin{cases} a|mb+nc \\ a|mb-nc \end{cases}$$

(برای مثال: $\begin{cases} ۵|۱۰ \\ ۵|۱۵ \end{cases} \xrightarrow{m=۴,n=۳} \begin{cases} ۵|۴\times۱۰+۵\times۱۵ \Rightarrow ۵|۱۱۵ \\ ۵|۴\times۱۰-۵\times۱۵ \Rightarrow ۵|-۳۵ \end{cases}$)

۴ اگر دو رابطهٔ عادکردن مختلف داشته باشیم، می‌توانیم سمت چپ و راست دو رابطه را در هم ضرب کرد و به رابطه‌ای جدید رسید:

$$a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$$

(برای مثال: $۷|۳۵, ۲|۴ \Rightarrow ۷\times۲|۳۵\times۴ \Rightarrow ۱۴|۱۴۰$)

۵ حواستان باشد طرفین رابطهٔ عادکردن را نمی‌توان با عددی جمع کرد یا از عددی کم کرد.

$$a|b \Rightarrow a+c|b+c \quad \times$$

$$a|b \Rightarrow a-c|b-c \quad \times$$

(برای مثال رابطهٔ ۱۰ | ۵ رو در نظر بگیرید؛ اگر طرفین را با یک جمع کنیم به رابطهٔ ۱۱ | ۶ می‌رسیم که نادرست است و اگر از طرفین یکی کم کنیم به رابطهٔ ۹ | ۴ می‌رسیم که باز هم غلط است.)

تست **به ازای چند عدد صحیح مانند a، دو عدد ۸m + ۳ و ۱۱m + ۴ همواره بر a بخش‌پذیرند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

پاسخ **گزینهٔ ۲** اگر دو عدد $۸m+۳$ و $۱۱m+۴$ بر a بخش‌پذیر باشند، یعنی: $a|۸m+۳ \;,\; a|۱۱m+۴$

دیدیم که سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. به خاطر این‌که ضریب m یکسان شود، سمت راست رابطهٔ اول را در ۱۱ و سمت راست رابطهٔ دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم، بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$a|۸m+۳ \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۱۱}} a|۸۸m+۳۳$$

$$a|۱۱m+۴ \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۸}} a|۸۸m+۳۲$$

حالا از ویژگی $\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|b-c$ استفاده می‌کنیم و سمت راست دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} a|۸۸m+۳۳ \\ a|۸۸m+۳۲ \end{matrix} \xrightarrow{-} a|۱ \Rightarrow a=\pm۱$$

پس به ازای ۲ عدد صحیح a، رابطه برقرار است.

در این نوع سؤال‌ها برای سرعت در کار می‌توانیم از دترمینان ماتریس ضرایب نیز استفاده کنیم. به این صورت که ضرایب را به صورت یک ماتریس ۲×۲ می‌نویسیم و عبارت سمت چپ دترمینان این ماتریس را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال:

$$\begin{vmatrix} ۸ & ۳ \\ ۱۱ & ۴ \end{vmatrix} \Rightarrow \text{دترمینان} = ۸\times۴-۱۱\times۳=-۱ \Rightarrow a|-۱ \Rightarrow a=\pm۱$$

این مدل سؤال‌ها که برای حل‌کردنشان باید سمت راست رابطهٔ عادکردن را در عددی ضرب کنیم، سؤال‌های شایعی است و اصولاً یادتان باشد این یک روشی است که می‌توانیم متغیر را از سمت راست رابطهٔ عادکردن حذف کنیم. حالا به یک مدل دیگر از این سؤال‌ها نگاه کنید:

تست **اگر $۵|۴k+۱$ و $۳|۵k-۱$، کدام گزینه درست است؟**

۱) $۱۵|۵k^۲+k+۱$ ۲) $۱۵|۵k^۲-k+۱$ ۳) $۱۵|۵k^۲+k-۱$ ۴) $۱۵|۵k^۲-k-۱$

پاسخ **گزینهٔ ۳** می‌دانیم که اگر $a|b$ و $c|d$، آن‌گاه $ac|bd$؛ بنابراین:

$$\begin{matrix} ۵|۴k+۱ \\ ۳|۵k-۱ \end{matrix} \Rightarrow ۱۵|(۴k+۱)(۵k-۱) \Rightarrow ۱۵|۲۰k^۲+k-۱$$

از طرفی می‌دانیم، اگر $a|b \;,\; a|c \Rightarrow a|b-c$، پس داریم:

$$\begin{matrix} ۱۵|۲۰k^۲+k-۱ \\ ۱۵|۱۵k^۲ \text{ (بدیهی است)} \end{matrix} \xrightarrow{-} ۱۵|۵k^۲+k-۱$$

بنابراین ۳ درست است.

۷۸- عدد $20!+12$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۷۹- برای هر عدد طبیعی n داریم $n!=2^{a_1}\times 3^{a_2}\times 5^{a_3}\times\cdots$. مقدار $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ به ازای $n=20$، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها بد نیست به بخش «مضرب و مقسوم‌علیه» در درس‌نامه نگاه کنید.

۸۰- اگر $12\mid x$ و $y\mid 12$، کدام گزینه درست نیست؟

۱) $x\mid 2y$ ۲) $4\mid y$ ۳) $x\mid 24$ ۴) $2x\mid y$

۸۱- به ازای چند عدد صحیح مانند x، هر دو رابطهٔ $x\mid 84$ و $4\mid x$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۸۲- از رابطه‌های $a\mid 2$ و $ab=60$، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $a=2$ ۲) $a\mid 30$ ۳) $b=30$ ۴) $b\mid 30$

۸۳- اگر a و b دو عدد طبیعی و دو رابطهٔ $a\mid b$ و $b\mid 2a$ هر دو درست باشند، در این صورت:

۱) همواره $a=b$ ۲) $a=b$ یا $a=2b$ ۳) $a=b$ یا $2a=b$ ۴) $a=2b$ یا $b=2a$

۸۴- اگر $x\in\{1,2,\ldots,20\}$ باشد به ازای چند مقدار x رابطهٔ x^2-1 بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ $(\sqrt{10}\cong 3/16)$ (داخل ۱۴۰۰)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۸۶- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ $(\sqrt[3]{10}\cong 2/1)$ (خارج ۱۴۰۰)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

برای پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها به نکتهٔ $\square \mid$ ☁ $\Rightarrow \square \mid$ ☁ *دقت کنید.*

۸۷- اگر $3y\mid 2x^2$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $2x^2\mid y$ ۲) $x^2\mid 3y$ ۳) $x\mid 3y$ ۴) $x^2\mid 6y^2$

۸۸- به ازای چند مقدار صحیح a، رابطهٔ $a^2+b^2\mid a^2b^2$ درست است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۸۹- اگر $b^2\mid a^3$ کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

۱) $a\mid b$ ۲) $b^4\mid a^5$ ۳) $b^5\mid a^6$ ۴) $b\mid a^2$

۹۰- اگر از رابطهٔ $y^m\mid x^3$ بتوانیم نتیجه بگیریم $y^{3m-5}\mid x^5$، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

توجه کنید در خیلی از سؤال‌های عادکردن تلاش ما بر آن است که سمت راست را از متغیر تبدیل به یک عدد کنیم!
این مدل سؤال‌ها که باید یک متغیر را حذف کنید از سؤال‌های پرتکرار در آزمون‌ها به حساب می‌آیند.

۹۱- اگر $a>1$، $a\mid 7k+4$ و $a\mid 8k+3$ در این صورت: (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a عددی اول است. ۲) a مربع کامل است. ۳) a مضرب ۵ است. ۴) a مضرب ۷ است.

۹۲- اگر هر دو کسر $\frac{5b+2}{a+1}$ و $\frac{6b+5}{a+1}$ عددهایی صحیح باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۳- اگر از دو رابطهٔ $a\mid 7m+x$ و $a\mid 6m+5$ بتوان نتیجه گرفت که $a=\pm 1$ است، x کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹۴- اگر دو عدد $m+1$ و m^2-2 همواره بر a بخش‌پذیر باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۹۵- اگر $3a+4b\mid 10a+3b$ آن‌گاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر بر $3a+4b$ بخش‌پذیر است؟

۱) $31a$ ۲) $49a$ ۳) $a+2b$ ۴) $b-2a$

۹۶- اگر $a|b+1$ و $a|c+2$، کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره بر a بخش‌پذیر است؟

۱) $bc-1$ ۲) $bc-2$ ۳) $bc+1$ ۴) $bc+2$

۹۷- اگر $5|5k-1$ و $7|4k+3$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $35|20k^2-11k+3$ ۲) $35|20k^2-11k-3$

۳) $35|15k^2-11k+3$ ۴) $35|15k^2-11k-3$

۹۸- اگر $5|2n+1$، عبارت $14n^2+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش‌پذیر است؟ $(n\in\mathbb{Z})$ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۹۹- اگر $3|a+2b$ و $9|a^2-5ab+kb^2$ آن‌گاه k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۰۰- اگر x^3-3x^2-4x مضرب ۱۱ باشد،آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۰۱- به ازای چند مقدار a از مجموعهٔ $\{3n : n\in\mathbb{N}\}$ رابطهٔ $a|k^2+1$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۱۰۲- اگر $7|2a+3b+k$ و $7|a+5b-2$، کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۳- اگر $11|2a+5b$ و b مضرب ۱۱ نباشد. آن‌گاه به ازای چند عدد طبیعی $k\le 50$ رابطهٔ $11|3a+kb$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

معادله‌های عادکردنی

۱۰۴- به ازای چند مقدار طبیعی n رابطهٔ $n+2|5n+3$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۱۰۵- بزرگ‌ترین مقدار x که به ازای آن رابطهٔ $3x+2|5x+7$ برقرار است، کدام‌یک از عددهای زیر را می‌شمارد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۰۶- چند نقطه روی منحنی $yx+3=2(x+y)$ وجود دارد که هر دو مؤلفهٔ آن، عددهایی طبیعی باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۷- به ازای چند مقدار m، عبارت $9m+2$ بر $5m+3$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

۱۰۸- به ازای چند مقدار طبیعی مانند n، رابطهٔ $2n+1|4n^2+5n+4$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۹- به ازای چند عدد صحیح مانند x، حاصل کسر $\frac{x+1}{x^3+1}$ عددی صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشتر از ۳

۱۱۰- به ازای چند عدد صحیح n رابطهٔ $n+5|n^2+3$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۱- به ازای چند عدد سه‌رقمی طبیعی، مانند n، رابطهٔ $2^n|n^2$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۲- به ازای چند عدد طبیعی، رابطه $\binom{n}{2}|n^2$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

باقی‌ماندهٔ مربع کامل بر ۸

۱۱۳- باقی‌ماندهٔ a بر ۴، برابر ۳ است باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۸ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱۴- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که $a=4k+3$ و $b=6k'+1$، باقی‌ماندهٔ a^2+b^2+5 بر ۸ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۷

۱۱۵- کدام‌یک از عددهای زیر، مربع کامل است؟

۱) ۵۳۳۵۹ ۲) ۵۳۳۶۱ ۳) ۵۳۳۶۳ ۴) ۵۳۳۶۵

۱۱۶- دو عدد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۸ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱　　۲) ۳
۳) ۵　　۴) بستگی به اعداد ممکن است هر سه گزینه درست باشد.

