



پایه دوازدهم



فصل
اول

حرکت بر خط راست



قسمت اول: نگاهی بر مفاهیم حرکت



مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی شده

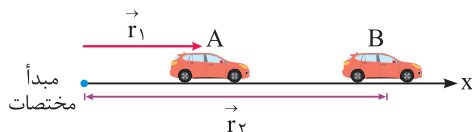
ایستگاه ۱



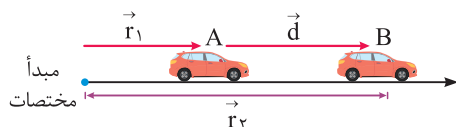
تو اولین ایستگاه ورودتون به فیزیک دوازدهم، بریم ببینیم پارامترهای بردار مکان و جابه‌جایی چی هستن؟ ایشالا که تا آخر کتاب خیلی خوش بگذره.

۱. بردار مکان و جابه‌جایی

بردار مکان: در شکل زیر اتومبیلی بر روی محور x در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده شده است.



بردار تغییر مکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده شده در شکل زیر، در بازه زمانی t_1 تا t_2 از نقطه A تا نقطه B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازه زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه زمانی متصل می‌کند.



$$\vec{d} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی (d) معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط A و B است.

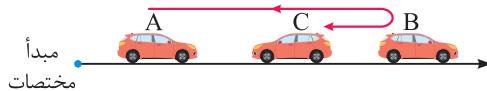
انتهای \vec{r}_1 به \vec{r}_2

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

خوب یادتون باشه که بردار $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ، از انتهای \vec{r}_1 به انتهای \vec{r}_2 وصل میشه.

۲. مسافت طی شده

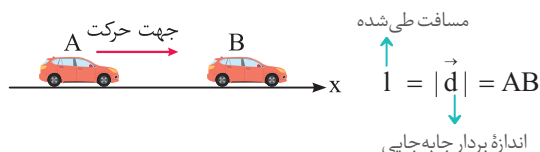
فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطه A به B رفته و سپس از نقطه B به نقطه C بازگردد. به طول مسیری طی شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده ABC از طول پاره خط AC (اندازه جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «مسافت طی شده توسط

یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی متحرک است.»

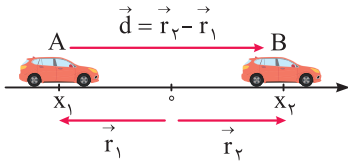
در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور x مستقیماً از A به B منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره خط AB است.



هنگامی که متحرک در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی آن برابر مسافت طی شده است.

نکات مهم و کاربردی

① فرض کنید متحرکی مطابق شکل زیر از نقطه A تا نقطه B حرکت کند. بدین ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}, \quad \vec{r}_2 = x_2 \vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i} = (x_2 - x_1) \vec{i} = \Delta x \vec{i}$$

② اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور X قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.

③ در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، این موضوع از نکات تست خیز این ایستگاه نکات محسوب می‌شود.

④ اگر $\Delta x > 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در جهت محور X و اگر $\Delta x < 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور X است.

⑤ مسافت طی شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.

⑥ در جدول زیر، دو کمیت جابه‌جایی و مسافت مقایسه شده‌اند.

مسافت	جابه‌جایی	کمیت
طول مسیر طی شده توسط متحرک است.	برداری است که نقطه شروع حرکت را مستقیماً به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند.	تعریف
نرده‌ای	برداری	نوع
m	m	یکای SI
اندازه جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی شده است.		مقایسه اندازه

⑦ جابه‌جایی کل متحرک در چند بازه زمانی متوالی، برابر مجموع برداری جابه‌جایی‌های متحرک در هر یک از این بازه‌هاست. مثلاً اگر متحرکی در t_1 ثانیه اول حرکت

جابه‌جایی $\vec{d}_1 = 5 \vec{i}$ ، در t_2 ثانیه دوم حرکت جابه‌جایی $\vec{d}_2 = -7 \vec{i}$ و در t_3 ثانیه سوم حرکتش جابه‌جایی $\vec{d}_3 = 8 \vec{i}$ را انجام داده باشد، جابه‌جایی آن در کل حرکت

برابر است با: $\vec{d}_{\text{کل}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = 5 \vec{i} + (-7 \vec{i}) + (8 \vec{i}) = 6 \vec{i}$ به‌طور ساده‌تر $\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 5 - 7 + 8 = 6 \text{ m}$

حالا بریم با به تمرین دُرست حسابی، مطالب این ایستگاه رو جمع‌بندی کنیم ...

تمرین در شکل زیر، اتومبیل نشان داده شده بر روی محور X از نقطه A شروع به حرکت کرده و به نقطه B می‌رود و سپس از نقطه B به سمت نقطه C باز

می‌گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟



(۲) متر از مسافت طی شده، در خلاف جهت محور X است.

(۱) بردار مکان متحرک در نقطه C، برابر $-\vec{i}$ در SI می‌باشد.

(۴) بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C، برابر $6 \vec{i}$ در SI می‌باشد.

(۳) این متحرک از A تا C، مسافت ۱۰ m را طی کرده است.

پاسخ برای تحلیل این سؤال آموزشی، به موارد زیر توجه کنید:

① بردار مکان متحرک در نقاط A، B و C به صورت زیر است:

$$\vec{r}_A = 5 \vec{i} \quad \vec{r}_B = -3 \vec{i} \quad \vec{r}_C = -1 \vec{i}$$

② این متحرک از نقطه A تا نقطه B، ۸ m در خلاف جهت محور X و از نقطه B تا نقطه C، ۲ m در جهت محور X حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازه ۱۰ m را طی کرده است.

③ بردار جابه‌جایی متحرک از A تا C نیز به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{d} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -1 \vec{i} - 5 \vec{i} = -6 \vec{i}$$

بنابراین تنها عبارت مطرح شده در گزینه (۴) نادرست است.

بررسی ویژگی‌های معادله مکان - زمان

تو ادامه کار درک مفهوم ساده معادله به پارامتر (مثل مکان) برحسب زمان، تو این فصل خیلی برامون مهمه. بریم ببینیم چه جوری میشه با این مفهوم به ارتباط خوبی برقرار کرد.

معادله مکان - زمان یک متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنيد متحرکی بر روی محور X در حال حرکت است و معادله مکان - زمان آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x = t^3 + 2t + 5$$

این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^3 + 2t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0^3 + 2 \times 0 + 5 = 5 \text{ m} & (\text{در } t_0 = 0 \text{ شروع حرکت، } x_0 = 5 \text{ m است.}) \\ t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow x_1 = 1^3 + 2 \times 1 + 5 = 8 \text{ m} & (\text{در } t_1 = 1 \text{ s، } x_1 = 8 \text{ m است.}) \\ t_2 = 2 \text{ s} \rightarrow x_2 = 2^3 + 2 \times 2 + 5 = 17 \text{ m} & (\text{در } t_2 = 2 \text{ s، } x_2 = 17 \text{ m است.}) \end{cases}$$

تذکره اگر از ما بخواهند جابه‌جایی متحرک را در یک بازه زمانی مانند $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 2 \text{ s}$ از روی معادله مکان - زمان به دست آوریم، کافی است مقادیر t_1 و t_2 را در معادله مکان قرار داده و حاصل x_1 و x_2 را به دست آوریم. $x_2 - x_1$ ، معادل جابه‌جایی متحرک است.

$$\begin{cases} t_2 = 2 \text{ s} \rightarrow x_2 = 17 \text{ m} \\ t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow x_1 = 8 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 17 - 8 = 9 \text{ m}$$

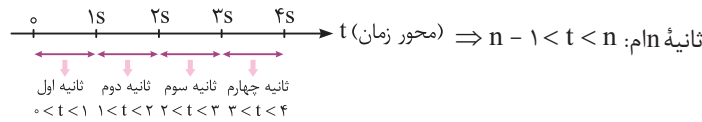
نکات مهم و کاربردی

۱) مکان اولیه متحرک، یعنی مکان آن در لحظه $t = 0$. بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیه یک متحرک، کافی است در معادله مکان - زمان آن، پارامتر t را برابر صفر قرار دهیم.

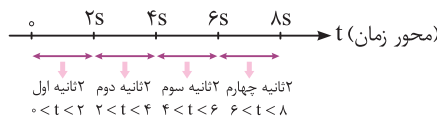
۲) متحرکی بر روی محور X در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x = 0$ شود. به عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن $x = 0$ قرار داده شود.

مثال: $x = 4t - 8$ پیدا کردن لحظه عبور از مبدأ $\rightarrow x = 4t - 8 = 0 \rightarrow t = 2 \text{ s}$

۳) ثانیه اول حرکت، یک بازه زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t = 0$ شروع می‌شود یعنی $0 < t < 1 \text{ s}$ ، ثانیه دوم حرکت یعنی $1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ و به همین صورت می‌توان گفت:



۴) دو ثانیه اول حرکت یک بازه زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از $t = 0$ شروع می‌شود، یعنی $0 < t < 2 \text{ s}$. دو ثانیه دوم یعنی $2 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.



در ادامه با حل چند تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۲ دو ثانیه هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

پاسخ دو ثانیه هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازه زمانی $8 \times 2 = 16 \text{ s}$ است، از طرفی طول هر بازه زمانی ۲ s است یعنی: $16 \text{ s} < t < 18 \text{ s}$ ← ۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

تمرین ۳ نه ثانیه پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

پاسخ نه ثانیه پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازه زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازه زمانی $5 \times 9 = 45 \text{ s}$ است، از طرفی طول هر بازه زمانی ۹ s است یعنی $45 \text{ s} < t < 54 \text{ s}$ ← ۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیه اول معادل با $0 \leq t < 2 \text{ s}$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.

تمرین ۴ معادله حرکت متحرکی بر روی محور x ، در SI از رابطه $x = t^2 - 4t$ به دست می‌آید. در این صورت جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت و در ۲ ثانیه سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟

$$۱۰, - ۴ (۴)$$

$$۸, - ۴ (۳)$$

$$۱۰, - ۶ (۲)$$

$$۱۲, - ۴ (۱)$$

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبه جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت ($0 < t < 2s$):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -4m$$

جابه‌جایی در دو ثانیه اول



گام دوم: محاسبه جابه‌جایی در ۲ ثانیه سوم حرکت ($4s < t < 6s$):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow x_1 = 4^2 - 4 \times 4 = 0 \\ t_2 = 6s \rightarrow x_2 = 6^2 - 4 \times 6 = 12m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 12 - 0 = 12m$$

جابه‌جایی در دو ثانیه سوم

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲. شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت $x_A = 4t + 2$ و $x_B = -\Delta t + 20$ است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 4t + 2 = -\Delta t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

از سوی دیگر ممکن است پرسیده شود که این دو متحرک در چه مکانی به هم می‌رسند؟ برای محاسبه این موضوع داریم:

$$t = 2s \xrightarrow{\text{در یکی از } x \text{ ها قرار می‌دهیم.}} x_A = 4t + 2 = 4 \times 2 + 2 = 10m$$

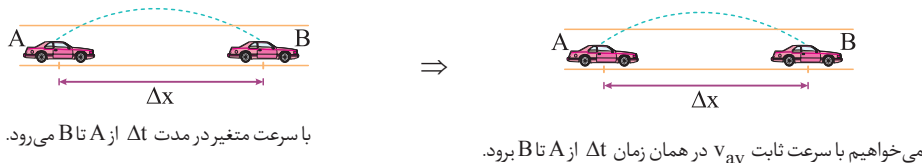
در مکان $x = +10m$ دو متحرک به هم می‌رسند.

حالا وقتشه به سری به تستای ۱ تا ۱۴ بزنیم ...

ایستگاه ۲ آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط

درک مفهوم تندی متوسط و سرعت متوسط، یکی از خواسته‌های اصلی ما تو این فصل هست. خوب روی این موضوع تمرکز کنید ...

سرعت متوسط: در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان Δt ثانیه، به نقطه B می‌رسد. حال می‌خواهیم ببینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطه A تا نقطه B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان Δt از A به B برسد.



این پارامتر، **سرعت متوسط** نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطه A تا نقطه B محسوب می‌شود. اگر متحرک روی

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i}$$

محور x در حال حرکت باشد، برای محاسبه v_{av} ، کافی است جابه‌جایی \vec{d} را بر زمان انجام آن جابه‌جایی، یعنی Δt تقسیم کنیم:

تندی متوسط: به نسبت مسافت طی شده (l) به زمان طی مسافت (Δt) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد s_{av} نشان می‌دهند و برای محاسبه s_{av} داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

نکات مهم و کاربردی

سرعت متوسط مانند جابه‌جایی کمیته برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

۲ اگر جابه‌جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا 10 m در جهت محور x حرکت کرده و سپس 10 متر در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به محل اولیه خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان حرکت صفر است.



مبدأ

$$\begin{cases} x_{\text{شروع}} = 0 \\ x_{\text{پایان}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_{\text{پایان}} - x_{\text{شروع}} = 0$$

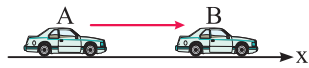
۳ اگر یک متحرک در جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

۴ تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط فقط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.

۵ مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر از اندازه جابه‌جایی یا برابر با آن است، بنابراین تندی متوسط هم همواره بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط یا برابر با آن است.

$$s_{av} \geq |\vec{v}_{av}|$$

۶ فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور x از نقطه A تا نقطه B بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی شده برابر اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازه سرعت متوسط می‌شود. $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$



حالا بریم تو چند تا تمرین بعدی، ببینیم چه جوری از نکاتی که یاد گرفتیم همیشه توی حل مسائل استفاده کرد ...

تمرین ۵ معادله حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 0.25 + \sin \pi t$ می‌باشد. اندازه سرعت متوسط آن در 5 ثانیه اول حرکت

چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) صفر (۲) 0.05 (۳) 0.25 (۴) 0.15

پاسخ برای محاسبه سرعت متوسط در 5 ثانیه اول حرکت، کافایت مکان متحرک در لحظات $t_1 = 0$ و $t_2 = 5\text{ s}$ را به دست آوریم:

$$x = 0.25 + \sin \pi t \quad , \quad (0 < t < 5\text{ s}) \rightarrow |\vec{v}_{av}| = ?$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0.25 + \sin(0) = 0.25\text{ m} \\ t_2 = 5\text{ s} \rightarrow x_2 = 0.25 + \sin 5\pi = 0.25\text{ m} \end{cases} \rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \vec{i} = \frac{0.25 - 0.25}{5 - 0} \vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 0 \text{ (گزینه ۱)}$$

دقت همان طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

تمرین ۶ مطابق شکل، اتومبیلی روی محور x از نقطه A شروع به حرکت کرده و در مدت 6 s به نقطه B رفته و سپس در مدت 4 s از نقطه B به نقطه C می‌رود.

کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟



(۱) این اتومبیل به طور متوسط در هر ثانیه، 5 m از مسیر را پیموده است.

(۲) این اتومبیل به طور متوسط در هر ثانیه، 3 m از نقطه A به مقصد نزدیک شده است.

(۳) تندی متوسط این اتومبیل 5 m/s است.

(۴) اندازه سرعت متوسط این اتومبیل 15 m/s است.

