

فهرست

پاسخ	سوال	
۷۸	۸	فصل اول: تابع
۹۳	۱۸	فصل دوم: مثلثات
۱۰۴	۲۴	فصل سوم: حد و پیوستگی
۱۱۴	۲۹	فصل چهارم: مشتق
۱۲۱	۳۴	فصل پنجم: کاربرد مشتق
۱۲۸	۳۸	فصل ششم: هندسه (تفکر تجسمی و مقاطع مخروطی)
۱۳۲	۴۲	فصل هفتم: شمارش و احتمال
۱۳۸	۴۶	فصل هشتم: معادله درجه دوم و سهمی
۱۴۳	۵۰	فصل نهم: معادله، نامعادله و تعیین علامت
۱۴۷	۵۳	فصل دهم: هندسه تحلیلی
۱۵۳	۵۷	فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی
۱۵۶	۶۱	فصل دوازدهم: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری
۱۶۰	۶۳	فصل سیزدهم: مجموعه، الگو و دنباله
۱۶۴	۶۶	فصل چهاردهم: آمار
۱۶۶	۶۸	فصل پانزدهم: هندسه
۱۷۰	۷۲	فصل شانزدهم: قدرمطلق و برکت

فصل پنجم کاربرد مشتق



۲۷۴- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^6 - 3}{x^2 - 2}$; $x \in (-2, 2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۷۵- اگر تابع $f(x) = \frac{x^f}{x^2 - 8}$ در بازه (a, b) پیوسته و اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt[3]{4} - 1$ (۳) $2\sqrt[3]{4}$ (۴) $2(\sqrt[3]{4} - 1)$

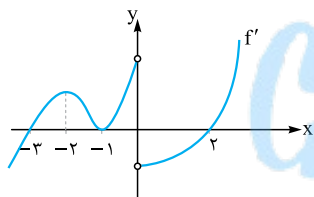
۲۷۶- مجموعه مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + |x|$ صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $[-1, +\infty)$ (۲) \mathbb{R} (۳) $(0, +\infty) \cup [-1, 0)$ (۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

۲۷۷- کدام عبارت برای تابع $f(x) = 2x - \frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ درست است؟

- (۱) تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ صعودی است.
 (۲) تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است.
 (۳) تابع f در بازه $(1, +\infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
 (۴) تابع f در بازه $(1, +\infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

۲۷۸- نمودار مشتق تابع پیوسته f به صورت مقابل است. اگر f از مبدأ بگذرد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



- (۱) f دارای ۲ مینیمم نسبی - فاقد ماکزیمم
 (۲) f در بازه $[0, +\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد.
 (۳) مبدأ نقطه مینیمم نسبی است.
 (۴) f در بازه $(-2, -3)$ اکیداً صعودی است.

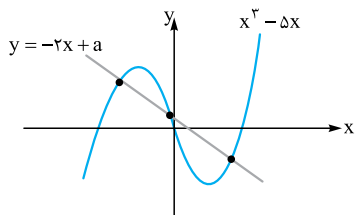
۲۷۹- اگر نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^2 - 6a^2)\sqrt[5]{x^2}$ تشکیل مثلث قائم‌الزاویه بدهند، مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۸۰- به ازای کدام مقادیر a ، هر دو اکسترمم تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + x + 1$ در بازه $(-1, 3)$ قرار دارد؟

- (۱) $(-2, 2)$ (۲) $(-\infty, \frac{1}{3})$ (۳) $(-\frac{1}{3}, -2)$ (۴) $(-\infty, -2)$

۲۸۱- نمودار $f(x) = x^3 - 5x$ را رسم کرده‌ایم. اگر مطابق شکل خط $y = -2x + a$ را طوری رسم کنیم که با



نمودار f همواره ۳ نقطه برخورد داشته باشد. حدود a کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$
 (۲) $(-2, 2)$
 (۳) $(-3, 3)$
 (۴) $(-4, 4)$

۲۸۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۸۳- مینیمم تابع $f(x) = x^6 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 6$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲۸۴- مجموع مقادیر اکسترمم $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{11}{3}$

۲۸۵- اگر مجموع اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2+ax}{x-2}$ برابر ۱۶ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۲۸۶- اگر حاصل ضرب اکسترمم‌های تابع $f(x) = \frac{x^2+x+a}{x^2+4}$ برابر $-\frac{3125}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۲۸۷- مینیمم مطلق تابع $f(x) = |x^3 - x^2|$ در بازه $[-\frac{1}{5}, \sqrt{3}]$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{9}{4}$ (۲) -۲ (۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{9}{8}$

۲۸۸- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{2x^5 + 8x^2 + 8x + 1}{x^5 + 4x^2 + 4x + 4}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) ۵

۲۸۹- ماکزیمم مطلق تابع $y = \sqrt[5]{x^5 - 4x^2 - x^2} - x + 3$ کدام است؟

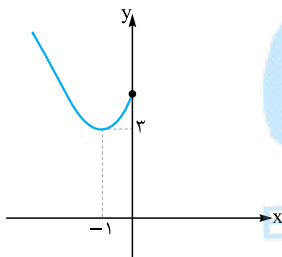
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۹۰- اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد، حداکثر مقدار $f(x) = ax - (1+a^2)x^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{16}$

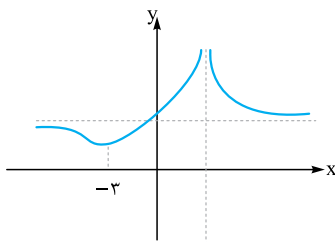
۲۹۱- اگر نمودار $f(x) = (a - \sqrt{-x+b})^2 + c$ به صورت مقابل باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



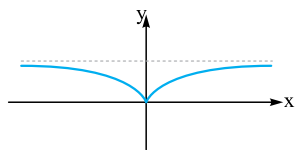
۲۹۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+a}{x^2+bx+4}$ است. a کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴



۲۹۳- قسمتی از نمودار یک تابع رسم شده است. ضابطه آن کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $y = \frac{x^2}{x^2+2}$ (۲) $y = \frac{x^2}{x^2-2}$ (۳) $y = \frac{|x|}{2+|x|}$ (۴) $y = \frac{|x|}{2-|x|}$



۲۹۴- اگر $x = 4$ طول نقطه اکسترمم تابع $f(x) = \frac{x-4\sqrt{x+a}}{\sqrt{x^2+8}}$ باشد، مقدار a و نوع اکسترمم تابع در این نقطه کدام است؟

- (۱) صفر - مینیمم (۲) صفر - ماکزیمم (۳) ۴ - مینیمم (۴) ۴ - ماکزیمم

۲۹۵- اگر $f(x) = |x^2 - 6x| \sqrt{(x-1)^2}$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع $y = 3f(-2x+2) + 4$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{25}{5}$ (۲) $-\frac{5}{5}$ (۳) $-\frac{75}{5}$ (۴) -۱

۲۹۶- در تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 151}{x^2 + 75}$ با رئوس اکسترم‌های توابع f و f' چه شکلی تشکیل می‌شود؟

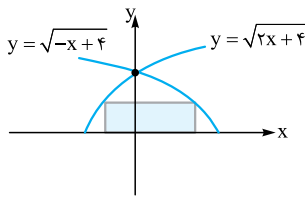
- (۱) مستطیل
(۲) مربع
(۳) مثلث
(۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

۲۹۷- با شرط $-2 \leq x \leq 2$ و $f(x) = x^3 - 3x$ و $g(x) = 3x^5 + 5x^3 + 4x + 4$ مجموع حداقل و حداکثر مقدار تابع gof کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) ۱۰

۲۹۸- کوتاه‌ترین فاصله سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(3, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) ۳



