

مقدمه ناشر

شنیدین می‌گن ذهن سیاله؟ یعنی ولش کنی مثل گاز به هر طرفی می‌ره. حالا این سیالیت ذهن خوبه یا بد؟ من که می‌گم حرف نداره! چون باهش می‌شه چیزایی رو تصور کرد و به جاهایی سرک کشید که امکان نداره تو واقعیت تجربه کنی. ویژگی مشترک همهٔ نابغه‌های دنیا اینه که ذهنشون از آدمای عادی سیال‌تره، مثلاً اینشتین وقتی داشت نسبیت رو می‌پروروند، معلوم نیست ذهنش تا کجاها رفت. در اون زمان نسبیت اون قدر عجیب و غریب به نظر می‌اومد که کسی باورش نمی‌شد به روزی به یکی از مهم‌ترین نظریه‌های فیزیک تبدیل بشه. اون موقع اینشتین بابت این نظر، حتی به تمبر پستی هم جایزه نگرفت. سی چهل سالی طول کشید تا کم‌کم به چیزایی از این نظریه اثبات شد و هنوز هم که هنوزه، داره زوایای پنهانش آشکار می‌شه. این دیگه اوج سیالیت ذهنه.

حالا اگه تو هم به وقت

«می‌نشینی چند تمرین ریاضی حل کنی خط‌کش و نقاله و پرگار شاعر می‌شود»

خوشحال باش که اینم به جور سیالیت ذهنه، اما در مسیر درست قرار نگرفته! یعنی این که به چیز دیگه که به ظاهر نقطهٔ مقابل سیالیته لازم داری: تمرکز! یا همون از این شاخه به اون شاخه نپریدن. خب! مشکل شد دوتا؛ حالا تمرکز داشته باشیم یا سیالیت؟ جوابش اینه: هر دو! خلاصه‌اش این می‌شه وقتی که داری ریاضی می‌خونی، روی ریاضی تمرکز کن ولی بذار ذهنت هر جای ریاضی که دوست داره سرک بکشه و موضوع (یا مسئله) رو هر جور که دلش می‌خواد تحلیل کنه. اون وقت حتماً معجزهٔ سیالیت رو تجربه می‌کنی و لذتجو می‌بری.

BOOK BANK

کتابای ریاضی از جمله این کتاب، پر از سوژه‌های ناب برای سیالیت ذهنه. پس بخونید و حالشو ببرید.

مرسی از رفقای باسواد و بامرامون کوروش، رسول و سروش. خودم شاهد بودم که چه قدر زحمت کشیدن و برای نوشتن و بعدش بازنویسی این کتاب شب و روز نداشتن. مرسی از محسن فراهانی عزیز که پایه‌پای مولفای این کتاب جنگید و این پروژه سخت و طاقت‌فرسارو به سرانجام رسوند.

دم کارشناسا و ویراستارای این کتاب گرم. دم بچه‌های R&D و QC خیلی سبز گرم. دم بچه‌های تولید (که همین جوری گرمه) بازم گرم‌تر. دم شما هم گرم.

تقدیم به همه دانش آموزان و معلم های خوب ایران

مقدمه مؤلفان

به کتاب ریاضیات تجربی جامع خیلی سبز خوش آمدید.

کتاب جامع یعنی تمام مباحث دهم، یازدهم و دوازدهم، البته مباحث مشترک با هم ادغام شده اند. یعنی مثلاً در کتاب جامع یک فصل تابع داریم که هر چه را که از سال ۱۰، ۱۱ و ۱۲ باید بلد باشید شامل می شود.

نحوه استفاده از کتاب:

الف اگر به مدرسه یا کلاس می روید در مورد نحوه استفاده از کتاب حتماً از معلمتان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمتان در مورد ترتیب خواندن درس نامه ها و حل کردن تست ها و بررسی پاسخ ها، برنامه ریزی و اجرا کنید.

ب اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می کنید توصیه ما این است که: **۱** اول درس نامه را خوب و کامل بخوانید. **۲** چیزهایی که از درس نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **۳** یک بار دیگر فقط تست های درس نامه را حل کنید. **۴** بروید سراغ تست ها، پاسخ تست ها را اول از پاسخ نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ ها را بخوانید. خیلی از وقت ها خواندن پاسخ تست هایی که درست حل کرده ایم هم بسیار کمکتان می کند.

ساختار کتاب:

۱ در ابتدای کتاب، مقدمات را می بینید. در این جا آن چه را که واجب است از محاسبات، درصد، ترتیب عملیات ریاضی و ... گفته ایم، سریعاً بخوانید و به یاد بسپارید. در تمام فصل های دیگر به این نکته ها نیاز دارید.

۲ کتاب با فصل صفر آغاز می شود. در فصل صفر از دو مبحث قدرمطلق و جزء صحیح، آن قسمت هایی را که برای شروع کتاب لازم دارید، آورده ایم. البته فصل صفر شامل تمام مباحث این دو مبحث نیست مثلاً معادله و نامعادله های شامل قدرمطلق در فصل نامعادله ها آمده اند. دلیل وجود فصل صفر و اهمیت خواندن و یادگرفتنش این است که در تمام فصل های آینده خیالمان راحت باشد که در کار با قدرمطلق و جزء صحیح مشکلی نداریم. (یعنی این فصل یک جعبه ابزار واقعی است)

۳ بعد از فصل صفر فصل های دیگر کتاب، اول به ترتیب فصل های ریاضی ۳ (دوازدهم) و سپس به ترتیب اهمیت و هماهنگ بودن مطالب آمده اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسوال، فصل های مرتبط با کتاب درسی و مباحث پیش نیاز را آورده ایم. حواستان باشد که وقتی می گوئیم پیش نیاز منظورمان این است که بهتر است روش های اصلی و مطالب بنیادی فصل های پیش نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید.

۴ در تست های هر درس، کنار تست های عادی یک آیکن ☹️ گذاشته ایم. قرار است شما بعد از حل تست ها و بررسی پاسخ نامه این آیکن ها را به 😊 یا 😐 یا ☹️ تبدیل کنید:

😊 یعنی تست آسان 😐 یعنی تست متوسط ☹️ یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست ها برای این کار استفاده کنید و روی سؤال ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این ها از هر نماد دیگری هم که خودتان می خواهید می توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال ها برگردید.)

برای بعضی از تست ها هم نماد ☹️ داریم که نشان دهنده تست های دشوار یا ترکیبی است. این تست ها مختص دانش آموزان علاقه مند است و قرار نیست همه دانش آموزان به این تست ها پاسخ دهند.

۵ نماد کنار بعضی از تست‌ها به رنگ آبی (••) آمده است. این‌ها تست‌های نشان‌دار هستند برای دوره سریع فصل و دوتا کاربرد دارند: الف) دوره و جمع‌بندی فصل ب) اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می‌توانید فقط این تست‌ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع‌بندی واقعی با این روش انجام می‌شود نه با جدول و نمودار و ...!

۶ در تست‌ها کامنت‌هایی به رنگ آبی می‌بینید. این‌ها صرفاً برای یک یادآوری ساده مطالب درس‌نامه یا یک اشاره کوچک به استراتژی حل تست است. کامنت‌ها را با فونت ریز و کمرنگ آورده‌ایم که اگر نخواستید برای بار اول حل تست‌ها از روبشان رد شوید.