۱۱۷- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc = 3^{97}$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^2 + 2b^2 + 3c^2$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۳　　۴) ۶

۱۱۸- اگر a عددی زوج و $b \mid 3a+1$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^3 + b^4 + 2$ در تقسیم به ۸ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۱۹- اگر x زوج باشد، باقی‌ماندهٔ x^2 بر ۸ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۲۰- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که $a^4 - b^4 - 2a^2 + 2b^2$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۶　　۳) ۶۴　　۴) ۲۵۶

۱۲۱- اگر $a+3 \mid b+4$ و b عددی صحیح و فرد باشد، باقی‌ماندهٔ $a^2 + 2a + b^2 + 3$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

بخش‌پذیری به کمک اتحادها

۱۲۲- عدد $4 \times 2^{10} - 9 \times 3^4$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟ *(هنر ۱۴۰۰)*

۱) ۷　　۲) ۱۱　　۳) ۱۳　　۴) ۳۷

۱۲۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر به ازای هر عدد صحیح مانند n برقرار است؟

۱) $n^2 + 2 \mid n^4 + 4$　　۲) $n^2 + 2 \mid n^4 + 8$　　۳) $n^2 + 2 \mid n^2 + 1$　　۴) $n^2 + 2 \mid n^6 + 8$

۱۲۴- عدد $3^{39} + 7^{26}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۳　　۲) ۱۷　　۳) ۱۹　　۴) ۲۳

۱۲۵- عدد $2^{42} - 3^{18}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵　　۲) ۳۱　　۳) ۶۱　　۴) ۱۰۱

۱۲۶- به ازای کدام مقدار n رابطهٔ $25 \mid 7^n + 1$ برقرار است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

۱۲۷- به ازای کدام مقدار n عبارت $5^n - 2^n$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۸۲　　۲) ۸۳　　۳) ۸۴　　۴) ۸۵

۱۲۸- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰ مانند n رابطهٔ $28 \mid 3^n + 1$ برقرار است؟

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۰　　۴) ۱۱

ب.م.م

۱۲۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۱۸۰ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۶　　۳) ۹　　۴) ۱۰

۱۳۰- اگر $a \mid b$ و عددهای a و b هر دو عددهای منفی باشند، حاصل (a,b) و $(a,0)$ به ترتیب کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $-a, -a$　　۲) $a, -a$　　۳) $-a, -b$　　۴) $a, -b$

۱۳۱- اگر $d = (663, 187)$ باشد، $2d + 1$ بر کدام بخش‌پذیر است؟

۱) ۷　　۲) ۱۱　　۳) ۱۳　　۴) ۱۷

۱۳۲- اگر $(3m, 6m^2) = 12$ باشد:

۱) $m = 4$　　۲) m هر کدام از مضارب ۴ می‌تواند باشد.
۳) $m = 6$　　۴) m هرعددی به فرم $4k + 2$ می‌تواند باشد.

۱۳۳- اگر $(a^2, b^2) - (5a, 5b) = 14$ باشد، بزرگ‌ترین شمارندهٔ دو عدد a و b کدام است؟

۱) ۷　　۲) ۱۴　　۳) ۲۱　　۴) ۲۸

۱۳۴- کدام گزینه درست نیست؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) $(m, m+1) = 1$　　۲) $(4m+1, 4m+3) = 1$　　۳) $(5m+1, 5m+3) = 1$　　۴) $(6m+3, 6m+5) = 1$

۱۳۵- اگر $(a,b) = 36$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطهٔ $x \mid a$ و $x \mid b$ برقرار است؟

۱) ۶　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۱۰

۱۳۶- اگر a زوج و b فرد باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $(a,b)=۱$ ۲) $(a,b+۱)=۲$ ۳) $(a,۷)=۱$ ۴) $(a-b,۲)=۱$

۱۳۷- اگر $(a,۱۲)=۱$ و a عددی طبیعی یک‌رقمی باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۸- اگر $d=(۴n+۱,۱۸)$ باشد؛ d چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۹- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n، اعداد $n-۳$ و ۱۳ نسبت به هم اول نیستند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹۲ ۴) ۹۳

۱۴۰- در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d=(۳n^۲-۲n+۶,۳n+۵)$ و $d\neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟ (۹۹)

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

۱۴۱- حاصل $(۱۸!-۱۹!,۲۰!)$ کدام است؟

۱) $۱۸!$ ۲) $۲\times ۱۸!$ ۳) $۱۹!$ ۴) $۲\times ۱۹!$

۱۴۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n رابطهٔ $(n,۲۴)=۱۲$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴۳- اگر $(۶a,۱۰b)=۴۴$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $(a,b)=۱۱$ ۲) a مضرب ۵ نیست. ۳) b بر ۶۶ بخش‌پذیر است. ۴) $a+b$ مضرب ۴۴ است.

۱۴۴- a و b نسبت به هم اول‌اند. اگر $c|a-b$ آن‌گاه (c,a) کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $|c|$

۱۴۵- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، دو عدد به صورت $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اول‌اند؟ (۸۹)

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۱۴۶- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹ (۸۸)

۱۴۷- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $۷n+۵$ و $۱۱n+۲$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ (۹۱)

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۱۴۸- برای چند عدد n از مجموعهٔ $\{۴۱,۴۲,...,۱۰۰\}$ حاصل $(n+۲,۷n+۱)$ برابر ۱ نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۹- به ازای مقادیر مختلف $a>۳$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۱۵a+۳$ و $۱۵a-۱۲$ کدام است؟ (۹۰)

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۵۰- اگر دو عدد $۳k-۱$ و $k^۲+۲k+۴$ نسبت به هم اول نباشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان برابر کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۴۱ ۳) ۴۳ ۴) ۵۳

۱۵۱- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۳۰ مانند n رابطهٔ $(n,۱۰)=۲$ برقرار است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۵۲- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=۲^m\times ۵^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{۴۰}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x، کدام است؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۸۰ (داخل ۱۴۰۰)

۱۵۳- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x=۶^m\times ۱۰^n$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۵x$ کم‌تر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲۹۶ ۲) ۲۳۰۴ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۸۷۰۴

۱۵۴- دو عدد $A=۲^۳\times ۳^۴\times ۵^۳\times ۷^۲$ و $B=۲^۵\times ۳^۲\times ۵^p\times ۱۱$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟ (۹۰)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۵۵- a و b نسبت به هم اول‌اند. ب.م.م دو عدد $۸a+۵b$ و $۵a+۳b$ کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۱ یا ۷

ک.م.م

۱۵۶- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in \mathbb{N}: ۶|x, ۸|x\}$ چه مجموع ارقامی دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۷- اگر $a=[a,b]$ باشد، حاصل (a,b) کدام است؟ (b و a دو عدد طبیعی‌اند.) (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a ۲) b ۳) ۱ ۴) ab

۱۵۸- حاصل $[(341,403)+1,112]$ چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۹- با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[(627,429),154]$ کدام است؟

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴ (۹۸)

۱۶۰- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که به هر سه عدد ۱۵، ۲۱ و ۳۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۶۱- به ازای چند عدد صحیح n، ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۸ و n^2-1 برابر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۶۲- حاصل $([a^3,a^7],a^4)$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{N})$

۱) a^3 ۲) a^4 ۳) a^5 ۴) a^7

۱۶۳- حاصل $((4a,8a),[3a,12a^2])$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a ۲) $|a|$ ۳) $3|a|$ ۴) $4|a|$

۱۶۴- اگر داشته باشیم $3x\,|\,y$ حاصل $([x,y],(3,y))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $|x|$ ۳) $|y|$ ۴) $3|y|$

۱۶۵- a و b دو عدد طبیعی هستند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $((a,b),[a,b])=(a,b)$ ۲) $[a,(a,b)]=(a,b)$ ۳) $(b,(a,b))=(a,b)$ ۴) $(a,[a,b])=a$

۱۶۶- اگر $ab\,|\,c$ و $d\,|\,c^2$، آن‌گاه حاصل $[(a,c),[b^2,d]]$ کدام است؟ (a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند.)

۱) a ۲) b^2 ۳) d ۴) ad

۱۶۷- اگر $(m,6)=3$ حاصل $[5m^2,90]$ کدام است؟

۱) $5m^2$ ۲) $10m^2$ ۳) $30m^2$ ۴) $90m^2$

۱۶۸- به ازای چند عدد طبیعی m رابطهٔ $[m,120]=600$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۹- اگر a عددی فرد و طبیعی باشد، حاصل $[((a+1)^4,8),(a-1)(a+1)]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) a^2-1 ۳) $(a+1)^4$ ۴) $4a+4$

متباین‌سازی

۱۷۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=5$ و $ab=500$ باشد، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۵

۱۷۱- اگر $(a,b)=7$ باشد، حاصل $(\frac{a^2}{7},[a,b])$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $7|a|$

۱۷۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۷ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها برابر ۴۲۰ است. مجموع دوعدد کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ (۹۰)

۱) ۱۳۳ ۲) ۲۲۴ ۳) ۱۶۱ ۴) ۱۱۹

۱۷۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=8$ و $a+b=104$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار برای $[a,b]$ کدام است؟ (ق.م)

۱) ۳۵۲ ۲) ۳۴۴ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۲۰

۱۷۴- اگر $[a,b]=(a,b)+1$ حاصل a^2+b^2 کدام است؟ (۸۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۷۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)\neq 1$ و $5[a,b]=9(a,b)+11$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟ (۸۴)

۱) ۵۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۳۳ ۴) ۶۶

۱۷۶- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

آزمون

۲۳۹- از رابطهٔ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a|bc$ ۲) $b|ad$ ۳) $c|ab$ ۴) $d|abc$

۲۴۰- از دو رابطهٔ $6|a$ و $12|b$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a|2b$ ۲) $2a|b$ ۳) $3|a+b$ ۴) $12|ab$

۲۴۱- اگر $a\neq 1$ عددی طبیعی باشد که هر دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عاد کند، کم‌ترین مقدار طبیعی k، برای برقراری این رابطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۲۴۲- به ازای چند عدد طبیعی n، رابطهٔ $n+1|n^5+3n^2-n+6$ درست است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۲۴۳- اگر $a^2|2a+b$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $a|b$ ۲) $a|b^2$ ۳) $a^2|b$ ۴) $a|a+b$

۲۴۴- دو عدد $a+5$ و $b-3$ هر دو بر ۷ بخش‌پذیرند. باقی‌ماندهٔ $ab+1$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۴۵- اگر $a^3|128$ و $b^2|120$، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۸ ۳) ۶۴ ۴) ۶۸

۲۴۶- به ازای کدام مقادیر m و n، هر دو رابطهٔ $3^n|3^m$ و $5^{2m}|5^{n+3}$ درست است؟

۱) $m=4,n=6$ ۲) $m=5,n=7$ ۳) $m=4,n=8$ ۴) $m=5,n=8$

۲۴۷- اگر $a>1$، $a|9k+4$ و $a|5k+m$، به ازای کدام مقدار m، ثابت می‌شود که a عددی اول است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۴۸- به ازای چند مقدار طبیعی n، رابطهٔ $n^3|(n+1)!$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۲۴۹- اگر عدد a فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد و $a\nmid 225$، در این صورت $(a,15)$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۳ یا ۵

۲۵۰- اگر $(a,b)=d>1$ ، $d|a^2-b+7$، آن‌گاه $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۵ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

۲۵۱- اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم a بر ۱۹ به ترتیب برابر ۷ و q باشد، باقی‌مانده و خارج قسمت $a+49$ بر ۱۹ به ترتیب برابر .... و .... است.