۲۹۹- از بین مستطیل‌هایی که مطابق شکل، دو رأس آن‌ها روی $y = \sqrt{-x+4}$ و $y = \sqrt{2x+4}$ است و یک ضلع آن منطبق بر محور x هاست، مساحت ماکزیمم کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{\sqrt{3}}$
(۲) $\frac{6}{\sqrt{3}}$
(۳) $\frac{8}{\sqrt{3}}$
(۴) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

۳۰۰- کره به شعاع ۳ مفروض است. مخروطی با حداکثر حجم در آن محاط کرده‌ایم. ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۳۰۱- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

- (۱) 32π
(۲) 64π
(۳) $\frac{256\pi}{3}$
(۴) $\frac{512\pi}{3}$

۳۰۲- استوانه‌ای درون مخروط قائم به شعاع ۳ محاط است. اگر حجم استوانه ماکزیمم باشد، شعاع آن کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) ۲
(۴) $2/5$

۳۰۳- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{4\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) $\sqrt[3]{2}$
(۴) $\sqrt{2}$

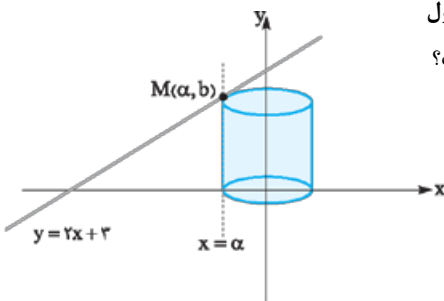
۳۰۴- کره‌ای به شعاع ۱ در مخروطی قائم محاط شده است. ارتفاع مخروط چه قدر باشد، تا حجم آن مینیمم شود؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

۳۰۵- مطابق شکل نقطه M را در ناحیه دوم روی خط $y = 2x + 3$ انتخاب می‌کنیم و خط $x = \alpha$ را حول

محور y ‌ها دوران می‌دهیم. به ازای کدام مقدار α حجم استوانه تولیدشده در ربع اول و دوم ماکزیمم است؟

- (۱) -۱
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{3}$
(۴) $-\frac{1}{4}$



۳۰۶- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول وتر بیشترین باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) ۱

۳۰۷- قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول

متوالی از محل برخورد f با نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA' کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$



۳۰۸- قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم A می‌نامیم. ماکزیمم طول AA' کدام است؟

$$\frac{2}{3\sqrt{6}} \quad (1) \quad \frac{4}{3\sqrt{6}} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad (3) \quad \frac{4}{3\sqrt{2}} \quad (4)$$

۳۰۹- اگر $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{5}$ باشد، حداقل مقدار عبارت $\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \beta$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (1) \quad \frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3) \quad \frac{4}{5} \quad (4)$$

۳۱۰- در میان تمام مستطیل‌های محیط بر مستطیلی با طول و عرض ۷ و ۵، ماکزیمم مقدار مساحت کدام است؟

$$66 \quad (1) \quad 68 \quad (2) \quad 70 \quad (3) \quad 72 \quad (4)$$

۳۱۱- دوزنقه‌ای با بیشترین مساحت ممکن در نیم‌دایره‌ای به قطر ۴ محاط است (قاعده بزرگ دوزنقه بر قطر نیم‌دایره منطبق است). ارتفاع دوزنقه کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (1) \quad \sqrt{3} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$



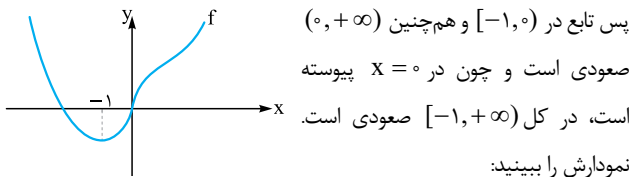
۲۷۶. گزینه ۱ تابع برای $x \geq 0$ از جمع دو قسمت صعودی $\sqrt[3]{x}$ و $|x|$ ساخته شده و اکیداً صعودی است. برای $x < 0$ داریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0$$

$$1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$



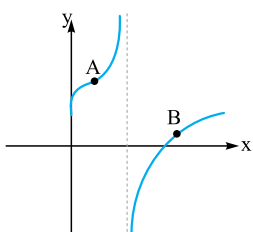
۲۷۷. گزینه ۲ راه I از تابع مشتق می‌گیریم و علامت مشتق را بررسی می‌کنیم. برای سادگی در مشتق، از توان کسری به جای رادیکال استفاده کنیم:

$$f(x) = 2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 2x - \frac{3}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{3}{3} \cdot (-\frac{1}{3})(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} = 2 + \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

واضح است که مشتق برای $x > 0$ و $x \neq 1$ مثبت است. اما تابع در $x = 1$ تعریف نمی‌شود و جدول تعیین علامت مشتق به شکل زیر است:

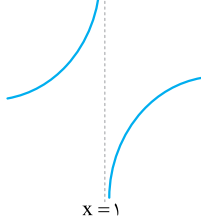
x	0	1	$+\infty$
f'	$+$	تان	$+$



و در تک‌تک بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ تابع صعودی است. نمودار تقریبی تابع را هم ببینید: دقت کنید که اولاً $(1, +\infty) \cup (0, 1)$ یک بازه نیست یعنی عبارت صورت ۱ اساساً بی‌معنی است.

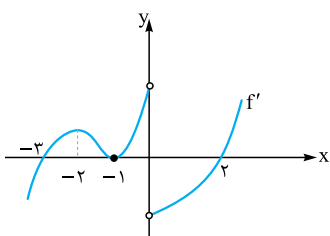
و هم‌چنین تابع در تک‌تک این بازه‌ها صعودی است نه در اجتماع آن‌ها! (به نقاط A و B دقت کنید.)

۲۷۸. راه II بدون مشتق‌گیری و با دقت به حدهای چپ و راست f در $x = 1$ نمودار تابع در اطراف این نقطه باید به شکل روبه‌رو باشد:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - \frac{3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 - \frac{3}{0^+} = -\infty$$



۲۷۸. گزینه ۴ هر جا مشتق از (-) به (+) تغییر علامت دهد تابع پیوسته f، مینیمم دارد، این اتفاق در $x = -3/2$ افتاده است.

الف) خط $y = -x + m$ از نقطه $(3, 0)$ بگذرد. در این حالت:

$$0 = -3 + m \Rightarrow m = 3$$

ب) خط $y = -x + m$ در نقطه‌های بین رأس و ۳، $(\frac{3}{2} < x < 3)$ بر سهمی مماس شود:

$$y = -(x^2 - 3x) = 3x - x^2 \Rightarrow y' = 3 - 2x$$

$$m_{\text{مماس}} = -1 \Rightarrow y' = 3 - 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

پس خط باید از $T(2, 2)$ بگذرد: $2 = -2 + m$ که نتیجه می‌دهد $m = 4$. پس مجموع مقادیر m می‌شود $3 + 4 = 7$.