۷ در درس‌نامه آیکن‌های **نکته**، **اشاره** و **خاطره** داریم:

نکته نشان‌دهنده نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

اشاره نشان‌دهنده یک اشاره کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید. این‌طور هم می‌توانیم بگوییم که **اشاره** یک **نکته** خیلی ساده و عادی است.

خاطره نشان‌دهنده یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

۸ درس‌نامه کتاب دوباره و از اول نوشته شده است. سعی کرده‌ایم از جدول، نمودار، دسته‌بندی و هر چیزی که باعث می‌شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول‌ها باید حسابی وقت بگذارید.

۹ تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می‌کنیم بعد از این که درس‌نامه هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک‌بار دیگر تست‌های درس‌نامه را حل کنید.

۱۰ در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در جلد پاسخ این نمادها را داریم:

راه I، **راه II** ... این‌ها نشان‌دهنده روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه I** متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است.

عددگذاری در بعضی از تست‌ها که با بررسی گزینه‌ها و یا عددگذاری هم حل می‌شوند و یا بسیار سریع‌تر حل می‌شوند. در قسمت مقدمات به طور کامل در مورد استفاده از این روش هم صحبت کرده‌ایم. البته در این کتاب تأکید اصلی ما بر استفاده از راه‌های مفهومی و اصلی است ولی خب گاهی اوقات که ممکن بوده از **عددگذاری** استفاده کرده‌ایم اگرچه حواسمان بوده که در استفاده از این روش افراط نکنیم.

۱۱ برای هر کدام از فصل‌ها و همچنین برای نقطه‌های زمانی مشخص در سال (مثلاً پایان نیم سال اول یا دوران تعطیلات عید و ...) برایتان آزمون، همراه حل تشریحی و حل ویدیویی آماده کرده‌ایم. برای استفاده از این‌ها کافی است QRCode صفحه شناسنامه را اسکن کنید. فقط توصیه اکیدمان این است که وقتی بروید سراغ این آزمون‌ها که تمام مطالب لازم را خوب خوانده، یاد گرفته و دوره کرده باشید.

۱۲ توصیه ما برای استفاده از پاسخ‌نامه (که در جلد دوم آمده است) این است:

الف) تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰ تا).

ب) درستی پاسخ‌ها را از روی پاسخ‌نامه کلیدی بررسی کنید.

پ) برگردید و سعی کنید تست‌هایی را که جواب نداده‌اید یا غلط زده‌اید دوباره حل کنید (این بار بدون محدودیت وقت).

ت) بروید سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، اول پاسخ تست‌هایی را که جواب نداده‌اید و یا غلط زده‌اید ببینید و بعد از اینکه این‌ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همه پاسخ‌ها بیندازید. بررسی **راه I**، **راه II**، **نکته** ها، **اشاره** ها و **عددگذاری** باعث می‌شود به همه نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های درس مسلط شوید.

۱۳ امسال یک ID هم داریم که می‌توانید هر سؤال یا اشکالی که داشته باشید بروید سراغ این ID نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را هم از همین طریق برایمان بفرستید.

و حرف آخر هم این‌ها: [@riazi_hamrah_konkoor](https://t.me/riazi_hamrah_konkoor)

• آقایان افشین ملاک‌پور و علی مقدم‌نیا که از اساتید برجسته و خوشنام‌اند با نظرات و پیشنهادات‌شان سهم مهمی در بهترشدن کتاب داشته‌اند. بر خود واجب می‌دانیم از ایشان نهایت سپاس و تشکر را داشته باشیم.

• هم‌چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائه نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.

• از تمام معلمان، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

• برای این‌که این کتاب خیلی بهتر از قبل شود کلی کار کرده‌ایم. به نظر خودمان بهترین کتاب ریاضیات تجربی است 😊 و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.

• اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم. از پیشنهادهایتان هم استقبال می‌کنیم.

خوب و شاد و پیروز باشید!

[@mathmohsenimanesh](https://t.me/mathmohsenimanesh) [@soroshmueeni](https://t.me/soroshmueeni)

فهرست

درس نامه تست

مقدمات

فصل صفر

قدر مطلق و جزء صحیح

۲۵	۱۲	درس ۱: قدر مطلق
۲۷	۲۰	درس ۲: جزء صحیح

فصل اول

تابع

۹۴	۳۱	درس ۱: رابطه و بازنمایی های یک رابطه
۹۷	۳۷	درس ۲: مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه
۱۰۲	۴۴	درس ۳: انواع تابع
۱۰۷	۵۰	درس ۴: انتقال نمودارها
۱۱۳	۵۶	درس ۵: معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی x^2
۱۱۵	۵۹	درس ۶: اعمال جبری روی توابع
۱۱۹	۶۴	درس ۷: ترکیب توابع
۱۲۴	۷۱	درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)
۱۲۷	۷۸	درس ۹: تابع یک به یک
۱۲۸	۸۱	درس ۱۰: وارون تابع و تابع وارون
۱۳۵	۸۹	درس ۱۱: تعیین برد تابع

فصل دوم

مثلثات

۱۸۳	۱۳۸	درس ۱: واحدهای اندازه گیری زاویه (درجه و رادیان)
۱۸۴	۱۴۱	درس ۲: نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه
۱۸۸	۱۴۶	درس ۳: دایره مثلثاتی و علامت نسبت های مثلثاتی در ربع های چهارگانه
۱۹۱	۱۵۲	درس ۴: اتحاد های اولیه
۱۹۳	۱۵۵	درس ۵: زاویه های ترکیبی
۱۹۴	۱۵۹	درس ۶: کمان های 2α
۱۹۸	۱۶۴	درس ۷: تابع متناوب
۲۰۰	۱۶۶	درس ۸: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس
۲۰۴	۱۷۰	درس ۹: تانژانت
۲۰۸	۱۷۶	درس ۱۰: معادله مثلثاتی

۱۹۱	۱۵۲	درس ۴: اتحاد های اولیه
۱۹۳	۱۵۵	درس ۵: زاویه های ترکیبی
۱۹۴	۱۵۹	درس ۶: کمان های 2α
۱۹۸	۱۶۴	درس ۷: تابع متناوب
۲۰۰	۱۶۶	درس ۸: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس
۲۰۴	۱۷۰	درس ۹: تانژانت
۲۰۸	۱۷۶	درس ۱۰: معادله مثلثاتی

فصل سوم

حد و پیوستگی

۲۵۷	۲۱۳	درس ۱: تقسیم چندجمله‌ای ها
۲۵۸	۲۱۵	درس ۲: همسایگی
۲۵۸	۲۱۷	درس ۳: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد
۲۶۵	۲۲۷	درس ۴: رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{صفر}{صفر}$)
۲۷۲	۲۳۵	درس ۵: حد بی نهایت
۲۷۶	۲۴۱	درس ۶: حد در بی نهایت
۲۸۲	۲۴۸	درس ۷: پیوستگی