پاسخ این اتومبیل از نقطه A تا B ، مسافت 40 m را طی کرده و سپس از نقطه B تا C ، به اندازه مسافت 10 m برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی شده

توسط اتومبیل 50 m می‌شود و تندی متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

بنابراین تندی متوسط 5 m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به طور متوسط 5 m از مسیر را طی کرده است.

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

بنابراین اندازه سرعت متوسط 3 m/s می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به طور متوسط 3 m از نقطه A به سمت مقصد، یعنی نقطه C نزدیک شده است، پس گزینه (۴) عبارت نادرستی است.

$$1\text{ km/h} = 1 \frac{(1000\text{ m})}{(3600\text{ s})} \Rightarrow 1\text{ km/h} = \frac{1}{3.6}\text{ m/s}$$

تذکر برای تبدیل km/h به m/s ، کافی است عدد مورد نظر را بر 3.6 تقسیم کنیم:

$$1\text{ m/s} = 3.6\text{ km/h}$$

و برای تبدیل m/s به km/h ، عدد مورد نظر را در 3.6 ضرب می‌کنیم:

حالا وقتشه به سری به تستای ۱۵ تا ۳۸ بنزیم ...



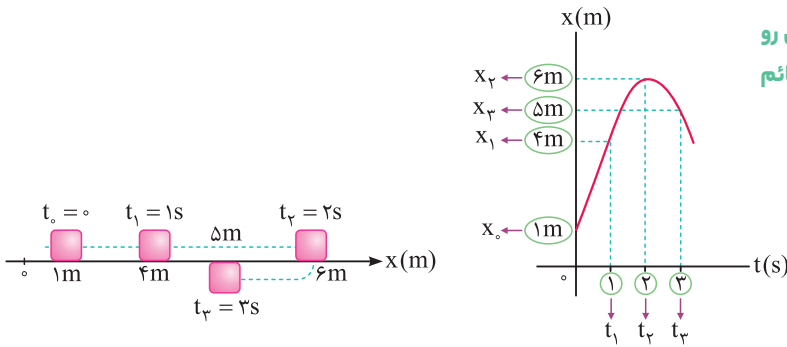
تحلیل نمودار مکان - زمان و محاسبه $|v_{av}|$ و s_{av} از روی آن



۱. تحلیل مفهومی نمودار مکان - زمان

فرض کنید مکان متحرکی مطابق شکل، در لحظات t_0, t_1, t_2, t_3 و ... داده شده است. اگر این مکان ها و زمان ها را در یک نمودار ترسیم کنیم، از لحاظ مفهومی نمودار مکان - زمان حرکت متحرک به دست می آید.

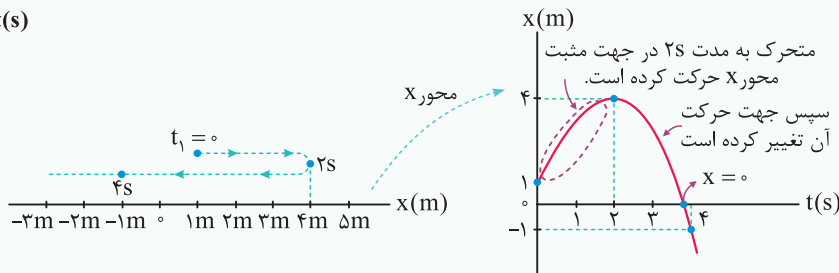
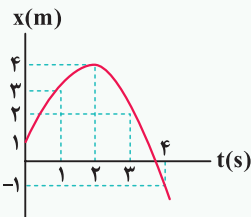
به زبان خودمونی، نمودار مکان - زمان نموداریه که آگه زمان از روی محور افقی داشته باشی، خیلی راحت مکان رو روی محور قائم بهت میده.



تذکره یک دانش آموز خلاق، از روی نمودار مکان - زمان مسیر حرکت متحرک را در ذهن خود تجسم می کند. این موضوع یعنی با خود تصور می کند که از $t = 0$ تا $t_2 = 2s$ متحرک در جهت محور X حرکت کرده و از مکان 1m به مکان 6m منتقل می شود. در ادامه از $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 3s$ در خلاف جهت محور X جابه جا شده و از مکان 6m به مکان 5m رفته است.

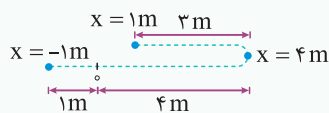
تمرین ۷ نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت مقابل است. جابه جایی و مسافت طی شده توسط این متحرک تا پایان ثانیه چهارم، برابر چند متر است؟

پاسخ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است:



جابه جایی این متحرک به صورت زیر است:

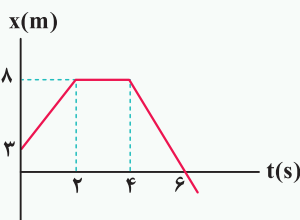
$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = -1m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (1) = -2m$$



حال به محاسبه مسافت طی شده می پردازیم. متحرک ابتدا از $x = 1m$ شروع به حرکت کرده و تا $x = 4m$ رفته است (3m مسافت طی کرده است). در ادامه از $x = 4m$ شروع به حرکت کرده و به $x = 0$ رفته است (4m مسافت طی کرده است). در پایان نیز از $x = 0$ به $x = -1m$ رفته است (1m مسافت طی کرده است). و مجموع مسافت طی شده توسط متحرک برابر $1 + 4 + 3 = 8m$ است.

تذکره جابه جایی متحرک هیچ ربطی به چگونگی مسیر حرکت آن ندارد و برای محاسبه آن، کافی است مکان متحرک را در ابتدا و انتهای حرکت بدانیم، ولی برای محاسبه مسافت طی شده، باید حتماً چگونگی مسیر حرکت را بدانیم.

تمرین ۸ نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می کند، مطابق شکل است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) در کدام بازه زمانی، متحرک متوقف بوده است؟

ب) بردار مکان متحرک چند ثانیه در جهت محور X بوده است؟

ج) در بازه ای که متحرک در جهت محور X حرکت می کند، اندازه جابه جایی آن چند متر است؟

د) مسافت طی شده در 6 ثانیه اول حرکت چند متر است؟

پاسخ الف) در بازه زمانی $2s < t < 4s$ ، نمودار افقی است، یعنی مکان متحرک تغییر نمی‌کند و متحرک متوقف بوده است.

ب) در ۶ ثانیه اول حرکت، یعنی بردار مکان متحرک در جهت محور X است. پس از لحظه $t = 6s$ ، بردار مکان در خلاف جهت محور X می‌شود.

ج) با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک به صورت شکل مقابل است:



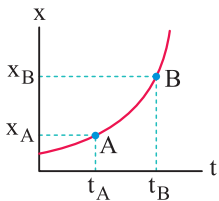
همان طور که می‌بینید، در ۲ ثانیه اول، متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند و به اندازه $5m$ جابه‌جا می‌شود.

د) در ۶ ثانیه اول، متحرک ابتدا $5m$ در جهت محور X جابه‌جا می‌شود و پس از ۲ ثانیه توقف، در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی شده برابر $l = 5 + 8 = 13m$ است.

۲. محاسبه سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان

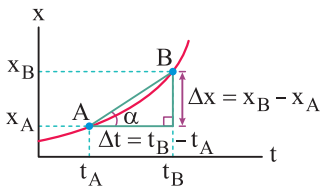
فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبه سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

روش اول (نمودار خوانی): در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط A و B را به دست می‌آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$B \text{ و } A \text{ : سرعت متوسط بین } \vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت است.



$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}| = \text{شیب خط } AB$$

این روش در مسائلی که می‌خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

۳. محاسبه تندی متوسط از روی نمودار مکان - زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. برای محاسبه تندی متوسط، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

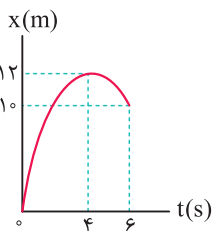
گام اول: ابتدا مسافت طی شده بین دو لحظه t_A و t_B را با توجه به نکات ارائه شده محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_B - t_A}$$

گام دوم: به کمک رابطه مقابل، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

۴. بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد

برای به دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان، فقط باید به مکان ابتدا و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی شده توسط متحرک را به دست آوریم. به طور مثال فرض کنید نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، به صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور X حرکت کرده در نقطه $X = 12m$ تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور X حرکت کرده و به نقطه $X = 10m$ می‌رسد. برای به دست آوردن اندازه سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت داریم:



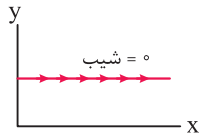
$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{6} = \frac{5}{3} \text{ m/s}$$

اما برای به دست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی شده را به دست آوریم. این متحرک $12m$ در جهت محور X و $2m$ در خلاف جهت محور X حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت $14m$ را طی کرده است و داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ m/s}$$

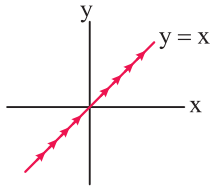
۵. سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

الان می‌خواهیم به چند تا نکته ریاضی براتون بیاریم که تو کل فیزیک دوازدهم، خیلی به کارتون میاد ...

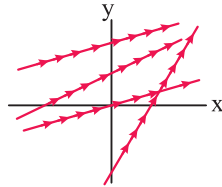


(با افزایش x ، y ثابت است.)

خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.

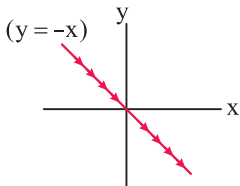


(با افزایش x ، پیشروی نمودار به سمت بالا است.)

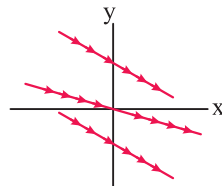


(خطوط دارای شیب مثبت)

خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) هستند، شیب مثبت دارند.



(با افزایش x ، پیشروی نمودار به سمت پایین است.)



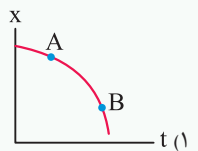
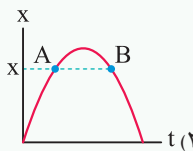
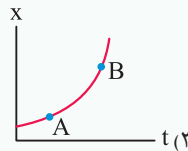
(خطوط دارای شیب منفی)

خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.

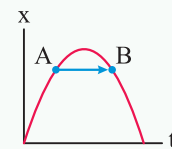
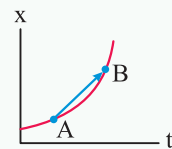
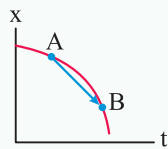
ساده بگیریم خطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت چپشون، شیبشون مثبت و بالعکس ...

حالا بریم با حل چند تا تمرین، این ایستگاه رو بترکونیم ...

تمرین ۹ در هریک از نمودارهای مکان - زمان زیر، علامت متوسط سرعت متحرک از A تا B را مشخص کنید.



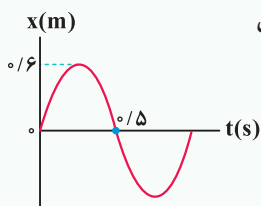
پاسخ با توجه به این که نمودار مکان - زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:



شیب AB صفر است ($v_{av} = 0$) شیب AB مثبت است ($v_{av} > 0$) شیب AB منفی است ($v_{av} < 0$)

دقت شود که قرار دادن فلش بر روی خط‌های واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین ۱۰ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازه متوسط و تندی متوسط آن در 0.5 ثانیه اول حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟



(۲) صفر - $1/2$

(۴) صفر - $2/4$

(۱) صفر - $1/2$

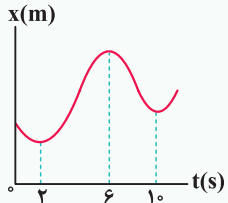
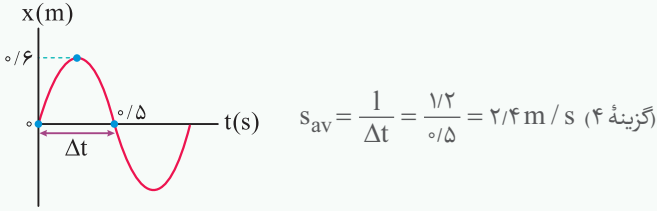
(۳) صفر - $2/4$

پاسخ نمودار داده شده نمودار مکان - زمان متحرک است و می‌خواهیم با خواندن مکان متحرک در $t_1 = 0$ و $t_2 = 0.5$ از

روی نمودار، سرعت متوسط در 0.5 ثانیه اول حرکت را به دست آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 0.5 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{اندازه سرعت متوسط} : |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{0.5 - 0} = 0$$

از طرفی با توجه به نمودار، این متحرک 0.6 m در جهت محور X حرکت کرده و سپس 0.6 m در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. بنابراین در مدت 0.5 s مسافت 1.2 m را طی کرده است و تندی متوسط آن برابر است با:



تمرین ۱۱ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل است. تندی متوسط در کدام یک از بازه‌های زمانی مشخص شده در گزینه‌ها بیشتر است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

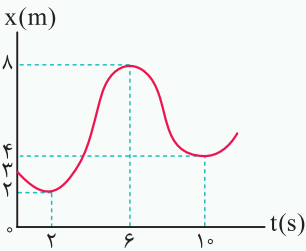
(۱) صفر تا ۲

(۲) صفر تا ۶

(۳) ۲ تا ۶

(۴) ۶ تا ۱۰

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال بسیار جالب، می‌توان اعدادی مناسب و منطقی متناسب با نمودار را بر روی آن فرض کرده و تندی متوسط را در تمامی بازه‌های اشاره شده با توجه به این اعداد به دست آوریم. به طور مثال، می‌توان نوشت:



$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} 0 < t < 2 \text{ s} \Rightarrow s_{av} = \frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 0 < t < 6 \text{ s} \Rightarrow s_{av} = \frac{1+6}{6} = \frac{7}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 2 \text{ s} < t < 6 \text{ s} \Rightarrow s_{av} = \frac{6+4}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 6 \text{ s} < t < 10 \text{ s} \Rightarrow s_{av} = \frac{4}{10-6} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

همان طور که می‌بینید، تندی متوسط در بازه ۲ تا ۶ s ، بیشتر از سایر گزینه‌هاست، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۳۹ تا ۶۵ بزنیم ...



تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبه آن از روی نمودار مکان - زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن)

ایستگاه ۴

حالا بریم ببینیم تندی لحظه‌ای چیه و چه اطلاعات مفیدی ارزش استخراج میشه ...

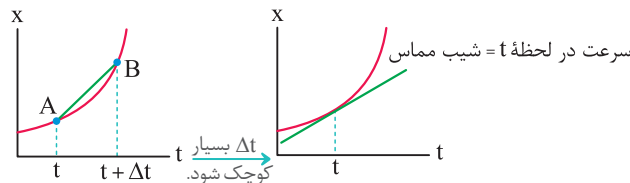
۱. مفهوم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، **تندی لحظه‌ای** می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه‌ای آن را بیان کرده‌ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه‌ای از مسیر، عقربه تندی سنج خودروی شما روی 100 km/h باشد، در این صورت تندی لحظه‌ای خودرو برابر 100 km/h و سرعت لحظه‌ای آن 100 km/h به طرف شمال است.

تذکر برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتاب‌های فیزیک به کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به ترتیب به صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. هم چنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد \vec{v} و تندی را که برابر اندازه سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد v نشان می‌دهند.