۲۷۴. گزینه ۳ برای این که تابع f در بازه‌ای نزولی باشد، باید علامت مشتق منفی باشد:

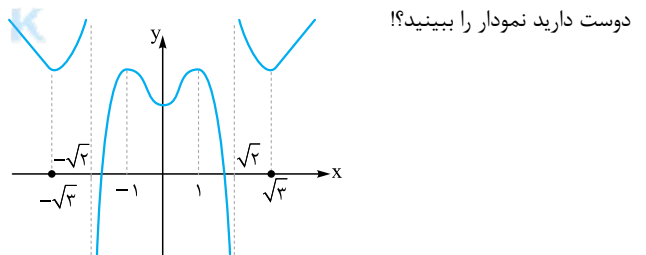
$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2} \rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 2) - 2x(x^4 - 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$= \frac{2x(x^4 - 4x^2 + 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^2 - 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 2)^2}$$

پس ریشه‌های صورت مشتق، صفر، ± 1 و $\pm\sqrt{3}$ و ریشهٔ مخرج $\pm\sqrt{2}$ است و البته مخرج اثری در علامت‌ها نمی‌گذارد. پس مطابق جدول تعیین علامت ۴ بازهٔ نزولی داریم.

x	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
f'		-	+	-	+	-	+	-	+



۲۷۵. گزینه ۱ با استفاده از جدول تغییرات تابع مشتق، بازه‌های صعودی و نزولی را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^3 - 8) - 3x^4 x^3}{(x^3 - 8)^2}$$

$$= \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^3(x^3 - 32)}{(x^3 - 8)^2}$$

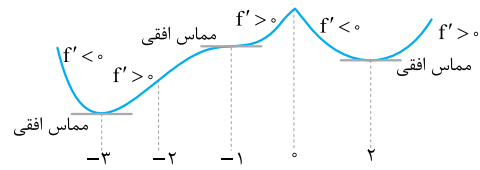
پس ریشه‌های صورت $\sqrt[3]{32}$ و صفر و ریشهٔ مخرج ۲ است و علامت مشتق به صورت جدول زیر است:

x	0	2	$\sqrt[3]{32}$
f'	+	-	+

پس بازه‌های نزولی تابع $(0, 2)$ و $(2, \sqrt[3]{32})$ هستند. طول بازهٔ $(0, 2)$ از $(a, b) = (0, 2) \Rightarrow b - a = 2$ بیشتر است. پس داریم:



هم چنین اگر مشتق از (+) به (-) تغییر علامت دهد، تابع پیوسته f ماکزیمم دارد که در x = 0 این طور شده است. این نمودار تقریبی f است:



با توجه به شکل و آنچه در بالا گفتیم f ماکزیمم نسبی دارد (۱) نادرست است. f از مبدأ می‌گذرد، پس (0, 0) یک ریشه است. بعد از آن تابع تا نقطه 2 نزولی است و سپس صعودی می‌شود و ممکن است یک بار دیگر محور طول‌ها را قطع کند. پس (۲) هم نادرست است. در صورت سؤال گفته f(0) صفر است و همان طور که می‌بینید در (0, 0) ماکزیمم داریم (۳) غلط است) اما (۴) درست است و به خاطر مثبت بودن مشتق، در (-3, -2) تابع f اکیداً صعودی است.

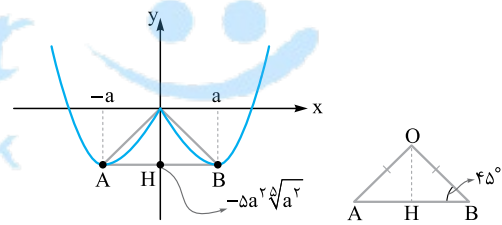
۲۷۹. گزینه ۲ به خاطر $\sqrt[5]{x^2}$ یک نقطه بحرانی در x = 0 داریم. حالا $f'(x) = 0$ قرار می‌دهیم تا سایر نقاط بحرانی پیدا شوند:

$$f(x) = (x^2 - 6a^2)\sqrt[5]{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 2x\sqrt[5]{x^2} + \frac{2(x^2 - 6a^2)}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

$$= \frac{10x^2 + 2x^2 - 12a^2}{5\sqrt[5]{x^3}} = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

پس طول‌های بحرانی صفر، a و -a و عرضشان (در ضابطه f قرار دهیم) به ترتیب صفر، $-\Delta a^2\sqrt[5]{a^2}$ و $-\Delta a^2\sqrt[5]{a^2}$ است.



طبق صورت سؤال AOB قائم‌الزاویه است. چون OA و OB هم‌اندازه هستند، پس مثلث متساوی‌الساقین هم هست پس:

$$\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{OH}{HB} = 1 \Rightarrow |a| = \Delta a^2\sqrt[5]{a^2} \xrightarrow{a > 0} 1 = \Delta a a^{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{7}{5}} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{5}{7}} = \Delta^{-\frac{5}{7}}$$

۲۸۰. گزینه ۳ باید ریشه‌های f' در این فاصله باشند:

$$f'(x) = x^2 + ax + 1$$

برای این که ریشه‌های این سهمی در فاصله (-1, 3) قرار بگیرند باید: الف) 2 تا ریشه بدهد، ب) x_S بین (-1, 3) باشد و پ) $f'(-1)$ و $f'(3)$ هر دو مثبت باشند:

$$f'(x) = x^2 + ax + 1$$

$$-2 < a < 2 \text{ یا } a > 4 \Rightarrow a^2 > 4 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4 > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه (الف)}$$

$$-1 < -\frac{a}{4} < 3 \Rightarrow -4 < a < 12 \Rightarrow 2 > a > -6$$

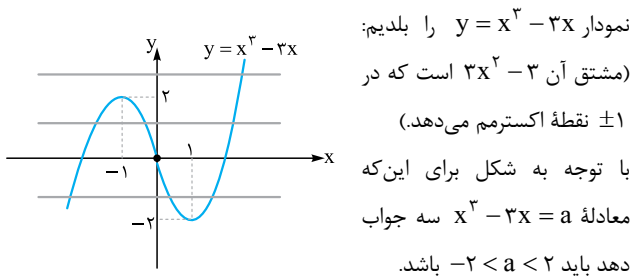
$$f'(-1) > 0, f'(3) > 0 \Rightarrow \text{در } -1 \text{ و } 3 \text{ مقدار } f' \text{ مثبت است. (پ)}$$

$$\Rightarrow 2 - a > 0, 10 + 3a > 0 \Rightarrow a < 2, a > -\frac{10}{3}$$

$$-\frac{10}{3} < a < -2 \quad \text{از اشتراک این شرط‌ها داریم:}$$

۲۸۱. گزینه ۲ برای تلاقی خط و نمودار داریم:

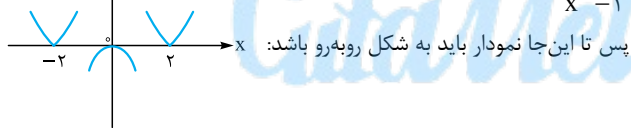
$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^3 - 5x = -2x + a \Rightarrow x^3 - 3x = a$$



۲۸۲. گزینه ۲ راه ۱ به خاطر عامل x^2 در $x = 0$ اکسترمم نسبی

داریم و چون سایر عوامل $\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}\right)$ در این نقطه منفی می‌شوند، نمودار شبیه تابع $-x^2$ است. (ماکزیمم)

به خاطر عامل $|x^2 - 4|$ در $x = \pm 2$ ، مینیمم نسبی داریم (سایر عوامل $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ در اطراف ± 2 ، مثبت هستند).



در $x = \pm 1$ مخرج صفر است و تابع در اطراف ± 1 به طرف $\pm \infty$ می‌رود. پس نمودار به صورت مقابل کامل می‌شود:
و با توجه به شکل ۳ اکسترمم دارد.

۲۸۳. راه ۲ $x = \pm 2$ بحرانی گوشه‌ای و اکسترمم هستند. در سایر نقاط، با

برداشتن قدرمطلق، ضابطه تابع به صورت $\frac{x^2(x^2 - 4)}{x^2 - 1}$ یا قرینه آن است. حالا مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

مشتق را ساده‌تر کنیم:

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 + 8x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x((x^2 - 1)^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

پس تنها ریشه مشتق $x = 0$ است (تغییر علامت هم می‌دهد و اکسترمم است). پس به همراه ± 2 سه اکسترمم داریم.