۲۶۵	۲۲۷	درس ۴: رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{صفر}{صفر}$)
۲۷۲	۲۳۵	درس ۵: حد بی نهایت
۲۷۶	۲۴۱	درس ۶: حد در بی نهایت
۲۸۲	۲۴۸	درس ۷: پیوستگی

فصل چهارم

مشتق

۳۲۷	۲۸۸	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۳۲۹	۲۹۳	درس ۲: قواعد مشتق گیری
۳۳۴	۲۹۹	درس ۳: مشتق گیری با چشم های باز (عامل صفرشونده - ساده کردن)

۳۲۷	۲۸۸	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۳۲۹	۲۹۳	درس ۲: قواعد مشتق گیری
۳۳۴	۲۹۹	درس ۳: مشتق گیری با چشم های باز (عامل صفرشونده - ساده کردن)

تست

درس نامه

۳۳۷	۳۰۳	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی
۳۳۹	۳۰۷	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق گیری در حضور برکت و قدرمطلق
۳۴۲	۳۱۰	درس ۶: پیوستگی و مشتق پذیری (در نقطه و بازه)
۳۴۳	۳۱۲	درس ۷: نقاط مشتق ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم
۳۴۷	۳۱۷	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق
۳۴۹	۳۲۰	درس ۹: مشتق تابع مرکب
۳۵۳	۳۲۴	درس ۱۰: آهنگ تغییر

۳۷۷	۳۵۶	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق
۳۷۹	۳۶۰	درس ۲: نقطه بحرانی
۳۸۱	۳۶۴	درس ۳: اکسترم‌های نسبی
۳۸۵	۳۶۹	درس ۴: اکسترم‌های مطلق
۳۸۷	۳۷۲	درس ۵: بهینه‌سازی

۴۱۶	۳۹۲	درس ۱: تفکر تجسمی
۴۲۰	۴۰۰	درس ۲: بیضی
۴۲۴	۴۰۶	درس ۳: دایره

۴۴۷	۴۳۰	درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد
۴۴۸	۴۳۳	درس ۲: احتمال رخداد یا پیشامد
۴۵۲	۴۳۷	درس ۳: قوانین احتمال
۴۵۴	۴۳۹	درس ۴: احتمال شرطی
۴۵۷	۴۴۲	درس ۵: پیشامدهای مستقل
۴۶۰	۴۴۴	درس ۶: قانون احتمال کل

۴۷۷	۴۶۳	درس ۱: معادله درجه دوم و سهمی
۴۸۳	۴۷۱	درس ۲: سهمی

۵۰۳	۴۸۹	درس ۱: معادلات گویا
۵۰۴	۴۹۱	درس ۲: معادلات رادیکالی
۵۰۵	۴۹۳	درس ۳: تعیین علامت
۵۰۸	۴۹۹	درس ۴: معادلات قدرمطلق

۵۲۱	۵۱۱	درس ۱: یادآوری و تکمیل معادله خط
-----	-----	----------------------------------

فصل چهارم

مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

فصل پنجم

کاربرد مشتق

فصل ۵ ریاضی دوازدهم

فصل ششم

هندسه (تفکر تجسمی و ...)

فصل ۶ ریاضی دوازدهم

فصل هفتم

احتمال

فصل ۷ ریاضی دهم

فصل ۷ ریاضی یازدهم

فصل ۷ ریاضی دوازدهم

فصل هشتم

معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ ریاضی یازدهم

فصل نهم

معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۱ ریاضی یازدهم

فصل دهم

هندسه تحلیلی

فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس نامه	تست	
۵۲۹	۵۳۹	درس ۱: تابع نمایی
۵۳۲	۵۴۲	درس ۲: تابع لگاریتمی
۵۳۴	۵۴۴	درس ۳: ویژگی های لگاریتم
۵۳۶	۵۴۶	درس ۴: معادلات لگاریتمی
۵۳۷	۵۴۸	درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

فصل یازدهم

توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵ ریاضی یازدهم

۵۵۰	۵۶۰	درس ۱: توان و ریشه
۵۵۳	۵۶۱	درس ۲: رادیکال و توان های گویا
۵۵۴	۵۶۲	درس ۳: اتحادها
۵۵۸	۵۶۵	درس ۴: گویا کردن مخرج کسرها

فصل دوازدهم

توان های گویا و عبارات های جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

۵۶۷	۵۷۳	درس ۱: مجموعه های اعداد، بازه، مجموعه های متناهی و نامتناهی
۵۷۰	۵۷۴	درس ۲: مجموعه مرجع و متمم
۵۷۱	۵۷۵	درس ۳: تعداد اعضای مجموعه

فصل سیزدهم

مجموعه و بازه

فصل ۱ ریاضی دهم

۵۷۸	۵۹۰	درس ۱: الگوهای هندسی
۵۸۲	۵۹۳	درس ۲: دنباله حسابی
۵۸۶	۵۹۵	درس ۳: دنباله هندسی

فصل چهاردهم

الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم

۵۹۹	۶۱۴	درس ۱: شمارش
۶۰۲	۶۱۶	درس ۲: جایگشت
۶۰۶	۶۱۸	درس ۳: ترکیب
۶۱۲	۶۲۲	درس ۴: جایگشت با حضور اشیای تکراری

فصل پانزدهم

شمارش، بدون شمردن

فصل ۶ ریاضی دهم

۶۲۴	۶۳۵	درس ۱: مقدمه ای بر علم آمار
۶۲۵	۶۳۶	درس ۲: شاخص های مرکزی
۶۲۸	۶۳۷	درس ۳: شاخص های پراکندگی

فصل شانزدهم

آمار

فصل ۷ ریاضی دهم

فصل ۷ ریاضی یازدهم

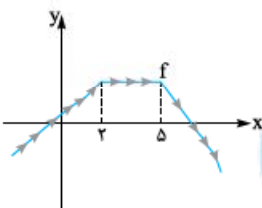
۶۴۲	۶۵۹	درس ۱: ترسیم های هندسی
۶۴۵	۶۶۱	درس ۲: استدلال
۶۴۷	۶۶۲	درس ۳: نسبت و تناسب - قضیه تالس
۶۵۰	۶۶۶	درس ۴: تشابه مثلث ها
۶۵۳	۶۶۷	درس ۵: نسبت مساحت ها
۶۵۶	۶۷۰	درس ۶: روابط طولی مثلث قائم الزاویه

فصل هفدهم

هندسه

فصل ۲ ریاضی یازدهم

درس هشتم یکنوازی (توابع صعودی و نزولی)



حرکت از چپ به راست

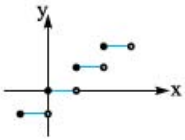
در تابع روبه‌رو اگر روی نمودار تابع از چپ به راست حرکت کنیم، گاهی اوقات y ها در حال افزایش هستند، گاهی اوقات y ها در حال کاهش‌اند و در قسمت‌هایی تابع ثابت می‌شود و عرض نقاط عوض نمی‌شود. هر کدام از این وضعیت‌ها، یک اسمی دارد تا بتوانیم منظورمان را راحت‌تر برسانیم، مثلاً می‌گوییم تابع f در $(-\infty, \beta]$ اکیداً صعودی است. بیایید حالت‌های مختلف را در جدول زیر ببینیم:

توابع صعودی و نزولی

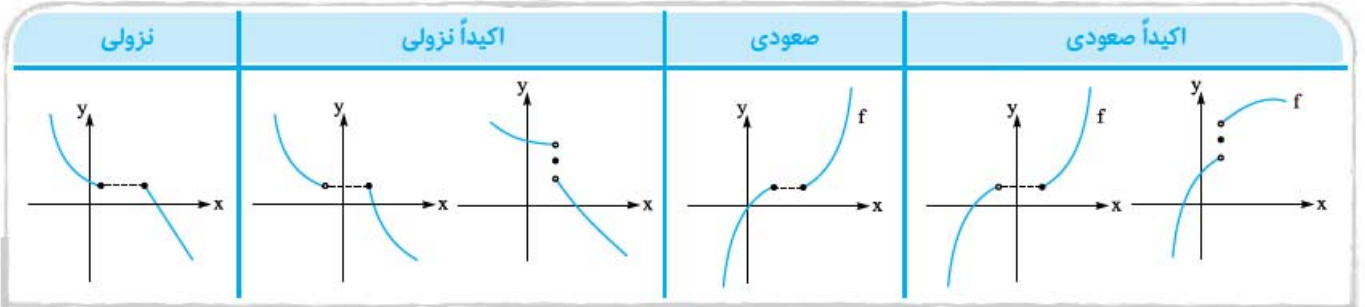
مثال	شماتیک	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	
		با افزایش x ، y هم افزایش پیدا می‌کند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	تابع اکیداً صعودی
		با افزایش x ، یا y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	تابع صعودی
		با افزایش x ، y کاهش پیدا می‌کند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	تابع اکیداً نزولی
		با افزایش x ، یا y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	تابع نزولی

اشاره ۳۱

هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز به حساب می‌آید. دقت کنید عکس این حرف درست نیست یعنی نمی‌توانیم بگوییم که هر تابع صعودی، اکیداً صعودی است. مثلاً تابع $y = [x]$ فقط صعودی است.

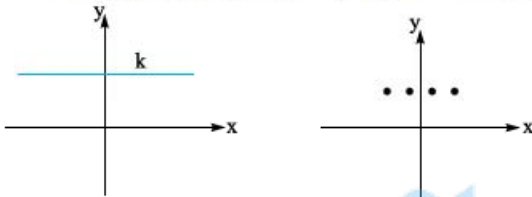


البته تشخیص صعودی یا نزولی بودن از روی نمودار گاهی اوقات به دقت بیشتری احتیاج دارد، نمودارهای زیر را نگاه کنید:



نکته

اگر با افزایش x ، y ثابت بماند ($x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 = y_1$) می‌گوییم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.



آزمون ۱۴ | تابع $f(x) = (a-1)x - 2a$ هم صعودی است و هم نزولی. کدام جمله درباره این تابع درست است؟

(۱) f اکیداً صعودی است.

(۲) f اکیداً نزولی است.

(۳) محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{2a}{a-1}$ قطع می‌کند.

(۴) $f(3) = -2$

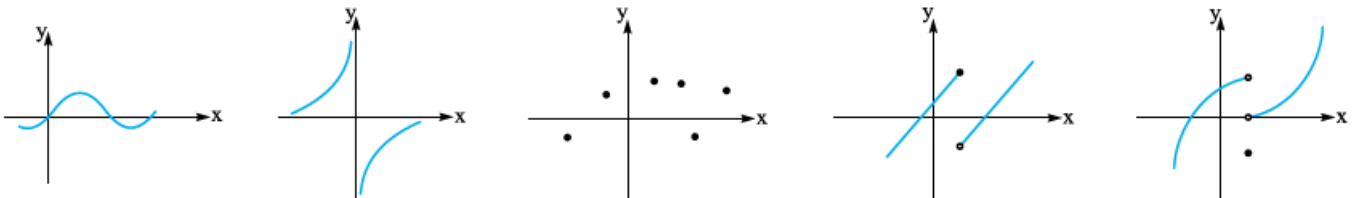
پاسخ ۱۳ | تابع $f(x)$ هم صعودی است و هم نزولی؛ تنها تابعی که این ویژگی را دارد تابع ثابت است. می‌دانیم در تابع ثابت نباید x داشته باشیم پس باید ضریب x یعنی $a-1$ برابر صفر باشد:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=-2$$

حالا برویم سراغ بررسی گزینه‌ها: در تابع $f(x) = -2$ با افزایش x مقادیر y تغییری نمی‌کند، پس f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست و گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. تابع $f(x) = -2$ یک تابع ثابت است، پس $f(3) = -2$ و (۳) درست است. حواسمان باشد که تابع $f(x) = -2$ اصلاً محور x ها را قطع نمی‌کند و (۴) هم نادرست است.

توابع یکنوا و غیریکنوا

به تابع‌های صعودی، اکیداً صعودی، نزولی، اکیداً نزولی و ثابت، می‌گوییم: «یکنوا». به تابع‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، می‌گوییم: «اکیداً یکنوا». بعضی توابع، رفتار یکنوا ندارند، یعنی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y همیشه زیاد یا کم نمی‌شود یا ثابت نمی‌ماند بلکه گاهی افزایش و گاهی کاهش دارد. این توابع را غیریکنوا می‌نامیم. حالا بگویید چرا نمودارهای زیر غیریکنوا هستند؟



بررسی یکنوایی تابع

۱. یکنوایی در نمایش زوج مرتبی

در نمایش زوج مرتبی، x ها را به ترتیب از کم به زیاد می‌چینیم و به y ها نگاه می‌کنیم:

$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10)\}$ اکیداً صعودی است (با افزایش x ، y ها همواره زیاد شده‌اند).

$g = \{(-1, 1), (0, 2), (2, 2), (3, 7)\}$ صعودی است (با افزایش x ، y ها زیاد شده یا ثابت مانده‌اند).

$h = \{(-2, 4), (-1, 2), (0, 1)\}$ اکیداً نزولی است (با افزایش x ها کم شده‌اند).
 $k = \{(1, 2), (2, 5), (3, 0)\}$ یکنوا نیست (با افزایش x ها زیاد و کم شده‌اند).

آزمون ۱ اگر $f = \{(-1, 1), (0, 2a - 1), (1, a + 5), (2, 7)\}$ اکیداً صعودی باشد. حدود a کدام است؟

- (۱) $1 < a < 6$ (۲) $1 < a < 2$ (۳) $2 < a < 6$ (۴) $a < 1$

پاسخ ۱ **راه ۱** خوشبختانه x از چپ به راست مرتب هستند:

$-1, 0, 1, 2$

$$\underbrace{1 < 2a - 1}_{a > 1} < \underbrace{a + 5 < 7}_{a < 2}$$

$$a < 6$$

پس y ها باید افزایشی باشند:

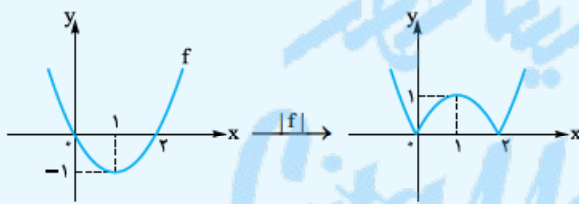
بنابراین به ازای $1 < a < 2$ همه شرطها تأمین می‌شوند.

عددگذاری به ازای $a = 2$ تابع $\{(1, 7), (2, 7), (0, 3), (-1, 0)\}$ صعودی است اما اکید نیست پس $a = 2$ غلط است. به ازای $a = 3$ تابع $\{(2, 7), (1, 8), (0, 5), (-1, 1)\}$ یکنوا نیست. پس $a = 3$ هم غلط است. با قراردادن $a = 0$ نیز تابع $\{(2, 7), (1, 5), (0, -1), (-1, 1)\}$ یکنوا نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست‌اند.

- **۲. یکنوایی در نمایش جبری** تا قبل از فصل کاربرد مشتق، بهترین راه تعیین یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است. خصوصاً اگر تابع ما دارای قدرمطلق یا براکت باشد و یا چندجمله‌ای باشد.

آزمون ۲ تابع $f(x) = x(x - 2)$ و $|f|$ در فاصله $(0, a)$ یکنوا است. اگر a بیشترین مقدار را داشته باشد. مقدار a و وضع تابع در این بازه کدام است؟

- (۱) صعودی (۲) صعودی (۳) نزولی (۴) نزولی



پاسخ ۲ نمودار $y = x(x - 2)$ ریشه‌هایش صفر و ۲ است و نمودارش

به راحتی قابل رسم است. بادتان هست که برای رسم $|f|$ باید قسمت‌های زیر محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کردیم:

حالا با توجه به نمودار در فاصله $(0, 1)$ اکیداً صعودی است پس $a = 1$ است.

خاطره رأس سهمی دقیقاً در وسط دو ریشه‌اش قرار دارد.

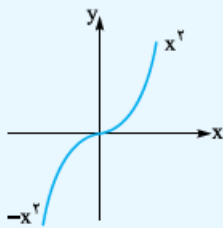
اگر در تست، فقط صحبت از یکنوا بودن و نبودن گزینه‌ها باشد، یکی از بهترین کارها، عددگذاری و استفاده از مفهوم یکنوایی است. تست زیر را ببینید:

BOOK BANK

آزمون ۳ کدام تابع اکیداً صعودی است؟

- (۱) $y = [x]$ (۲) $y = x - [x]$ (۳) $y = \frac{|x|}{x}$ (۴) $y = x|x|$

پاسخ ۳



(۱) اگر $x_1 = 0/7$ و $x_2 = 0/7$ را قرار دهیم، $y_1 = y_2 = 0$ می‌شود، پس تابع اکیداً صعودی نیست.

(۲) اگر $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ باشند، $y_1 = y_2 = 0$ می‌شود، یعنی تابع اکیداً صعودی نیست.

(۳) به ازای تمام x های مثبت مقدار تابع برابر ۱ است، یعنی تابع ثابت می‌شود و در نتیجه اکیداً صعودی نیست.

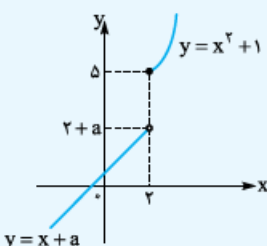
پس (۴) درست است، نمودارش را هم ببینیم:

در تابع‌های چندضابطه‌ای، بعضی وقت‌ها باید مقدار مجهول را طوری انتخاب کنیم که تابع مثلاً اکیداً صعودی شود. این تست را ببینید:

آزمون ۴ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x + a & x < 2 \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد. حدود a کدام است؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a \leq 3$ (۳) $a \leq 1$ (۴) $a \leq 0$

پاسخ ۴ شکل را ببینید:



$y = x^2 + 1$ برای x های ۲ یا بیشتر، قسمتی از شاخه سمت راست سهمی را نشان می‌دهد که در $x = 2$ ، عرض آن ۵ است و در ادامه، اکیداً صعودی است.

$y = x + a$ خطی با شیب ۱ است که در $x = 2$ مقدار نهایی آن $2 + a$ است.

حالا با توجه به شکل و اکیداً صعودی بودن تابع باید $2 + a \leq 5$ باشد، پس $a \leq 3$.

بررسی یکنوایی توابع خاص

الف. توابع معروف همواره یکنوا

بعضی توابعی که بلدیم همواره یکنوا هستند، توابعی مانند $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ اکیداً صعودی هستند و یا تابع $y = [x]$ صعودی است و ... در بین این توابع، توابع خطی، نمایی و لگاریتمی در تست‌ها بیشتر مورد توجه هستند، نکات این سه تابع را خیلی جمع‌وجور در جدول زیر می‌بینیم:

تابع	یکنوایی	نمودار
تابع خطی $f(x) = ax + b$	اگر $a > 0$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، اکیداً نزولی است.	
تابع نمایی $y = a^x$	اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است.	
تابع لگاریتمی $y = \log_a x$	اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است.	

تست ۱ | اگر $f(x) = (a+2)x + 3$ اکیداً صعودی و $g(x) = (a-1)x - 1$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(-2, 1]$ (۴) $[-2, 1]$

پاسخ ۱ | f و g هر دو تابع خطی اند اکیداً صعودی است، پس باید شیب f مثبت باشد: $a+2 > 0$ پس $a > -2$ و g نزولی است پس باید شیب g منفی یا صفر باشد: $a-1 \leq 0$ پس $a \leq 1$

دقت کنید که گفته g اکیداً نزولی است و g می‌تواند ثابت باشد؛ پس داریم: $-2 < a \leq 1$

تست ۲ | اگر $f(x) = (\frac{m-1}{2})^x$ اکیداً نزولی و $g(x) = \log_{\frac{m}{2}} x$ صعودی باشد، m کدام مقادیر را دارد؟

- (۱) $(2, 3)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) نشدنی

پاسخ ۲ | f یک تابع نمایی است، برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید پایه آن بین صفر و ۱ باشد:

$$0 < \frac{m-1}{2} < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 < m-1 < 2 \xrightarrow{+1} 1 < m < 3$$

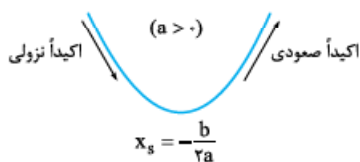
از طرف دیگر در $g(x) = \log_{\frac{m}{2}} x$ برای آن که g صعودی باشد باید پایه لگاریتم از ۱ بیشتر باشد، پس $1 < \frac{m}{2}$ و در نتیجه $m > 2$ و از اشتراک این‌ها $2 < m < 3$.

ب. توابع معروف غیر یکنوا

در بین تابع‌هایی که می‌شناسیم تابع درجه ۲ (سهمی) و تابع هموگرافیک همواره غیر یکنوا هستند، البته در قسمت‌های محدودی از دامنه ممکن است این توابع هم یکنوا شوند.

۱. تابع درجه دوم سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$

در کل \mathbb{R} یکنوا نیست.



سهمی رو به بالا قبل از رأس یعنی قبل از $x = -\frac{b}{2a}$ اکیداً نزولی و پس از آن اکیداً صعودی است. در سهمی رو به پایین برعکس است. یعنی قبل از رأس اکیداً صعودی و بعد از رأس اکیداً نزولی می‌شود:

مثلاً $y = x^2 - 4x - 1$ سهمی رو به بالا با رأس در $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$ است، پس در فاصله $(-\infty, 2)$ و هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در فاصله $(2, +\infty)$ و زیرمجموعه‌های آن اکیداً صعودی است.

نکته سهمی در هر بازه‌ای که رأس سهمی درون آن بازه باشد (یعنی سر و ته بازه نباشد!)، غیریکنوا است.

آزمون ۱ اگر $f(x) = -x^2 + 3x$ در $(-\infty, a)$ اکیداً یکنوا باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

$$x_S = -\frac{(-3)}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

پاسخ ۲ گفتیم سهمی در $(-\infty, x_S)$ و هم‌چنین $(x_S, +\infty)$ اکیداً یکنوا است. پس حداکثر a همان x_S است.

گاهی اوقات باید به کلمه‌ها و قیده‌های صورت سؤال خیلی دقت کنیم. تست زیر را ببینید:

آزمون ۲ اگر $y = ax^2 + (a^2 - 3)x$ فقط در $(1, +\infty)$ نزولی باشد، a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) -۱

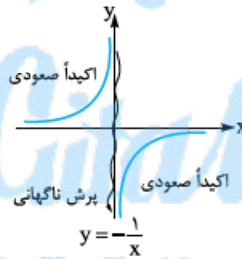
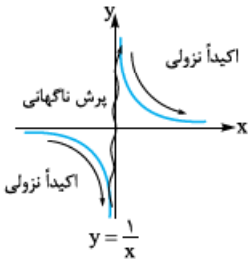
پاسخ ۲ این‌که گفته فقط در $(1, +\infty)$ نزولی است؛ یعنی سهمی باید این شکلی باشد:

پس داریم:

$$x_S = -\frac{a^2 - 3}{2a} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^2 - 3 = -2a \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} a = 1 \text{ یا } -3$$

حالا دقت کنیم که سهمی باید رو به پایین باشد، پس $a < 0$ است؛ پس فقط $a = -3$ قابل قبول است.

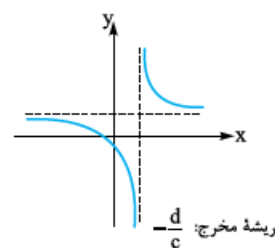
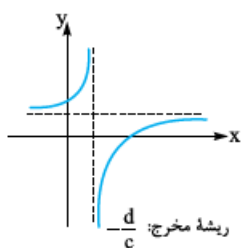
۲. تابع هموگرافیک • اول سراغ $y = \frac{1}{x}$ می‌رویم:



از $-\infty$ تا صفر اکیداً نزولی است، بعد در دو طرف صفر از پایین محور y ‌ها به بالای آن می‌آید و سپس دوباره از صفر تا $+\infty$ اکیداً نزولی است. پس $\frac{1}{x}$ با این‌که در هر کدام از شاخه‌هایش اکیداً نزولی است، در دامنه خودش یکنوا نیست. $y = -\frac{1}{x}$ هم در هر کدام از شاخه‌هایش اکیداً صعودی است ولی در کل غیریکنواست.

بقیه تابع‌های هموگرافیک $(y = \frac{ax+b}{cx+d})$ هم همین‌طور هستند. یعنی در محل ریشه مخرج یک پرش ناگهانی دارند. اما قبل و بعد از ریشه مخرج یکنوا

هستند. ببینید:



۱) تک‌تک شاخه‌های نمودار صعودی اکید هستند.

۲) تابع در $(-\infty, -\frac{d}{c})$ و در $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۳) در کل دامنه‌اش غیریکنوا است.

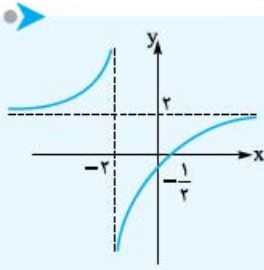
۱) تک‌تک شاخه‌های نمودار اکیداً نزولی‌اند.

۲) تابع در $(-\infty, -\frac{d}{c})$ و در $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۳) در کل دامنه‌اش غیریکنوا است.

آزمون ۱ تابع با ضابطه $y = \frac{2x-1}{x+2}$ در کدام بازه، یکنوا است؟ نوع یکنوایی کدام است؟

- ۱) $(-\infty, 0)$ ، نزولی ۲) $(-2, 4)$ ، نزولی ۳) $(-2, 4)$ ، صعودی ۴) $(-\infty, 0)$ ، صعودی



پاسخ ۳ دیدیم که مشکل در محل ریشهٔ مخرج است، پس الان این تابع در $x = -2$ پرش خواهد کرد و باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل -2 نباشد، پس گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند. برای تعیین صعودی یا نزولی بودن باید نمودار را ببینیم:

تابع در $(-\infty, -2)$ و نیز در $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

خاطره اگر رسم شکل هموگرافیک یادتان رفته، نگاهی به قسمت‌های قبلی داشته باشید.

نکته بعداً در فصل کاربرد مشتق، خواهیم دید که در تابع هموگرافیک، اگر $ad - bc > 0$ باشد، شاخه‌هایش صعودی و اگر $ad - bc < 0$ باشد، شاخه‌هایش نزولی است و اگر $ad - bc = 0$ شد، اصلاً هموگرافیک نیست!

یکنوایی و نامساوی‌ها

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

گفتیم اگر f صعودی اکید باشد:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

و اگر f نزولی اکید باشد:

حالا از این جهت به موضوع نگاه کنید که اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. اما وقتی f اکیداً نزولی است، با حذف آن از دو طرف جهت نامساوی تغییر می‌کند. این‌ها را ببینید:

$$f(a-1) > f(3-a) \xrightarrow[\text{است.}]{f \text{ اکیداً صعودی}} a-1 > 3-a \text{ (جهت تغییر نکرد)}$$

$$f(6x+1) > f(x^2-3) \xrightarrow[\text{است.}]{f \text{ اکیداً نزولی}} 6x+1 < x^2-3 \text{ (جهت تغییر کرد)}$$

آزمون ۴ اگر $f(a-1) < f(2a-1)$ و تابع f اکیداً نزولی باشد، a چند مقدار صحیح را اختیار نمی‌کند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$a^2 + 1 > 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 2 > 0$$

پاسخ ۳ خوب تابع f اکیداً نزولی است، پس جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} a = 1 \text{ یا } 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & -\infty & 1 & 2 & +\infty \\ \hline & & + & - & + \\ & & \text{ج} & & \text{ج} \end{array} \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 2$$

پس a نمی‌تواند ۱ یا ۲ باشد و دو مقدار صحیح را نمی‌پذیرد.

یکنوایی توابع $f \circ g$ ، $f \pm g$ ، kf و $\frac{f}{g}$

۱ اگر $f(x)$ صعودی باشد، با استفاده از خواص نامساوی می‌توانیم نشان دهیم که $kf(x)$ برای $k > 0$ صعودی و برای $k < 0$ نزولی است.

مثلاً با توجه به صعودی بودن \sqrt{x} ، مطمئن هستیم $2\sqrt{x}$ و $\frac{1}{5}\sqrt{x}$ نیز صعودی‌اند و $-\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ نزولی‌اند.

۲ اگر f و g هر دو صعودی باشند، $f+g$ نیز صعودی است و در مورد $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $f-g$ حکم قطعی نمی‌توان داد.

مثلاً چون \sqrt{x} و 2^x صعودی‌اند، تابع $2^x + \sqrt{x}$ نیز صعودی است. به عنوان مثال مهم‌تر، $[x]$ صعودی و x نیز صعودی اکید است، پس $x + [x]$ صعودی اکید است.

اشاره ۳ اگر در دو تابع صعودی که با هم جمع می‌شوند، حداقل یکی صعودی اکید باشد، مجموع آن‌ها هم صعودی اکید است.

این حرف‌ها در حالتی که توابع نزولی باشند هم درست است. مثلاً $(\frac{1}{3})^x$ و $-x$ هر دو نزولی هستند. پس $-x + (\frac{1}{3})^x$ نیز نزولی است.

۳ اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی و $g-f$ نزولی است.

آزمون ۴ کدام تابع نزولی است؟

۴ $-\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

۳ $\log_{1/5} x + x^2$

۲ $(\frac{1}{4})^x + 2^x$

۱ $-2x + \frac{1}{x}$

پاسخ ۴ ۱) $-2x$ نزولی و $\frac{1}{x}$ غیریکنوا است. پس برای $-2x + \frac{1}{x}$ نظری نداریم.

۲) $(\frac{1}{4})^x$ نزولی و 2^x صعودی است و از مجموع آن‌ها خبر نداریم.

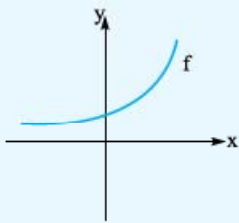
- ۳) $\log_{\frac{1}{5}} x$ نزولی است و ما را مجبور می‌کند فقط $x > 0$ باشد، برای این x های مثبت $x^{\frac{1}{5}}$ اکیداً صعودی است. پس در مورد مجموع آن‌ها حرفی نمی‌شود زد.
- ۴) $-\sqrt{x}$ ، نزولی است و x های مثبت را قبول می‌کند، $\frac{1}{x}$ هم برای $x > 0$ نزولی است. پس جمع دو تابع نزولی را داریم که نزولی است.

یکنوایی ترکیب توابع

در مورد یکنوایی تابع‌های مرکب برای صعودی‌ها \oplus و برای نزولی‌ها \ominus بگذارید و علامت‌ها را در هم ضرب کنید. در مورد تابع مرکب $f \circ g$ اگر f و g هم (هر دو صعودی \oplus یا هر دو نزولی \ominus) باشند تابع مرکب صعودی می‌شود ($\oplus \oplus = \oplus$, $\ominus \ominus = \oplus$) و اگر f و g متفاوت باشند (یکی صعودی و یکی نزولی) تابع مرکب نزولی است ($\oplus \ominus = \ominus$).

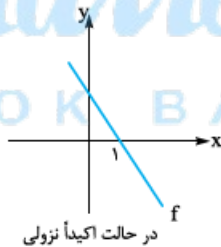
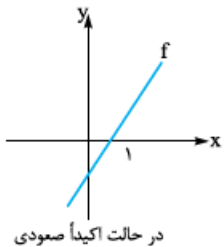
مثلاً چون $f(x) = x^2 + 1$ صعودی و $g(x) = -2x + 5$ نزولی هستند، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ صعودی‌اند (از ترکیب دو تابع مثل هم ساخته شده‌اند) و تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ از این‌ها جالب‌تر در مثال بالا، $f(3x-1)$ صعودی است (چون f و $3x-1$ صعودی‌اند) و $g(1+2^x)$ نزولی است (چون g نزولی و $1+2^x$ صعودی است).

آزمون ۱ | شکل روبه‌رو نمودار f است. کدام تابع از نظر یکنوایی با بقیه فرق دارد؟



- ۱) $f(x^2 + x)$
 ۲) $-f(-x)$
 ۳) $f(3x + 1)$
 ۴) $\frac{1}{f(x)}$

پاسخ ۱ | ۱) f اکیداً صعودی است و $x^2 + x$ هم که از جمع دو تابع اکیداً صعودی تشکیل شده است، اکیداً صعودی است، پس ترکیب آن‌ها هم اکیداً صعودی است. ۲) هم‌چنین $f(-x)$ نزولی است و $-f(-x)$ صعودی است. ۳) f و $3x + 1$ اکیداً صعودی هستند پس ترکیب آن‌ها هم اکیداً صعودی است. حالا برای ۴) دقت می‌کنیم که f صعودی است و مقادیر مثبت دارد. پس در $\frac{1}{f(x)}$ ، مخرج در حال زیاد شدن است و کل تابع کاهش می‌یابد؛ یعنی $\frac{1}{f}$ نزولی است (قرینه تابع صعودی، نزولی است).



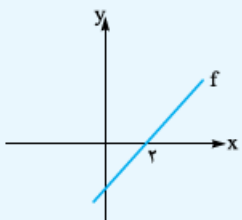
یک‌تیپ مهم • یک مدل سؤال هم سال‌ها قبل در کنکور آمد که هنوز پس‌لرزه‌هایش دیده می‌شود. مثلاً می‌گوید f تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی با دامنه \mathbb{R} است و $f(1) = 0$ ، کلید حل تست این است که نمودار f را به شکل روبه‌رو رسم کنیم:

این تست را ببینید:

آزمون ۲ | تابعی اکیداً صعودی با دامنه \mathbb{R} است که محور x را با طول ۲ قطع می‌کند. دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ شامل کدام نیست؟

- ۱) $(0, 2)$ ۲) $(-\infty, 0)$ ۳) $(2, +\infty)$ ۴) \emptyset

پاسخ ۱ | گفتیم معنی صورت سؤال این است که نمودار تابع این شکلی می‌شود:



جدول تعیین علامت f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f		$-$	$+$

و می‌توانیم $xf(x)$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x		$-$	$+$	$+$
$f(x)$		$-$	$-$	$+$
$xf(x)$		$+$	$-$	$+$

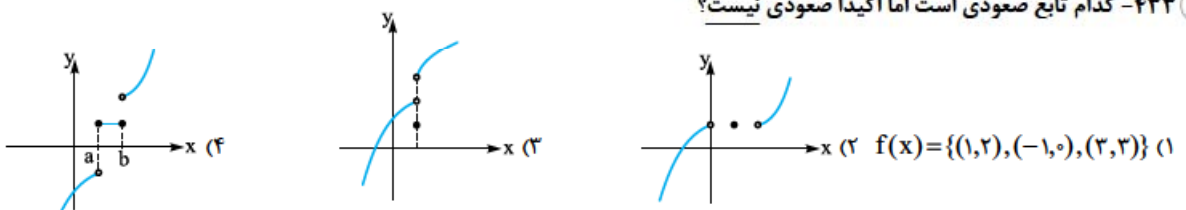
یعنی دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ به صورت $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - (0, 2)$ است. پس دامنه شامل $(0, 2)$ نیست.