۱) صفر ـ $q+1$ ۲) ۱۸ ـ $q+1$ ۳) صفر ـ $q+2$ ۴) ۱۸ ـ $q+2$

۲۵۲- اگر ب.م.م دو عدد $n-3$ و $5n+2$ عددی مخالف ۱ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۲۵۳- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده برابر ۳۶ و خارج قسمت، عددی طبیعی و مضرب ۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۲۵۴- در تقسیم عدد a بر ۸، باقی‌مانده برابر جذر خارج قسمت است. رقم یکان بزرگ‌ترین مقدار مقسوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۵۵- اگر در تقسیم عددهای طبیعی a و $2a+100$ بر عددهای طبیعی b و 2b باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۱۰ و ۴ باشد، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۱ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۲۵۶- در یک تقسیم، مقسوم از ۵ برابر مقسوم‌علیه ۲ واحد بیشتر و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. اگر مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از ۱ باشد، خارج قسمت تقسیم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵۷- عدد a زوج است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست، باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ کدام است؟

۱) همواره ۲ ۲) صفر یا ۲ ۳) ۲ یا ۴ ۴) صفر یا ۳

۲۵۸- اگر یکی از عددهای a، $a+5$، $a+10$ و b همواره بر ۴ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ $b-a$ بر ۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

روش دوم فرض کنید $c=5$ و $b=12$ و $a=13$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $12 \mid 5+3$ نادرست است.

(۲) $5 \mid 13-12$ نادرست است.

(۳) $1 \mid 25$ درست است. ✓

(۴) $17 \mid 169$ نادرست است.

۷۵- **گزینهٔ ۲** می‌دانیم اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، آن‌گاه $a=\pm b$ است، بنابراین دو حالت رخ می‌دهد:

$$n^2=6n-5 \Rightarrow (n-1)(n-5)=0 \Rightarrow n=1, n=5$$

$n^2=5-6n \Rightarrow$ معادله ریشهٔ صحیح ندارد.

پس فقط به ازای دو مقدار $n=1$ و $n=5$ رابطه برقرار است.

۷۶- **گزینهٔ ۳** می‌دانیم اگر $0 \mid$  آن‌گاه  $=0$

(چون تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیره خود صفره) بنابراین:

$$x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x-1)(x-2)=0$$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=1$ یا $x=2$

حالا بررسی می‌کنیم رابطهٔ $2^x+1 \mid 2x+1$ به ازای چندتا از این عددها برقرار است.

$x=0 \Rightarrow 1+1 \mid 1$ ✗

$x=1 \Rightarrow 2+1 \mid 2+1$ ✓

$x=2 \Rightarrow 2^2+1 \mid 2\times 2+1$ ✓

۷۷- **گزینهٔ ۲** ۴۷ عددی اول است، پس هر چه‌قدر اعداد کوچک‌تر از آن را ضرب کنیم، ۴۷ به وجود نمی‌آید، یعنی $47 \nmid 43!$. ولی $46 \mid 43!$ چون $46=23\times 2$ است و ... .

۷۸- **گزینهٔ ۲** $20!$ بر $1,2,3,4,\cdots,9$ بخش‌پذیر است. ۱۲ هم بر $1,2,3,4,6$ از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر است، پس $20!+12$ بر اعداد $1,2,3,4,6$ بخش‌پذیر می‌شود. اما این عدد بر $5,7,8,9$ نمی‌خورد. چرا؟ مثلاً $20!+\overbrace{12}^{10+2}=5k+2$، یعنی در تقسیم بر ۵، باقی‌ماندهٔ دو می‌آورد. شبیه همین برای ۷، ۸ و ۹ هم اتفاق می‌افتد. خلاصه این‌که بر ۴ عدد طبیعی بخش‌پذیر نیست.

۷۹- **گزینهٔ ۳** **روش اول** عبارت $20!$ را تجزیه می‌کنیم:

$$20!=(2^2\times 5)\times 19\times(2\times 3^2)\times 17\times(2^4)\times(3\times 5)$$
$$\times(2\times 7)\times 13\times(2^2\times 3)\times 11\times(2\times 5)\times(3)^2\times(2^3)\times 7$$
$$\times(2\times 3)\times 5\times(2^2)\times 3\times 2=2^{18}\times 3^8\times 5^4\times 7^2\times 11\times 13$$
$$\times 17\times 19$$

بنابراین مجموع توان‌ها یا $\sum_{i=1} a_i$ برابر است با:

$$18+8+4+2+1+1+1+1=36$$

روش دوم برای پیداکردن توان عدد اول p در تجزیهٔ $n!$ از رابطهٔ زیر می‌توان استفاده کرد:

$$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots$$

با این روش می‌توان توان عدد ۲ و ۳ را در تجزیهٔ $20!$ سریع‌تر به دست آورد.

$$[\frac{20}{2}]+[\frac{20}{4}]+[\frac{20}{8}]+[\frac{20}{16}]=10+5+2+1=18$$

$$[\frac{20}{3}]+[\frac{20}{9}]=6+2=8$$

پیداکردن توان بقیهٔ عددهای اول هم که ساده است.

۸۰- **گزینهٔ ۴** $x \mid 12, 12 \mid y \Rightarrow x \mid y \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 2} x \mid 2y$

پس (۱) درست است.

(۲) درست است. $12 \mid y \xrightarrow{\text{سمت چپ}\div 3} 4 \mid y$

(۳) درست است. $x \mid 12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times 2} x \mid 24$

(۴) درست نیست برای مثال اگر $x=y=12$ باشد (۴) رد می‌شود.

کافی است x و y را برابر ۱۲ فرض کنیم در این‌صورت (۴) رد می‌شود.

۸۱- **گزینهٔ ۲** دو رابطه را به یک رابطه تبدیل می‌کنیم. $4 \mid x$، پس $x=4q$ می‌شود. با جای‌گذاری $4q \mid 84$ به دست می‌آید. حالا دو طرف به ۴ ساده شده، پس $q \mid 21$. حالا q چه اعدادی می‌تواند باشد؟ $q=\pm 1$، $q=\pm 3$، $q=\pm 7$ و $q=\pm 21$ می‌تواند باشد. به ازای هر q، یک جواب برای x به دست می‌آید، پس x، هشت عدد صحیح مختلف می‌تواند باشد.

۸۲- **گزینهٔ ۴** $2 \mid a$ پس $a=2q$ می‌شود. با جای‌گذاری $2qb=60$ پس $bq=30$ و این یعنی $b \mid 30$ (نه این‌که حتماً $b=30$ بشود.)

روش دوم فرض کنید $a=4$ و $b=15$ باشد در این‌صورت هر دو رابطه $2 \mid 4$ و $ab=60$ درست است اما سه گزینهٔ اول رد می‌شوند.

۸۳- **گزینهٔ ۳** از $a \mid b$ نتیجه می‌شود $aq=b$. از $b \mid 2a$ هم داریم $bq'=2a$. با جای‌گذاری b می‌شود: $aqq'=2a \xrightarrow{\div a} qq'=2$

حالا داریم:

$$\begin{cases} q=1, q'=2 \Rightarrow a=b \\ \text{یا} \\ q=2, q'=1 \Rightarrow 2a=b \end{cases}$$

روش دوم فرض کنید $a=1$ و $b=2$ در این‌صورت هر دو رابطه $a \mid b$ و $b \mid 2a$ درست می‌شود اما گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. حالا فرض کنید $a=1$ و $b=1$ در این‌صورت (۴) نیز رد می‌شود.

۸۴- **گزینهٔ ۴** می‌دانیم $x^2-1=(x-1)(x+1)$ بنابراین اگر بخواهیم x^2-1 بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد یعنی یا $x-1$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و یا $x+1$. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

$$x-1=13k \Rightarrow x=13k+1 \Rightarrow x=1,14$$
$$x+1=13k \Rightarrow x=13k-1 \Rightarrow x=12$$

پس رابطه به ازای سه عدد برقرار است.

۸۵- **گزینهٔ ۲** عدد را x^2 می‌نامیم. داریم:

$$18 \mid x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2\times 3^2}\in\mathbb{Z}$$

اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد، x حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین: $x=6q \Rightarrow x^2=36q^2$

از طرفی عدد پنج‌رقمی است، بنابراین:

$$10000 \le 36q^2 < 100000$$
$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 100 \le 6q < 100\sqrt{10}$$
$$100 \le 6q < 316 \Rightarrow 16.6 < q < 52.6$$

بنابراین $q\in\{17,18,\dots,52\}$ و در نتیجه به ازای $52-17+1=36$ عدد رابطه برقرار است.

۸۶- **گزینهٔ ۳** فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت x^3 است. اگر x^3 بر ۹ بخش‌پذیر باشد، x باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:

$$x=3q \Rightarrow x^3=27q^3$$

حالا مقادیر سه و چهار رقمی $x^۳$ را پیدا می‌کنیم:

$$۱۰۰ \le x^۳ < ۱۰۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \le ۲۷q^۳ < ۱۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} \sqrt[۳]{۱۰۰} \le ۳q < \sqrt[۳]{۱۰۰۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۱۰}} \le ۳q \le ۱۰\sqrt[۳]{۱۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۲/۱} \le ۳q \le ۱۰\times ۲/۱$$

$$\Rightarrow ۴/۷۶ \le ۳q \le ۲۱ \Rightarrow ۱/۵ \le q \le ۷$$

$$\Rightarrow q = ۲,۳,۴,۵,۶,۷$$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.