۲۸۳. گزینه ۳ از تابع مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) = 0$$

جمع مقادیر k از این معادله می‌شود: $S = \frac{-B}{A} = \frac{+(2a+8)}{1}$
 که باید ۱۶ باشد: $2a+8=16 \Rightarrow a=4$

۲۸۶. گزینه ۱ برای یافتن مقادیر اکسترم‌های نسبی در توابع کسری با صورت و مخرج درجه ۲، تابع را مساوی k قرار می‌دهیم و معادله حاصل باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x^2+x+a}{x^2+4} = k \Rightarrow (k-1)x^2 - x + (4k-a) = 0$$

این معادله ریشه مضاعف دارد، پس:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4(k-1)(4k-a) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 16k^2 - 16k - 4ka + 4a - 1$$

حاصل ضرب مقادیر k می‌شود $P = \frac{4a-1}{16}$ که باید $0 < P < 1$ باشد: $0 < \frac{4a-1}{16} < 1$
 $\Rightarrow 4a-1 = 16 \times 0 < 16 \times 1 = 16 \Rightarrow a = 4$

۲۸۷. گزینه ۲ به خاطر عامل $|3-x^2|$ در $x = \sqrt{3}$ گوشه داریم (ب) در بازه ما نیست. در سایر نقاط، قدرمطلق با علامت مثبت برداشته می‌شود:

$$-1/5 \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow 3-x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |3-x^2| = 3-x^2$$

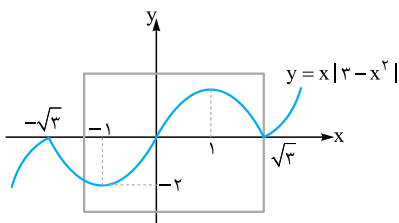
پس داریم: $f(x) = x(3-x^2) = 3x - x^3$
 مشتق: $f'(x) = 3-3x^2$

پس دو نقطه بحرانی در $x = \pm 1$ هستند.

برای پیدا کردن \min مطلق، جدولی از مقادیر تابع می‌کشیم:

دلیل	انتها و گوشه	مشتق صفر	مشتق صفر	ابتدای دامنه
x	$\sqrt{3}$	1	-1	$-1/5$
y	0	2	-2	$-9/8$

پس $y_{\min} = -2$. شکل را هم ببینید:



۲۸۸. گزینه ۳ به خاطر x^2 دامنه تابع فقط شامل اعداد نامنفی است و با کمی دقت، در صورت و مخرج اتحاد مربع کامل داریم:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 8x^2 + 8x + 10}{x^4 + 4x^2 + 4x + 4} = \frac{2(x^2 + 2\sqrt{x})^2 + 10}{(x^2 + 2\sqrt{x})^2 + 4}$$

با تغییر متغیر $t = x^2 + 2\sqrt{x} \geq 0$ تابع به صورت $f(t) = \frac{2t+10}{t+4}$ است.

چون f اکیداً نزولی است ($f' < 0$) بیشترین مقدارش را در همان

اول دامنه به ازای $t=0$ می‌گیریم: $\min f = \frac{10}{4} = 2.5$

با کمی دقت $x = -1$ در معادله صدق می‌کند و عبارت $f'(x)$ بر $x+1$ بخش پذیر است:
 $x^2 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x^2 + 5x + 6)$
 از تقسیم به دست آمده
 $= (x+1)(x+2)(x+3) = 0$

پس ریشه‌های مشتق -1 ، -2 و -3 هستند.

تابع در $\pm\infty$ ، به طرف $+\infty$ می‌رود پس کم‌ترین مقدار در یکی از همین طول‌های بحرانی است.

$$\frac{x}{f(x)} \begin{matrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{matrix} \Rightarrow \min f = -3$$

۲۸۴. گزینه ۴

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$$

(الف) برای $x < 0$ هر دو قدرمطلق را با علامت $(-)$ برمی‌داریم:

$$f(x) = \frac{1}{-x+1} + \frac{1}{-x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} > 0$$

در این حالت تابع صعودی است و اکسترم ندارد.

(ب) برای $0 \leq x < 2$ فقط $|x|$ را با علامت $(+)$ برمی‌داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{-x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = (3-x)^2 \Rightarrow 2x+1 = -6x+9 \Rightarrow x=1$$

در این حالت یک نقطه اکسترم داریم.

(پ) برای $x \geq 2$ هر دو قدرمطلق را با علامت $(+)$ برمی‌داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

در این حالت تابع نزولی است و اکسترم ندارد.

پس در $x=1$ بحرانی از نوع مشتق صفر داریم و در $x=0$ و $x=2$ هم بحرانی

از نوع گوشه (ریشه ساده یک قدرمطلق) داریم. عرض‌ها را به دست می‌آوریم:

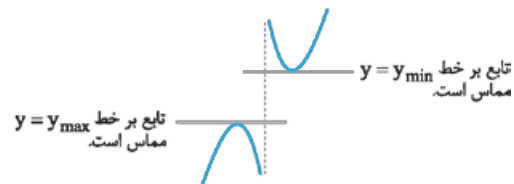
x	0	1	2
y	$\frac{1}{1} + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{1}$

$$\frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

پس جمع اکسترم‌ها می‌شود:

۲۸۵. گزینه ۲ چون این تابع مشتق پذیر است و در اکسترم‌های نسبی، خط

مماس افقی می‌شود، تابع بر خط $y=k$ مماس است. ببینید:



پس ببینیم تابع بر چه خط‌های افقی مماس است؟

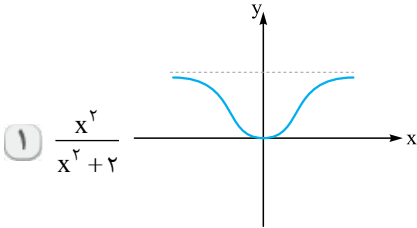
$$y = k \Rightarrow \frac{x^2+ax}{x-2} = k \Rightarrow x^2 + (a-k)x + 2k = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مماس است}} \Delta = (a-k)^2 - 4(1)(2k) = 0$$

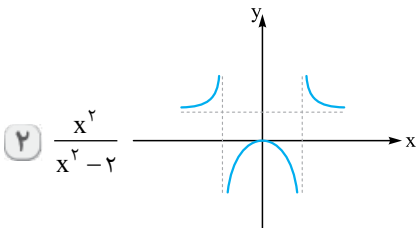
$$\Rightarrow k^2 - 2ak + a^2 - 8k = 0 \Rightarrow k^2 - (2a+8)k + a^2 = 0$$

۲۹۳. گزینه ۳ | شکل نشان می‌دهد f در مبدأ گوشه دارد و در $(0, +\infty)$ پیوسته است. پس فقط ۳ مناسب است.

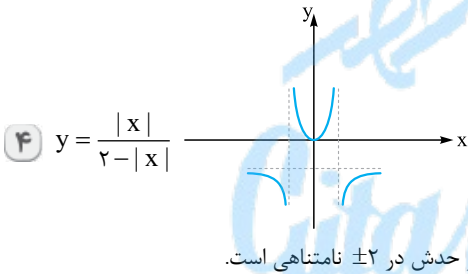
گزینه‌های ۱ و ۲ در مبدأ گوشه ندارند و ۴ در $x=2$ ناپیوستگی دارد. البته برای رد ۴ می‌توانیم دقت کنیم که حد در $\pm\infty$ برابر ۱- است در حالی که شکل در $\pm\infty$ حد مثبت دارد. نمودار گزینه‌ها را ببینید:



در مبدأ مینیمم دارد؛ پیوسته است.



در مبدأ ماکزیمم دارد، در $\pm\sqrt{2}$ تابع ندارد.



در صفر گوشه دارد و حدش در ± 2 نامتناهی است.

نکته هر ۴ تابع با تبدیل x به $-x$ تغییر نمی‌کنند و نمودارشان نسبت به محور y متقارن است.