درس هشتم: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)

بررسی یکنوایی تابع

۴۳۳- کدام تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست؟



۴۳۴- اگر تابع $f = \{(1,1), (3,6), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (10, 20)\}$ اکیداً صعودی باشد. حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۴۳۵- اگر $f = \{(1, 3a+1), (-1, a+1), (2, 4a+3)\}$ تابعی صعودی باشد. مقادیر a در کدام بازه است؟

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

برای تعیین یکنوایی توابعی که چندضابطه‌ای، قدرمطلق یا برآنتی هستند. همیشه تابع را رسم می‌کنیم.

۴۳۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ چگونه است؟

- (۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۴۳۷- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً صعودی نیست؟

- (۱) $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$ (۲) $f(x) = 2 - |x - 1|$ (۳) $f(x) = 2x - |x - 1|$ (۴) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$

۴۳۸- تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x > 1 \\ k & x = 1 \\ +1 & x < 1 \end{cases}$ به ازای چند مقدار صحیح k . در دامنه‌اش نزولی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳۹- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 3x + a & x < 0 \end{cases}$ بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۴۴۰- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ تابعی نزولی باشد. ضابطه g کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $y = |x|$ (۲) $y = -x^2$ (۳) $y = -|x| - x$ (۴) $y = x + |x|$

۴۴۱- یکنوایی تابع $f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|}$ در دامنه $\{0\} - (-1, 1)$ چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۴۴۲- دو تابع $y = x|x|$ و $y = x + |x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی هستند؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $[0, \frac{1}{3}]$ (۴) $[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}]$

۴۴۳- تابع $f(x) = |x|(x-1)$ در بازه (a, b) . اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۴۴- تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ و $x > 0$ در بازه (a, b) نزولی است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۴۵- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

۴۴۶- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه. اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۴۴۷- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = f(1-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-3, -1)$ (۲) $[-4, -2]$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $[1, 2]$

بررسی یکنوایی توابع خاص

۴۴۸- کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک و غیریک‌نوا است؟

- (۱) $y = 2^x - 2$ (۲) $y = -\log_2 x + 2$ (۳) $y = -2^{-x}$ (۴) $y = \frac{1}{x}$

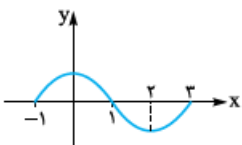
۴۴۹- به ازای چند مقدار صحیح m . تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار m

(کتاب درسی)

(سرآسری ۹۸)

(خارج ۹۸)



(کتاب درسی)

۴۵۰- اگر تابع $f(x) = (a^x - 3)^x$ در \mathbb{R} هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع $g(x) = a^x$ چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) اکیداً صعودی (۴) اکیداً نزولی

۴۵۱- تابع $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

۴۵۲- تابع $f(x) = \log_{1/5} x^2$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

در سهمی‌ها، یک سمت رأس صعودی و سمت دیگر رأس نزولی است.

۴۵۳- تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ روی بازه $[-1, 2]$ چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) نزولی (۴) صعودی

۴۵۴- تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) منفی

۴۵۵- اگر تابع $f(x) = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدوده m کدام است؟

- (۱) $-2 \leq m < 0$ (۲) $0 < m \leq 2$ (۳) $m \leq -2$ (۴) $m \geq 2$

۴۵۶- تابع $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 1$ در بازه $[-1, 2]$ غیریکنوا است. بازه m کدام است؟

- (۱) $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (۲) $-1 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$

۴۵۷- اگر تابع $f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + 3$ همواره یکنوا باشد، $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

تابع همواره افیک، هیچ‌گاه یکنوا نیست، مگر این‌که دامنه تابع محدود شده باشد.

۴۵۸- تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام یک از بازه‌های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟

- (۱) $(-3, -1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۴۵۹- تابع $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۶۰- کدام یک از توابع زیر در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است؟

- (۱) $y = \frac{x-1}{x+2}$ (۲) $y = \frac{2x-3}{x+1}$ (۳) $y = \frac{x+1}{x-2}$ (۴) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

۴۶۱- اگر در بازه $(1, +\infty)$ تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, 2) - \{-2\}$ (۴) $(-\infty, 2] - \{-2\}$

برای حل بقیه تست‌ها بهتر است، به مفهوم صعودی و نزولی بودن، توجه کنید.

۴۶۲- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(3) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $\mathbb{R} - (0, 3)$ (۳) $(-\infty, 3]$ (۴) $[3, +\infty)$

۴۶۳- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2-x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شمار اکیداً صعودی‌ها: هر که x اش بیشتر، y اش بیشتر.

۴۶۴- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(3-2a) > f(1+a)$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

۴۶۵- اگر $g(x) = \sqrt{f(2x+1)} - f(x-2)$ و f اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-2, +\infty)$ (۲) $(-2, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -2]$ (۴) $(-\infty, -2)$

۴۶۶- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۲) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (۳) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

۴۶۷- اگر $f(x) = \frac{1-x}{x}$ ، آن‌گاه در کدام یک از بازه‌های زیر نمودار تابع $y = f(1+x^2)$ بالای نمودار تابع $y = f(3+x^2)$ قرار دارد؟

- (۱) $(0, \sqrt{2})$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(-2, -\sqrt{2})$

۴۶۸- چندتا از عبارات زیر درست است؟

- (الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f + g$ یک تابع ثابت است.
 (ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f + g$ صعودی اکید است.
 (پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f - g$ صعودی اکید است.
 (ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f \times g$ اکیداً صعودی است.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۶۹- اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(-x^3)$ چگونه تابعی است؟

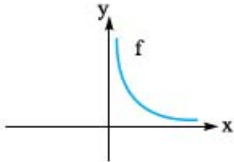
- (۱) اکیداً نزولی (۲) اکیداً صعودی (۳) غیریکنوا (۴) نامشخص می‌باشد.

۴۷۰- اگر f تابعی اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

- (۱) $y = f(x) + \sqrt{x}$ (۲) $y = g \circ g(x)$ (۳) $y = g(x^2)$ (۴) $y = f \circ g(x)$

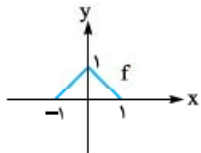
۴۷۱- با توجه به نمودار تابع f ، توابع $g(x) = 2x - f(x)$ و $h(x) = \frac{1}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

- (۱) نزولی - نزولی
 (۲) صعودی - نزولی
 (۳) نزولی - صعودی
 (۴) صعودی - صعودی



۴۷۲- نمودار تابع $f(x)$ به شکل روبه‌رو است. یکنوایی تابع $y = f \circ f(x)$ چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی
 (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی



۴۷۳- اگر g تابعی اکیداً نزولی و $g(-1) = 0$ باشد، جواب نامعادله $\frac{x^2 - 3x}{g(x)} < 0$ شامل کدام بازه است؟ ($D_g = \mathbb{R}$)

- (۱) $(-2, -1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(2, 3)$

۴۷۴- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ، $g(x) = x^2 - x$ و تابع $(f \circ g)(x+1)$ در بازه $(a, +\infty)$ صعودی باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۷۵- تابع $f(x) = |a + x^2|$ در بازه $(-\infty, a - 2)$ نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر a وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۴۷۶- در مورد تابع با ضابطه $y = (-\sqrt{1 - 3^{5-x}})^5$ کدام درست است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) غیریکنوا (۴) ثابت