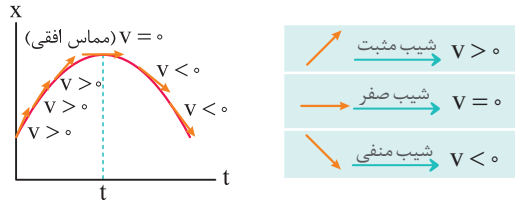
۲. محاسبه سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان - زمان

همان طور که می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک شود، عملاً A و B بر روی هم منطبق شده و شیب خط واصل بین دو نقطه A و B، با شیب مماس ترسیم بر نمودار در نقطه A برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان در لحظه t، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.



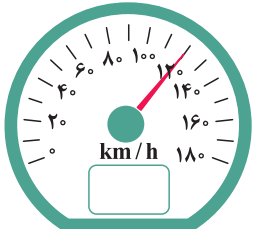
نکات مهم و کاربردی

۱) با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلّه نمودار صفر شده و سپس مقاداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور X حرکت می‌کند ($v > 0$)، سپس توقف کرده ($v = 0$) و سپس در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند ($v < 0$).



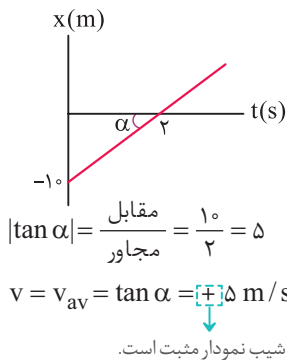
قرار دادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.

۲) عقربه تند سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعاتی در خصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژه سرعت سنج برای این وسیله نادرست است، هر چند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.



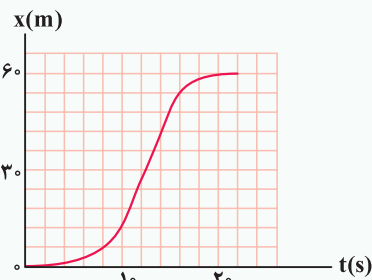
اتومبیل با تندی $120 \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند ولی جهت حرکت آن مشخص نیست.

۳) اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مکان - زمان مقابل، سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.



این یعنی آگه یه طرح، سرکارتون بزاره و پیرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ چنده، جواب همون $5 \text{ m/s} +$ هستش.

یا حتی آگه پیرسه سرعت متوسط در $5/0$ ثانیه سوم چنده، باور کنید بازم جواب همون $5 \text{ m/s} +$ هست، احتمالاً باورش سخت بود براتون ...

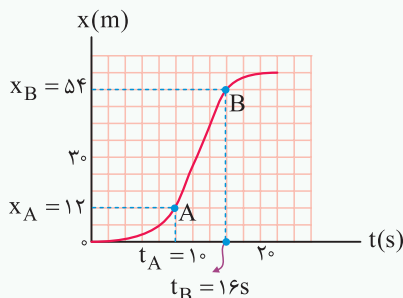


تمرین ۱۳ شکل مقابل، نمودار مکان - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت کرده است. پیشینه

(تجربی خارج ۹۵)

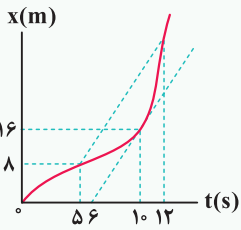
سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۵
- ۳) ۷
- ۴) ۹



پاسخ در حرکت این متحرک، از لحظه $t = 0$ تا A، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است)، در ادامه از A تا B، نمودار مکان - زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کفایت شیب خط AB را بیابیم (هر یک از خانه‌های محور قائم معادل 6 m و هر یک از خانه‌های محور افقی معادل 2 s است):

$$v_{AB} = v_{avAB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{54 - 12}{16 - 10} \Rightarrow v_{AB} = 7 \text{ m/s} \quad (\text{گزینه ۳})$$



تمرین ۱۳ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظه $t = 10s$ برابر اندازه سرعت متوسط آن بین دو لحظه $t_1 = 5s$ و $t_2 = 12s$ باشد، متحرک در لحظه $t = 12s$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟

- (۱) ۲۸
- (۲) ۲۴
- (۳) ۳۶
- (۴) ۲۰

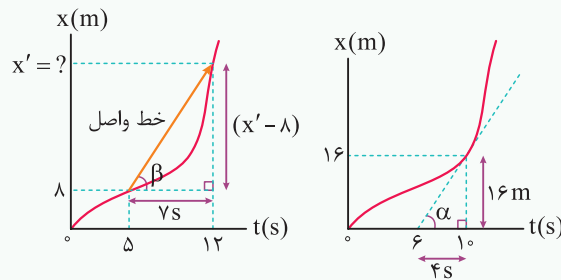
پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

طبق صورت سؤال، تندی متحرک در لحظه $t = 10s$ ، برابر اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 12s$ است و داریم:

$$v = \tan \alpha = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s}$$

تندی در لحظه $t = 10s$

در صورتی که متحرک در لحظه $t = 12s$ در مکان x' باشد، با محاسبه اندازه سرعت متوسط از لحظه $5s$ تا $12s$ داریم:



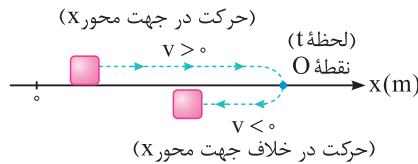
$$v_{av} = \tan \beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x' - 8}{7} = 4 \Rightarrow x' = 36 \text{ m}$$

(گزینه ۳)

بررسی لحظه تغییر جهت متحرک

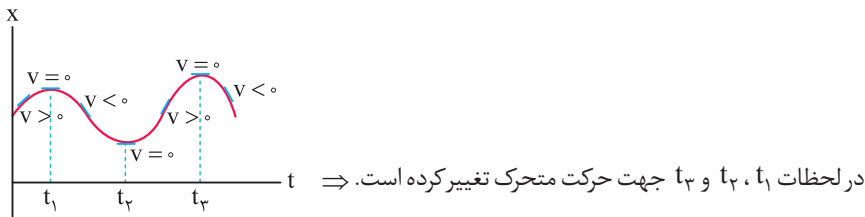
تو اینجا، می‌خواهیم معنی تغییر جهت متحرک رو بفهمیم ... این موضوع تو خیلی از سؤالها به کارمون میاد.

در شکل زیر متحرکی بر روی محور X در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور X در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است). در لحظه t ، متحرک به نقطه O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامه حرکت سرعت آن منفی می‌شود)، لحظه t را در اصطلاح **لحظه تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.

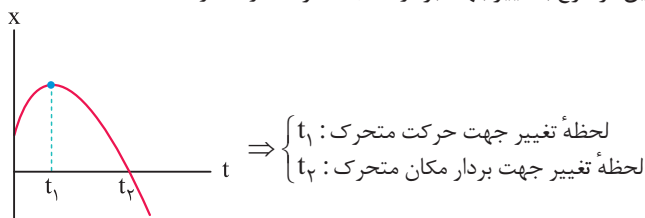


شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطه O: برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.

نکته در دهه‌ها و قله‌های نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد. این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.



نکته تغییر جهت حرکت متحرک در واقع به معنی تغییر جهت بردار سرعت آن است. این موضوع با تغییر جهت بردار مکان متحرک تفاوت دارد.



دقت

در این سؤال، در لحظه t_1 ، سرعت متحرک تغییر جهت می دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی دهد. این موضوع توسط بسیاری از دانش آموزان اشتباه درک می شود.

۵ ۲ اتومبیل A از مکان $x_1 = -20\text{m}$ به مکان $x_2 = 0$ رسیده است،

بنابراین جابه جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_A = x_2 - x_1 = 0 - (-20) = +20\text{m}$$

اتومبیل B از مکان $x_1 = +40\text{m}$ به مکان $x_2 = 0$ رسیده است و جابه جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_B = x_2 - x_1 = 0 - 40 = -40\text{m}$$

بنابراین نسبت جابه جایی A به B به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{20}{-40} = -\frac{1}{2}$$

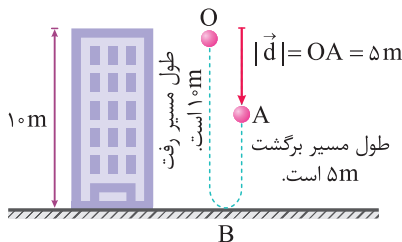
دقت

علامت منفی نشان دهنده آن است که جهت جابه جایی دو اتومبیل در خلاف جهت هم است.

۶ ۳ با توجه به شکل نشان داده شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به

سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطه B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می آید تا به نقطه A برسد. بنابراین مسافت طی شده توسط گلوله برابر $10 + 5 = 15$ متر است.

از طرفی مطابق تعریف، جابه جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطه انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازه پاره خط OA به طول ۵ m، معادل با مقدار جابه جایی متحرک است.



۳ ۳ همواره با دور شدن متحرک از مبدأ محور، اندازه بردار مکان آن افزایش و با

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازه جابه جایی}} = \frac{\text{برگشت} + \text{رفت}}{\text{OA}} = \frac{10 + 5}{5} = 3$$

دقت

مسافت طی شده همواره بزرگ تر و یا مساوی جابه جایی است و گزینه (۱) هیچ گاه نمی تواند صحیح باشد.

۷ ۲ مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیه متحرک

است. در این سؤال با داشتن معادله های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

$$A \text{ معادله مکان متحرک } x_A = 3t^2 - 7t + 5 \xrightarrow{t=0} x_{0A} = 5\text{m}$$

$$B \text{ معادله مکان متحرک } x_B = 2\cos\pi t + 1$$

$$\xrightarrow{t=0} x_{0B} = 2\cos(0) + 1 = 2 + 1 = 3\text{m}$$

۱۱ بررسی موارد

الف) برداری که مبدأ مختصات را به محل جسم متصل می کند، بردار مکان جسم است، بنابراین برداری که نقطه O را به A متصل می کند، بردار مکان هواپیما در نقطه A است. ب) برداری که نقطه ابتدایی و انتهایی مسیر را به هم وصل می کند، بردار جابه جایی جسم است، بنابراین در جابه جایی هواپیما از A تا B، بردار جابه جایی برابر برداری است که نقطه A را به B متصل می کند.

ج) بردار جابه جایی بین دو نقطه برابر تفاضل بردارهای مکان آن نقطه است، بنابراین تفاضل بردار مکان هواپیما در نقطه A از بردار مکان آن در نقطه B برابر بردار جابه جایی هواپیما است. بردار مکان A - بردار مکان B = \vec{d} : بردار جابه جایی

د) اگر هواپیما روی خط مستقیم و بدون تغییر جهت از A به B برود، مسافتی که طی می کند هم اندازه بردار جابه جایی آن است و در غیر این صورت، مسافت بزرگ تر از اندازه بردار جابه جایی است. پس با توجه به این که مسیر حرکت هواپیما رانمی دانیم، ممکن است مسافت طی شده هم اندازه یا بزرگ تر از بردار جابه جایی باشد. بنابراین فقط عبارت (د) نادرست است.

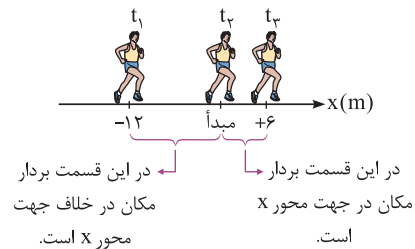
۲۲ بررسی موارد

الف) در لحظه t_3 ، مکان دوندۀ مثبت است، یعنی بردار مکان در جهت محور X است. ب) دوندۀ از مکان $x_1 = -12\text{m}$ به مکان $x_2 = 6\text{m}$ رفته است، بنابراین جابه جایی آن برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 6 - (-12) = +18\text{m} \Rightarrow \vec{d} = (18\text{m})\vec{i}$$

ج) هنگامی که دوندۀ از مبدأ محور عبور می کند، بردار مکان آن صفر است و حداقل اندازه را دارد.

د) در بازه t_1 تا t_2 که مکان دوندۀ منفی است (در خلاف جهت محور X است)، دوندۀ از مکان $x_1 = -12\text{m}$ به مکان $x_2 = 0$ (مبدأ محور) می رسد و اندازه جابه جایی آن برابر ۶ m نیست.



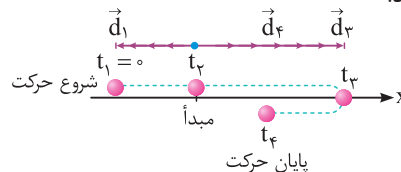
۳ ۳ نزدیک شدن متحرک به مبدأ محور، اندازه بردار مکان آن کاهش می یابد. با توجه به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از $x_1 = -12\text{m}$ تا $x_2 = 0$ ، اندازه بردار مکان در حال کاهش و از $x_2 = 0$ تا $x_3 = 6\text{m}$ ، اندازه بردار مکان در حال افزایش است.

۴ ۲ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در بازه زمانی t_1 تا t_2 متحرک در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور X قرار می گیرد.

۲) در بازه زمانی t_2 تا t_3 متحرک در سمت راست مبدأ مختصات قرار می گیرد و بردار مکان آن در جهت محور X می باشد.

۳) در لحظه t_2 ، متحرک از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرک تغییر جهت می دهد. به شکل مقابل دقت کنید:



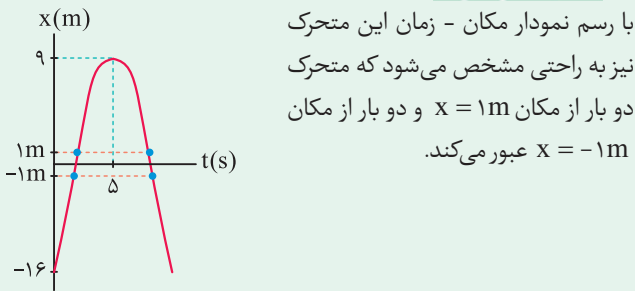
۱۱ ۴ وقتی متحرک در فاصله یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های $x = 1\text{m}$ یا $x = -1\text{m}$ قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های $x = 1\text{m}$ یا $x = -1\text{m}$ عبور می‌کند.

$$x = -t^2 + 10t - 16$$

$$\begin{cases} x = 1\text{m} \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = 1 \Rightarrow t^2 - 10t + 17 = 0 \\ \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 17}}{2} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \\ x = -1\text{m} \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = -1 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0 \\ \Rightarrow t_{3,4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 15}}{2} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \end{cases}$$

باتوجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصله یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.

خلاصیت حرفه‌ای‌ها



با رسم نمودار مکان - زمان این متحرک نیز به راحتی مشخص می‌شود که متحرک دو بار از مکان $x = 1\text{m}$ و دو بار از مکان $x = -1\text{m}$ عبور می‌کند.

$$x = -t^2 + 10t - 16 \Rightarrow t_{\text{راس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times (-1)} = 5\text{s}$$

جایگذاری در معادله $\rightarrow x_{\text{راس}} = -5^2 + 10 \times 5 - 16 = 9\text{m}$

۱۲ ۱ با توجه به تمرین (۴) در درسنامه، گزینه (۱) صحیح است.

۱۳ ۴ ابتدا باید توجه شود که نیم‌ثانیه سوم یعنی $1/5\text{s} < t < 1\text{s}$ و جابه‌جایی در این بازه زمانی برابر است با:

$$x = 4t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1\text{s} \rightarrow x_1 = 4 - 4 = 0 \\ t_2 = 1/5\text{s} \rightarrow x_2 = 4(1/5)^2 - 4(1/5) = 3\text{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 3\text{m}$$

تذکر

۵/۵ ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

$$\begin{cases} 0 < t < 0/5\text{s} \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه اول} \\ 0/5\text{s} < t < 1\text{s} \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه دوم} \\ 1\text{s} < t < 1/5\text{s} \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه سوم} \end{cases}$$

۱۴ ۱ به عنوان یک نکته اساسی و بسیار مهم، هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یک دیگر برابر می‌شود. بدین ترتیب داریم:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow 3t + 1 = 2t^2 + t + 1 \Rightarrow 2t = 2t^2$$

$$\Rightarrow 2t(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{یا} \\ t = 1\text{s} \end{cases}$$

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند، $t = 1\text{s}$ قابل قبول است.

تذکر

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطه $x_B = 2 \cos \pi t + 1$ ، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان x_B اعلام کنند، در صورتی که با قرار دادن $t = 0$ در عبارت $2 \cos \pi t + 1$ ، به عدد ۳ می‌رسیم!

۱ ۸

برای محاسبه بردار مکان متحرک در لحظه $t = 1\text{s}$ ، کافیست ابتدا در معادله مکان - زمان، لحظه $t = 1\text{s}$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\text{مکان متحرک} \rightarrow x = t^3 - t + 2 \xrightarrow{t=1\text{s}} x = 1^3 - 1 + 2 = 2\text{m}$$

$$x = (1)^3 - 1 + 2 = 2\text{m} \xrightarrow{\vec{r}_1 = x \vec{i}} \vec{r}_1 = 2\vec{i} \text{ (SI)}$$

دقت

معادله حرکت یا مکان - زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

تذکر

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $2\vec{i}$ می‌رسید و به اشتباه گزینه ۲ را در پاسخ‌نامه وارد کرده و به سادگی نمره منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

۲ ۹

ابتدا بردار مکان اولیه متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) \xrightarrow{t=0} x_0 = 2\text{m}$$

$$\text{در ادامه مکان متحرک را در هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام}$$

گزینه، مکان متحرک، قرینه مکان اولیه نیست.

بررسی گزینه‌ها

$$1) \text{ پایان ثانیه دوم } : t = 2\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = -2\text{m} \times$$

$$2) \text{ پایان ثانیه چهارم } : t = 4\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 4\right) = 2\text{m} \checkmark$$

$$3) \text{ پایان سه ثانیه دوم } : t = 6\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 6\right) = -2\text{m} \times$$

$$4) \text{ پایان دو ثانیه پنجم } : t = 10\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 10\right) = -2\text{m} \times$$

۱ ۱۰

تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد ($x = 0$)، متحرک از مبدأ عبور می‌کند و اندازه بردار مکان آن حداقل است. بنابراین برای یافتن لحظاتی که اندازه بردار مکان حداقل است (متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند)، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به دست آوریم.

دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.

$$\text{معادله مکان - زمان } : x = t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3\text{s} \\ t_2 = 4\text{s} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = 4 - 3 = 1\text{s}$$

دقت

هنگامی که در یک بازه زمانی معین، نسبت سرعت متوسط دو متحرک را می‌خواهیم، کافی است نسبت جابه‌جایی آن‌ها را محاسبه کنیم.

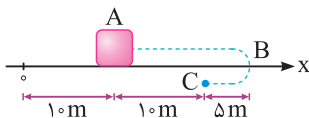
$$\begin{cases} v_{avA} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \\ v_{avB} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{avA}}{v_{avB}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}$$

مثلاً در این سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{avA}}{v_{avB}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{40}{-30} = -\frac{4}{3}$$

در واقع نیازی به دانستن طول بازه زمانی نداریم.

۲۰) متحرک ابتدا به اندازه 15 m از A به B رفته و سپس 5 m از B به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی شده توسط متحرک برابر $l = 20\text{ m}$ می‌شود. از طرف دیگر اندازه جابه‌جایی متحرک از نقطه A تا C ، برابر فاصله AC بوده و برابر 10 m می‌باشد. بنابراین داریم:

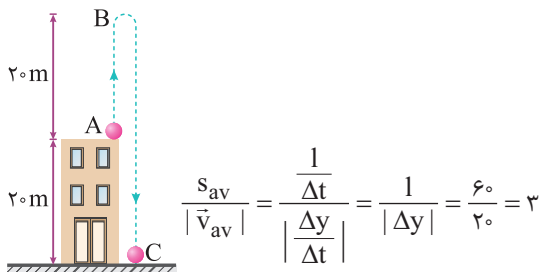


$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{l}{\Delta x} = \frac{20}{10} = 2$$

۲۱) به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداکثر تا ارتفاع 40 m متری از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظه شروع حرکت تا نقطه B ، گلوله به اندازه 20 m به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطه B تا C گلوله 40 m پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازه 60 m را طی می‌کند.

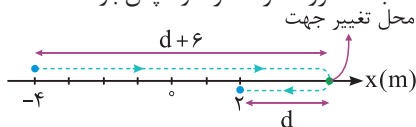
۲) اندازه جابه‌جایی آن از نقطه A تا C برابر 20 m می‌شود و داریم:



$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{l}{|\Delta y|} = \frac{60}{20} = 3$$

۲۲) این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک بازه زمانی مشخص، تندی متوسط آن، 4 برابر اندازه سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده توسط متحرک، 4 برابر اندازه جابه‌جایی‌اش است. این سؤال دو حالت دارد:

حالت اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:



$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = (d+6) + d = 2d+6 \\ \text{اندازه جابه‌جایی} = 2 - (-4) = 6\text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2d+6) = 4 \times (6) \Rightarrow d = 9\text{ m}$$

$$\rightarrow \text{فاصله محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان} = d + 2 = 11\text{ m}$$

بردار جابه‌جایی

۱۵) سرعت متوسط کمیتی برداری است که از رابطه $\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$ به دست می‌آید و یکای آن در SI برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است که از رابطه $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ به دست می‌آید و یکای آن هم در SI برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

۱۶) برداری که نقطه شروع را به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند همان بردار جابه‌جایی است. سرعت متوسط برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان انجام جابه‌جایی است و هم جهت با بردار جابه‌جایی می‌باشد، از طرفی عبارت (الف) نیز تعریف تندی متوسط است و عبارت‌های (الف) و (ج) صحیح هستند.

بررسی موارد

(ب) سرعت متوسط و تندی متوسط فقط در شرایطی هم‌اندازه هستند که متحرک بدون تغییر جهت روی یک خط راست حرکت کند. در غیر این صورت اندازه سرعت متوسط کوچک‌تر از تندی متوسط است.

(د) تندی متوسط و مسافت طی شده کمیت برداری نیستند و جهت ندارند و این عبارت از پایه نادرست است.

۱۷) اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن یکسان است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۱۸) عبارت (الف) صحیح است. علت نادرستی عبارت‌های (ب)، (ج)، (د) و (ه) به صورت زیر است:

(ب) ممکن است متحرک پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.

(ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی شده توسط متحرک، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط شود.

(د) چون مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه سرعت متوسط است.

(ه) چون مسافت طی شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱۹) جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی A برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مکان اولیه } A: x_{\circ A} = -50\text{ m} \\ \text{مکان نهایی } A: x_A = -10\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x_A = -10 - (-50) = +40\text{ m}$$

$$\Rightarrow v_{avA} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{40}{5} = 8\text{ m/s}$$

به همین ترتیب جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی B برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مکان اولیه } B: x_{\circ B} = +20\text{ m} \\ \text{مکان نهایی } B: x_B = -10\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B = -10 - 20 = -30\text{ m}$$

$$\Rightarrow v_{avB} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{-30}{5} = -6\text{ m/s} \Rightarrow \frac{v_{avA}}{v_{avB}} = -\frac{4}{3}$$

۲۶ با توجه به جدول داده شده، می توان نوشت:

مکان آغازین	مکان پایانی	جابه جایی	سرعت متوسط
\vec{r}_{oA}	$(-2m)\vec{i}$	$(-5m)\vec{i}$	$(\vec{v}_{av})_A$
$(2m)\vec{i}$	$(\lambda m)\vec{i}$	\vec{d}_B	$(\vec{v}_{av})_B$

$$\begin{cases} \text{متحرک A} \\ \text{متحرک B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{d}_A = -5\vec{i} = -2\vec{i} - \vec{r}_{oA} \Rightarrow \vec{r}_{oA} = 3\vec{i} \\ \vec{d}_B = \lambda\vec{i} - 2\vec{i} = 6\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\vec{r}_{oA}} = \frac{6\vec{i}}{3\vec{i}} = 2$$

از طرفی با توجه به این که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان یکسان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه جایی آن ها است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B} = \frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B} = \frac{-5\vec{i}}{6\vec{i}} = -\frac{5}{6}$$

۲۷ با توجه به رابطه مربوط به سرعت متوسط $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ ، جابه جایی متحرک در ۵ ثانیه اول و ۵ ثانیه سوم و ۱۵ ثانیه اول حرکت را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \text{حرکت اول ۵ ثانیه} : -5 = \frac{\Delta x_1}{5} \Rightarrow \Delta x_1 = -25m \\ \text{حرکت سوم ۵ ثانیه} : +3 = \frac{\Delta x_2}{5} \Rightarrow \Delta x_2 = 15m \\ \text{حرکت کل ۱۵ ثانیه اول} : +2 = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{15} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = +30m \end{cases}$$

از طرفی جابه جایی در ۱۵ ثانیه اول حرکت برابر مجموع جابه جایی در ۵ ثانیه اول، ۵ ثانیه دوم و ۵ ثانیه سوم است، بنابراین جابه جایی در ۵ ثانیه دوم حرکت برابر است با:

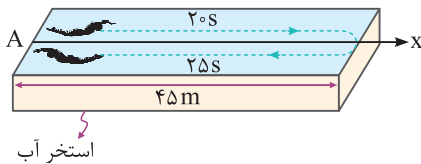
$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$\Rightarrow +30 = -25 + \Delta x_3 + 15 \Rightarrow \Delta x_3 = 40m$$

سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت $v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t}$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{-25 + 40}{10} = +1.5 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = +1.5\vec{i} \left(\frac{m}{s}\right)$$

۲۸ شناگر پس از ۴۵ ثانیه شنا کردن، به مکان اولیه خود برمی گردد، بنابراین جابه جایی کل آن برابر صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.

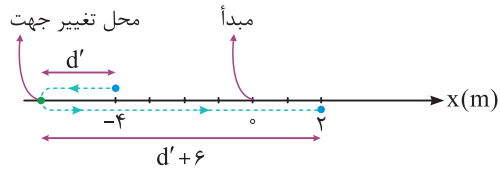


$$x_{\text{شروع}} = x_{\text{پایان}} \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow |v_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

از طرف دیگر شناگر مسافت $2 \times 45m = 90m$ را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{90}{20 + 25} = 2m/s$$

حالت دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور X حرکت کرده و سپس بازگشته است:



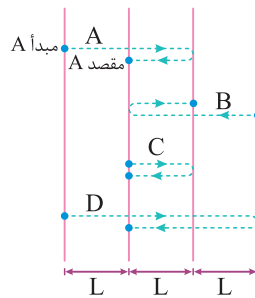
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مسافت طی شده} = d' + (d' + 6) = 2d' + 6 \\ \text{اندازه جابه جایی} = 6m \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (2d' + 6) = 4 \times (6) \Rightarrow d' = 9m$$

$$\Rightarrow (2d' + 6) = 4 \times (6) \Rightarrow d' = 9m$$

$$\Rightarrow \text{فاصله محل تغییر جهت دادن متحرک تا مبدأ مکان} = d' + 4 = 9 + 4 = 13m$$

۲۳ گام اول: ابتدا اندازه جابه جایی هر متحرک را به دست می آوریم. با توجه به این که زمان حرکت برای هر چهار متحرک یکسان است، برای مقایسه اندازه سرعت متوسط آن ها، کافی است اندازه جابه جایی آن ها (فاصله مبدأ از مقصد) را با یک دیگر مقایسه کنیم:



$$|\vec{d}_A| = L, |\vec{d}_B| = L, |\vec{d}_C| = 0, |\vec{d}_D| = L$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} v_{avA} = v_{avB} = v_{avD} > v_{avC}$$

بنابراین گزینه های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت های طی شده (که معادل با طول خط چین برای هر متحرک است)، توسط هر چهار متحرک را به دست می آوریم و به کمک آن ها تندی متوسط را مقایسه می کنیم:

$$l_A = 3L, l_B = 3L, l_C = 2L, l_D = 5L$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} s_{avD} > s_{avA} = s_{avB} > s_{avC}$$

۲۴ مطابق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور X) حرکت می کند، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \vec{i} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \vec{i}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 8m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = -16m \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-16 - 8}{10 - 2} \vec{i} = -3\vec{i} \text{ (SI در)}$$

علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بردار سرعت متوسط (و هم چنین جابه جایی (d)) در این بازه زمانی در خلاف جهت محور X است.

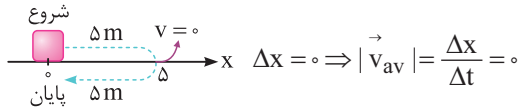
۲۵ طبق صورت سؤال، متحرک در لحظه $t = 0$ ، در مکان $x_0 = -40m$ و در لحظه $t_2 = 10s$ ، در مکان $x_2 = 20m$ قرار دارد. بنابراین سرعت متوسط این متحرک در طی ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = -40m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = 20m \end{cases}$$

$$\rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{20 - (-40)}{10 - 0} = 6m/s$$

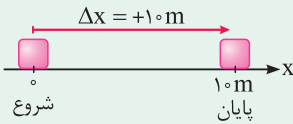
۳۲ ۴ برای به دست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جابه‌جایی آن مهم است، نه مسافت طی شده. بنابراین در این سؤال می‌توانیم نشان دهیم که هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

به عنوان مثال در این مسأله، متحرک می‌تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی شده برابر ۱۰ متر بوده ولی جابه‌جایی آن صفر است (بررسی سایر حالت‌ها را به خودتان می‌سپاریم!).



تذکر

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، ۱۰ m جابه‌جا شود.



$$\Delta x = 10 \text{ m} \rightarrow |v_{av}|_{\max} = \frac{10}{2} = 5 \text{ m/s} \rightarrow -5 \hat{i} \leq v_{av} \leq 5 \hat{i}$$

۳۳ ۱ ۲ ثانیه دوم حرکت معادل $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ است. در ادامه با توجه به رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، به راحتی می‌توان نوشت:

$$x = t^3 - 4t^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = 8 - 16 + 2 = -6 \text{ m} \\ t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 64 - 64 + 2 = 2 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2 - (-6)}{4 - 2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۳۴ ۲ برای پاسخ به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \times 4^3 - 2 \times 4^2 + 3 \times 4 = \frac{64}{3} - 20 = \frac{4}{3} > 0 \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \frac{x_1 = 0}{x_2 > 0} \Rightarrow v_{av} > 0$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در جهت محور X است.

تذکر

همیشه سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه زمانی، بین بیشترین و کم‌ترین اندازه سرعت لحظه‌ای متحرک در آن بازه می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) قطعاً نادرست است.

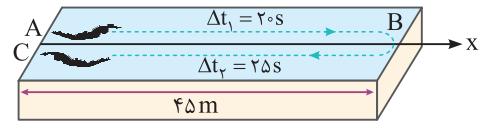
۳۵ ۳ برای آن‌که سرعت متوسط در خلاف جهت محور X باشد، کافی است جابه‌جایی، منفی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که در دو ثانیه اول ($0 < t < 2 \text{ s}$) حرکت، چگونه جابه‌جایی می‌تواند منفی باشد.

$$x = 2t^3 - bt - 10$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -10 \text{ m} \\ t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 6 - 2b \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 16 - 2b$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow 16 - 2b < 0 \Rightarrow b > 8$$

۳۹ ۱ در صورتی که جهت مثبت محور X را به سمت راست فرض کنیم، داریم:



(AB) سرعت متوسط در مسیر رفت $\Delta x_1 = x_B - x_A = 45 - 0 = +45 \text{ m}$

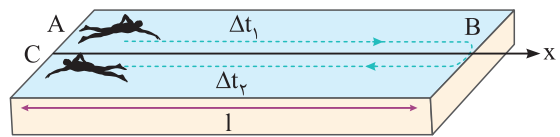
$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{45}{20} = 2.25 \text{ m/s}$$

(BC) سرعت متوسط در مسیر برگشت $\Delta x_2 = x_C - x_B = 0 - 45 = -45 \text{ m}$

$$\Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-45}{25} = -1.8 \text{ m/s}$$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور X حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳۰ ۳ برای حل این سؤال، به شکل زیر که مسیر رفت و برگشت شناگر را نشان می‌دهد، توجه کنید:



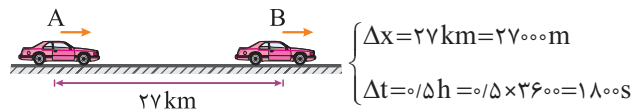
$$(1) \text{ تندی متوسط در هنگام رفت } (s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s}$$

$$(2) \text{ تندی متوسط در هنگام برگشت } (s_{av})_2 = 2s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{2s}$$

$$\text{زمان کل شنا کردن} : s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شنا کردن}}$$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{2l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{2l}{\left(\frac{l}{s}\right) + \left(\frac{l}{2s}\right)} = \frac{2l}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{l}{s}\right)} = \frac{4}{3}s$$

۳۱ ۳ **روش اول:** متحرک در طول نیم ساعت از حرکت خود، تغییر جهت نداده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر مسافت طی شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می‌باشد.



$$\Rightarrow |v_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27000}{1800} = 15 \text{ m/s} = 1500 \text{ cm/s}$$

روش دوم:

$$|v_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27}{0.5} = 54 \text{ km/h}$$

$$\Rightarrow |v_{av}| = \frac{54}{3.6} = 15 \text{ m/s} = 1500 \text{ cm/s}$$

دقت کنید در این سؤال چون اندازه جابه‌جایی و مسافت یکسان است، پس اندازه سرعت متوسط برابر تندی متوسط است.

تذکر

برای تبدیل km/h به m/s ، کافی است عدد مورد نظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

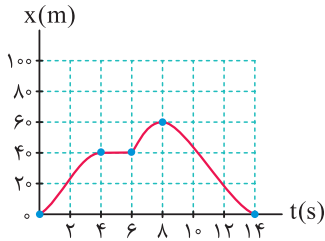
$$1 \text{ km/h} = 1 \frac{(1000 \text{ m})}{(3600 \text{ s})} \Rightarrow 1 \text{ km/h} = \frac{1}{3.6} \text{ m/s}$$

و برای تبدیل m/s به km/h ، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می‌کنیم:

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h}$$

۴۲ با توجه به شکل زیر، حرکت این متحرک را در هر مرحله به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

$0 \leq t < 4$ s: همان طور که مشاهده می‌کنیم در این بازه زمانی، با گذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از $X = 0$ به $X = 40$ m رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.



$4 \leq t < 6$ s: در این بازه، متحرک در مکان $X = 40$ m ایستاده و حرکت نمی‌کند (دقت شود که با گذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی‌شود و X ثابت است).

$6 \leq t < 8$ s: در این بازه همانند بازه اول، متحرک در جهت محور X در حال حرکت می‌باشد و از مکان $X = 40$ m به مکان $X = 60$ m رفته و از مبدأ دور می‌شود و در $t = 8$ s به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.

$8 \leq t < 14$ s: در این بازه با گذشت زمان، متحرک از مکان $X = 60$ m به سمت مبدأ ($X = 0$) در حال حرکت بوده و در لحظه $t = 14$ s به مبدأ ($X = 0$) می‌رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می‌شود.

دقت

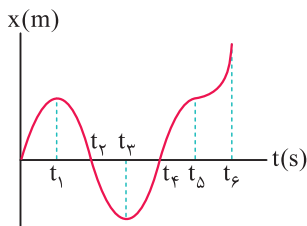
متحرک در چهار ثانیه دوم حرکت ($4 \leq t < 8$ s) از مکان $X = 40$ m به مکان $X = 60$ m رفته است و 20 m جابه‌جا شده و گزینه «۴» عبارت نادرستی است.

۴۳ چون دوچرخه‌سوار از مکان $X = 0$ شروع به حرکت کرده و در نهایت به $X = 0$ بازگشته است، اندازه جابه‌جایی آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر دوچرخه‌سوار در ۸ ثانیه اول حرکت از $X = 0$ به $X = 60$ m رفته و در بازه زمانی ۸ s تا ۱۴ s از $X = 60$ m به $X = 0$ بازگشته است و در مجموع مسافت 120 m را طی کرده است.

۴۴ برای حل، درستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها

(۱) در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت کرده و در حال دور شدن از مبدأ می‌باشد. بنابراین عبارت مطرح شده در گزینه (۱) نادرست است.



(۲) در بازه زمانی t_4 تا t_6 ، متحرک در جهت محور X از مبدأ دور می‌شود.

(۳) در بازه زمانی t_4 تا t_6 ، متحرک در قسمت منفی محور X قرار دارد و در لحظه t_3 بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور X از مبدأ دارد.

(۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور X است، بردار مکان در جهت محور X و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور X است، بردار مکان در خلاف جهت محور X قرار دارد.

دقت

با توجه به این که یکای X در SI برابر متر و یکای t در SI برابر ثانیه است، یکای کمیت b برابر $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ می‌باشد.

۳۶ با توجه به تمرین (۵) در درسنامه، گزینه (۱) صحیح است.

۳۷ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: دو ثانیه اول، یعنی از لحظه $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2$ s. بنابراین ابتدا مکان متحرک را در این لحظات به دست می‌آوریم:

$$x = kt^2 - 5t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ m} \\ t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = (4k - 5) \text{ m} \end{cases}$$

گام دوم: از آن جایی که اندازه سرعت متوسط در دو ثانیه اول حرکت برابر صفر شده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جابه‌جایی در این بازه زمانی نیز برابر صفر بوده و $x_1 = x_2$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 5 = 4k - 5 \Rightarrow k = 2/5$$

گام سوم: حال مقدار k را در معادله قرار داده و در ادامه مکان متحرک را در لحظات $t_2 = 2$ s و $t_3 = 4$ s به دست می‌آوریم:

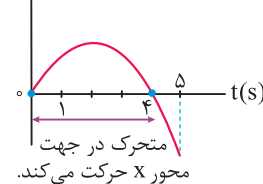
$$\begin{cases} t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 5 \text{ m} \\ t_3 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_3 = 25 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\bar{v}_{av}| = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{25 - 5}{2} = 10 \text{ m/s}$$

۳۸ در حالتی که متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، علامت سرعت متحرک، منفی است. با توجه به نمودار سرعت - زمان رسم شده، در بازه زمانی $4 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$ ، علامت سرعت متحرک منفی است.

$$v = -t^2 + 4t = -t(t - 4) \Rightarrow \text{ریشه‌ها: } \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 4 \text{ s} \end{cases}$$

v(m/s)



در نتیجه در $\frac{1}{5}$ از ثانیه اول حرکت، یعنی در بازه $4 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$ ، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.

بررسی موارد

(الف) در بازه $t_1 < t < t_3$ ، نمودار زیر محور افقی است، یعنی مکان متحرک منفی است یا به عبارت دیگر، بردار مکان در خلاف جهت محور X است. ✓

(ب) در لحظه t_4 ، متحرک بیشترین فاصله از مبدأ را در جهت مخالف محور X دارد. ✓

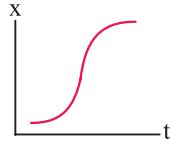
(ج) در بازه $t_4 < t < t_6$ ، ابتدا نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود و سپس از آن دور می‌شود، پس می‌توان گفت اندازه بردار مکان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. ✗

(د) جابه‌جایی در بازه‌های t_1 تا t_2 و t_4 تا t_6 هم‌اندازه است ولی جهت حرکت در این دو بازه برعکس است و در نتیجه بردار جابه‌جایی در این دو بازه قرینه یکدیگر است. ✗

۴۰ برای آن که جابه‌جایی متحرک در یک بازه صفر شود، باید مکان آن در ابتدا و انتهای بازه یکسان باشد. مطابق نمودار داده شده، مکان متحرک در لحظات t_1 و t_5 مشابه است، پس جابه‌جایی در بازه زمانی t_1 تا t_5 صفر است.

۴۱ در لحظات t_1 و t_3 ، نمودار محور افقی را قطع می‌کند و علامت مکان (X) تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است. دقت کنید که در لحظه t_5 ، مکان متحرک صفر می‌شود ولی علامت آن تغییر نمی‌کند.

در گزینه (۳)، در ابتدای حرکت، متحرک با گذشت زمان به مبدأ مکان ($x = 0$) نزدیک می‌شود، بنابراین فقط گزینه (۲) صحیح است. همان طور که در شکل گزینه (۲) می‌بینید، مقدار x با گذشت زمان افزایش می‌یابد، بنابراین متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود.



۴۷ بررسی موارد

الف) در ۳ ثانیه اول، متحرک از مکان $x_1 = 6\text{m}$ به $x_2 = 9\text{m}$ رسیده است و سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{9 - 6}{3} = 1\text{m/s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (1\text{m/s}) \hat{i}$$

ب) مکان متحرک در لحظات $t = 6\text{s}$ و $t = 10\text{s}$ یکسان است، بنابراین در بازه $t = 6\text{s}$ تا $t = 10\text{s}$ ، جابه‌جایی و سرعت متوسط صفر است.

ج) در سه ثانیه اول، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار بالا می‌رود)، در حالی که در سه ثانیه دوم، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند (نمودار پایین می‌رود)، پس سرعت متوسط در سه ثانیه اول مثبت و در سه ثانیه دوم منفی است.

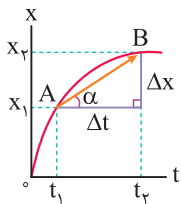
$$v_{av_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9 - 6}{3} = 1\text{m/s} \quad \text{سه ثانیه اول}$$

$$v_{av_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 9}{3} = -3\text{m/s} \Rightarrow \frac{|v_{av_2}|}{|v_{av_1}|} = 3 \quad \text{سه ثانیه دوم}$$

بنابراین عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) صحیح هستند.

۴۸ نمودار داده شده یک نمودار مکان - زمان است. بنابراین شیب خط

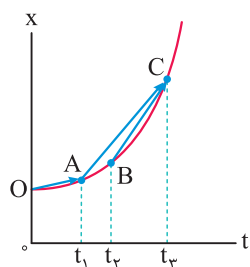
واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصله زمانی بین آن دو لحظه (t_1 تا t_2) می‌باشد.



$$\text{شیب } AB = \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|$$

۴۹ سرعت متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو

نقطه از نمودار مکان - زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.



همان طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید، شیب پاره‌خط BC از سایر پاره‌خط‌ها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است)، بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_3 بزرگ‌تر است.

$$\tan \alpha_{BC} > \tan \alpha_{AC} > \tan \alpha_{OA}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC} > |\vec{v}_{av}|_{AC} > |\vec{v}_{av}|_{OA}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

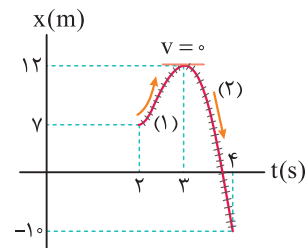
به طور کلی هنگامی که متحرک از $x = 0$ عبور کرده و علامت x تغییر کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. متحرک مورد نظر در دو لحظه t_1 و t_2 از مبدأ مکان عبور کرده است و دوبار بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینه (۱) عبارت نادرستی است.

۴۵ با بررسی جهت حرکت و اندازه جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت

($2\text{s} \leq t < 4\text{s}$)، مسافت طی شده به دست می‌آید.

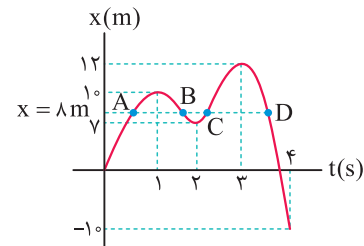
مرحله اول: از لحظه $t = 2\text{s}$ تا $t = 3\text{s}$ ، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و مسافت $I_1 = 12 - 7 = 5\text{m}$ را پیموده است.

مرحله دوم: از لحظه $t = 3\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ ، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و مسافت $I_2 = |-10 - 12| = 22\text{m}$ را پیموده است.



بنابراین مسافت طی شده در دو ثانیه دوم برابر $I = I_1 + I_2 = 27\text{m}$ است.

از طرفی با توجه به نمودار داده شده، متحرک ۴ بار در مکان $x = +8\text{m}$ قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از $x = 8\text{m}$ رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطه A, B, C, D قطع می‌کند)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک بر حسب متر برابر $\vec{d} = +8\hat{i}$ می‌شود.



تمرین اندازه جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه دوم حرکت چند متر است؟

پاسخ

$$\begin{cases} t_1 = 2\text{s} \rightarrow x_1 = 7\text{m} \\ t_2 = 4\text{s} \rightarrow x_2 = -10\text{m} \end{cases} \rightarrow |\vec{d}| = |x_2 - x_1| = 17\text{m}$$

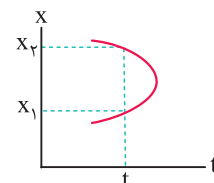
تمرین در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد؟

پاسخ

در ثانیه چهارم ($3\text{s} \leq t < 4\text{s}$)، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت x تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد.

۴۶ شکل‌های رسم شده در گزینه‌های (۱) و (۴)، نمی‌توانند مربوط به نمودار

مکان - زمان یک متحرک باشند، زیرا متحرک در یک لحظه مشخص در بیش از یک مکان قرار دارد. این موضوع برای گزینه (۱) در شکل زیر نشان داده شده است.



۴۵۲ در ۵ ثانیه اول، سرعت متوسط برابر 4 m/s - است، بنابراین جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x_1 = v_{av_1} \Delta t_1 = -4 \times 5 = -20\text{ m}$$

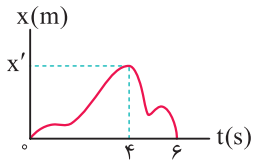
در ۴ ثانیه بعدی، سرعت متوسط 3 m/s + است و جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x_2 = v_{av_2} \Delta t_2 = 3 \times 4 = 12\text{ m}$$

بنابراین تنها چیزی که راجع به این حرکت می‌توانیم بگوییم آن است که در ۵ ثانیه اول، نمودار مکان - زمان باید در مجموع 20 m پایین بیاید و در ۴ ثانیه بعد، باید 12 m بالا برود که این موضوع در هر سه گزینه رعایت شده است. دقت کنید که

سرعت متوسط در مورد چگونگی حرکت به ما اطلاعی نمی‌دهد.

۴۵۳ محاسبه سرعت متوسط از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4\text{ s}$:



$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4\text{ s} \rightarrow x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - 0}{4 - 0} = \frac{x'}{4}$$

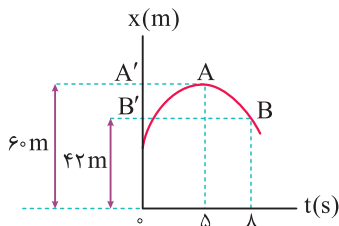
محاسبه سرعت متوسط از $t_2 = 4\text{ s}$ تا $t_3 = 6\text{ s}$:

$$\begin{cases} t_2 = 4\text{ s} \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = 6\text{ s} \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{0 - x'}{6 - 4} = -\frac{x'}{2}$$

و نسبت سرعت متوسط در این دو بازه زمانی برابر است با:

$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{4}}{-\frac{x'}{2}} = -\frac{1}{2}$$

۴۵۴ با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. ابتدا باید دقت کنیم که متحرک بر روی محور X در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور X است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت AB نمی‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

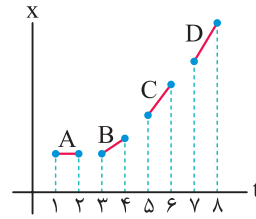


با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، متحرک در لحظه $t_1 = 5\text{ s}$ در مکان $A'(x_1 = 60\text{ m})$ و در لحظه $t_2 = 8\text{ s}$ در مکان $B'(x_2 = 42\text{ m})$ قرار دارد و داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{42 - 60}{8 - 5} = -6\text{ m/s}$$

در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظه $t = 5\text{ s}$ تا $t = 8\text{ s}$ متحرک بر روی محور X از A' به طرف B' حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای $A'B'$ (یعنی در خلاف جهت محور X) است.

تمرین در شکل زیر، اندازه سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

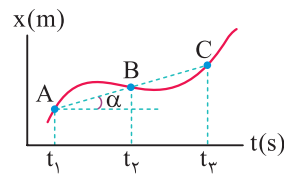


$$|\vec{v}_{av}|_A = 0 < |\vec{v}_{av}|_B < |\vec{v}_{av}|_C < |\vec{v}_{av}|_D$$

پاسخ

۴۵۰ شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت

متوسط در آن بازه است. در شکل روبه‌رو، شیب خط واصل بین نقاط A و B با شیب خط واصل بین نقاط B و C یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هر دو بازه زمانی (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان و برابر 2 m/s است.



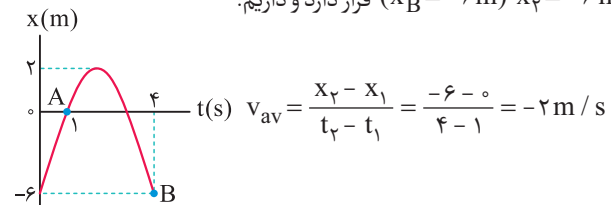
$$\vec{v}_{av_1} = \vec{v}_{av_2} = \tan \alpha = 2\text{ m/s}$$

تذکر

دقت کنید پاره‌خط‌های AB و BC در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.

۴۵۱ روش اول (نمودارخوانی): با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده،

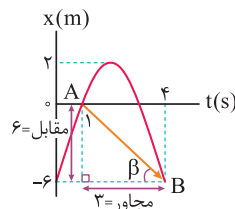
متحرک در لحظه $t_1 = 1\text{ s}$ در مبدأ قرار داشته ($x_A = 0$) و در لحظه $t_2 = 4\text{ s}$ در مکان $x_2 = -6\text{ m}$ ($x_B = -6\text{ m}$) قرار دارد و داریم:



$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2\text{ m/s}$$

روش دوم (شیب نمودار): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط واصل

بین نقاط ابتدای بازه زمانی و انتهای بازه زمانی در نمودار مکان - زمان است.



$$|\vec{v}_{av}| = |\tan \beta| = \left| \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \right| = \left| \frac{6}{3} \right| = 2\text{ m/s}$$

(شیب خط AB منفی است.) $v_{av} = -2\text{ m/s}$

دقت

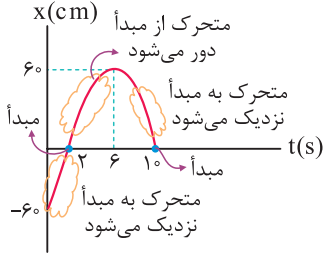
با توجه به جهت فلش AB در این سؤال، علامت v در نمودار مکان - زمان فوق مشخص می‌شود:

$$\rightarrow \Rightarrow v_{av} = 0$$

$$\nearrow \Rightarrow v_{av} > 0$$

$$\searrow \Rightarrow v_{av} < 0$$

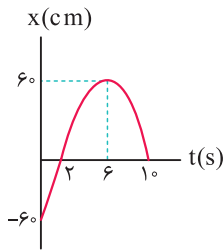
۵۹ **گام اول:** در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$ متحرک از قسمت منفی محور X به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می شود، در بازه زمانی $t_3 = 2s$ تا $t_4 = 6s$ متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازه زمانی $t_5 = 6s$ تا $t_6 = 10s$ به مبدأ نزدیک می شود.



گام دوم: بنابراین تندی متوسط در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$ که متحرک از مبدأ مکان دور می شود، به صورت زیر به دست می آید:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{60}{6-2} = \frac{60}{4} = 15 \text{ cm/s} = 0.15 \text{ m/s}$$

۶۰ با توجه به نمودار داده شده، متحرک در دو لحظه $t_1 = 0$ و $t_2 = 6s$ به ترتیب در نقاط $x_1 = -60 \text{ cm}$ و $x_2 = +60 \text{ cm}$ قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصله متحرک تا مبدأ برابر 60 cm می شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیه اول حرکت به دست آوریم:



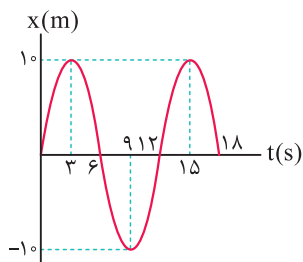
$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{120}{6} = 20 \text{ cm/s} = 0.2 \text{ m/s}$$

۶۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱ همان طور که می دانید، طبق رابطه $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ ، تندی متوسط به مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد.

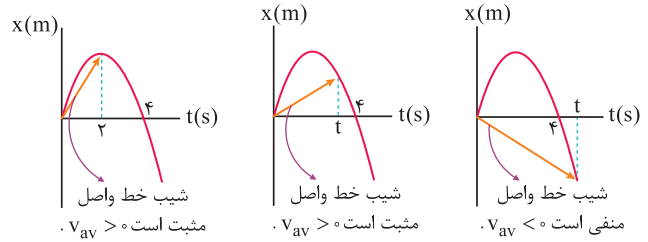
۲ بعد از لحظه $t = 0$ ، متحرک در جهت محور X شروع به حرکت می کند و در ادامه مسیر، مسافت های متفاوتی را طی می کند، بنابراین مسافت طی شده توسط آن در هیچ یک از بازه های زمانی صفر نمی باشد.

۳ دقت کنید حتی زمانی که متحرک به مکان اولیه خود باز می گردد، باز هم مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی شود و در این حالت جابه جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می شود.

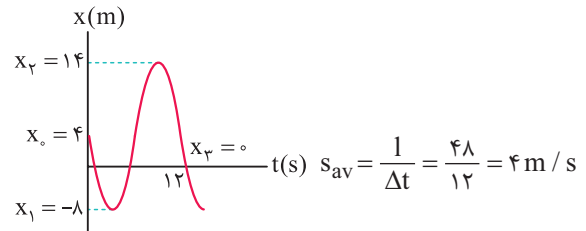


۴ بنابراین در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 6s$ که متحرک به محل اولیه اش باز می گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ یک از بازه های زمانی صفر نمی شود.

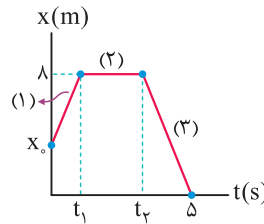
۵۵ با توجه به شیب خط واصل از لحظه صفر تا t ، مشاهده می شود که نهایتاً تا لحظه $t = 4s$ ، شیب خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در جهت محور X است.



۵۶ متحرک ابتدا 12 m در خلاف جهت محور X حرکت کرده و از مکان $x_0 = 4 \text{ m}$ به مکان $x_1 = -8 \text{ m}$ می رسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت 22 m به مکان $x_2 = 14 \text{ m}$ می رسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت 14 m در لحظه $t = 12s$ به مبدأ ($x_3 = 0$) می رسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت $12 + 22 + 14 = 48 \text{ m}$ را طی می کند و داریم:



۵۷ این متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه t_1 مسافت $(\lambda - x_0)$ را طی کرده است. از طرفی از لحظه t_1 تا t_2 ساکن بوده و از لحظه t_2 تا لحظه $t = 5s$ از مکان $x = 8 \text{ m}$ به مبدأ مکان رسیده است و در نتیجه در این بازه زمانی مسافت 8 m را طی کرده است.

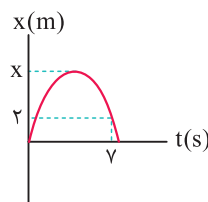


$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{16 - x_0}{5} = \frac{16 - x_0 + 0 + 8}{5} = \frac{24 - x_0}{5}$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow 2 = \frac{16 - x_0}{5} \Rightarrow x_0 = 6 \text{ m}$$

۵۸ مطابق شکل، فرض می کنیم

بیشترین فاصله ذره تا مبدأ مکان برابر X باشد، به این ترتیب داریم:



$$1 = (x) + (x - 2) = 2x - 2$$

$$|\Delta x| = 2 \text{ m}$$

$$s_{av} = 5 |v_{av}| \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = 5 \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \Rightarrow (2x - 2) = 5 \times (2)$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \text{ m}$$

۶۲ در بازه t_1 تا t_2 مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

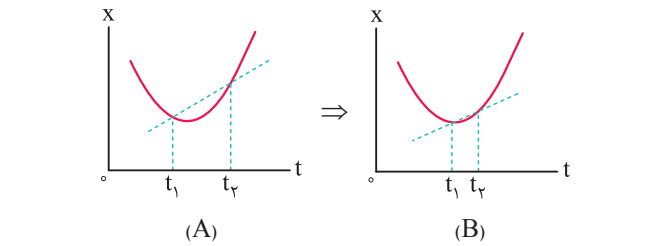
۶۳ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:

گام اول: خط واصل از لحظه صفر تا لحظه t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظه صفر تا لحظه t یکسان است.

گام دوم: برای مقایسه تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظه صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:

همان گونه که در شکل‌های ترسیم شده مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شیب خط واصل، به سمت مماس رسم شده بر نمودار مکان - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم شده بر هر نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر اندازه سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.

۶۴ در بازه زمانی صفر تا t_3 ، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه‌جایی در این بازه زمانی صفر شده ولی مسافت طی شده مخالف صفر است).



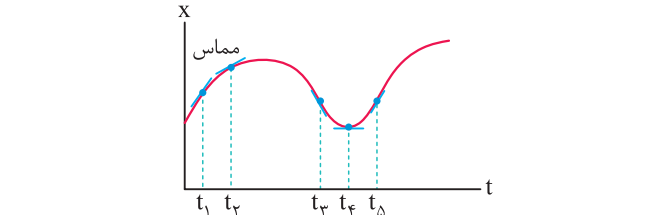
۶۵ باتوجه به تمرین (۱۱) در درسنامه، گزینه (۳) صحیح است.

۶۶ تندی سنج خودرو به صورت تقریبی، تندی لحظه‌ای حرکت خودرو را نشان می‌دهد.

۶۷ همان گونه که در شکل‌های ترسیم شده مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شیب خط واصل، به سمت مماس رسم شده بر نمودار مکان - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم شده بر هر نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر اندازه سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.

۶۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

۱) اندازه شیب مماس رسم شده بر نمودار در لحظه t_1 بیشتر از t_2 است، پس تندی متحرک در t_1 بیشتر از t_2 است.

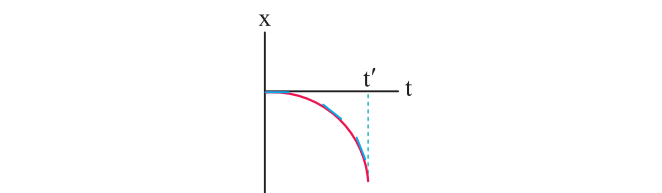


۲) در لحظه t_4 ، مماس رسم شده بر نمودار افقی است و در نتیجه تندی حرکت در این لحظه صفر است.

۳) در لحظه t_3 ، مماس بر نمودار به سمت پایین است و شیب آن منفی است، پس علامت سرعت هم منفی است و بردار سرعت در لحظه t_3 در خلاف جهت محور x است.

۴) همان طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر اندازه سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. باتوجه به این که در نمودار رسم شده در گزینه (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظه صفر تا t' ، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.

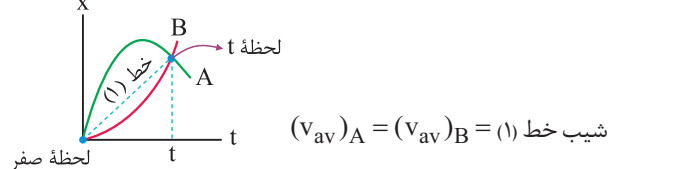
۶۹ همان طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر اندازه سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. باتوجه به این که در نمودار رسم شده در گزینه (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظه صفر تا t' ، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.



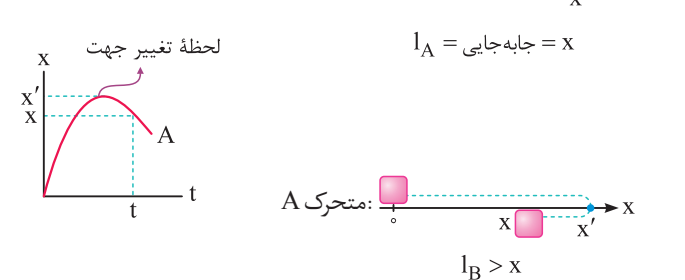
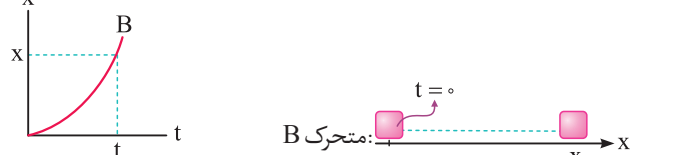
۶۲ در بازه t_1 تا t_2 مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

۶۳ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:

گام اول: خط واصل از لحظه صفر تا لحظه t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظه صفر تا لحظه t یکسان است.



گام دوم: برای مقایسه تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظه صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:

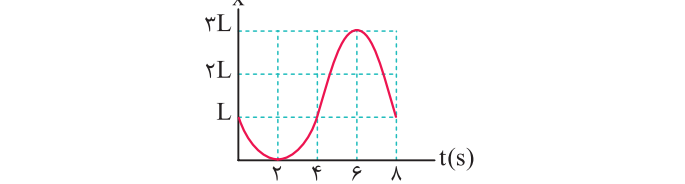


همان طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه‌جایی آن (یعنی x) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط A از B بیشتر است.

$(s_{av}) = \frac{1}{\Delta t} \frac{I_A > I_B}{(s_{av})_A > (s_{av})_B}$

۶۴ در هر بازه زمانی که تندی متوسط متحرک بزرگ‌تر باشد، متحرک تندتر و سریع‌تر حرکت کرده است و بالعکس.

با توجه به نمودار داده شده، چون تندی متوسط متحرک در بازه زمانی ۴s تا ۶s بیش‌تر از سایر گزینه‌ها است، بنابراین متحرک در این بازه زمانی تندتر حرکت کرده است و گزینه (۳) صحیح است.



نکته

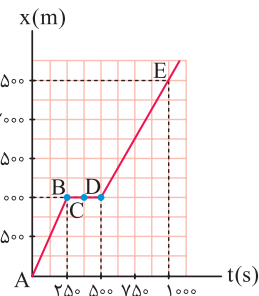
اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است.

با توجه به نکته ارائه شده، واضح است که شیب DE مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازه زمانی قرار گرفته در این بازه (E تا D) برابر سرعت لحظه‌ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازه زمانی $600s < t < 900s$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 550s$ (یا هر لحظه دیگر که در بازه زمانی $500s$ تا $1000s$ قرار گرفته باشد) می‌باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها

(۲) متحرک در بازه A تا B در مدت $250s - 0 = 250s$ به اندازه $1000m - 0 = 1000m$ جابه‌جا شده است، بنابراین اندازه سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{1000 - 0}{250 - 0} = 4 \text{ m/s}$$



از طرفی سرعت متوسط متحرک در بازه D تا E برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_D}{t_E - t_D} = \frac{2500 - 1000}{1000 - 500} = 3 \text{ m/s}$$

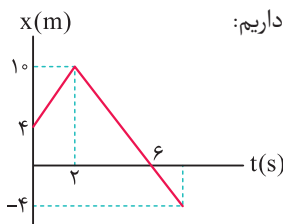
بنابراین متحرک در AB ، تندتر از DE حرکت می‌کند.

(۳) برای محاسبه اندازه سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه‌جایی کل متحرک را بر کل بازه زمانی به دست می‌آوریم:

$$v_{av \text{ کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{2500 - 0}{1000 - 0} = 2.5 \text{ m/s}$$

(۴) با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که متحرک در تمام لحظات بین $t = 250s$ تا $t = 500s$ در مکان $x = 1000m$ قرار داشته و جابه‌جا نمی‌شود. بنابراین متحرک در این بازه زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطه C نیز صفر می‌باشد).

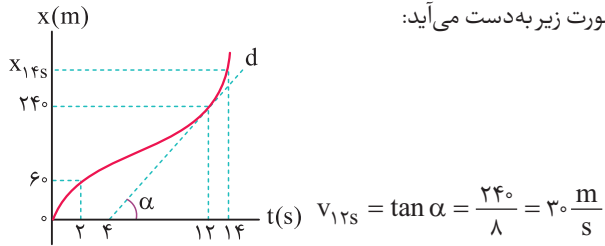
با توجه به نکته مطرح شده در سؤال قبل، می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظه $t = 6s$ (که متحرک از مبدأ عبور می‌کند)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $2s$ تا $6s$ است. بنابراین داریم:



$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{0 - 10}{6 - 2} \vec{i} = -\frac{10}{4} \vec{i} = -2.5 \vec{i}$$

با توجه به تمرین (۱۲) در درسنامه، گزینه (۳) صحیح است.

گام اول: تندی متحرک در لحظه $t = 12s$ ، برابر شیب خط d می‌باشد که به صورت زیر به دست می‌آید:



گام دوم: با توجه به صورت سؤال، تندی متوسط در بازه $t = 2s$ تا $t = 14s$ برابر تندی در لحظه $t = 12s$ می‌باشد. بنابراین مکان متحرک در $t = 14s$ برابر است با:

$$s_{av} = v_{12s} \Rightarrow \frac{x_{14s} - 60}{14 - 2} = 30 \Rightarrow x_{14s} = 420m$$

دقت شود که متحرک از $2s$ تا $14s$ بدون تغییر جهت روی خط راست در حال حرکت است و تندی متوسط متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

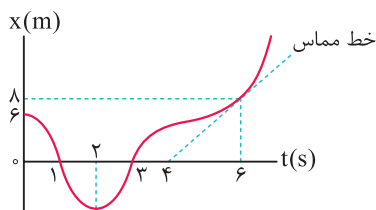
گام سوم: نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(v_{av})_{2 \text{ تا } 10}}{(v_{av})_{14 \text{ تا } 12}} = \frac{60 - 0}{2} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبه سرعت متحرک در لحظه $t = 6s$:

$$t = 6s : v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{6 - 4} = 1.5 \text{ m/s}$$

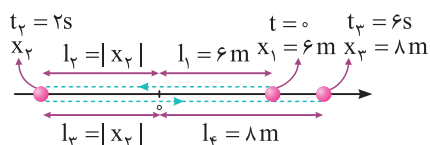


بنابراین چون تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $0 < t < 6s$ برابر تندی در لحظه $t = 6s$ است، تندی متوسط در $0 < t < 6s$ برابر 1.5 m/s است.

گام دوم: محاسبه مسافت طی شده در بازه زمانی $0 < t < 6s$:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow 1.5 = \frac{l}{6} \Rightarrow l = 9m$$

گام سوم: شکل نشان داده شده نحوه حرکت متحرک را در 6 ثانیه اول حرکت، با توجه به نمودار مکان - زمان نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان نوشت:

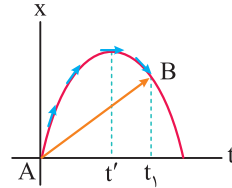


$$30 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \Rightarrow 30 = 6 + |x_2| + |x_2| + 8 \Rightarrow |x_2| = 8m$$

در نهایت باید دقت شود که در $t = 2s$ ، متحرک در خلاف جهت محور x ، بیشترین فاصله از مبدأ را دارد و این فاصله همان $8m$ است.

۲۷۵ به موارد زیر توجه کنید:

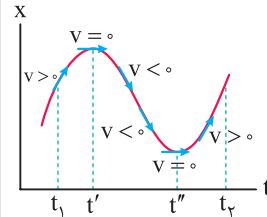
همان طور که می‌دانیم، شیب خط رسم شده بین دو لحظه $t = 0$ و t_1 (خط AB) بیانگر سرعت متوسط حرکت جسم می‌باشد. چون شیب خط مورد نظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازه زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور X است.



از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیانگر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است. همان طور که می‌بینید، از شروع حرکت تا لحظه t' شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای مثبت و از لحظه t' تا t_1 شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای منفی می‌باشد.

بنابراین سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط ابتدا هم جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

۲۷۶ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، سرعت متحرک در دو لحظه t' و t'' صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس)، زیرا در این لحظات، علامت شیب نمودار مکان - زمان تغییر کرده است.



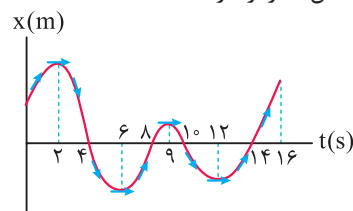
بنابراین در بازه t_1 تا t_2 ، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تذکر

نشان دادن فلش بر روی مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.

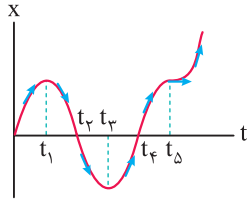


۲۷۷ تندی متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2s$ ، $t_2 = 6s$ ، $t_3 = 9s$ و $t_4 = 12s$ صفر شده و علامت سرعت بعد و قبل از این لحظات تغییر می‌کند، بنابراین متحرک در ۱۶ ثانیه اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می‌دهد. از طرفی متحرک ۴ بار از مبدأ عبور کرده و بردار مکان حداقل اندازه را دارد.



در بازه‌های زمانی $(0 تا 2s)$ ، $(2s تا 6s)$ و $(6s تا 9s)$ ، در مجموع به مدت ۹s، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند.

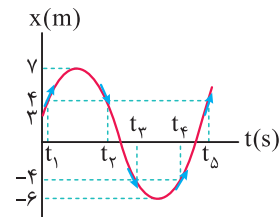
۲۷۸ همان طور که می‌دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متحرک است و در بازه‌های زمانی که شیب خط مماس منفی می‌شود، سرعت در خلاف محور X بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. همان طور که در شکل مقابل می‌بینید، تنها در بازه زمانی t_1 تا t_3 شیب خط مماس بر نمودار منفی می‌شود.



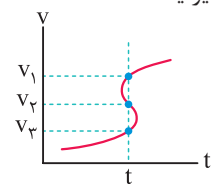
۲۷۹ به موارد زیر توجه کنید:

۲۷۹ هنگامی که متحرک در نقاط $x = 4m$ یا $x = -4m$ قرار می‌گیرد، فاصله متحرک تا مبدأ مکان برابر ۴m می‌شود.

همان طور که در شکل مقابل می‌بینید، در لحظات t_1 ، t_2 ، t_3 ، t_4 و t_5 فاصله متحرک تا مبدأ برابر ۴m می‌شود.

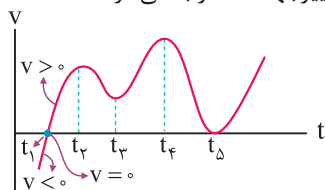


۲۸۰ در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، بنابراین باید سرعت متحرک و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات t_2 و t_4 قابل قبول هستند و گزینه (۱) صحیح می‌باشد. نمودار رسم شده در گزینه (۴)، نمودار یک تابع v بر حسب t نمی‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور v رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. این موضوع نشان‌دهنده این است که متحرک در یک لحظه، چند سرعت مختلف دارد که این موضوع امکان‌پذیر نیست.



۲۸۱ با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده، در لحظه $t = 6s$ نه سرعت متحرک صفر می‌شود و نه علامت سرعت عوض می‌شود، بنابراین متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد. درستی سایر گزینه‌ها را با توجه به مطالب مطرح شده در درسنامه بررسی کنید.

۲۸۲ با در دست داشتن نمودار سرعت - زمان برای مشخص کردن لحظه تغییر جهت متحرک، کافی است لحظه‌ای را بیابیم که نمودار محور زمان را قطع کرده و تغییر علامت دهد. بنابراین در شکل زیر، متحرک تنها در لحظه t_1 تغییر جهت می‌دهد. (در t_5 علامت سرعت عوض نشده و لحظه تغییر جهت محسوب نمی‌شود).

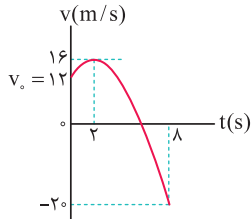


۸۶ با توجه به معادله سرعت - زمان داده شده، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$v = -t^2 + 4t + 12 = -t^2 + 4t - 4 + 4 + 12$$

$$\Rightarrow v = -(t^2 - 4t + 4) + 16 \Rightarrow v = -(t - 2)^2 + 16$$

$$\text{نقاط کمکی: } \begin{cases} t = 0 \Rightarrow v_0 = 12 \frac{m}{s} \\ t = 2s \Rightarrow v = 16 \frac{m}{s} \\ t = 8s \Rightarrow v = -(8)^2 + 4 \times 8 + 12 = -20 \frac{m}{s} \end{cases}$$



همان طور که مشاهده می‌کنیم، اندازه سرعت در لحظه $t = 8s$ بیشتر از سایر لحظه‌هاست و در نتیجه بیشترین تندی متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت، در انتهای حرکت می‌باشد که برابر $20 \frac{m}{s}$ است.

۸۷ شتاب متوسط با بردار Δv هم جهت است نه بردار v و گزینه (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به درسنامه ابتدای این قسمت، صحیح می‌باشند.

۸۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

- ۱ هنگام سقوط آزاد توپ به سمت زمین، به دلیل نیروی جاذبه، سرعت توپ به تدریج افزایش می‌یابد و این افزایش سرعت به معنی شتاب‌دار بودن حرکت است.
- ۲ در حرکت خودرو در یک جاده مارپیچ، جهت حرکت خودرو در طول مسیر تغییر می‌کند و در نتیجه بردار سرعت عوض می‌شود، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.
- ۳ هنگامی که خودرو با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، اندازه و جهت بردار سرعت ثابت است و در نتیجه حرکت شتاب ندارد.
- ۴ در چرخش ماهواره به دور زمین، جهت حرکت ماهواره تغییر می‌کند و این به معنی تغییر بردار سرعت است، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.

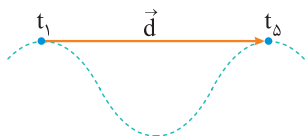
۸۹ در گزینه (۴) اندازه سرعت ثابت بوده و بردار سرعت تغییر جهت

نمی‌دهد. بنابراین در این حالت، $\vec{v}_1 = \vec{v}_4$ بوده و شتاب متوسط از لحظه t_1 تا t_4 برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_1}{\Delta t} \quad \vec{v}_4 = \vec{v}_1 \rightarrow \vec{a}_{av} = 0$$

۹۰ سرعت، یک کمیت برداری است، بنابراین زمانی سرعت‌ها در دو

زمان مختلف با هم برابر هستند که هم اندازه و هم جهت سرعت‌ها یکسان باشد. در این سؤال، در لحظات t_1 ، t_3 ، t_5 سرعت متحرک یکسان است، بنابراین شتاب متوسط این متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_3 و t_1 تا t_5 برابر صفر است $(\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t})$. از سوی دیگر سرعت متوسط در راستای بردار جابه‌جایی است و تنها در بازه زمانی t_1 تا t_5 جابه‌جایی متحرک، افقی و در نتیجه سرعت متوسط متحرک در جهت محور X است.

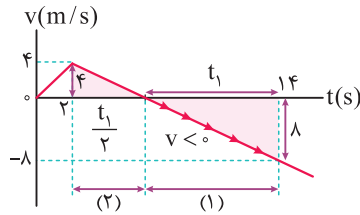


۸۳ همان طور که می‌دانیم در نمودار سرعت - زمان، در زمان‌هایی که نمودار زیر

محور زمان است، سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت

می‌کند. با توجه به تشابه دو مثلث رنگی، اگر طول قسمت (۱) که سرعت در آن منفی است

را t_1 در نظر بگیریم، طول قسمت (۲) برابر $\frac{t_1}{2}$ است و می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow t_1 + \frac{t_1}{2} = (14 - 2) = 12 \Rightarrow t_1 = 8s$$

بنابراین متحرک به مدت $t_1 = 8s$ در خلاف جهت محور X جابه‌جا می‌شود.

۸۴

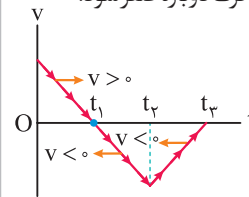
تذکر

در نمودار سرعت - زمان، هرگاه نمودار از محور زمان دور شود، تندی متحرک $|v|$ در حال افزایش است و بالعکس.

ابتدا باید دقت شود که نمودار سرعت - زمان متحرک داده شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

۱ از لحظه t_1 تا t_3 نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان (t) است و در نتیجه سرعت متحرک در این بازه زمانی منفی است و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.

۲ از لحظه $t = 0$ تا $t = t_1$ سرعت متحرک مثبت و اندازه آن در حال کاهش بوده تا در لحظه t_1 به صفر برسد. سپس از لحظه t_1 تا t_4 سرعت متحرک منفی ولی اندازه آن $(|v|)$ در حال افزایش است (نمودار از محور افقی دور می‌شود). از لحظه t_4 تا t_3 نیز سرعت متحرک منفی است ولی اندازه آن $(|v|)$ در حال کاهش است (نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود). تا در لحظه t_3 سرعت متحرک دوباره صفر شود.



۸۵ به موارد زیر توجه کنید:

۱ همان طور که می‌دانید، اگر متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط آن با یکدیگر برابر می‌شود و در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان خواهد شد.

۲ از طرف دیگری می‌دانیم که دو ثانیه دوم، معادل بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_4 = 4s$ است.

بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال، باید نموداری را پیدا کنیم که متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت نداده باشد. سرعت متحرک‌های C و D (نمودار گزینه‌های (۳) و (۴) به ترتیب در لحظات $2/5s$ و $3s$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین این دو متحرک تغییر جهت می‌دهند. متحرک A نیز در لحظه $t = 3$ تغییر جهت می‌دهد، اما متحرک B در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_4 = 4s$ تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین گزینه (۲) پاسخ این سؤال است.

۹۱ | در بازه t_1 تا t_2 ، شتاب متوسط برابر است با:

$$\begin{cases} \Delta v = v_2 - v_1 = -2 - 10 = -12 \frac{m}{s} \\ \Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 1 = 4s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12}{4} = -3 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = \left(-3 \frac{m}{s^2}\right) \vec{i}$$

در بازه t_2 تا t_3 هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta v = v_3 - v_2 = 4 - (-2) = 6 \frac{m}{s} \\ \Delta t = t_3 - t_2 = 7 - 5 = 2s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6}{2} = +3 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = \left(+3 \frac{m}{s^2}\right) \vec{i}$$

۹۲ | بررسی موارد

الف) هنگامی که متحرک در مکان‌های منفی قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور X است و هنگامی که در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور X است، بنابراین بردار مکان متحرک ابتدا در خلاف جهت محور X و سپس در جهت محور X می‌باشد و در نتیجه این عبارت نادرست است.

ب) بردار سرعت متحرک در مکان A در جهت مثبت محور X ($v_A > 0$) و بردار سرعت متحرک در مکان C در خلاف جهت محور X است ($v_C < 0$)، بنابراین تغییرات سرعت متحرک منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی، در خلاف جهت محور X است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_C - v_A}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} < 0$$

ج) متحرک در دو مرحله ابتدا ۲۸ متر در جهت مثبت محور X حرکت می‌کند، در ادامه تغییر جهت داده و ۱۲ متر در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی شده برابر ۴۰ متر است و تندی متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{40}{6+4} = 4 \frac{m}{s}$$

د) متحرک در هنگام عبور از مبدأ مکان ($x=0$)، در حال حرکت در جهت مثبت محور X است و در نتیجه بردار سرعت آن در جهت مثبت محور X می‌باشد. با توجه به این توضیحات، فقط عبارت «الف» نادرست است.

۹۳ | ابتدا سرعت‌های متحرک که برحسب cm/s داده شده‌اند را برحسب m/s نوشته و با توجه به تعریف شتاب متوسط $\left(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ ، داریم:

$$\begin{cases} v_1 = 1 \text{ cm/s} = 0.01 \text{ m/s} , v_2 = -99 \text{ cm/s} = -0.99 \text{ m/s} \\ \Delta t = 0.5 \text{ s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-0.99 - 0.01}{0.5} = \frac{-1}{0.5} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 2 \frac{m}{s^2}$$

یادآوری

$$1 \text{ cm/s} = 0.01 \text{ m/s} \quad \text{یا} \quad 1 \text{ m/s} = 100 \text{ cm/s}$$

۹۴ | با توجه به تمرین (۱۸) در درسنامه، گزینه (۲) صحیح است.

۹۵ | گام اول: ابتدا تغییر سرعت در بازه زمانی صفر تا t_2 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow -2\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{10} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_2} = -20\vec{i}$$

گام دوم: سپس تغییر سرعت در بازه زمانی صفر تا t_3 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{15} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_3} = 10\vec{i}$$

گام سوم: شتاب متوسط در بازه زمانی t_2 تا t_3 برابر است با:

$$(\Delta \vec{v})_{t_2 \text{ تا } t_3} = (\Delta \vec{v})_{t_2} + (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_2}$$

$$10\vec{i} = -20\vec{i} + (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_2} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_2} = 30\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{(\Delta \vec{v})_{t_2 \text{ تا } t_3}}{\Delta t} = \frac{30\vec{i}}{15 - 10} = 6\vec{i} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

۹۶ | با توجه به تمرین (۱۷) در درسنامه، گزینه (۴) صحیح است.

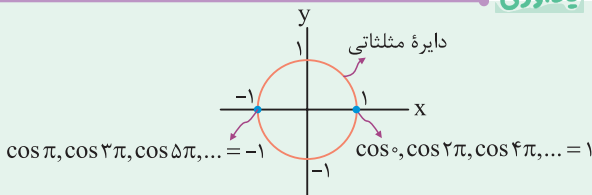
۹۷ | سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازه زمانی داده شده را به دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 0.3\pi \cos(10\pi) = 0.3\pi \\ t_2 = 5s \rightarrow v_2 = 0.3\pi \cos(25\pi) = 0.3\pi \cos(\pi) = -0.3\pi \end{cases}$$

$$|a_{av}| = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \frac{|-0.3\pi - (0.3\pi)|}{5 - 2}$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 0.2\pi \text{ m/s}^2$$

یادآوری



۹۸ | در هر یک از بازه‌های زمانی، شتاب متوسط را با استفاده از رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم.

بررسی گزینه‌ها

$$۱) \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \\ t_2 = 1s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{0 - 4}{1 - 0} = -4 \frac{m}{s^2}$$

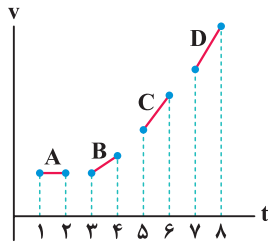
$$۲) \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = -4 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{-4 - (4)}{2 - 0} = -4 \frac{m}{s^2}$$

$$۳) \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 4 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{4 - 4}{4 - 0} = 0$$

$$۴) \begin{cases} t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \\ t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -4 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{-4 - (4)}{6 - 4} = -4 \frac{m}{s^2}$$

در ۴ ثانیه اول حرکت، شتاب متوسط حرکت برابر صفر است، یعنی در خلاف جهت محور X نیست.

تمرین در شکل زیر شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

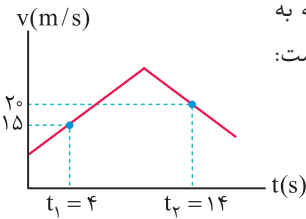


$$a_{avA} = 0 < a_{avB} < a_{avC} < a_{avD}$$

پاسخ

روش اول (نمودارخوانی): با توجه به

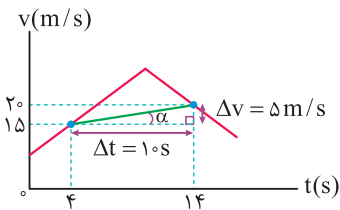
نمودار سرعت - زمان داده شده می توان نوشت:



$$\begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow v_1 = 15m/s \\ t_2 = 14s \rightarrow v_2 = 20m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 15}{14 - 4}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{1}{2} m/s^2 = 0.5 m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = 0.5 \vec{i}$$

روش دوم (استفاده از شیب نمودار): شتاب متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می کند.



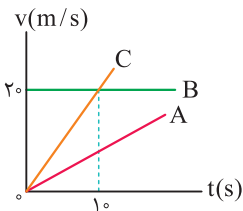
$$|\vec{a}_{av}| = \tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} m/s^2 = 0.5 m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = +0.5 \vec{i}$$

دقت

با توجه به شیب پاره خط AB، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه مقداری مثبت دارد.

برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

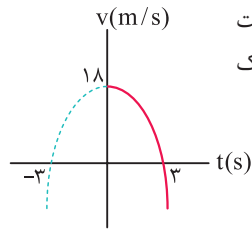


$$C \text{ شیب} > A \text{ شیب} > B \text{ شیب} = 0 \Rightarrow a_C > a_A > a_B$$

با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطه فوق در هر بازه زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در ۱۰ ثانیه اول حرکت داریم:

$$(a_{av})_C > (a_{av})_A > (a_{av})_B = 0$$

ابتدا ریشه های معادله مورد نظر را به دست می آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت - زمان را که یک سهمی است رسم می کنیم:



$$v = -2t^2 + 18t \Rightarrow \begin{cases} -2t^2 + 18t = 0 \Rightarrow t = 3s \text{ یا } t = -3 \\ t = 0 \Rightarrow v = 18 m/s \end{cases}$$

همان طور که می بینید، در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 3s$ ، سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور X حرکت می کند. اندازه شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{|0 - 18|}{3} = 6 m/s^2$$

بزرگی سرعت در لحظه $t = 0$ برابر $4 \frac{m}{s}$ است، بنابراین می توان نوشت:

$$v = t^2 + bt + c \xrightarrow{t=0} 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4$$

شتاب متوسط متحرک در ثانیه اول حرکت برابر $3 \frac{m}{s^2}$ است، بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0: v_1 = 0 + 0 + 4 = 4 \\ t_2 = 1s: v_2 = 1 + b + 4 = 5 + b \end{cases} \Rightarrow \Delta v = 5 + b - 4 = 1 + b$$

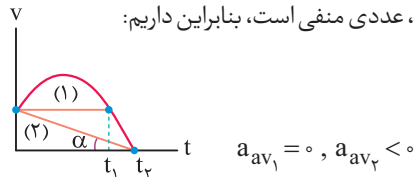
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -3 = \frac{1 + b}{1} \Rightarrow b = -4$$

بنابراین معادله سرعت - زمان متحرک به صورت $v = t^2 - 4t + 4$ است.

$$v = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 \geq 0$$

عبارت فوق همواره بزرگ تر یا مساوی صفر است و تغییر علامت نمی دهد، بنابراین متحرک هیچ گاه تغییر جهت نمی دهد.

همان طور که می دانیم، شیب خط رسم شده بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه می باشد. در شکل زیر، شیب خط (۱) برابر a_{av1} و شیب خط (۲) برابر a_{av2} است. خط (۱) افقی است و شیبی برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:



روش دیگر: با توجه به شکل زیر، متحرک در لحظه صفر دارای سرعت v_1 و در لحظه t_1 نیز دارای همان سرعت می باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

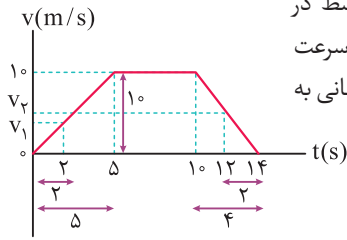
$$a_{av1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v=0} a_{av1} = 0$$

از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظه t_2 برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازه صفر تا t_2 برابر است با:

$$a_{av2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{t_2 - 0} < 0$$

همان طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = -6 \text{ m/s} \\ t_2 = 15 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{0 - (-6)}{15 - 0} = 0.4 \text{ m/s}^2$$



برای محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 12 \text{ s}$ ، ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای این بازه زمانی به کمک تشابه به دست می آوریم:

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow \frac{10}{v_1} = \frac{5}{2} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s} \text{ (تشابه در سمت چپ شکل)}$$

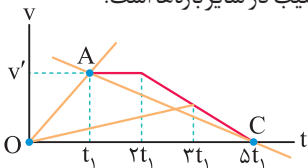
$$t_2 = 12 \text{ s} \Rightarrow \frac{10}{v_2} = \frac{14 - 10}{14 - 12}$$

$$\Rightarrow v_2 = 5 \text{ m/s} \text{ (تشابه در سمت راست شکل)}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 4}{12 - 2} = \frac{1}{10} \text{ m/s}^2$$

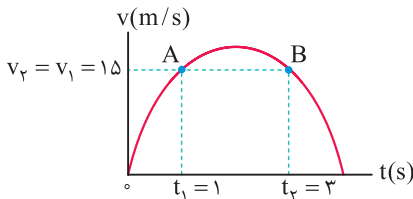
می دانیم که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی را می دهد. بنابراین شتاب متوسط در بازه ای بیشتر است که شیب خط واصل بین نقطه ابتدا و انتهای آن بازه بیشتر باشد.

با توجه به شکل زیر در بازه زمانی صفر تا t_1 ، اندازه شتاب متوسط بزرگتر از سایر بازه ها است، زیرا شیب خط OA بزرگتر از شیب در سایر بازه ها است.



$$\begin{cases} \text{شیب خط } OA = a_{avOA} = \frac{v'}{t_1} \\ \text{شیب خط } AC = a_{avAC} = -\frac{v'}{4t_1} \end{cases} \Rightarrow |a_{avOA}| > |a_{avAC}|$$

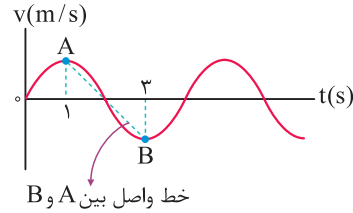
با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده، سرعت متحرک در دو لحظه t_1 و t_2 یکسان بوده و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t})$ ، شتاب متوسط در این بازه زمانی صفر است.



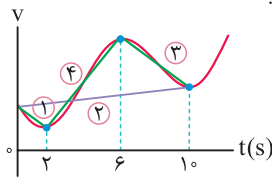
$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\xrightarrow{v_2 = v_1 = 15 \text{ m/s}} |\vec{a}_{av}| = \frac{15 - 15}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0$$

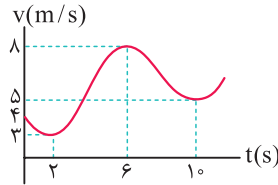
شیب خط واصل بین دو نقطه از منحنی سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک می باشد. بین گزینه های داده شده، تنها در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 3 \text{ s}$ شیب خط واصل بین دو نقطه منفی بوده و شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



روش اول: شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی است. با توجه به نمودار زیر، اندازه شیب خط (۴) بیش تر از سه خط دیگر است، بنابراین اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $2 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$ بیش تر از سایر گزینه ها است.



روش دوم: می توانستیم با قرار دادن عددهای مناسب روی نمودار و استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ هم شتاب متوسط را در بازه های زمانی مختلف مقایسه کنیم.



$$2 \text{ s} \text{ تا } 6 \text{ s}: a_{av} = \frac{3 - 4}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

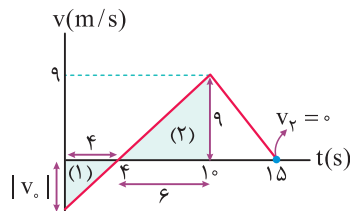
$$10 \text{ s} \text{ تا } 6 \text{ s}: a_{av} = \frac{5 - 4}{10 - 6} = \frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$10 \text{ s} \text{ تا } 6 \text{ s}: a_{av} = \frac{5 - 8}{4} = -\frac{3}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$6 \text{ s} \text{ تا } 2 \text{ s}: a_{av} = \frac{8 - 3}{4} = \frac{5}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

همان طور که می بینید، در بازه زمانی $2 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$ ، اندازه شتاب متوسط از سایر گزینه ها بزرگ تر است.

برای محاسبه اندازه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطه $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ استفاده می کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث ها، سرعت در لحظه $t = 0$ را به دست آوریم:



$$\text{تشابه مثلث های (۱) و (۲)}: \frac{4}{6} = \frac{|v_0|}{9} \Rightarrow |v_0| = 6 \text{ m/s}$$