۲۹۴. گزینه ۳ | در تابع $f(x) = \frac{x-4\sqrt{x}+a}{\sqrt{x^2+8}}$ باید $x=4$ ریشه مشتق باشد، مشتق را ببینید:

$$f'(x) = \frac{(1 - \frac{4}{2\sqrt{x}})(\sqrt{x^2+8}) - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2+8}}(x-4\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x^2+8})^2}$$

$$f'(4) = \frac{0 - \frac{3 \times 16}{2 \times 8}(4-8+a)}{(8+8)^2} = 0 \Rightarrow a = 4$$

حالا دقت کنید که به ازای $a=4$ صورت کسر $x-4\sqrt{x}+4$ است که می‌شود $(\sqrt{x}-2)^2$ و مخرج هم مثبت است پس حتماً نقطه $(4,0)$ مینیمم نسبی (و مطلق) تابع است. (سایر نقاط تابع، عرض مثبت دارند).

۲۹۵. گزینه ۳ | اول طول نقاط بحرانی خود f را پیدا کنیم:

$$f(x) = |x^2 - 6x| \sqrt{(x-1)^2}$$

f در سه نقطه صفر، ۶ و ۱ نقطه بحرانی دارد (در صفر و ۶ گوشه دارد و در ۱ نیم‌ماس عمودی دارد). برای سایر مقادیر x اول قدرمطلق را برمی‌داریم ((+)) یا (-))

فرقی در ریشه‌های f' ندارد. $f(x) = (x^2 - 6x)\sqrt{(x-1)^2}$

۲۸۹. گزینه ۳ | اگر زیر رادیکال x^4 و x^2 نبودند، تابع به صورت

$$\sqrt[5]{x^5} - x + 3 \text{ کم شده است پس داریم: } \sqrt[5]{x^5} - 4x^4 - x^2 \leq x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x^5} - 4x^4 - x^2 - x + 3 \leq x - x + 3$$

پس تابع همیشه از ۳ کم‌تر یا مساوی است و چون $f(0) = 3$ ، حتماً $y = 3$ ماکزیمم مقدار تابع است.

۲۹۰. گزینه ۳ | راه I | f یک سهمی رو به پایین است و حداکثر مقدار آن، عرض نقطه رأس خواهد بود:

$$f_{\max} = y_S = -\frac{\Delta}{4A} = \frac{-a^2}{-4(1+a^4)} = \frac{a^2}{4(1+a^4)}$$

$$\xrightarrow{\pm a^2} f_{\max} = \frac{1}{4(\frac{1}{a^2} + a^2)}$$

می‌دانیم $a^2 + \frac{1}{a^2}$ جمع عددی مثبت و معکوش است و همواره بیشتر یا مساوی ۲ است پس مخرج همیشه بیشتر یا مساوی ۸ است و حداکثر مقدار آن می‌شود $\frac{1}{8}$.

راه II | قسمت $\frac{a^2}{1+a^4}$ را به صورت $y = \frac{x^2}{1+x^4}$ در نظر می‌گیریم و با استفاده از مشتق، ماکزیمم آن را به دست می‌آوریم.

$$y' = \frac{2x(1+x^4) - 4x^3x^2}{(1+x^4)^2} = 0 \Rightarrow 2x - 2x^5 = 0 \xrightarrow{a>0} x = 1$$

$$\Rightarrow y_{\max} = \frac{1}{4}$$

و جواب f_{\max} می‌شود $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

۲۹۱. گزینه ۴ | دامنه تابع $[-\infty, 0]$ است پس حتماً صفر ریشه زیر رادیکال

$$\sqrt{-a+b} = 0 \Rightarrow b = 0$$

بوده:

پس: $f(x) = (a - \sqrt{-x})^2 + c$ حالا باید $f(-1) = 3$ و $f'(-1) = 0$ باشد:

$$f'(-1) = 2(0 - \frac{-1}{2\sqrt{-x}})(a - \sqrt{-x})^1 = 0$$

$$\xrightarrow{x=-1} f'(-1) = 2(\frac{1}{2})(a-1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$b) f(-1) = (1-1)^2 + c = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$a + b + c = 4$$

و بنابراین:

۲۹۲. گزینه ۲ | شکل می‌گوید تابع در ۱ نقطه با طول مثبت تعریف نشده

پس مخرج ریشه مضاعف مثبت دارد و با توجه به عبارت $x^2 + bx + 4$ باید $b = -4$ باشد تا مخرج $(x-2)^2$ شود.

از طرف دیگر طول نقطه مینیمم برابر ۳- است. پس در ۳- مشتق صفر است.

مشتق را ببینید:

$$y = \frac{x^2 + a}{(x-2)^2} \Rightarrow y' = \frac{2x(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2+a)}{(x-2)^4}$$

$$\xrightarrow{x=-3} y'(-3) = \frac{-6(-5)^2 - 2(-5)(9+a)}{(-5)^4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6 \times 25 + 10(9+a)}{-15^4} = 0 \Rightarrow 9+a = 15 \Rightarrow a = 6$$

موافقت که در $g(2)$ و $g(-2)$ ، جملات x دار قرینه هم هستند و جمعشان صفر است؟ پس $g(2) + g(-2)$ می‌شود $4 + 4 = 8$ ببینید:

$$g(2) = 3(2)^5 + 5(2)^3 + 4(2) + 4$$

$$g(-2) = 3(-2)^5 + 5(-2)^3 + 4(-2) + 4$$

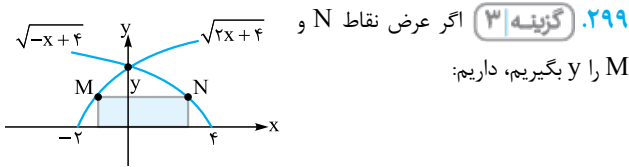
$$g(2) + g(-2) = 0 + 0 + 0 + 8 \quad \text{جمع:}$$

۲۹۸. گزینه ۳ فاصله نقطه $A(x, y)$ روی سهمی از $M(3, 0)$ برابر است با:

$$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \xrightarrow[\text{معادله سهمی } y^2=4x]{\text{معادله سهمی}} = \sqrt{(x-3)^2 + 4x}$$

به جای y^2

پس در زیر رادیکال $x^2 - 2x + 9$ داریم که به صورت $(x-1)^2 + 8$ مربع کامل می‌شود و کم‌ترین مقدارش ۸ است. پس $AM_{\min} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.



$$M: y_M = \sqrt{4x_M} = 2 \rightarrow x_M = \frac{y^2}{4}$$

$$N: y_N = \sqrt{4x_N} = 2 \rightarrow x_N = \frac{y^2}{4}$$

پس طول مستطیل برابر است با: $x_N - x_M = \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 0$ و مساحت مستطیل می‌شود:

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = (2 - \frac{y^2}{4})y \Rightarrow S = 2y - \frac{y^3}{4}$$

و باید $S' = 0$ قرار دهیم تا به S_{\max} برسیم:

$$S' = 2 - \frac{3}{4}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = \frac{8}{3}$$

$$\xrightarrow{y>0} y = \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{جای گذاری}} S_{\max} = y(2 - \frac{y^2}{4})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(2 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

۳۰۰. گزینه ۴ با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} \text{فیناگورس: } 3^2 &= (h-3)^2 + r^2 \\ \Rightarrow 9 &= 9 - 6h + h^2 + r^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 6h - h^2 \end{aligned}$$

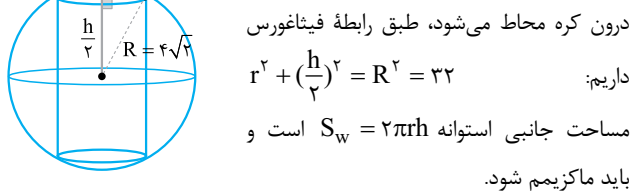
حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \xrightarrow{\text{جای گذاری}} V = \frac{\pi}{3} (6h - h^2) h = \frac{\pi}{3} (6h^2 - h^3)$$

برای رسیدن به حجم ماکزیمم، مشتق V را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = \frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) = 0 \Rightarrow 12h = 3h^2 \xrightarrow{\div 3h} h = 4$$

۳۰۱. گزینه ۲ با توجه به شکل وقتی استوانه



$$\Rightarrow f'(x) = (2x-6)\sqrt{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{(x-1)}}(x^2-6x)$$

$$= \frac{(2x-6)3(x-1) + 2(x^2-6x)}{3\sqrt{x-1}} = 0 \quad \text{مشتق را مساوی صفر می‌گذاریم:}$$

$$\Rightarrow 2((x-3)(3x-3) + x^2 - 6x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 18x + 9 = 0$$

پس جمع طول‌های نقاط بحرانی در این قسمت برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

سه‌تا بحرانی هم از قبل داشتیم که جمع طول‌هایشان $7 = 6 + 1 + 0$ بود. پس جمع طول کل بحرانی‌های $f(x)$ می‌شود $11/5 = 7 + 4/5$.