۸۷- گزینهٔ ۱ می‌دانیم در هر رابطهٔ عادکردن، سمت چپ را می‌توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد. داریم:

(۲) $۲x^۲ | ۳y \xrightarrow{\div۲\ \text{سمت چپ}} x^۲ | ۳y$ ✓

(۳) $۲x^۲ | ۳y \xrightarrow{\div۲x\ \text{سمت چپ}} x | ۳y$

(۴) $۲x^۲ | ۳y \xrightarrow{\div۲\ \text{سمت چپ}} x^۲ | ۳y \xrightarrow{\times۲y\ \text{سمت راست}} x^۲ | ۶y^۲$

اما (۱) درست نیست.

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. فرض کنید $x=۳$ و $y=۶$ باشد، در این‌صورت رابطهٔ $۲x^۲ | ۳y$ درست است $(۱۸|۱۸)$. اما (۱) نادرست است $(۶ \nmid ۱۸)$.

۸۸- گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{array}{l} a^۲b^۲ | a^۲+b^۲ \xrightarrow[\text{تقسیم بر } b^۲]{\text{سمت چپ}} a^۲ | a^۲+b^۲ \\ \text{از طرفی: } a^۲ | a^۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a^۲ | b^۲ \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲b^۲ | a^۲+b^۲ \xrightarrow[\text{تقسیم بر } a^۲]{\text{سمت چپ}} b^۲ | a^۲+b^۲ \\ \text{از طرفی: } b^۲ | b^۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} b^۲ | a^۲ \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت $a^۲ = b^۲$.

با جای‌گذاری در رابطهٔ صورت سؤال داریم: $a^۴ | ۲a^۲$.

اگر a صفر باشد، رابطهٔ $۰|۰$ به دست می‌آید که درست است. اگر $a \ne ۰$ باشد، دو طرف را بر $a^۲$ ساده می‌کنیم: $a^۲ | ۲ \Rightarrow a^۲ = ۱$ یا $a^۲ = ۲$

بنابراین رابطه‌ای که داده، فقط به ازای سه مقدار $a = \pm۱, ۰$ برقرار می‌شود.

۸۹- گزینهٔ ٤ در بخش آموزش تقسیم در صورتی ترکیب شرطی $a^m | b^n \Rightarrow a^r | b^s$ درست است که $nr \le ms$ باشد، مثلاً

$a | b \Rightarrow a^۳ | b^۲$ درست است؛ چون $۲\times۱ \le ۳\times۱$.

$a^۳ | b^۲ \Rightarrow a^۵ | b^۴$ درست است؛ چون $۲\times۵ \le ۳\times۴$.

$a^۳ | b^۲ \Rightarrow a^۶ | b^۵$ هم درست است؛ چون $۲\times۶ \le ۳\times۵$.

$a^۳ | b^۲ \Rightarrow a^۲ | b$ نادرست است؛ چون $۲\times۲ \not\le ۳\times۱$.

برای این‌که درک بهتری داشته باشید، یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کنم؛ مثلاً از $a^۳ | b^۲$ نتیجه می‌گیریم $a^۵ | b^۴$.

$$\{a^۲ | a^۳, \underbrace{a^۳ | b^۲}_{۲} \Rightarrow \underbrace{a^۲ | b^۲}_{۱}\}$$

حالا دو طرف (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم. یادتان هست که اگر $a | b$ و $c | d$ آن‌گاه $ac | bd$؛ پس $a^۳ \times a^۲ | b^۲ \times b^۲$ یعنی $a^۵ | b^۴$.

۹۰- گزینهٔ ۱ دیدیم که رابطهٔ $x^a | y^b \Rightarrow x^{a'} | y^{b'}$ درست است که:

$$\underset{\text{دور×دور≤نزدیک×نزدیک}}{ba' \le ab'}$$

بنابراین چون $x^۳ | y^m \Rightarrow x^۵ | y^{۳m-۵}$ درست است، پس:

$$۵m \le ۳(۳m-۵) \Rightarrow ۵m \le ۹m-۱۵$$

$$\Rightarrow ۴m \ge ۱۵ \Rightarrow m \ge ۳/۷۵$$

پس m دست‌کم باید برابر ۴ باشد.

۹۱- گزینهٔ ۱

$$a | ۷k+۴ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times۸} a | ۵۶k+۳۲$$

$$a | ۸k+۳ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times۷} a | ۵۶k+۲۱$$

$$\xrightarrow{(-)} a | ۱۱ \Rightarrow a = \pm۱, \pm۱۱$$

اما با توجه به این‌که گفته‌شده $a > ۱$ است، پس فقط مقدار $a = ۱۱$ قابل قبول است، در نتیجه a عددی اول است.

۹۲- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم هر دو کسر صحیح باشند، پس صورت‌ها بر مخرج بخش‌پذیرند، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} a+۱ | ۵b+۲ \xrightarrow{\times۶} a+۱ | ۳۰b+۱۲ \\ a+۱ | ۶b+۵ \xrightarrow{\times۵} a+۱ | ۳۰b+۲۵ \end{array}\right. \Rightarrow a+۱ | ۱۳$$

حالا داریم:

$$\begin{cases} a+۱ = \pm۱ \begin{cases} a = ۰ \\ a = -۲ \end{cases} \\ a+۱ = \pm۱۳ \begin{cases} a = ۱۲ \\ a = -۱۴ \end{cases} \end{cases}$$

پس a چهار مقدار صحیح می‌تواند باشد.

۹۳- گزینهٔ ۱

$$\left.\begin{array}{l} a | ۷m+x \xrightarrow{\times۶} a | ۴۲m+۶x \\ a | ۶m+۵ \xrightarrow{\times۷} a | ۴۲m+۳۵ \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} a | ۶x-۳۵$$

تنها مقسوم‌علیه‌های $۶x-۳۵$ باید ۱ و ±۱ باشند، این یعنی باید $۶x-۳۵=۱$ (یعنی $x=۶$) یا $۶x-۳۵=-۱$ باشد (یعنی $x=\frac{۳۴}{۶}$ که *نمی‌شه*).

۹۴- گزینهٔ ۳ باید کاری کنیم که m از سمت راست رابطه‌ها حذف شود، چون داریم $a | m^۲-۲$ پس سمت راست رابطهٔ $a | m+۱$ را در $m-۱$ ضرب می‌کنیم تا عبارت به دست آمده فقط جملهٔ $m^۲$ داشته باشد.

$$a | m+۱ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times(m-۱)} a | m^۲-۱$$

$$\text{از طرفی: } a | m^۲-۲$$

$$\xrightarrow{(-)} a | ۱ \Rightarrow a = \pm۱$$

۹۵- گزینهٔ ۱ با توجه به گزینه‌های (۱) و (۲) سعی کنیم b را از بین ببریم. می‌دانیم اگر $a | b$ و $a | c$ آن‌گاه $a | bm \pm cn$، یعنی a هر ترکیب خطی b و c را عاد می‌کند. حالا:

$$۳a+۴b | ۳a+۴b \xrightarrow{\times۳} ۳a+۴b | ۹a+۱۲b$$

$$۳a+۴b | ۱۰a+۳b \xrightarrow{\times۴} ۳a+۴b | ۴۰a+۱۲b$$

$$\xrightarrow{(-)} ۳a+۴b | ۳۱a$$

۹۶- گزینهٔ ۲

$$\begin{cases} a | b+۱ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times۲} a | ۲b+۲ \\ a | c+۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times b} a | bc+۲b \end{cases} \xrightarrow{(-)} a | bc-۲$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اگر $a=۵$، $b=۴$ و $c=۳$ باشد هر دو رابطهٔ $a | b+۱$ و $a | c+۲$ درست می‌شود. حالا به ازای این مقادیر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

(۱) $bc-۱ = ۱۲-۱ = ۱۱$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

(۲) $bc-۲ = ۱۲-۲ = ۱۰$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۳ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc+۱=۱۲+۱=۱۳$

۴ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc+۲=۱۲+۲=۱۴$

بنابراین ۲ پاسخ سؤال است.

۹۷- گزینهٔ ۳ دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۵|۴k+۳ \\ ۷|۵k-۱ \end{array} \xrightarrow{\times} ۳۵|۲۰k^۲+۱۵k-۴k-۳$$

$$\Rightarrow ۳۵|۲۰k^۲+۱۱k-۳$$

همان‌طور که می‌بینید چنین چیزی در گزینه‌ها وجود ندارد. اما با توجه به این‌که $۳۵|۳۵k^۲$ است اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\begin{array}{l} ۳۵|۲۰k^۲+۱۱k-۳ \\ ۳۵|۳۵k^۲ \end{array} \xrightarrow{\ominus} ۳۵|۱۵k^۲-۱۱k+۳$$

روش دوم اگر $k=۳$ باشد هر دو رابطه برقرار است اما در میان گزینه‌ها فقط ۳ به ازای $k=۳$ درست می‌شود:

$$۳۵|۱۵\times۹-۱۱\times۳+۳ \Rightarrow ۳۵|۱۰۵$$

۹۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $۱۴n^۲+۱۹n+۶=(۷n+۶)(۲n+۱)$

از طرفی:

$$\begin{array}{l} ۵|۲n+۱ \\ ۵|۵n+۵ \end{array} \xrightarrow{(+)} ۵|۷n+۶$$

هر دو عدد $۲n+۱$ و $۷n+۶$ بر ۵ بخش‌پذیرند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره مضرب ۲۵ است.

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. n را طوری انتخاب می‌کنیم که: $۵|۲n+۱$ برای مثال فرض می‌کنیم $n=۲$ باشد. حالا به ازای $n=۲$ مقدار $۴n^۲+۱۹n+۶$ را پیدا می‌کنیم:

$$n=۲ \Rightarrow ۱۴\times۴+۱۹\times۲+۶=۱۰۰$$

که در میان گزینه‌ها فقط بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۹۹- گزینهٔ ۲ **روش اول** طرفین رابطهٔ $۳|a+۲b$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۹|a^۲+۴ab+۴b^۲$$

حالا از رابطهٔ صورت سؤال، کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۹|a^۲+۴ab+۴b^۲ \\ ۹|a^۲-۵ab+kb^۲ \end{array} \xrightarrow{(-)} ۹|۹ab+(۴-k)b^۲$$

می‌دانیم $۹ab$ بر ۹ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$\begin{array}{l} ۹|۹ab+(۴-k)b^۲ \\ ۹|۹ab \end{array} \xrightarrow{(-)} ۹|(۴-k)b^۲$$

پس برای برقراری رابطه باید $۴-k$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، که در گزینه‌ها فقط $k=۱۳$ چنین ویژگی‌ای دارد.

روش دوم به ازای $a=b=۱$ رابطهٔ $۳|a+۲b$ برقرار است. اگر در رابطهٔ $۹|a^۲-۵ab+kb^۲$ به جای a و b یک قرار دهیم داریم:

$$۹|۱-۵+k \Rightarrow ۹|k-۴$$

که در گزینه‌ها به ازای $k=۱۳$ این رابطه برقرار است.