حالا برای $f(-2x+2)$ تمام این نقاط را ۲ واحد به چپ می‌بریم و سپس طول‌ها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. ۵ نقطه بحرانی داشتیم، اگر از x هر کدام تا ۲ کم شود، از مجموع x ها 0 تا کم می‌شود (از $11/5$ به $1/5$ می‌رسیم) و سپس با تقسیم بر ۲، جمع طول‌ها هم می‌شود $1/5 - 3/4 = -11/20$.

۲۹۶. گزینه ۳ اول $\frac{2x^2+151}{x^2+75}$ را به صورت $2 + \frac{1}{x^2+75}$ ببینید. تنها

اکسترمم این تابع در $x=0$ قرار دارد:

$$y' = 0 + \frac{-2x}{(x^2+75)^2} = 0 \Rightarrow x=0$$

پس $A(0, \frac{151}{75})$ اولین نقطه است (اکسترمم تابع $f(x)$ است).

برای پیدا کردن اکسترمم‌های f' باید از آن مشتق بگیریم:

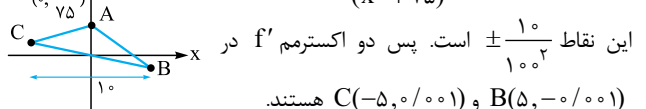
$$g'(x) = (f')'(x) = \frac{-2(x^2+75)^2 - 2(2x)(x^2+75)(-2x)}{(x^2+75)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+75)((x^2+75)-4x^2)}{(x^2+75)^4} = 0 \Rightarrow 75 = 3x^2$$

این‌ها اثری روی ریشه مشتق ندارند.

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

با قراردادن طول‌ها در $g(x) = \frac{-2x}{(x^2+75)^2}$ عرض



این نقاط $\pm \frac{1}{100}$ است. پس دو اکسترمم f' در $B(5, -0/100)$ و $C(-5, 0/100)$ هستند.

واضح است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع نیست.

۲۹۷. گزینه ۳ مشتق g می‌شود $g'(x) = 15x^4 + 15x^2 + 4$ که

همواره مثبت است پس g اکیداً صعودی است و برای رسیدن به مینیمم و

ماکزیمم $g \circ f$ باید سراغ f برویم:

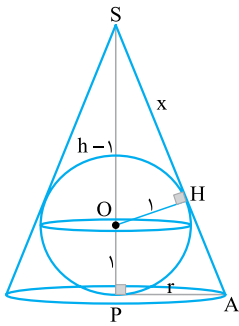
$$f(x) = x^3 - 3x, x \in [-2, 2] \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

پس نقاط بحرانی f در طول‌های 1 و -2 هستند و داریم:

x	-1	1	2	-2
f	2	-2	2	-2

بنابراین $\max f = 2$ و $\min f = -2$ و داریم:

$$\xrightarrow{\text{گاید صعودی}} \begin{cases} \min g \circ f = g(\min f) = g(-2) \\ \max g \circ f = g(\max f) = g(2) \end{cases}$$



۳۰۴. گزینه ۱ | بر طبق رابطه فیثاغورس در مثلث SOH داریم:

$$x^2 + 1^2 = (h-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = h^2 - 2h$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{h^2 - 2h}$$

حالا تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه SOH و SPA می‌گوید:

$$\frac{OH}{PA} = \frac{SH}{SP} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - 2h}}{h}$$

پس $r = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2h}}$ و حجم مخروط می‌شود:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{h^2}{h^2 - 2h} h = \frac{\pi}{3} \frac{h^3}{h-2}$$

و برای رسیدن به حجم مینیمم باید $V' = 0$ قرار دهیم:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \frac{3h^2(h-2) - h^3}{(h-2)^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صورت صفر است.}} h^2 - 4h = 0 \xrightarrow{h \neq 0} h = 4$$

۳۰۵. گزینه ۱ | شعاع قاعده استوانه برابر $|\alpha|$ (اندازه طول نقطه M) و ارتفاع آن برابر $2\alpha + 3$ (اندازه عرض نقطه M) است. پس داریم:

$$V = \pi r^2 h = \pi |\alpha|^2 (2\alpha + 3) = \pi \alpha^2 (2\alpha + 3) = \pi (2\alpha^3 + 3\alpha^2)$$

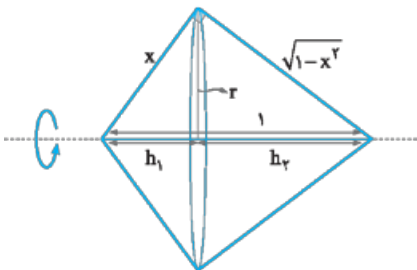
$$V' = \pi (6\alpha^2 + 6\alpha)$$

پس مشتق آن می‌شود:

که به ازای $\alpha = -1$ صفر می‌شود و V به حداکثر خود می‌رسد. جدول تغییرات V' را ببینید:

α	-1	0
V'	+	-
	↗ max	↘ min

۳۰۶. گزینه ۴ | حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱ حول وتر برابر است با:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3} \pi r^2$$

از طرف دیگر r همان ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است که برابر است با:

$$r = \frac{\text{ضرب اضلاع قائم}}{\text{وتر}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1} = x\sqrt{1-x^2}$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 = \frac{\pi}{3} x^2 (1-x^2)$$

پس حجم برابر است با:

چون مجموع x^2 و $1-x^2$ ثابت است، ضربشان به ازای حالت مساوی، ماکزیمم می‌شود و داریم:

$$x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس نسبت اضلاع قائم باید ۱ باشد.

راه ۱ |

چون در شرط $r^2 + (\frac{h}{2})^2 = 32$ ، توان r و $\frac{h}{2}$ با هم برابر است پس برای رسیدن $S = 4\pi r(\frac{h}{2})$ به بیشترین مقدار، آن‌ها را مساوی می‌گیریم:

$$r^2 + (\frac{h}{2})^2 = 32 \xrightarrow{r=\frac{h}{2}} r^2 = (\frac{h}{2})^2 = \frac{32}{2} \Rightarrow r = \frac{h}{2} = 4 \Rightarrow h = 8$$

پس حداکثر S_w می‌شود:

۳۰۲. گزینه ۳ | در تابع S_w با استفاده از شرط $r^2 + \frac{h^2}{4} = 32$ می‌نویسیم:

$$r = \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}} \Rightarrow S_w = 2\pi r h = 2\pi \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}} h$$

$$\xrightarrow{\text{h را بزرگ‌تر از r در نظر بگیریم}} 2\pi \sqrt{h^2(32 - \frac{h^2}{4})} = 2\pi \sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}}$$

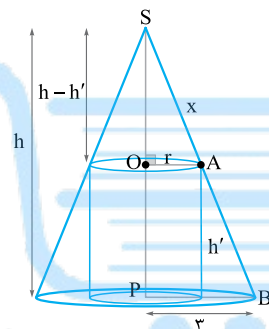
حالا برای رسیدن به ماکزیمم، باید مشتق را مساوی صفر بگذاریم:

$$S'_w = \dots \times (64h - h^3) = 0 \xrightarrow{h \neq 0} h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$$

و با $h = 8$ داریم:

$$\max S_w = 2\pi \sqrt{32 - \frac{64}{4}} \times 8 = 64\pi$$

۳۰۳. گزینه ۳ | با توجه به $OA \parallel PB$ و تشابه دو مثلث داریم:



با توجه به $OA \parallel PB$ و تشابه دو مثلث داریم:

$$\frac{h-h'}{h} = \frac{r'}{r}$$

$$\Rightarrow h-h' = \frac{rh'}{r}$$

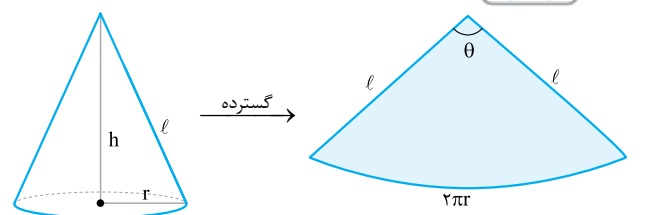
$$\Rightarrow h' = h - \frac{rh'}{r} = h(1 - \frac{r'}{r})$$

حجم استوانه برابر است با: $V = \pi r'^2 h' = \pi r'^2 h(1 - \frac{r'}{r}) = V = \pi r h (r^2 - \frac{r'^2}{r})$

برای رسیدن به حجم ماکزیمم، از V نسبت به r' مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = \pi h (2r - r') = 0 \Rightarrow 2r - r' = 0 \xrightarrow{r' \neq 0} r = 2$$

۳۰۳. گزینه ۱ | مقدار جنس مصرفی برابر سطح جانبی مخروط است.



$$S_{\text{جانبی}} = \pi r l = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

حجم مخروط هم $\frac{\pi}{3} r^2 h$ است که باید $\frac{4\pi}{3}$ باشد پس $r^2 h = 4$ و داریم:

$$r^2 = \frac{4}{h} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{h}}$$

حالا r را در S جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S = \pi \frac{2}{\sqrt{h}} \sqrt{h^2 + \frac{4}{h}} = 2\pi \sqrt{\frac{h^2 + \frac{4}{h}}{h}} = 2\pi \sqrt{h + \frac{4}{h^2}}$$

مشتق S را مساوی صفر می‌گذاریم تا به S_{\min} برسیم:

$$S' = \frac{1 + \frac{-2h(4)}{h^3}}{2\sqrt{\dots}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{8}{h^2} \Rightarrow h^2 = 8 \Rightarrow h = 2$$

پس بیشترین مقدار با قراردادن $\alpha = (\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}}$ به دست می‌آید:

$$AA'_{\max} = \sqrt{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} \right) = \sqrt{2} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \sqrt{2} \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \xrightarrow{\times \sqrt{2}} \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

در واقع $x + y = \frac{1}{3}$ **گزینه ۱** 309 است و ما کم‌ترین مقدار $x^2 + 4y^2$

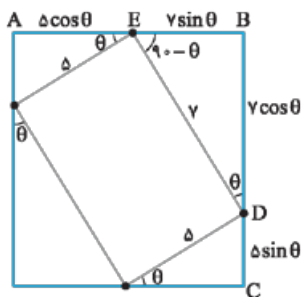
را می‌خواهیم. به جای y می‌نویسیم $x - \frac{1}{3}$ و داریم:

$$f(x) = x^2 + 4\left(\frac{1}{3} - x\right)^2 = x^2 + 4\left(\frac{1}{9} - x + x^2\right) = 5x^2 - 4x + \frac{4}{9}$$

که حداقل مقدار آن در رأس و به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{5}$ برابر است با:

$$\min(f) = 5\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{4}{9} = \frac{4}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

گزینه ۴ 310



با دقت به زاویه‌های متمم، در شکل روبه‌رو می‌توانیم طول اضلاع مستطیل بزرگ را برحسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ بنویسیم:

$$AB = AE + EB = \delta \cos \theta + \gamma \sin \theta$$

$$BC = BD + CD = \gamma \cos \theta + \delta \sin \theta$$

پس مساحت مستطیل بزرگ می‌شود:

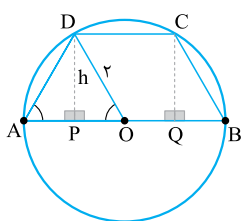
$$S = AB \cdot BC = (\delta \cos \theta + \gamma \sin \theta)(\delta \sin \theta + \gamma \cos \theta)$$

$$= 3\delta \cos^2 \theta + 3\delta \sin^2 \theta + (2\delta + 4\gamma) \sin \theta \cos \theta$$

$$= 3\delta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 3\gamma (2 \sin \theta \cos \theta) = 3\delta + 3\gamma \sin 2\theta$$

به ازای $\theta = 45^\circ$ بیشترین مقدار مساحت را داریم که می‌شود $3\delta + 3\gamma = 72$.

نشانه بهترین مستطیل، مربع است پس $\theta = 45^\circ$.



گزینه ۲ 311 OD برابر شعاع دایره یعنی r است. طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$OP = \sqrt{OD^2 - DP^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{4 - h^2}$$

با توجه به شکل DC دو برابر PO است:

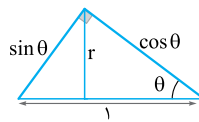
پس مساحت ذوزنقه می‌شود:

$$S = \frac{(AB + DC)h}{2} = \frac{(4 + 2\sqrt{4 - h^2})h}{2} = (2 + \sqrt{4 - h^2})h$$

از S مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} S' = 2 + \sqrt{4 - h^2} + \frac{-2h}{2\sqrt{4 - h^2}} h = 0$$

راه II مثلث را به صورت روبه‌رو در نظر بگیرید.



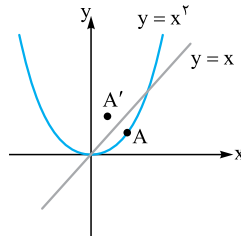
حجم دوار برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \xrightarrow{r = \frac{1}{2} \sin 2\theta} V = \frac{\pi}{3} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$$

که به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ ماکزیمم است و نسبت اضلاع قائم در این حالت برابر است با:

$$\tan \theta = 1$$

گزینه ۳ 307 روی سهمی $y = x^2$



است پس مختصاتش $A(\alpha, \alpha^2)$ است. قرینه A' نسبت به $y = x$ می‌شود $A'(\alpha^2, \alpha)$. راستی طول AA' بین صفر و ۱ (نقاط برخورد سهمی و خط $y = x$) قرار دارد. حالا طول پاره‌خط AA' برابر است با:

$$AA' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\alpha - \alpha^2)^2 + (\alpha^2 - \alpha)^2}$$

$$= \sqrt{2(\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2} |\alpha - \alpha^2| \xrightarrow{\alpha^2 < \alpha} = \sqrt{2}(\alpha - \alpha^2)$$

ماکزیمم طول AA' زمانی رخ می‌دهد که $\alpha - \alpha^2$ حداکثر شود.

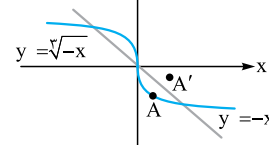
با دقت به $y = x - x^2$ که در $S(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ماکزیمم دارد، بیشترین مقدار AA' برابر است با:

$$AA'_{\max} = \sqrt{2} (\alpha - \alpha^2)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

حداکثر $\alpha - \alpha^2$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

نشانه اگر $\alpha - \alpha^2$ را به صورت $\frac{1}{4} - (\alpha - \frac{1}{4})^2$ مربع کامل کنیم، بیشترین مقدار آن برابر $\frac{1}{4}$ است.