۱۰۰- گزینهٔ ۴ رابطه را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳-۳x^۲-۴x=x(x^۲-۳x-۴)=x(x-۴)(x+۱)$$

این عبارت باید مضرب ۱۱ باشد؛ یعنی هر یک از سه جملهٔ x، $(x-۴)$ و $(x+۱)$ می‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند. هر سه حالت را بررسی می‌کنیم:

$$x=۱۱k \xrightarrow{k=۹} x_{max}=۹۹$$

$$x-۴=۱۱k' \Rightarrow x=۱۱k'+۴ \xrightarrow{k'=۸} x_{max}=۹۲$$

$$x+۱=۱۱k'' \Rightarrow x=۱۱k''-۱ \xrightarrow{k=۹} x_{max}=۹۸$$

در میان این عددها، ۹۹ از همه بزرگ‌تر است: $۹+۹=۱۸$

۱۰۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم هر عددی مثل k در تقسیم به ۳، سه حالت دارد:

۱ یا به ۳ بخش‌پذیر است. $\Leftarrow k=۳q$

۲ یا به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $\Leftarrow k=۳q+۱$

۳ و یا به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. $\Leftarrow k=۳q+۲$

در هر سه حالت $k^۲+۱$ را پیدا می‌کنیم:

$$k=۳q \Rightarrow k^۲+۱=۹q^۲+۱$$

$$k=۳q+۱ \Rightarrow k^۲+۱=۹q^۲+۶q+۲$$

$$k=۳q+۲ \Rightarrow k^۲+۱=۹q^۲+۱۲q+۵$$

همان‌طور که می‌بینید هیچ‌کدام از این عبارت‌ها مضرب ۳ نیست. پس رابطه به ازای هیچ‌کدام از اعضای مجموعهٔ a برقرار نیست. چون اعضای این مجموعه یعنی $\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$ همگی مضرب ۳ هستند.

۱۰۲- گزینهٔ ۲ **روش اول**

$$۷|a+۵b-۲ \xrightarrow{۲\times\text{سمت راست}} ۷|۲a+۱۰b-۴$$

حالا رابطه‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۷|۲a+۱۰b-۴ \\ ۷|۲a+۳b+k \end{array} \xrightarrow{(-)} ۷|۷b-۴-k$$

از طرفی می‌دانیم: $۷|۷b$، بنابراین:

$$\begin{array}{l} ۷|۷b \\ ۷|۷b-۴-k \end{array} \xrightarrow{(-)} ۷|۴+k$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار طبیعی عدد k عدد ۳ است.

روش دوم اگر $a=۴$ و $b=۱$ باشد، رابطهٔ $۷|a+۵b-۲$ برقرار است:

$$۷|۴+۵-۲$$

حالا به ازای $a=۴$ و $b=۱$ رابطهٔ $۷|۲a+۳b+k$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$۷|۸+۳+k \Rightarrow ۷|۱۱+k$$

واضح است که کوچک‌ترین مقدار طبیعی k که به ازای آن رابطه برقرار است، $k=۳$ است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ a را از رابطه حذف می‌کنیم:

$$۱۱|۲a+۵b \xrightarrow{\times۳} ۱۱|۶a+۱۵b$$

$$۱۱|۳a+kb \xrightarrow{\times۲} ۱۱|۶a+۲kb$$

$$\xrightarrow{(-)} ۱۱|۲kb-۱۵b \Rightarrow ۱۱|(۲k-۱۵)b$$

می‌دانیم b مضرب ۱۱ نیست، پس $۲k-۱۵$ حتماً باید مضرب ۱۱ باشد، از طرفی می‌دانیم: $۱۱|۱۱$، بنابراین:

$$\begin{array}{l} ۱۱|۲k-۱۵ \\ ۱۱|۱۱ \end{array} \xrightarrow{(+)} ۱۱|۲k-۴ \Rightarrow ۱۱|۲(k-۲)$$

با توجه به این‌که $۲(k-۲)$ باید مضرب ۱۱ باشد و ۲ مضرب ۱۱ نیست، پس $k-۲$ باید مضرب ۱۱ باشد، بنابراین:

$$۱۱|k-۲ \Rightarrow k-۲=۱۱q \Rightarrow k=۱۱q+۲$$

می‌خواهیم k عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۵۰ باشد، بنابراین:

$$۱\le۱۱q+۲\le۵۰ \Rightarrow -۱\le۱۱q\le۴۸ \Rightarrow -\frac{۱}{۱۱}\le q\le\frac{۴۸}{۱۱}$$

$$\Rightarrow q=۰,۱,۲,۳,۴$$

پس به ازای ۵ مقدار k رابطه برقرار است.

۱۰۴- گزینهٔ «۲» **روش اول** می‌دانیم هر عددی مثل $n+۲$ خودش را می‌شمارد. سمت راست آن را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$n+۲\mid n+۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۵} n+۲\mid ۵n+۱۰ \quad (I)$$

بر طبق صورت سؤال می‌دانیم: $n+۲\mid ۵n+۳ \quad (II)$

از طرفی می‌دانیم:
$$\begin{cases} a\mid b \\ a\mid c \end{cases} \Rightarrow a\mid b-c$$

با توجه به این نکته دو رابطهٔ (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} n+۲\mid ۵n+۱۰ \\ n+۲\mid ۵n+۳ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} n+۲\mid -۷ \Rightarrow \begin{cases} n+۲=۷ \Rightarrow n=۵ \\ n+۲=۱ \Rightarrow n=-۱ \\ n+۲=-۱ \Rightarrow n=-۳ \\ n+۲=-۷ \Rightarrow n=-۹ \end{cases}$$

که در میان آن‌ها فقط $n=۵$ طبیعی است.

روش دوم ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$n+۲=۰ \Rightarrow n=-۲ \Rightarrow ۵\times(-۲)+۳=-۷$$

$n+۲$ عدد -۷ را می‌شمارد. بنابراین:

$$n+۲\mid -۷ \Rightarrow \begin{cases} n+۲=۱ \\ n+۲=-۱ \\ n+۲=-۷ \\ n+۲=۷ \end{cases}$$

و از این‌جا به بعد مثل روش اول عمل می‌کنیم.

۱۰۵- گزینهٔ «۳» سمت راست رابطه را تبدیل به یک عدد می‌کنیم:

$$\begin{matrix} ۳x+۲\mid ۵x+۷ \xrightarrow{\times ۳} ۳x+۲\mid ۱۵x+۲۱ \\ ۳x+۲\mid ۳x+۲ \xrightarrow{\times ۵} ۳x+۲\mid ۱۵x+۱۰ \end{matrix} \xrightarrow{\text{کم}} ۳x+۲\mid ۱۱$$

پس $۳x+۲=\pm ۱$ یا $۳x+۲=\pm ۱۱$ و چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم $۳x+۲$ را برابر ۱۱ فرض می‌کنیم. بزرگ‌ترین مقدار x برابر ۳ می‌شود که عدد ۲۴ را می‌شمارد.

۱۰۶- گزینهٔ «۳» y را تنها می‌کنیم.

$$yx+۳=۲x+۲y \Rightarrow \overbrace{yx-۲y}^{y(x-۲)}=۲x-۳ \Rightarrow y=\frac{۲x-۳}{x-۲}$$

خُب حالا چه موقع y عددی طبیعی می‌شود؟ بله درست است، وقتی صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد؛ یعنی $x-۲\mid ۲x-۳$. حالا:
ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow x-۲\mid ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=-۱ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=۱ \\ x-۲=۱ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۳ \end{cases}$$

پس دو نقطه وجود دارد.

۱۰۷- گزینهٔ «۱» **روش اول** m را از سمت راست عبارت حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix} ۵m+۳\mid ۵m+۳ \xrightarrow{\times ۹} ۵m+۳\mid ۴۵m+۲۷ \\ ۵m+۳\mid ۹m+۲ \xrightarrow{\times ۵} ۵m+۳\mid ۴۵m+۱۰ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۵m+۳\mid ۱۷$$

پس $۵m+۳=\pm ۱$ یا $۵m+۳=\pm ۱۷$ می‌تواند باشد.

$$\begin{cases} ۵m+۳=\pm ۱ \Rightarrow \text{صحیح نداریم } m \\ ۵m+۳=\pm ۱۷ \begin{cases} m=-۴ \\ m=\frac{۱۴}{۵} \times \end{cases} \end{cases}$$

$m=-۴$ صدق هم می‌کند $(-۱۷)\mid(-۳۴)$، پس قابل‌قبول است.

روش دوم ریشهٔ سمت چپ یعنی $-\frac{۳}{۵}$ را می‌اندازیم در طرف راست. کسر را ساده کرده و صورت را در نظر می‌گیریم.

$$۵m+۳\mid ۹(-\frac{۳}{۵})+۲=\frac{-۱۷}{۵} \Rightarrow ۵m+۳\mid -۱۷$$

ادامهٔ راه‌حل، شبیه قبلی می‌شود.

۱۰۸- گزینهٔ «۲» **روش اول** داریم:

$$۲n+۱\mid ۲n+۱ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times(۲n+۱)} ۲n+۱\mid ۴n^۲+۴n+۱$$
$$\text{از طرفی: } ۲n+۱\mid ۴n^۲+۵n+۴$$

$$\xrightarrow{(-)} ۲n+۱\mid n+۳ \xrightarrow{\times ۲} \begin{matrix} ۲n+۱\mid ۲n+۶ \\ ۲n+۱\mid ۲n+۱ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۲n+۱\mid ۵$$

پس $۲n+۱=\pm ۱$ یا $۲n+۱=\pm ۵$ می‌تواند باشد. با حل معادله‌ها $n=۰$، $n=-۱$، $n=۲$ و $n=-۳$ به دست می‌آید. فقط یکی از این‌ها طبیعی است و آن هم $n=۲$ بوده که در رابطهٔ مسئله صدق هم می‌کند، پس یک جواب برای n به دست می‌آید.

روش دوم به جای این همه ضرب، تفریق و ...، ریشهٔ سمت چپ (یعنی $-\frac{۱}{۲}$)را در طرف راست قرار دهیم. کسر به دست آمده را ساده کرده و صورت آن را در نظر می‌گیریم.

$$۲n+۱\mid ۴(-\frac{۱}{۲})^۲+۵(-\frac{۱}{۲})+۴=۱-\frac{۵}{۲}+۴=\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲n+۱\mid ۵$$

ادامهٔ راه‌حل، شبیه روش اول است. فقط حواستان باشد، nهایی که با این روش به دست می‌آید حتماً باید در رابطهٔ اولیه صدق کنند؛ یعنی بعد از این‌که nها را به دست آوردید، باید در رابطهٔ اولیه جای‌گذاری کنید و درستی آن را به دست آورید.

۱۰۹- گزینهٔ «۴» گفتیم که در سؤالاتی شبیه این سؤال که رشد عبارت سمت چپ رابطهٔ عادکردن سریع‌تر از عبارت سمت راست باشد، کافی است رابطه را فقط به ازای عددهای کوچک بررسی کنیم:

$$x^۳+۱\mid x+۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow ۱\mid ۱ \checkmark \\ x=۱ \Rightarrow ۲\mid ۲ \checkmark \\ x=۲ \Rightarrow ۹\mid ۳ \times \end{cases}$$

از این‌جا به بعد قطعاً رابطه برقرار نیست. اما باید عددهای منفی را هم بررسی کنیم:

$$\begin{cases} x=-۱ \Rightarrow ۰\mid ۰ \checkmark \\ x=-۲ \Rightarrow -۷\mid -۱ \times \end{cases}$$

به ازای عددهای منفی کوچک‌تر نیز رابطه برقرار نیست و بنابراین معادله فقط دو جواب دارد.

۱۱۰- گزینهٔ «۲» **روش اول** رشد عبارت $n^۲+۳$ از $n+۵$ بیشتر است، پس رابطه فقط به ازای مقادیر کوچک n ممکن است جواب داشته باشد. این مقادیر را پیدا می‌کنیم: $n^۲+۳\mid n+۵$

$n=۰ \Rightarrow ۳\mid ۵ \quad \times$

$n=۱ \Rightarrow ۴\mid ۶ \quad \times$

$n=۲ \Rightarrow ۷\mid ۷ \quad \checkmark$

$n=-۳ \Rightarrow ۱۲\mid ۸ \quad \times$

از این‌جا به بعد چون عدد سمت راست از عدد سمت چپ کوچک‌تر می‌شود رابطه دیگر برقرار نیست. اما باید عددهای منفی را نیز بررسی کنیم:

$n=-۱ \Rightarrow ۴\mid ۴ \quad \checkmark$

$n=-۲ \Rightarrow ۷\mid ۳ \quad \times$

$n=۳ \Rightarrow ۱۲\mid ۲ \quad \times$

از این‌جا به بعد هم قدرمطلق عدد سمت راست از قدرمطلق عدد سمت چپ

کوچک‌تر است و رابطه برقرار نیست. اما حواستان باشد که به ازای $n=-۵$ نیز رابطه برقرار است:

$$n=-۵ \Rightarrow ۲۸ \mid ۰ \quad \checkmark$$

پس به ازای $n=۲$، $n=-۱$ و $n=-۵$ رابطه برقرار است.

روش دوم

$$n^۲+۳ \mid n+۵ \xrightarrow{\times(n-۵)} n^۲+۳ \mid n^۲-۲۵$$

از طرفی: $n^۲+۳ \mid n^۲+۳$، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} n^۲+۳ \mid n^۲+۳ \\ n^۲+۳ \mid n^۲-۲۵ \end{array}\right. \Rightarrow n^۲+۳ \mid ۲۸$$

$$\Rightarrow n^۲+۳=۱ \quad \times$$

$$n^۲+۳=۲ \quad \times$$

$$n^۲+۳=۴ \Rightarrow n^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} n=۱ & \text{غقق} \\ n=-۱ & \checkmark \end{cases}$$

$$n^۲+۳=۷ \Rightarrow n^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} n=۲ & \checkmark \\ n=-۲ & \text{غقق} \end{cases}$$

$$n^۲+۳=۱۴ \quad \times$$

$$n^۲+۳=۲۸ \Rightarrow n^۲=۲۵ \Rightarrow \begin{cases} n=۵ & \text{غقق} \\ n=-۵ & \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید! وقتی سمت راست را در یک عبارت ضرب می‌کنیم ممکن است جواب‌های غیر قابل قبول ایجاد شود، بنابراین لازم است تک‌تک جواب‌ها را در رابطهٔ صورت سؤال چک کنیم.

۱۱۱- گزینهٔ ۴ عدد ۲^n را ببینید. فقط عامل دو دارد؛ یعنی فقط بر اعداد ۲^m که $۰ \le m \le n$ است، بخش‌پذیر می‌باشد؛ یعنی n باید توانی از ۲ باشد. توان‌های ۲ که سه‌رقمی هستند را امتحان کنیم.

$$n=۱۲۸=۲^۷ \Rightarrow (۱۲۸)^۲ \mid ۲^{۱۲۸} \Rightarrow ۲^{۱۴} \mid ۲^{۱۲۸}$$

$$n=۲۵۶ \Rightarrow (۲۵۶)^۲ \mid ۲^{۲۵۶} \Rightarrow ۲^{۱۶} \mid ۲^{۲۵۶}$$

شبیه همین به ازای $n=۵۱۲$ هم رابطه درست می‌شود، توان ۲ بعدی ۱۰۲۴ می‌شود که دیگر سه‌رقمی نیست. پس شد ۳تا.

۱۱۲- گزینهٔ ۲ $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ می‌شود، پس داریم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲} \mid n^۲ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}q=n^۲$$

$$\xrightarrow[\times ۲]{\div n} (n-۱)q=۲n \Rightarrow n-۱ \mid ۲n$$

می‌توان ریشهٔ سمت چپ، یعنی $n=۱$ را در راست جای‌گذاری کنیم، می‌شود: $n-۱ \mid ۲$

پس: $\begin{cases} n-۱=۱ \Rightarrow n=۲ \\ n-۱=۲ \Rightarrow n=۳ \end{cases}$

هر دو مقدار در رابطهٔ مسئله هم صدق می‌کنند، پس شد دو مقدار طبیعی!

۱۱۳- گزینهٔ ۲ **روش اول** باقی‌ماندهٔ a بر ۴ برابر ۳ است؛ یعنی $a=۴k+۳$. داریم:

$$a^۲=۱۶k^۲+۲۴k+۹=\underbrace{۱۶k^۲+۲۴k+۸}_{\text{از ۸ فاکتور می‌گیریم}}+۱$$

$$=۸(۲k^۲+۳k+۱)+۱=۸q+۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $a^۲$ بر ۸ برابر ۱ است.

روش دوم از این‌که $a=۴k+۳$ است می‌فهمیم که a فرد است و با توجه به این که مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس باقی‌ماندهٔ $a^۲$ بر ۸ برابر ۱ است.

۱۱۴- گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که $a=۴k+۳$ و $b=۶k'+۱$ دو عدد فردند. مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است.

حالا:
$$a^۲+b^۲+۵=(۸q+۱)+(۸q'+۱)+۵=۸k''+۷$$

یعنی باقی‌مانده برابر ۷ می‌شود.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ همهٔ گزینه‌ها فرد هستند. این خبر خوبی برای شما است. چرا؟ چون مربع عدد فرد، فرد است. از طرفی مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است، پس اگر باقی‌ماندهٔ تقسیمِ عددِ فردی بر ۸ برابر ۱ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست. باقی‌ماندهٔ تقسیم گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) بر ۸ برابر ۱ نمی‌شود، پس هیچ‌کدام مربع کامل نیستند.

البته توجه داشته باشید که رقم یکان هیچ مربع کاملی نمی‌تواند ارقام ۲، ۳، ۷ یا ۸ باشد. با این نکته می‌توانیم (۳) را زودتر رد کنیم.

۱۱۶- گزینهٔ ۱ از دو عدد متوالی، یکی زوج و دیگری فرد است. توان سوم آن‌ها هم، یکی زوج و دیگری فرد می‌شود. اگر آن‌ها را کم کنیم، فرد می‌شود (*فرد منهای زوج، فرد می‌شه*). حالا مربع هر عدد فرد، به صورت $۸q+۱$ است، پس باقی‌ماندهٔ آن بر ۸، برابر یک می‌شود.

۱۱۷- گزینهٔ ۴ $۳^{۹۷}$ عددی فرد است، پس a، b و c هر سه‌تا فرد هستند. (*اگه یکی زوج باشه، ضربشون زوج می‌شه.*) می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است؛ یعنی در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر یک دارد. حالا a، b و c همگی فرد هستند، پس هر سه‌تا به صورت $۸q+۱$ هستند.

$$a^۲+۲b^۲+۳c^۲=۸q+۱+۲(۸q'+۱)+۳(۸q''+۱)$$

$$=۸(q+۲q'+۳q'')+\underbrace{۱+۲+۳}_{۶}=۸k+۶$$

پس باقی‌ماندهٔ آن بر ۸ برابر ۶ می‌شود.

۱۱۸- گزینهٔ ۳ a زوج است، پس $۳a$ زوج است و در نتیجه $۳a+۱$ فرد است. می‌دانیم $b \mid ۳a+۱$، پس یک عدد فرد بر b بخش‌پذیر است. پس b نمی‌تواند زوج باشد، پس b حتماً فرد است. می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸q+۱$ نوشت. $b^۲$ فرد است، پس $b^۴$ نیز فرد است چون مربع یک عدد فرد است. $(b^۲)^۲$ بنابراین $b^۴=۸q+۱$، a را هم که می‌دانستیم زوج است، یعنی $a=۲q'$. بنابراین:

$$a^۳+b^۴+۲=۸q'^۳+۸q+۱+۲=۸(q'^۳+q)+۳$$

$۸(q'^۳+q)$ بر ۸ بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ کل عبارت بر ۸ برابر ۳ است.

۱۱۹- گزینهٔ ۲ عددها در تقسیم به ۴ به یکی از حالت‌های زیرند:

$۴k$

$۴k+۱ \Rightarrow$ فرد است.

$۴k+۲$

$۴k+۳ \Rightarrow$ فرد است.

بنابراین عددهای زوج به صورت $۴k$ یا $۴k+۲$ است. حالا:

$$(۴k)^۲=۱۶k^۲=۸(۲k^۲)=۸q$$

$$(۴k+۲)^۲=۱۶k^۲+۱۶k+۴=۸(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{q})+۴=۸q+۴$$

پس باقی‌مانده صفر است یا ۴، یعنی دو حالت دارد.

۱۲۰- گزینهٔ ۳ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$a^۴-b^۴-۲a^۲+۲b^۲=(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲)-۲(a^۲-b^۲)$$

$$=(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲-۲)$$

می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸k+۱$ نوشت، بنابراین:

$$\begin{cases} a=۸k+۱ \\ b=۸k'+۱ \end{cases} \Rightarrow (a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲-۲)$$

$$(۸k+۱-(۸k'+۱))(۸k+۱+۸k'+۱-۲)$$

$$=(۸(k-k'))(۸(k+k'))=۶۴(k^۲-k'^۲)$$

این عبارت حتماً بر ۶۴ بخش‌پذیر است اما دلیلی ندارد که بر عدد بزرگ‌تری بخش‌پذیر باشد.

برای مثال اگر $a=۵$ و $b=۳$ باشد:

$$(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲-۲)=(۲۵-۹)(۲۵+۹-۲)=۵۱۲=۶۴\times ۸$$

اما اگر $a=۷$ و $b=۵$ باشد:

$$(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲-۲)=(۴۹-۲۵)(۴۹+۲۵-۲)=۶۴\times ۲۷$$

۱۲۱- گزینهٔ ۴ اگر b فرد باشد، پس $b+۴$ هم فرد است. پس مقسوم‌علیه آن، یعنی $a+۳$ هم فرد است. یعنی a زوج می‌شود. اگر ۱ اضافه و کم کنیم، داریم:

$$a^۲+۲a+b^۲+۳=a^۲+۲a+۱+b^۲+۳-۱$$

$$=(\underbrace{a+۱}_{\text{فرد}})^۲+b^۲+۲=(۸q+۱)+(۸q'+۱)+۲=۸k+۴$$

دقت کنید که اگر a زوج باشد، $a+۱$ فرد می‌شود، پس $(a+۱)^۲$ دوباره $۸q+۱$ می‌شود.

۱۲۲- گزینهٔ ۲

$$۴\times ۲^{۱۰}-۹\times ۳^۴=۲^۲\times ۲^{۱۰}-۳^۲\times ۳^۴=۲^{۱۲}-۳^۶$$

می‌دانیم a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است اما اگر n زوج باشد بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است. داریم:

$$۲^{۱۲}-۳^۶=(۲^۶)^۲-(۳^۳)^۲=۶۴^۲-۲۷^۲=(۶۴-۲۷)(۶۴+۲۷)$$

$$=۳۷\times ۹۱=۳۷\times ۷\times ۱۳$$

پس عدد داده‌شده بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۲۳- گزینهٔ ۴ **روش اول** اگر $n=۱$ باشد، ۱ و ۳ رد می‌شوند.
اگر $n=۳$ باشد، ۲ رد می‌شود. اما چرا ۴ درست است؟ از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(n^۲+۲)(\underbrace{n^۴-۲n^۲+۴}_{q})=n^۶+۸ \Rightarrow n^۲+۲ \mid n^۶+۸$$

روش دوم سه‌تا نکته داریم که از اتحادهایی که در حسابان ۲ خواندید به دست آمده است. n و k دو عدد طبیعی هستند.

۱ $a^k-b^k \mid a^n-b^n$ وقتی برقرار است که n بر k بخش‌پذیر باشد؛ مثلاً $a^۲-b^۲ \mid a^۶-b^۶$.

۲ $a^k+b^k \mid a^n+b^n$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ فرد باشد؛ یعنی n مضرب فرد k باشد). در ۴، $n^۲+۲ \mid (n^۲)^۳+۲^۳$ برقرار است چون $\frac{۳}{۱}=۳$ می‌شود که فرد است.

۳ $a^k+b^k \mid a^n-b^n$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توان‌ها را یکی می‌کنیم:

$$۳^{۳۹}+۷^{۲۶}=(۳^۳)^{۱۳}+(۷^۲)^{۱۳}=۲۷^{۱۳}+۴۹^{۱۳}$$

می‌دانیم اگر n فرد باشد a^n+b^n بر $a+b$ بخش‌پذیر است، بنابراین $۲۷^{۱۳}+۴۹^{۱۳}$ بر $۷۶=۲۷+۴۹$ بخش‌پذیر است و با توجه به این‌که $۷۶=۴\times ۱۹$، این عدد بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

۱۲۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر n زوج باشد a^n-b^n هم بر $a-b$ بخش‌پذیر است و هم بر $a+b$. در این نوع سؤال‌ها اول باید توان‌ها را یکسان کنیم:

$$۲^{۴۲}-۳^{۱۸}=(۲^۷)^۶-(۳^۳)^۶=۱۲۸^۶-۲۷^۶$$

این عدد بر $۱۰۱=۱۲۸-۲۷$ و $۱۲۸+۲۷=۱۵۵=۵\times ۳۱$ بخش‌پذیر است.
بنابراین در میان عددهای داده‌شده $۲^{۴۲}-۳^{۱۸}$ فقط بر ۶۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۲۶- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $۷^۲+۱=۵۰$ است که بر ۲۵ بخش‌پذیر است.
از طرفی اگر n فرد باشد $a+b \mid a^n+b^n$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$۷^۲+۱ \mid (۷^۲)^{۲k+۱}+۱ \Rightarrow ۵۰ \mid ۷^{۴k+۲}+۱$$

یعنی عددهای به فرم $۷^{۴k+۲}+۱$ بر ۵۰ و در نتیجه بر ۲۵ بخش‌پذیرند. پس $۷^۶+۱$ بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

روش دوم

$$۷^۶+۱=(۷^۲)^۳+۱=\underbrace{(۷^۲+۱)}_{۵۰}(۷^۴+۱-۷^۲)$$

۱۲۷- گزینهٔ ۳ می‌دانیم a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است و اگر n زوج باشد a^n-b^n بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است. با توجه به همین نکته، $۵^n-۲^n$ همواره بر $۵-۲$ یعنی ۳ بخش‌پذیر است. اما ما می‌خواهیم این عبارت مضرب ۱۳ باشد.

سعی می‌کنیم برای n حالت‌های مختلفی در نظر بگیریم تا ببینیم می‌توانیم کاری کنیم a^n-b^n مضرب ۱۳ شود.

(الف) اگر n زوج باشد، داریم: $۵^{۲k}-۲^{۲k}=۲۵^k-۴^k$
که مضرب $۲۱=۲۵-۴$ است. (که به درد ما نمی‌خورد!)

(ب) اگر n مضرب ۳ باشد، داریم: $۵^{۳k}-۲^{۳k}=۱۲۵^k-۸^k$
که بر $۱۱۷=۱۲۵-۸$ بخش‌پذیر است. حالا با توجه به این‌که $۱۱۷=۳^۲\times ۱۳$، پس اگر n مضرب ۳ باشد $۵^n-۲^n$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. در میان گزینه‌ها فقط ۸۴ مضرب ۳ است.

۱۲۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر n فرد باشد: $a+b \mid a^n+b^n$ به عبارت دیگر رابطهٔ $a+b \mid a^{۲k+۱}+b^{۲k+۱}$ همواره برقرار است. با توجه به این‌که $۲۸=۳^۳+۱$ است، می‌توان نوشت:

$$۳^۳+۱ \mid (۳^۳)^{۲k+۱}+۱^{۲k+۱} \Rightarrow ۲۸ \mid ۳^{۶k+۳}+۱$$

پس اگر n به صورت $۶k+۳$ باشد رابطه برقرار است. با توجه به این‌که n عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۶۰ است داریم:

$$۱\le ۶k+۳<۶۰ \Rightarrow -۲\le ۶k<۵۷$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le k\le \frac{۵۷}{۶}=۹/۵ \Rightarrow k=۰,۱,۲,\dots,۹$$

پس به ازای ۱۰ عدد رابطه برقرار است.

> این سؤال‌ها با همنهشتی راحت‌تر حل می‌شوند در درس بعد روش حل این سؤال‌ها با همنهشتی را نیز می‌بینید.

۱۲۹- گزینهٔ ۳ برای به دست آوردن ب.م.م هر عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم:

$$(۱۸۰,۱۴۴)=(۲^۲\times ۳^۲\times ۵,\ ۲^۴\times ۳^۲)=۲^۲\times ۳^۲=۳۶$$

۱۳۰- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر عدد a عدد b را بشمارد ب.م.م‌شان می‌شود $|a|$، بنابراین:

$$\begin{cases} a\mid b \Rightarrow (a,b)=|a| \xrightarrow{\text{چون } a<۰} (a,b)=-a \\ a\mid ۰ \Rightarrow (a,۰)=|a|=-a \end{cases}$$

۱۳۱- گزینهٔ ۱ برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد باید عددها را تجزیه کرد و عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کرد.
اما گاهی همان‌طور که می‌بینید تجزیهٔ عددها کار سختی است. در این‌جور موارد همان‌طور که در درس‌نامه هم گفتیم می‌توانیم از روش نردبانی استفاده کنیم:

q	۳	۱	۱	
۶۶۳	۱۸۷	۱۰۲	۸۵	۱۷
r	۱۰۲	۸۵	۱۷	

$$\begin{array}{r|l} ۶۶۳ & ۱۸۷ \\ \cline{2-2} ۵۶۱ & ۳ \\ \hline ۱۰۲ & \end{array}$$

۶۶۳ را بر ۱۸۷ تقسیم کرده و باقی‌مانده و خارج قسمت را در جدول قرار می‌دهیم چون باقی‌مانده صفر نشده، باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل کرده دوباره عددها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۸۷ & ۱۰۲ \\ \cline{2-2} ۱۰۲ & ۱ \\ \hline ۸۵ & \end{array}$$

دوباره باقی‌مانده را به ردیف وسط می‌بریم و الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۲ & ۸۵ \\ \cline{2-2} ۸۵ & ۱ \\ \hline ۱۷ & \end{array}$$

و بالأخره چون ۸۵ بر ۱۷ بخش‌پذیر است پس ب.م.م دو عدد ۱۷ است.
$d=۱۷ \Rightarrow ۲d+۱=۳۵$ مضرب ۷ است.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ می‌توانیم عوامل مشترک را از ب.م.م فاکتور بگیریم.
بنابراین: $(۳m,۹m^۲)=۳m(۱,۳m)=۱۲$
می‌دانیم همواره $(۱,a)=۱$ است پس: $۳m=۱۲ \Rightarrow m=۴$

۱۳۳- گزینهٔ ۱
اگر $(a,b)=d$ باشد $(a^۲,b^۲)=d^۲$ و $(۵a,۵b)=۵d$ است. بنابراین:
$$d^۲-۵d=۱۴ \Rightarrow d^۲-۵d-۱۴=۰$$
$$\Rightarrow (d-۷)(d+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=۷ \\ d=-۲ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۱۳۴- گزینهٔ ۳ قبل از این‌که تست را حل کنیم، چند نکتهٔ مهم کتاب درسی را مرور می‌کنیم:
۱ دو عدد متوالی، نسبت به هم اول‌اند (پس ۱ درسته)
۲ دو عدد فرد متوالی، نسبت به هم اول‌اند.
۳ ب.م.م دو عدد زوج متوالی، برابر ۲ می‌شود.
خب حالا $۴m+۱$ و $۴m+۳$ دو عدد فرد متوالی هستند، پس نسبت به هم اول‌اند. (۲ درسته) شبیه همین، ۴ هم درست است، اما چرا ۳ غلط است؟ خیلی ساده $m=۱$ بگیرید. می‌بینیم $(۶,۸)=۲$ می‌شود نه.
اما برای درک بهتر یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کنیم که چرا ب.م.م‌شان برابر ۱ می‌شود. گزینهٔ ۲ را نگاه کنید. فرض کنید: $(۴m+۱,۴m+۳)=d$
در این صورت:
$$\begin{cases} d\,|\,۴m+۱ \\ d\,|\,۴m+۳ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۲$$
اما d نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا هر دو عدد $۴m+۱$ و $۴m+۳$ فردند و عددهای فرد نمی‌توانند بر ۲ بخش‌پذیر باشند.

۱۳۵- گزینهٔ ۳ یک نکتهٔ خیلی مهمی که باید بدانیم این است که اگر $(a,b)=d$ باشد، d نه تنها ب.م.م دو عدد a و b است بلکه بر بقیهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b نیز بخش‌پذیر است.
به بیان دیگر اگر $(a,b)=d$ و x نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد یعنی $x|a$ و $x|b$ می‌توان نتیجه گرفت $x|d$.

اگر $(a,b)=d$ باشد:
$$x\,|\,a , x\,|\,b \Rightarrow x\,|\,d$$

بنابراین در این سؤال وقتی ب.م.م دو عدد ۳۶ است، هر یک از مقسوم‌علیه‌های ۳۶ نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است.
مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۳۶ $=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$
یعنی به ازای ۹ عدد، رابطه برقرار است.

۱۳۶- گزینهٔ ۴
۱ نادرست است، چون برای مثال ممکن است هر دو مضرب ۳ باشند:
$$\begin{matrix} a=۶ \\ b=۳ \end{matrix} \Rightarrow (۶,۳)=۳$$
۲ نادرست است، چون ممکن است ب.م.م دو عدد عددی بزرگ‌تر از ۲ شود:
$$\begin{matrix} a=۱۲ \\ b=۵ \end{matrix} \Rightarrow (a,b+۱)=(۱۲,۶)=۶$$
۳ نادرست است، چون ممکن است a زوج و مضرب ۷ باشد:
$$a=۱۴ \Rightarrow (۱۴,۷)=۷$$
۴ درست است، چون اختلاف دو عدد فرد و زوج همواره فرد است و ب.م.م هر عدد فرد با ۲ برابر ۱ است.

۱۳۷- گزینهٔ ۴ $۳\times۲^۲=۱۲$ است، پس a نه زوج است و نه مضرب ۳. از بین اعداد یک‌رقمی، $a=۱,۵,۷$ می‌تواند باشد، پس a سه مقدار دارد.

۱۳۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم:
$$(۴n+۱,۱۸)=d \Rightarrow \begin{matrix} d\,|\,۱۸ \\ d\,|\,۴n+۱ \end{matrix}$$
$۴n+۱$ فرد است پس d نمی‌تواند زوج باشد اما هر یک از مضارب فرد ۱۸ می‌تواند باشد. $d=۱,۳,۹$

۱۳۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم ۱۳ عدد اول است، بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک یک عدد دیگر با ۱۳ یا برابر ۱ است و یا برابر ۱۳. *(برای مثال $(۲۰,۱۳)=۱$ می‌شه ولی چون ۳۹ مضربِ ۱۳ ائه: $(۳۹,۱۳)=۱۳$ می‌شه.)* حالا در این سؤال می‌دانیم $(n-۳,۱۳)$ بزرگ‌تر از ۱ است. بنابراین این مقدار برابر ۱۳ است و در نتیجه $n-۳$ حتماً باید مضرب ۱۳ باشد.
$$n-۳=۱۳k \Rightarrow n=۱۳k+۳$$
می‌خواهیم n دورقمی باشد پس $۱۰\le n\le ۹۹$ داریم:
$$۱۰\le ۱۳k+۳\le ۹۹ \Rightarrow ۷\le ۱۳k\le ۹۶ \Rightarrow ۰/۶\le k\le ۷/۳$$
$$\Rightarrow k=۱,۲,\dots,۷$$
یعنی به ازای ۷ مقدار دورقمی n رابطه برقرار است.

۱۴۰- گزینهٔ ۴ می‌دانیم که d هر دو عدد را می‌شمارد. داریم:
$$\left.\begin{matrix} d\,|\,۳n+۵ \xrightarrow{\times n} d\,|\,۳n^۲+۵n \\ d\,|\,۳n^۲-۲n+۶ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۷n-۶$$
$$\begin{matrix} d\,|\,۷n-۶ \xrightarrow{\times ۳} d\,|\,۲۱n-۱۸ \\ d\,|\,۳n+۵ \xrightarrow{\times ۷} d\,|\,۲۱n+۳۵ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d\,|\,۵۳$$
$$\Rightarrow d=۵۳ \ (d\ne ۱ \text{ چون گفته})$$

برای مثال به ازای $n=16$ داریم: $(53,742)=53$

روش تستی کافی است ریشهٔ $3n+5$ را در $3n^2-2n+6$ قرار دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$3n+5=0 \Rightarrow n=-\frac{5}{3} \Rightarrow 3n^2-2n+6$$

$$=3\times(-\frac{5}{3})^2-2(-\frac{5}{3})+6=\frac{53}{3} \Rightarrow d|53 \Rightarrow d=53$$

۱۴۱- گزینهٔ ۲

$$(20!,19!-18!)=(20\times19\times18!,18!(19-1))$$

$$=(20\times19\times18!,18\times18!)=18!(\underbrace{20\times19,18}_{2})=2\times18!$$

۱۴۲- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد آن‌گاه $d|a$ و $d|b$، بنابراین:

$$(n,24)=12 \Rightarrow 12|n \Rightarrow n=12q$$

اما q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد، n مضرب ۲۴ می‌شود و در نتیجه $(n,24)$ برابر ۲۴ می‌شود. پس q فرد است.

$$q=2k+1 \Rightarrow n=12(2k+1)=24k+12$$

n دورقمی است، بنابراین:

$$10\le 24k+12\le 99 \Rightarrow -2\le 24k\le 87$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{24}\le k\le \frac{87}{24} \Rightarrow k=0,1,2,3$$

پس به ازای چهار عدد، رابطه برقرار است.

۱۴۳- گزینهٔ ۲

$$(6a,10b)=44 \Rightarrow 2(3a,5b)=44 \Rightarrow (3a,5b)=22$$

بنابراین $3a$ و $5b$ هر دو بر ۲۲ بخش‌پذیر است و چون ۳ و ۵ نسبت به ۲۲ اول‌اند پس a و b هر دو بر ۲۲ بخش‌پذیرند و در نتیجه $(a,b)=22$ پس

(۱) نادرست است.

(۲) درست است، چون اگر a مضرب ۵ باشد، با توجه به این‌که $5b$ نیز بر ۵ بخش‌پذیر است پس ۵ در ب.م.م دو عدد نیز می‌آید:

$$(3a,5b)=22\times5=110$$

(۳) نادرست است، b مضرب ۳ نیست چون اگر b مضرب ۳ بود حاصل $(3a,5b)=66$ می‌شود. *(چون $3a$ هم مضرب ۳ است و ۳ می‌شه عامل مشترک و تو ب.م.م می‌آد.)*

(۴) دلیلی ندارد $a+b$ بر ۴۴ بخش‌پذیر باشد. برای مثال اگر $a=22$ و $b=44$ باشد $a+b=66$ بر ۴۴ بخش‌پذیر نیست.

۱۴۴- گزینهٔ ۱ **روش اول** ب.م.م دو عدد (a,c) را برابر d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(a,c),d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|c \end{cases}$$

در صورت سؤال گفته شده $c|a-b$، بنابراین:

$$d|c,c|a-b \Rightarrow \begin{matrix} d|a-b \\ d|b \end{matrix} \xrightarrow{(+)} d|b$$

پس d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است اما با توجه به این‌که a و b نسبت به هم اول‌اند (خود سؤال گفته) بنابراین تنها مقسوم‌علیه مشترکشان عدد ۱ است و در نتیجه $d=1$.

روش دوم این مدل سؤال‌ها را با عددگذاری هم می‌شود حل کرد. برای مثال در این سؤال $a=5$، $b=3$ و $c=2$ باشد، در این صورت $c|a-b$ و:

$$(c,a)=(2,5)=1$$

۱۴۵- گزینهٔ ۴ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(25n+9,11n+4)=d$$

$$\begin{matrix} d|11n+4 \xrightarrow{\times25} d|275n+100 \\ d|25n+9 \xrightarrow{\times11} d|275n+99 \end{matrix} \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

یعنی به ازای همهٔ مقادیر n دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند. خب چند عدد دورقمی داریم؟ درست است، ۹۰تا!

۱۴۶- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $(a,b)=d$ باشد، $d|a$ و $d|b$. داریم:

$$(5n-2,12n+7)=d$$

$$\begin{cases} d|5n-2 \xrightarrow{\times12} d|60n-24 \\ d|12n+7 \xrightarrow{\times5} d|60n+35 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d|59 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 59$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند ب.م.م‌شان ۵۹ است.

۱۴۷- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم، داریم:

$$(7n+5\ ,\ 11n+2)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|11n+2 \xrightarrow{\times7} d|77n+14 \\ d|7n+5 \xrightarrow{\times11} d|77n+55 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|41 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 41$$

پس ب.م.م دو عدد یا ۱ است و یا ۴۱ و بنابراین هیچ‌وقت نمی‌تواند ۳ باشد.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(n+2,7n+1)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|n+2 \xrightarrow{\times7} d|7n+14 \xrightarrow{\ominus} d|13 \\ d|7n+1 \qquad d|7n+1 \longrightarrow d=1 \text{ یا } 13 \end{matrix}$$

چون گفته $d\ne1$ پس $d=13$ است پس هر دو عدد $n+2$ و $7n+1$ باید بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند.

$$n+2=13k \Rightarrow n=13k-2 \Rightarrow 41\le 13k-2\le 100$$

$$\Rightarrow 43\le 13k\le 102 \Rightarrow \frac{43}{13}\le k\le \frac{102}{13}$$

$$\Rightarrow k=4,5,6,7$$

پس به ازای ۴ عدد رابطه برقرار است.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $15a+3$ و $15a-12$ هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند. پس عدد ۳ یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است. یعنی d یک عامل ۳ دارد.

$$(15a-12\ ,\ 15a+3)=d \Rightarrow \begin{matrix} d|15a-12 \\ d|15a+3 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|15$$

چون d از یک طرف مضرب ۳ است و از طرف دیگر ۱۵ را می‌شمارد، پس $d=3$ یا ۱۵ اما $d=15$ نیز نمی‌تواند باشد، چون برای مثال عدد $15a+3$ در تقسیم به ۱۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد و نمی‌تواند بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد. بنابراین ب.م.م این دو عدد همواره برابر ۳ است.

> با یک مثال هم می‌شد فهمید!
>
> $a=1 \Rightarrow (15a+3,15a-12)=(18,3)=3$

۱۵۰- گزینهٔ ۳ **روش اول** ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. می‌دانیم d هر دو عدد را می‌شمارد:

$$(3k-1,k^2+2k+4)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|3k-1 \xrightarrow{\times k} d|3k^2-k \\ d|k^2+2k+4 \xrightarrow{\times3} d|3k^2+6k+12 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(-)} d|7k+12$$