گزینه ۲ 308 قرینه نقطه (x, y)



نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $(-y, -x)$ است.

مختصات $A(\alpha, \sqrt{-\alpha})$ روی $f(x) = \sqrt{-x}$ به صورت $A(\alpha, \sqrt{-\alpha})$ است و با توجه به قانونی که در ابتدا گفتیم مختصات نقطه $A'(-\sqrt{-\alpha}, -\alpha)$ می‌شود $A'(-\sqrt{-\alpha}, -\alpha)$.

$$\xrightarrow{A(\alpha, \sqrt{-\alpha})} AA' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha - \sqrt{-\alpha})^2 + (\sqrt{-\alpha} + \alpha)^2} = \sqrt{2(\alpha - \sqrt{-\alpha})^2} = \sqrt{2} |\alpha - \sqrt{-\alpha}|$$

همان $\alpha - \sqrt{-\alpha}$

سؤال گفته α در بازه $[0, 1]$ است پس $\sqrt{-\alpha}$ از α بیشتر است و داخل قدرمطلق منفی است پس داریم:

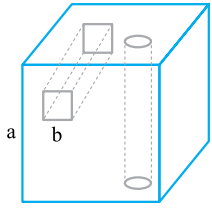
با در نظر گرفتن $y = \sqrt[3]{x} - x$ در فاصله $(0, 1)$ داریم:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$



۳۱۵. گزینه ۱ از سطح مکعب، ۲ تا دایره به اندازه قاعده استوانه و هم چنین

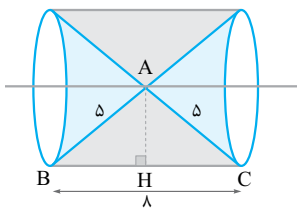


$$S = 6a^2 - \underbrace{2\pi r^2}_{\text{۲ تا دایره}} - \underbrace{2b^2}_{\text{تارمربع}} \\ = 6 \times 4^2 - 2\pi \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 - 2 \times 1^2 \\ = 96 - 8 - 2 = 86$$

به خاطر سوراخ‌ها (تونل‌های ایجادشده)، به اندازه سطح جانبی استوانه و به اندازه ۴ تا مستطیل (سطح جانبی مکعب مستطیل) در دیواره‌ها به مساحت اضافه می‌شود:

$$S = 86 + \underbrace{4 \times 4 \times 1}_{\text{مستطیل ۴}} + 2\pi \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) 4 = 102 + 16\sqrt{\pi}$$

دیواره استوانه



۳۱۶. گزینه ۲ مطابق شکل مقابل

حجم حاصل یک استوانه است که دو مخروط از آن برداشته‌ایم.

در مثلث متساوی‌الساقین AH, ABC هم ارتفاع و هم میانه است، پس:

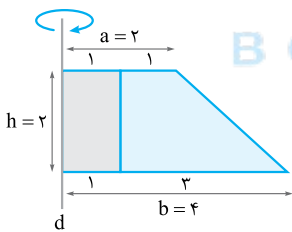
$$CH = BH = r$$

با توجه به مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم: $AH = r$ پس شعاع قاعده استوانه ۳ و حجم آن برابر است با:

اما حجم دوار، دو قسمت مخروطی چپ و راست را ندارد. شعاع قاعده مخروط‌ها ۳ و ارتفاع هر کدام ۴ است، پس:

$$V_r = 2 \times \frac{1}{3} \pi r^2 h' = 2 \times \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 4 = 24\pi \\ V = V_1 - V_r = 72\pi - 24\pi = 48\pi$$

و بنابراین حجم برابر است با:



۳۱۷. گزینه ۳ اول فرض کنیم دوزنقه کامل که به محور چسبیده، دوران می‌کند.

خاطره حجم حاصل از دوران دوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق قائم برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi (2^2 + 4^2 + 2 \times 4) \times 2 = \frac{56\pi}{3}$$

پس داریم:

حالا دقت کنیم که یک قسمت استوانه‌ای را نداریم و باید از حجم کل کم شود، شعاع قاعده استوانه ۱ و ارتفاعش ۲ است.

$$V_r = \pi r^2 h = \pi (1)^2 (2) = 2\pi \\ V = V_1 - V_r = \frac{56\pi}{3} - 2\pi = \frac{50\pi}{3}$$

اما صبر کنید! کل این دوران‌ها به جای 36° فقط 27° هستند، پس ما $\frac{3}{4}$ حجم $\frac{27^\circ}{36^\circ}$ را داریم:

$$V = \frac{3}{4} \times \frac{50\pi}{3} = \frac{25\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}} 2 + \sqrt{4-h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{4-h^2}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2 + \frac{4-h^2-h^2}{\sqrt{4-h^2}} = 0$$

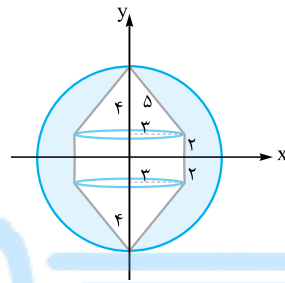
$$\Rightarrow \frac{4-2h^2}{\sqrt{4-h^2}} = -2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین} \div (-2)} h^2 - 2 = \sqrt{4-h^2}$$

برای ادامه حل دو راه داریم:

اعددگذاری گزینه‌ها را کنترل کنیم و $h = \sqrt{3}$ می‌خورد.

راه II به توان ۲ می‌رسانیم:

$$h^4 - 4h^2 + 4 = 4 - h^2 \Rightarrow h^4 = 3h^2 \xrightarrow{\div h^2, h \neq 0} h^2 = 3 \\ \Rightarrow h = \sqrt{3}$$



۳۱۲. گزینه ۳ برای محاسبه حجم

دوران، باید از حجم کره به اندازه دو مخروط و یک استوانه کم کنیم. با توجه به مقادیر در شکل روبه‌رو، شعاع کره ۶ است.

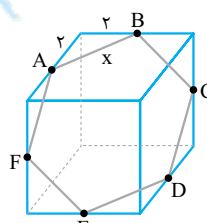
نشانه حواستان به اعداد فیثاغورسی ۳، ۴، ۵ هست!

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi (6^3) = \frac{4}{3} \pi \times 216 = 288\pi$$

حجم مخروط‌های بالا و پایین $2 \times \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 4 = 24\pi$ است که می‌شود 24π .

حجم استوانه هم $\pi r^2 h = \pi (3)^2 \times 4 = 36\pi$ است، پس داریم:

$$V_{\text{کل}} = 288\pi - (24\pi + 36\pi) = 228\pi$$



۳۱۳. گزینه ۱ با توجه به شکل، سطح مقطع

مورد نظر یک شش‌ضلعی منتظم است که هر ضلع آن، وتر مثلث قائم‌الزاویه 2×2 است:

$$x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 = 12\sqrt{3}$$

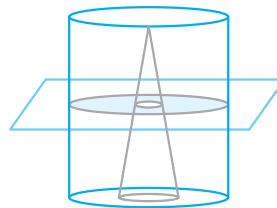
پس مساحت برابر است با:

۳۱۴. گزینه ۴ سطح مقطع، بین دو

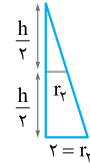
دایره است و داریم:

$$S = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

شکل را ببینید:



r_1 شعاع دایره بیرونی و برابر ۴ است، r_2 شعاع دایره درونی



است. حالا این شکل را ببینید:

قضیه تالس جزء به کل می‌گوید:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{h} \Rightarrow \frac{r_2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 1$$

$$S = \pi(4^2 - 1^2) = 15\pi$$

و داریم: