

مقدمه مؤلف

کنکوری هستی؟ بزرگ شریا!!

دوستای بزرگم سلام. می‌خوام یکم دربارهٔ امسال باهاتون صحبت کنم (فروپ گوش کنید). امسال واسه شماها قراره که امتحان نهایی خرداد، تأثیر مستقیم روی کنکور داشته باشه و حُب! خداییش درصد زیادیه پس برای این که بتونین توی یه دانشگاه خوب درس بخونید، هم باید تستی بخونید هم تشریحی. به قوی و ضعیف بودن دانش آموز هم ربطی نداره، ما امسال توی مدارس خفن هم از بچه‌ها امتحان تشریحی می‌گیریم. این کتاب رو به پیشنهاد خیلی سبز عزیز برای شما و موفقیت شما توی امتحان نهایی نوشتیم. ایشالا که تونسته باشم کمکتون کرده باشم.

چندتا نکته هم در مورد کتاب بگم:

سعی کردم یه درس‌نامهٔ بسیار روان به همراه مثال و پاسخ بیارم که با خوندنش درس رو به راحتی بفهمید. آخر هر درس هم چندتا تمرین آوردم که کل کتاب درسی و امتحان نهایی‌های چند سال اخیر رو کامل پوشش می‌ده و در آخر هر فصل هم آزمون‌های جمع‌بندی رو داریم. در آخر کتاب ۶ تا آزمون تشریحی (دوتا برای نوبت اول، چهارتا امتحان نهایی) گذاشتم که حتماً شب امتحان حل کنید و برید واسه ۲۰ (بیست) نه نوزده و هفتاد و پنج).

کلام آخر

تشکر ویژه از اساتید عزیزم، مهندس مجید رفعتی (آقای حسابان)، مهندس محمد کشوری (❤️)، مهندس علی‌رضا شریف خطیبی (پدر معنوی من)، دکتر کامبیز مقدم‌فر و استاد علی مؤمن‌زاده. تشکر از همکاران خوبم خانم طلوعی و آقایان حیدریان (عشقی)، علیرضا محمدی و محسن فراهانی که ویرایش این کتاب رو قبول کردن. و در نهایت از دوستان خوبم، آقایان حسین خانی، علیزاده و خانم‌ها سبکار، ایمان‌زاده و امجدیان کمال تشکر را دارم.

سلام برسون

BOOK BANK

فهرست



۷
۷
۱۵
۲۰
۲۳
۲۴

فصل اول: تابع

درس ۱: تبدیل نمودار توابع
درس ۲: تابع درجه سوم، توابع یکنوا
درس ۳: بخش پذیری و تقسیم
آزمون جمع بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۳۳
۳۳
۳۸
۴۱
۴۸
۴۹

فصل دوم: مثلثات

درس ۱: تناوب
درس ۲: تانژانت
درس ۳: معادلات مثلثاتی
آزمون جمع بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی



۵۶
۵۶
۶۱
۶۴
۷۱
۷۲

فصل سوم: حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

درس ۱: حدهای نامتناهی (حد بی نهایت)
درس ۲: اعمال جبری و مجانب قائم
درس ۳: حد در بی نهایت و مجانب افقی
آزمون جمع بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۸۱

فصل چهارم: مشتق

درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی
درس ۳: تابع مشتق (قسمت اول)
درس ۴: تابع مشتق (قسمت دوم)
درس ۵: آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای
آزمون جمع بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی



۸۱
۸۶
۹۱
۹۷
۱۰۱
۱۰۵
۱۰۶



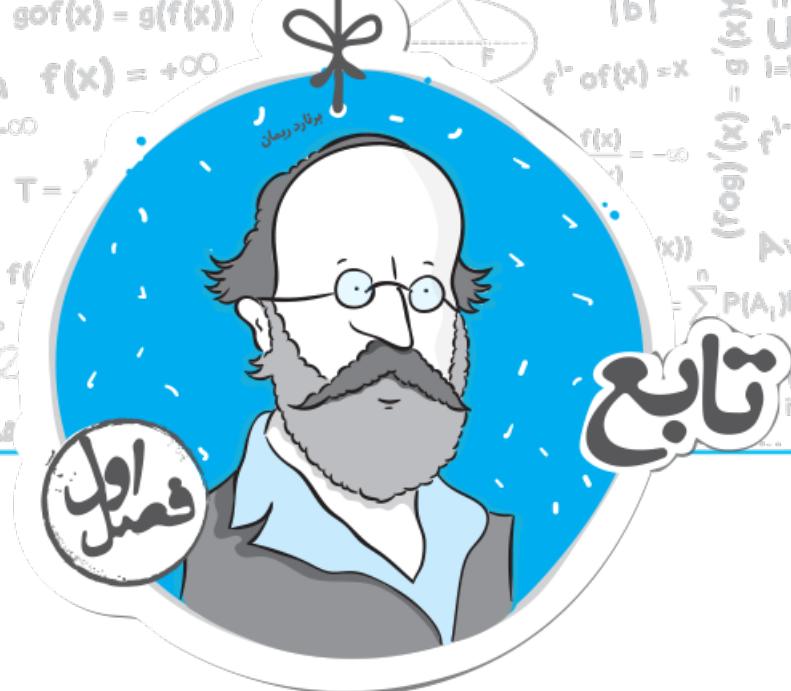
۱۱۹
۱۱۹
۱۲۷
۱۲۹
۱۳۴
۱۳۸
۱۳۹

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس ۱: اکسترمم‌های یک تابع
درس ۲: تشخیص صعودی و نزولی بودن یک تابع و بهینه‌سازی
درس ۳: تقعر و عطف
درس ۴: رسم نمودار تابع‌ها
آزمون جمع بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی

شماره صفحه امتحان شماره صفحه پاسخ

۱۵۵	۱۵۴	امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۱۵۹	۱۵۷	امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۱۶۳	۱۶۱	امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خردادماه ۱۴۰۱)
۱۶۶	۱۶۴	امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خردادماه ۱۴۰۰)
۱۶۹	۱۶۷	امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی شهریورماه ۱۴۰۰)
۱۷۲	۱۷۱	امتحان شماره (۶): نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۰)



تبدیل نمودار توابع



رسم خیلی از تابع‌ها آن هم در سطح دبیرستان اصلاً سخت نیست یعنی اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، با یک سری تبدیل‌ها می‌توان نمودار تابع‌های زیادی را رسم کرد.

انتقال‌های عمودی و افقی

پارسال و پیرارسال (دو سال پیش) با یک سری تبدیل آشنا شدید و چون پیش‌نیاز درس‌های جدیدند، بد نیست یادی از آن‌ها کنیم. (البته کتاب دوازدهم هم پوشش اشاره کرده).
نمودار تابع $y = f(x)$ را داریم:

$$y = f(x) + k$$

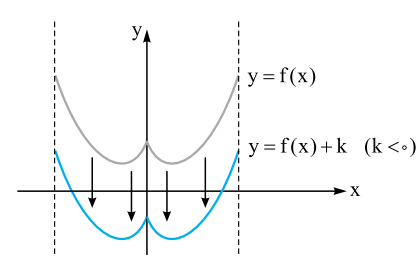
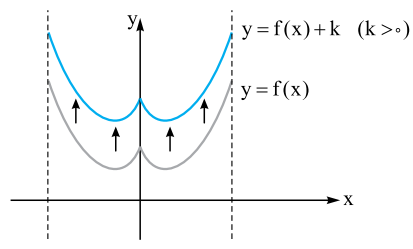
این نمودار را به این شکل رسم می‌کنیم:

1 $k > 0 \Rightarrow$ واحد بالا می‌بریم $|k|$ را $f(x)$

به این انتقال، انتقال عمودی می‌گوییم.

مثلاً $f(x) + 2$ ، دو واحد نسبت به $f(x)$ به بالا می‌رود و $f(x) - 1$ ، یک واحد نسبت به $f(x)$ به پایین می‌رود.

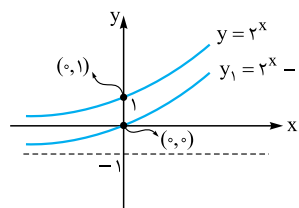
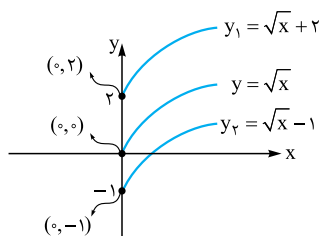
به نمودارهای زیر توجه کنید:



دامنه و برد $y = f(x) + k$

همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، دامنه تابع تغییری نمی‌کند. (انتقال عمودیه) ولی برد تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)} = [a, b]$ (برد f) باشد، آن‌گاه $R_{f(x)+k} = [a + k, b + k]$ است.



دامنه و برد تابع $y = \sqrt{x}$ ، بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه y_1 ، بازه $[0, +\infty)$ و برد آن بازه $[2, +\infty)$ است.

دامنه y_2 ، بازه $[0, +\infty)$ و برد آن بازه $[-1, +\infty)$ است.

دامنه $y = 2^x$ ، \mathbb{R} و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.

دامنه y_1 ، \mathbb{R} و برد آن بازه $(-1, +\infty)$ است.

تذکره برای این که در انتقال، نمودار دقیق‌تری به دست آوریم، مختصات یک یا چند نقطه را در نمودار انتقال یافته مشخص می‌کنیم و سپس نمودار را براساس آن‌ها رسم می‌کنیم.

مثلاً برای رسم نمودار $y_1 = \sqrt{x} + 2$ با استفاده از نمودار $y = \sqrt{x}$ ، می‌گوییم نقطه $(0, 0)$ روی تابع $y = \sqrt{x}$ قرار دارد و اگر دو واحد رو به بالا انتقال پیدا کند، x آن عوض نشده و همان صفر است، ولی y آن به اضافه دو خواهد شد و نقطه انتقال یافته $(0, 2)$ خواهد بود.

ب) $y = f(x+k)$

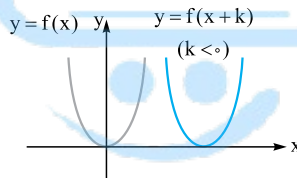
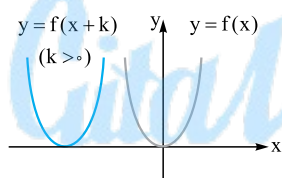
این نمودار را به این شکل رسم می‌کنیم:

1 $k > 0 \Rightarrow$ واحد چپ می‌بریم

2 $k < 0 \Rightarrow$ واحد راست می‌بریم

به این انتقال، انتقال افقی می‌گوییم.

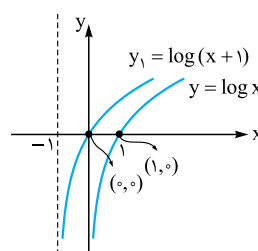
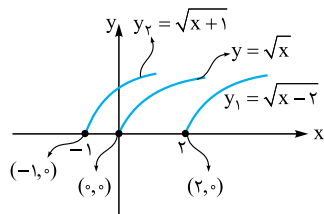
مثلاً $f(x-2)$ ، دو واحد نسبت به $f(x)$ به سمت راست می‌رود و $f(x+1)$ ، یک واحد نسبت به $f(x)$ به سمت چپ می‌رود (برعکسه).
به نمودارهای زیر توجه کنید:



دامنه و برد $y = f(x+k)$

همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، برد تابع تغییری نمی‌کند (انتقال افقیه دیگه) ولی دامنه تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود. پس اگر $D_{f(x)} = [a, b]$ ، آن‌گاه $D_{f(x+k)} = [a-k, b-k]$ است. (پرا این پوری نگاه می‌کنید؟؟؟ گفته که برعکسه)

چند مثال از انتقال افقی توابع معروف ببینید:



دامنه و برد $y = \sqrt{x}$ ، بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه y_1 ، بازه $[2, +\infty)$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه y_2 ، بازه $[0, +\infty)$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه $y = \log x$ ، بازه $(0, +\infty)$ و برد آن \mathbb{R} است.

دامنه y_1 ، بازه $(-1, +\infty)$ و برد آن \mathbb{R} است.

توجه خیلی وقت‌ها ممکن است در یک تابع، هم تغییرات افقی و هم عمودی داشته باشیم، مثلاً:

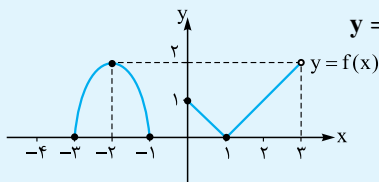
$$y = f(x + \square) + \Delta \rightarrow \text{تغییر عمودی}$$

↓
تغییر افقی

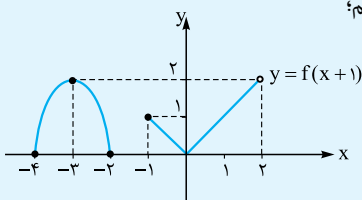
برای رسم این تابع‌ها از روی $y = f(x)$ اول تغییر افقی (\square) و بعد تغییر عمودی (Δ) را اعمال می‌کنیم.

مثال و پاسخ

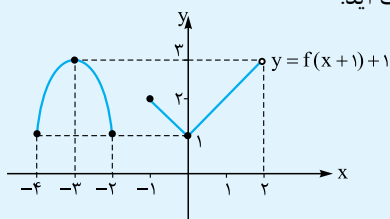
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. به کمک انتقال، نمودار تابع $y = f(x+1) + 1$ را رسم کنید.



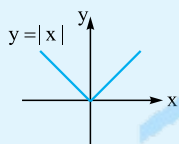
پاسخ: ابتدا نمودار $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم، پس نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم؛ یعنی:



حالا نمودار $f(x+1)$ را یک واحد بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y = f(x+1) + 1$ به دست آید:

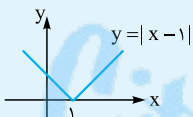


مثال: نمودار تابع $y = |x-1| - 2$ را با استفاده از انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

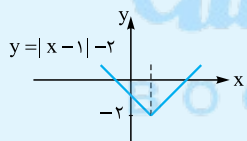


پاسخ: ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می‌کنیم.

در مرحله بعدی نمودار $y = |x-1|$ را با انتقال افقی یک واحد به سمت راست تابع اصلی ($y = |x|$) رسم می‌کنیم.



در مرحله آخر، نمودار مرحله قبلی را با انتقال عمودی دو واحد به پایین منتقل کرده و رسم می‌کنیم:

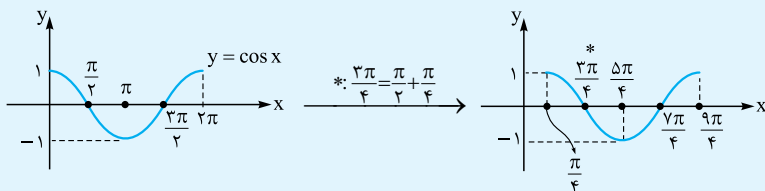


با توجه به نمودار مشخص هست که دامنه نمودار انتقال یافته \mathbb{R} و برد آن هم $[-2, +\infty)$ می‌باشد.

مثال: نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

(نویس فردر ۱۳۰۰)

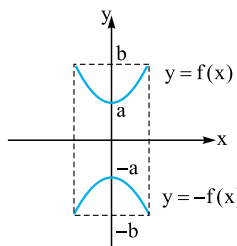
پاسخ: ابتدا نمودار $y = \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال افقی می‌دهیم.



از مطالبی که در سال‌های قبل یاد گرفتید، دو تبدیل بسیار مهم و پرکاربرد $f(-x)$ و $f(-x)$ باقی‌مانده است. این دو را هم بگویم و برویم سراغ تبدیل‌های جدید.

رسم $f(x)$ و $f(-x)$ از روی $f(x)$

نمودار $y = f(x)$ را داریم:



الف) $y = -f(x)$

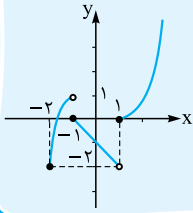
برای رسم این تابع از روی $f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. واضح است که دامنه f و $-f$ با هم برابرند ولی محدوده برد به صورت زیر تغییر می‌کند.

• اگر $R_{f(x)} = [a, b]$ ، آن‌گاه $R_{-f(x)} = [-b, -a]$ است. (نمودار رو ببینید.)

مثال و پاسخ

مثال: با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$ ، تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد؟

(نهایی شهریور ۱۳۰۰)



پاسخ: با آramش در هر بازه نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم. (برای رسم از قوانین انتقال کمک می‌گیریم).

صعودی $(-2, -1)$

نزولی $(-1, 1)$

صعودی $(1, +\infty)$

سؤال‌های امتحانی

۱۷- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

(نهایی فرورد ۹۹)

الف) نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $[0, 1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

(نهایی فرورد ۹۹)

ب) اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آن‌گاه اکیداً صعودی نیز خواهد بود.

(نهایی شهریور ۹۹)

پ) اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.

(نهایی شهریور ۱۳۰۰)

ت) تابع $y = -\log_5 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یکنوا است.

(نهایی شهریور ۹۹)

ث) چندجمله‌ای $P(x) = (x+1)^3(x-2)^2$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است.

(نهایی دی ۹۹)

ج) تابع $f(x)$ در بازه شامل a و b صعودی است. اگر $f(a) \leq f(b)$ ، آن‌گاه $a \leq b$.

۱۸- جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(نهایی دی ۹۸)

الف) اگر $\frac{1}{64} \leq \frac{1}{4}x-2 < \frac{1}{4}$ باشد، حدود x برابر است.

(نهایی فرورد ۱۳۰۰)

ب) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم.

پ) توابع اکیداً یکنوا، همواره هستند.

BOOK BANK

۱۹- کوتاه پاسخ دهید.

(نهایی شهریور ۹۸)

الف) درجه تابع $f(x) = x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید.

(نهایی شهریور ۹۸)

ب) کدام تابع در یک بازه، هم صعودی است و هم نزولی؟

پ) تابع $h(x) = |x+2|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

ت) دامنه توابع چندجمله‌ای برابر چیست؟

ث) وارون تابع با ضابطه $y = x^3$ چیست؟

(نهایی دی ۹۷)

۲۰- نمودار تابع $f(x) = (x+1)^3$ را رسم کنید. این تابع در دامنه خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

(نهایی شهریور ۹۸)

۲۱- اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید.

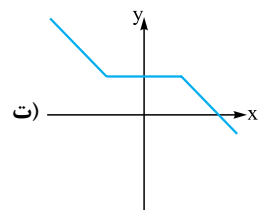
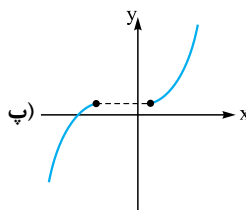
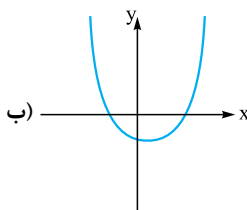
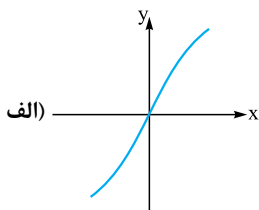
(نهایی دی ۹۹)

۲۲- با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد؟

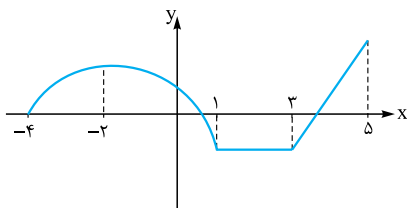
۲۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد؟

(نهایی فرورد ۱۳۰۰)

۲۴- وضعیت یکنوایی یا اکیداً یکنوایی نمودارهای زیر را بررسی کنید.



۲۵- با توجه به نمودار روبه‌رو، مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً نزولی، در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای هم صعودی و هم نزولی است؟



۲۶- $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی و یا ثابت است را مشخص کنید.

۲۷- نمودار تابع $f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$ را در بازه $[0, \pi]$ رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.

۲۸- دو تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = \log(x+1)$ را رسم کنید. کدام یک از آن‌ها در تمام دامنه خود اکیداً صعودی است؟

۲۹- نشان دهید تابع $f(x) = x^2 - 2x$ با شرط $x \leq 1$ ، اکیداً نزولی است.

۳۰- فرض کنید f در یک بازه، اکیداً نزولی باشد و a, b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ ، نشان دهید که $a \geq b$ است.

۳۱- اگر f در یک بازه، اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی هم هست؟ در مورد عکس این رابطه چه می‌توان گفت؟

۳۲- مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $(\sqrt{2})^{2x-1} \geq 2^x$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq -1$

پ) $(\frac{1}{2})^{2x+1} \geq \frac{1}{128}$

ت) $\log(\frac{x+1}{5}) < 1$

ث) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{2x+1}{3} \leq \log_{\frac{4}{5}} \frac{4x-1}{2}$

۳۳- اگر تابع‌های f و g در یک فاصله اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشند، نشان دهید $f+g$ هم در این فاصله اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) است.

بخش پذیری و تقسیم



به خاطر دارم که یکی از سوالات همیشگی دبستانم این بود:

«تقسیم مقابل را انجام دهید و درستی آن را امتحان کنید: $7 \overline{) 23}$ »

$$\begin{array}{r} 23 \\ 7 \overline{) 23} \\ \underline{-14} \\ 9 \\ \underline{-7} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 6 \end{array}$$



روش حل و امتحان درستی تقسیم هم به صورت مقابل است:

$$\begin{array}{r} \text{خارج قسمت} \\ \uparrow \\ 7 = 2 \times 3 + 1 \\ \downarrow \downarrow \\ \text{باقی مانده} \quad \text{مقسوم‌علیه} \end{array}$$

راه درستی تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها هم برقرار است که به آن، قضیه تقسیم می‌گوییم.

قضیه تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ تابع‌های چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه تابع‌های چندجمله‌ای منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:

$$f(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

↑ ↑
 مقسوم‌علیه باقی مانده
↓ ↓
 مقسوم خارج قسمت

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کم‌تر است. (نه لزوماً ۱ واحد)

توجه اگر $r(x) = 0$ باشد، می‌گوییم f بر p بخش پذیر است.

مثال و پاسخ

مثال نشان دهید که $f(x) = x^3 - 27$ بر $p(x) = x^2 + 3x + 9$ بخش پذیر است.

پاسخ برای بخش پذیر بودن باید باقی مانده، صفر شود. ببینید:

$$\begin{array}{r} x^3 - 27 \\ - (x^2 + 3x + 9) \\ \hline -3x^2 - 9x - 27 \\ - (-3x^2 - 9x - 27) \\ \hline 0 \end{array}$$

خیلی وقت‌ها پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم به این راحتی نیست و ممکن است بسیار طولانی شود. قضیه زیر برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم‌هایی که مقسوم‌علیه آن $ax + b$ (درجه ۱) است خیلی کار راه‌انداز است.

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر است با: $f\left(\frac{-b}{a}\right) = r(x)$ یعنی باید ریشه معادله $ax + b = 0$ را به دست آوریم و در $f(x)$ جای‌گذاری کنیم.

$$f(x) = (ax + b)q(x) + r$$

اثبات قضیه را هم بدانید:

جای $r, r(x)$ می‌نویسیم چون مقسوم‌علیه درجه ۱ است پس باقی‌مانده حتماً درجه صفر (عدد ثابت) است.

حالا اگر ریشه $ax + b = 0$ یعنی $\frac{-b}{a}$ را در رابطه بالا جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$f\left(\frac{-b}{a}\right) = \left(a \times \left(\frac{-b}{a}\right) + b\right)q\left(\frac{-b}{a}\right) + r = \underbrace{(-b + b)}_0 q\left(\frac{-b}{a}\right) + r = r \Rightarrow f\left(\frac{-b}{a}\right) = r$$

مثال و پاسخ

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^{100} + x^{99} - x^{11} + 2x + 2$ بر $x + 1$ را به دست آورید.

پاسخ: اول ریشه مقسوم‌علیه یعنی $x + 1$ را پیدا می‌کنیم و در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم. ببینید:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1)^{100} + (-1)^{99} - (-1)^{11} + 2(-1) + 2 = 1 - 1 + 1 - 2 + 2 = 1$$

پس باقی‌مانده ۱ است.

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که چندجمله‌ای $ax - b + x^2 + x^3$ بر $x + 1$ و $x - 1$ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ: چندجمله‌ای $ax - b + x^2 + x^3$ در $x = 1$ و $x = -1$ صفر می‌شوند. (بخش‌پذیری یعنی $r = 0$)

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 + a(-1) - b = 0 \Rightarrow -1 + 1 - a - b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$x = 1 \Rightarrow (1)^3 + (1)^2 + a(1) - b = 0 \Rightarrow a - b = -2 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1, b = 1$$

از حل دستگاه مقابل:

مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد. (نویسنده شهریور ۹۹)

پاسخ: چون $P(x)$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر است، پس می‌بایست $P(2) = 0$ (عدد ۲، ریشه $(x - 2)$ می‌باشد) و چون باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x + 1)$ برابر ۳ هست، می‌بایست $P(-1) = 3$ (عدد -۱، ریشه $(x + 1)$ می‌باشد) باشد.

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + a(2)^2 + b(2) - 2 = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -3$$

$$P(-1) = 3 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 2 = 3 \Rightarrow -1 + a - b - 2 = 3 \Rightarrow a - b = 6$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1, b = -5$$

کلام آخر

سه‌تا تجزیه خیلی مهم که به کمک این‌ها، طراح‌های امتحانات و کنکور می‌توانند سؤالات سختی را مطرح کنند. (فواهشاً فقط کنید.)

$$\boxed{a} \quad x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

(در پرانتز دوم همه علامت‌ها + هستند.)

$$n = 2 : x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) \quad (\text{مزدوج})$$

حالت‌های خاص این تجزیه را قبلاً زیاد دیدید:

$$n = 3 : x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \quad (\text{چاق و لاغر})$$

$$\boxed{b} \quad x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

n زوج باشد:

(در پرانتز دوم علامت‌ها یکی درمیان + و - می‌شوند.)

$$n = 2 : x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \quad (\text{مزدوج})$$

حالت خاص:

$$\boxed{b} \quad x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

n فرد باشد:

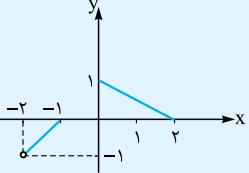
(در پرانتز دوم علامت‌ها یکی درمیان + و - می‌شوند.)

$$n = 3 : x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2) \quad (\text{چاق و لاغر})$$

حالت خاص:

په‌ها به نظر ۴ برای مفکر کردن این تجزیه‌ها از حالت‌های خاص‌شون می‌تونین کمک بگیرید.

آزمون جمع بندی

ردیف	آزمون جمع بندی	رشته ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره																						
۱	تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 & -1 < x < 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید: الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید. ب) دامنه و برد تابع $y = 2f(-x-1) - 1$ را به کمک نمودارش پیدا کنید.				۲																						
۲	اگر نقطه $A(-2, 1)$ روی تابع $f(x)$ باشد، مختصات نقطه A را روی تابع $y = \frac{-1}{3}f(x-2)$ به دست آورید.				۱																						
۳	نمودار تابع $y = -f(-2x) + 1$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را بیابید.				۲																						
۴	اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ و برد آن $[2, 5]$ باشد، دامنه و برد دو تابع $y = 3f(x+1)$ و $y = 2 - f(2x-1)$ را به دست آورید.				۲																						
۵	به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ ، نمودار تابع $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ را رسم کنید و در آخر دامنه و برد آن را پیدا کنید.				۲																						
۶	تابع $f = \{(3, 2), (1, 0), (-1, 0), (-2, -1)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟				۰/۷۵																						
۷	نمودار تابع $y = x-1 + x+2 $ را در بازه $[-4, 3]$ رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.				۲																						
۸	برای هر یک از موارد خواسته شده، تابع‌های f و g را به گونه‌ای مثال بزنید که در آن شرایط صدق کند.	<table style="display: inline-table; border: none;"> <tr> <td rowspan="3" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="text-align: center;">f</td> <td style="text-align: center;">صعودی</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">g</td> <td style="text-align: center;">نزولی</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f+g</td> <td style="text-align: center;">صعودی</td> </tr> </table> الف)	}	f	صعودی	g	نزولی	f+g	صعودی	<table style="display: inline-table; border: none;"> <tr> <td rowspan="3" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="text-align: center;">f</td> <td style="text-align: center;">صعودی</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">g</td> <td style="text-align: center;">صعودی</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f-g</td> <td style="text-align: center;">هم صعودی و هم نزولی</td> </tr> </table> ب)	}	f	صعودی	g	صعودی	f-g	هم صعودی و هم نزولی	<table style="display: inline-table; border: none;"> <tr> <td rowspan="3" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="text-align: center;">f</td> <td style="text-align: center;">نزولی</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">g</td> <td style="text-align: center;">نزولی</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f-g</td> <td style="text-align: center;">اکیداً صعودی</td> </tr> </table> پ)	}	f	نزولی	g	نزولی	f-g	اکیداً صعودی		۲/۲۵
}	f	صعودی																									
	g	نزولی																									
	f+g	صعودی																									
}	f	صعودی																									
	g	صعودی																									
	f-g	هم صعودی و هم نزولی																									
}	f	نزولی																									
	g	نزولی																									
	f-g	اکیداً صعودی																									
۹	تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار تابع $f(x)$ را به کمک تابع $y = x^3$ رسم کنید. ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. پ) ضابطه f^{-1} را به دست آورید.				۲																						
۱۰	اگر $x+2$ یک عامل $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ باشد و باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ برابر -6 باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $p(x) = 0$ را به دست آورید.				۲																						
۱۱	ساده شده $A = \frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{2}$ به ازای $x = \sqrt[5]{3}$ چند برابر $\frac{2}{1-\sqrt[5]{3}}$ است؟				۲																						
	جمع نمرات				۲۰																						

هر یک از توابع $y = \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 4$ یا $y = -\sin\left(-\frac{2\pi x}{3}\right) + 4$

یا $y = \sin\left(-\frac{2\pi x}{3}\right) + 4$ قابل قبول است.

۹- نمودار نشان‌دهنده یک تابع سینوسی به فرم $y = a \sin bx + c$ است. با توجه به شکل، مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع، ضابطه تابع را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = \frac{1}{2} \\ \min &= -|a| + c = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 2c = 0$$

$$\Rightarrow c = 0, |a| = \frac{1}{2}, a = \pm \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

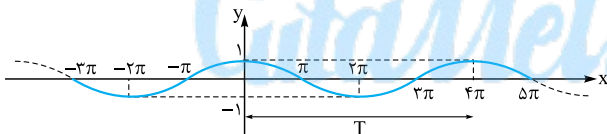
با توجه به این‌که نمودار تابع مانند شکل اصلی تابع نیست، پس

$a \times b < 0$ می‌باشد. هر یک از توابع $y = -\frac{1}{2} \sin 3x$ یا

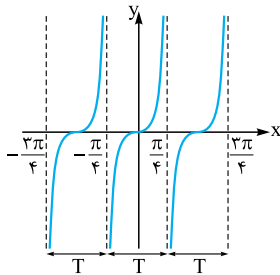
$y = \frac{1}{2} \sin(-3x)$ قابل قبول است.

۱۰- الف) نمودار تابع $f(x) = \cos \frac{x}{4}$ به صورت زیر است:

واسه رسم $\cos \frac{x}{4}$ باید دامنه $\cos x$ رو دو برابر کنیم.



همان‌طور که از روی نمودارش می‌بینید دوره تناوب تابع $f(x) = \cos \frac{x}{4}$ ، 4π است.



ب) نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{4} \tan 2x$ به صورت مقابل است:

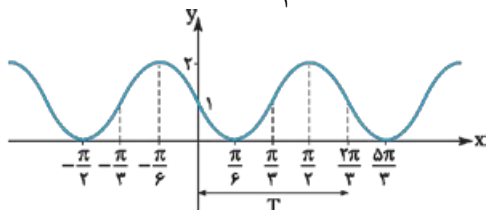
با توجه به نمودار، دوره تناوب

$g(x) = \frac{1}{4} \tan 2x$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ است.

پ) نمودار تابع $h(x) = 1 - \sin 3x$ به صورت زیر است:

اول باید $\sin 3x$ رو بکشیم، بعرض $\sin 3x$ و آفرش هم $1 - \sin 3x$.

دوره تناوب $h(x) = 1 - \sin 3x$ ، $\frac{2\pi}{3}$ است.



$$-1 \text{ الف) } \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \pi$$

$$\text{ب) } \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

$$\text{پ) } \max = |a| + c = |-\sqrt{5}| + 0 = \sqrt{5}$$

۲- الف) نادرست، زیرا $\min = -|a| + c = -|-3| + 2 = -1$

ب) نادرست، زیرا تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{4}$ تعریف شده و مقدار آن ۱ است.

پ) درست، زیرا

$$y = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

۳-

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 6 \\ \min &= -|a| + c = -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 2c = 4$$

$$\Rightarrow c = 2, |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

هر یک از توابع $y = 4 \sin(2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(2x) + 2$ یا $y = 4 \sin(-2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(-2x) + 2$ قابل قبول است.

۴-

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 4 \\ \min &= -|a| + c = -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 2c = 2$$

$$\Rightarrow c = 1, |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pm \pi$$

هر یک از توابع $y = 3 \cos(\pi x) + 1$ یا $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ یا $y = 3 \cos(-\pi x) + 1$ یا $y = -3 \cos(-\pi x) + 1$ قابل قبول است.

۵-

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \max = |a| + c = |-3| + 1 = 4$$

$$\min = -|a| + c = -|-3| + 1 = -2$$

$$\max = |a| + c = |2| + 1 = 3$$

$$\min = -|a| + c = -|2| + 1 = -1$$

۶-

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

$$\max = |a| + c = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9$$

$$\min = -|a| + c = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9$$

۸- ضابطه تابع را به صورت $y = a \sin bx + c$ در نظر می‌گیریم:

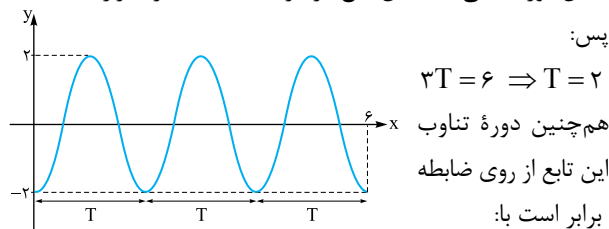
$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 5 \\ \min &= -|a| + c = 3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 2c = 8$$

$$\Rightarrow c = 4, |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{2\pi}{3}$$

۱۵- به نمودار زیر توجه کنید.

همان طور که می بینید این تابع در بازه $[0, 6]$ سه بار تکرار شده است،



$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = 1$$

و هم چنین بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب ۲ و -۲ است، پس

$$|ab| = |a| \times |b| = 2 \quad |a| = 2 \quad \pi \quad \text{الف} \quad ۱۶$$

$$\mathbb{R} \quad \text{پ} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ب}$$

۱۷- الف) نادرست؛ تابع تنازانت در دامنه اش غیر یکنوا است.

ب) درست

پ) نادرست؛ نقاط به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ در دامنه تابع تنازانت قرار ندارند.

ت) درست

ث) نادرست؛ دوره تناوب تابع تنازانت برابر π است.

ج) نادرست

چ) نادرست؛ برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر \mathbb{R} است.

ح) نادرست؛ تابع تنازانت در $x = 0$ محور x ها را قطع می کند.

۱۸- الف) این گزاره نادرست است. در واقع هیچ بازه مشخصی وجود

ندارد که تابع $\tan x$ مدام در آن کاهش پیدا کند (به نمودارش نگاه کنید).

ب) این گزاره درست است. تابع $\tan x$ در هر بازه ای که در تمامی نقاط

آن تعریف شده باشد صعودی است. (متی آکبدر صعودیه مثلاً در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$\cos 3x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = \cos x \quad ۱۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin 3x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \quad ۲۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \Delta x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{\Delta} + \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}$$

$$2\cos 3x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\cos 3x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \cos 3x = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \end{cases} \quad ۲۱$$

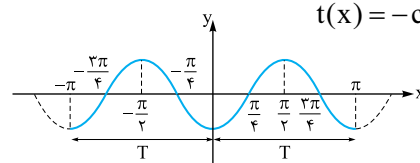
فب! همان طور که می دانیم $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ است، پس

می توان نوشت: $t(x) = -\cos 2x$

و نمودار $t(x)$

به صورت

مقابل است:



پس دوره تناوب $t(x) = -2\cos^2 x + 1$ برابر π است.

۱۱- دوره تناوب هر تابع به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ و

$y = a \cos(bx + c) + d$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ؛ پس دوره تناوب

هر یک از توابع زیر به راحتی قابل محاسبه است.

$$\text{الف) } T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi \quad \text{ب) } T = \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \sqrt{2}\pi$$

$$\text{پ) } T = \frac{2\pi}{|\frac{3\pi}{2}|} = \frac{4}{3} \quad \text{ت) } T = \frac{\pi}{|\pi|} = 1$$

۱۲- ماکزیمم و مینیمم هر تابع به صورت $y = a \sin(bx + c) + d$

و $y = a \cos(bx + c) + d$ به ترتیب برابرند با $|a| + d$ و

$-|a| + d$ پس می توان نوشت:

$$\text{الف) } \max = |\pi| + 2 = \pi + 2, \quad \min = -|\pi| + 2 = 2 - \pi$$

$$\text{ب) } \max = \left| \frac{-1}{\pi} \right| + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad \min = -\left| \frac{-1}{\pi} \right| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$$

$$\text{پ) } \max = |-1| - 1 = 0, \quad \min = -|-1| - 1 = -2$$

$$\text{ت) } \max = \left| \frac{1}{2} \right| + 2 = \frac{5}{2}, \quad \min = -\left| \frac{1}{2} \right| + 2 = \frac{3}{2}$$

۱۳- همان طور که می بینید این تابع در بازه $[0, 16]$ ، ۴ بار تکرار شده

است، پس داریم:

$$4T = 16 \Rightarrow T = 4$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{2}$$

یعنی می توان نوشت:

$$d = \frac{\max + \min}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4 \quad \text{از طرفی می دانیم:}$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

فقط مشخص کردن علامت b و a می ماند که الان خدمتان عرض

می کنم. با توجه به نمودار تابع داده شده (شبهه فود سینوسه نه قرینش)

باید علامت b و a یکی باشد (یا هر دو + یا هر دو -) پس ضابطه

تابع به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4 \quad \text{یا} \quad y = -3 \sin\left(\frac{-\pi x}{2}\right) + 4$$

۱۴- دوره تناوب تابع مقابل، $T = 3$ است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{2}{3}$$

از طرفی برد تابع $[-3, 3]$

است، پس $|a| = 3$ است.

حالا با توجه به مثبت بودن

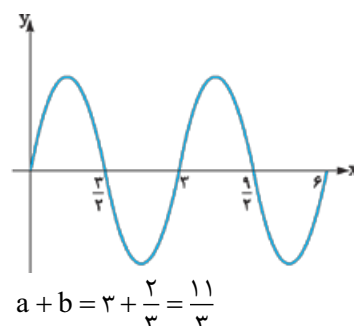
b باید a هم مثبت باشد

یعنی $a = 3$ (اگر a منفی باشه

نمودار \sin باید نسبت به محور

x ها قرینه می شد که این جا نشده).

در نهایت داریم:



حواستان باشد که $0 < \theta < \pi$ است، پس داریم:

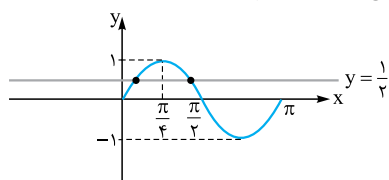
k	0	1
$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
	✓	✗

k	0	1
$\theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$
	✓	✗

پس زاویه‌های قابل قبول $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ هستند.

۳۵- دو تابع $y = \sin 2x$ و $y = \frac{1}{4}$ را در یک دستگاه مختصات

رسم می‌کنیم تا نقاط تقاطع را پیدا کنیم:



همان‌طور که می‌بینید این تابع در بازه $[0, \pi]$ در دو نقطه متقاطع‌اند،

پس معادله $\sin 2x = \frac{1}{4}$ در این بازه دو ریشه دارد.

پاسخ آزمون جمع‌بندی

از روی شکل معلوم است که: $\max = \frac{1}{4}, \min = 0, T = \frac{\pi}{4}$

۳- $y = \frac{\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x}{\sin(2x+x)} + 2 \sin 3x + 1$

$y = \sin 2x + 2 \sin 3x + 1 = 3 \sin 2x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max = |3| + 1 = 4 \\ \min = -|3| + 1 = -2 \\ T = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

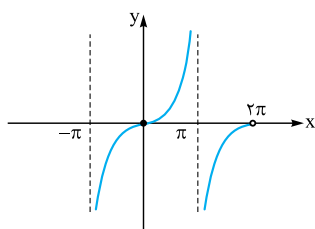
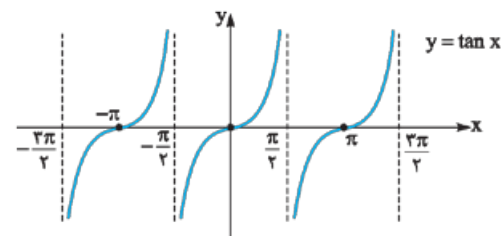
$$\begin{cases} \max = 4 \\ \min = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |b| + a = 4 \\ -|b| + a = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ |b| = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$ چون تابع هم‌شکل تابع اصلی نیست.

$T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = 4 \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{2}$

هر دو مورد قابل قبول است. $\Rightarrow c = \pm \frac{\pi}{2}$

۵- $y = \tan x$

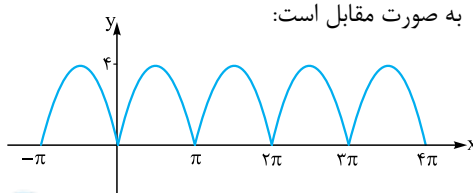


با توجه به شکل مشخص است که دوره تناوب تابع 2π است و در بازه‌های

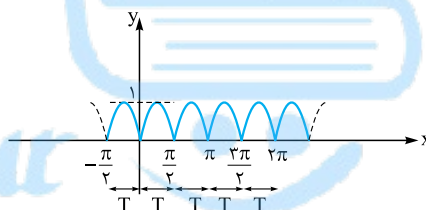
$(-\pi, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ تابع اکیداً صعودی است و در هیچ بازه‌ای اکیداً

نزولی نمی‌باشد.

۱- نمودار $f(x)$ به صورت مقابل است:



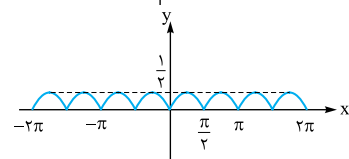
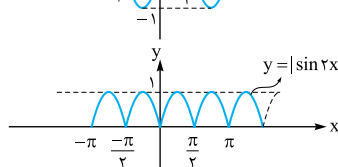
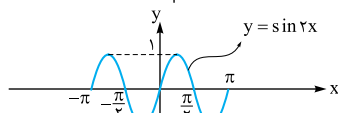
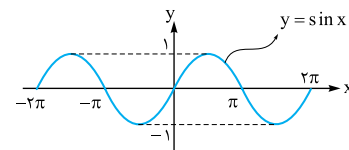
برای رسم تابع $y = \frac{1}{4}f(2x)$ ابتدا $f(2x)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی آن $\frac{1}{4}f(2x)$ را می‌کشیم (اول دامنه رو نصف می‌کنیم و بعدش برد رو نصف می‌کنیم).



همان‌طور که می‌بینید این تابع در بازه‌های به طول $\frac{\pi}{2}$ تکرار می‌شود پس $T = \frac{\pi}{2}$ است.

۲- ابتدا ضابطه تابع را ساده کرده، سپس رسم می‌کنیم:

$y = |\sin x \cos x| = \frac{1}{2} |\sin 2x| \Rightarrow y = \frac{1}{4} |\sin 2x|$



هدیه‌های نامتناهی و حد درک بی‌نهایت

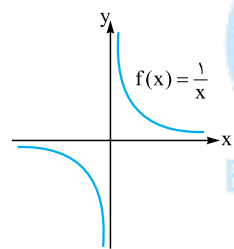


سه فصل

۱. هدیه‌های نامتناهی (حد بی‌نهایت)

در کتاب حسابان ۱، حد در نقطه را یاد گرفتید. الان قرار است که ادامه آن را بخوانیم. داستان به این شکل است که بعضی وقت‌ها با نزدیک شدن x به a ، $f(x)$ به سمت عدد مشخصی نمی‌رود، مثلاً ممکن است تابع f خیلی خیلی بزرگ شود و به سمت $+\infty$ برود (عدد نیست، سمبل بزرگیه) یا حتی خیلی خیلی کوچک شود و به سمت $-\infty$ برود.

سال قبل با نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدید:



می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی $x = 0$ بررسی کنیم. جدول زیر را ببینید:

x	-۱	-۰/۱	-۰/۰/۱	۰	۰/۰/۱	۰/۱	۱
$f(x) = \frac{1}{x}$	-۱	-۱۰	-۱۰۰	تعریف نشده	۱۰۰	۱۰	۱

صفر توی دامنه نیست

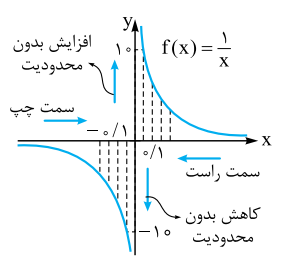
فُتب بپهها! همان‌طور که می‌بینید وقتی x از مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود ($x \rightarrow 0^+$) بدون محدودیت افزایش می‌یابد ($f(x) \rightarrow +\infty$). به قول کتاب درسی: «می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت مفروض بزرگ‌تر کرد، به شرطی که x به اندازه کافی از سمت راست صفر، به صفر نزدیک شده

باشد» و در این حالت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

هم‌چنین وقتی x از مقادیر کم‌تر از صفر، به صفر نزدیک می‌شود ($x \rightarrow 0^-$), $f(x)$ بدون محدودیت کاهش می‌یابد ($f(x) \rightarrow -\infty$). به قول کتاب درسی: «می‌توان $f(x)$ را از هر عدد منفی کوچک‌تر کرد، به شرطی که x به اندازه کافی از سمت چپ صفر، به صفر نزدیک شده باشد.»

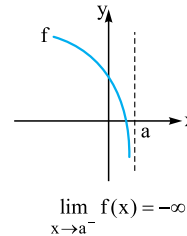
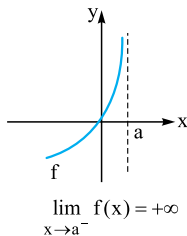
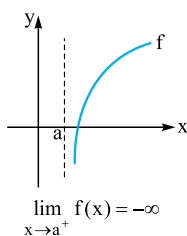
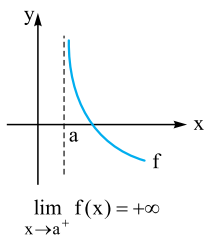
در این حالت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

با نگاهی عمیق‌تر به تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ این اتفاقات را به خوبی می‌توان مشاهده کرد. ببینید:



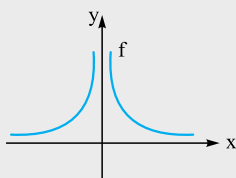


حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است:



توجه: زمانی که حاصل حد بی‌نهایت می‌شود، می‌گوییم حد وجود ندارد. حتی اگر حد چپ و راست هر دو $+\infty$ شوند یا هر دو $-\infty$ شوند.

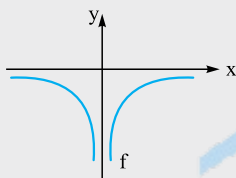
حد مثبت بی‌نهایت



فرض کنید f در دو طرف a (به‌جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ؛ یعنی می‌توان f را به اندازه دلخواه (هر چه قدر بقوایم) افزایش دهیم به شرطی که x به اندازه کافی به عدد a نزدیک شده باشد.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

حد منفی بی‌نهایت



فرض کنید f در دو طرف a (به‌جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ؛ یعنی می‌توان f را به اندازه دلخواه کاهش داد، به شرطی که x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشد.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

فصل سوم: حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت

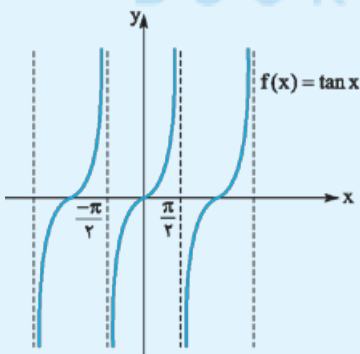
مثال و پاسخ

مثال: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ را رسم کنید و با استفاده از آن حدهای خواسته‌شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}} f(x)$



پاسخ: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ به صورت مقابل است:

الف) همان‌طور که می‌بینید وقتی $x \rightarrow 0$ (چه از چپ، چه از راست) مقادیر $\tan x$ هم به صفر نزدیک می‌شود یعنی:

$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ (این واسه پارسل بود)

ب) وقتی x از سمت چپ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود ($x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$)، $\tan x$ به شدت افزایش می‌یابد و به سمت $+\infty$ میل می‌کند: (نمودار رو نگاه کنید)

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty$

پ) وقتی x از سمت راست به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود ($x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}$)، $\tan x$ به شدت کاهش می‌یابد و به سمت $-\infty$ می‌رود؛ یعنی:

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$

قضایای حد در بی‌نهایت

قضیه ۱

برای محاسبه حد تابع $f(x) = \frac{1}{x^n}$ در $x = 0$ ، باید حد چپ و راست را جداگانه به دست آوریم:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

۱ در این حالت حاصل این حد همیشه $+\infty$ می‌شود؛ یعنی:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$

۲ حاصل حد به صورت مقابل است:

بگذارید یک مثال بزنم، مثلاً می‌خواهیم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x^3}$ را در $x = 0$ به دست آوریم.

$$1 \quad x \rightarrow 0^+ : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$2 \quad x \rightarrow 0^- : \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

این تابع در $x = 0$ حد ندارد. (نه به خاطر این که هر چه p و q برابر نشوند، به خاطر این که ∞ شدن).

البته برای جلوگیری از حفظ کردن، بد نیست این سبک استدلال کردن را هم یاد بگیرید. ببینید:

زمانی که x از سمت راست صفر به صفر نزدیک می‌شود ($x \rightarrow 0^+$) می‌توان مثلاً x را $\frac{1}{1000}$ در نظر گرفت. (به عدد کوچک مثبت نزدیک صفر) و هم‌چنین فرض کنید $n = 3$. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1000}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{10^9}} = 10^9$$

می‌بینید که مقدار تابع به شدت افزایش می‌یابد و انگار به سمت $+\infty$ می‌رود. هم‌چنین زمانی که $x \rightarrow 0^-$ ، می‌توان x را $\frac{-1}{1000}$ در نظر گرفت:

$$n: \text{ فرد} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} \xrightarrow{(n=3 \text{ عدد فرد دلخواه})} \frac{1}{\left(-\frac{1}{1000}\right)^3} = -10^9$$

انگار به سمت $-\infty$ می‌رود.

$$n: \text{ زوج} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} \xrightarrow{(n=4 \text{ عدد زوج دلخواه})} \frac{1}{\left(-\frac{1}{1000}\right)^4} = 10^{12}$$

انگار به سمت $+\infty$ می‌رود.

به نظر m این پوری نگاه کردن به هر، خیلی مسائل را برایتان راحت‌تر حل می‌کند.

قضیه ۲

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

قضیه ۳

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن‌گاه:

الف) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به جز احتمالاً خود a) مثبت است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به جز احتمالاً خود a) مثبت باشد:

ب) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به جز احتمالاً خود a) منفی باشد:

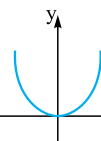
ت) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به جز احتمالاً خود a) منفی باشد:

مثلاً حد تابع $f(x) = \frac{5}{|x+2|}$ وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ و $x \rightarrow (-2)^-$ میل می‌کند را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{5}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{5}{x+2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{5}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{5}{-x-2} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{5}{|x-2|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

این مثال را هم ببینید: حد تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ در $x = 0$ برابر $-\infty$ است زیرا:



منحرف 0^+ می‌شود زیرا تابع $y = x^2$ همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است (x و طبق قسمت ب) قضیه قبل حاصل حد $-\infty$ می‌شود.

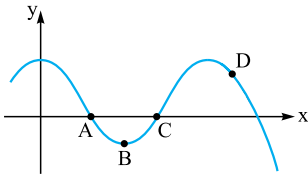
این طوری هم ببینید:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-1}{x^2} &= \frac{-1}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{x^2} &= \frac{-1}{(0^-)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x^2} = -\infty$$

آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون جمع‌بندی	رشته ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	نمودار تابع $f(x) = \log x$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) حد چپ و راست این تابع را در $x = 0$ به دست آورید. ب) آیا این تابع در $x = 0$ حد دارد؟ چرا؟				۱/۵
۲	حاصل‌حدهای زیر را به دست آورید.			الف) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2x+1}{\tan \frac{x}{2}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\log x}$	۲
۳	اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sin x} & x > 0 \\ \frac{1}{2x} & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x} & x > \frac{\pi}{2} \\ \frac{-x-1}{\tan x} & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.			الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x)$	۱
۴	اگر خط‌های $x=1$ و $x=2$ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+ax+b}$ باشند، a و b را بیابید.				۲
۵	اگر در تابع $f(x) = \frac{x-a}{x^2+3x+2}$ فقط خط $x=-1$ مجانب قائم باشد، a را بیابید.				۲
۶	مجانب قائم تابع‌های زیر را به دست آورید و سپس نمودارشان را در حوالی مجانب قائمشان رسم کنید.			الف) $y = \frac{2x+2}{(x-1)^2}$ ب) $y = \frac{1-2x}{x^2-1} \quad (x > 0)$ پ) $y = \frac{1}{x- x }$	۲/۵
۷	با توجه به نمودارهای زیر، حاصل‌حدهای خواسته‌شده را بیابید.			الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2f(x))$ پ) $\lim_{x \rightarrow \infty} g^2(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x) - f^2(x))$	۲
۸	نمودار مربوط به هر یک از حالات زیر را رسم کنید.			الف) $\begin{cases} y = 1 & \text{مجانب افقی} \\ x = 1 & \text{مجانب قائم} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y = -1 & \text{مجانب افقی} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] = -2 \end{cases}$	۱
۹	اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + 3x^2 + 1}{bx^3 - x + 2} = \frac{3}{2}$ حاصل، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx+1}{a+bx+1}$ را به دست آورید.				۲
۱۰	اگر خط $y=4$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{mx^2+2x}{x^2-m}$ باشد، مجانب قائم‌های $f(x)$ را به دست آورید.				۲
۱۱	اگر تابع $f(x) = \frac{x^2-mx+2}{x-1}$ فاقد مجانب قائم باشد، مجانب افقی تابع $g(x) = \frac{2mx^2+4x}{mx^3-1}$ را به دست آورید.				۲
۲۰	جمع نمرات				

۱۳- نمودار تابع $y = f(x)$ و نقاط A, B, C و D روی آن مفروض اند. هر یک از گزاره‌های زیر را به یکی از این نقاط نظیر کنید.



الف) نقطه‌ای که در آن $f' < 0$ و تابع بعد از آن اکیداً نزولی است.

ب) نقطه‌ای که در آن $f' = 0$ و $f < 0$.

پ) نقطه‌ای که در آن $f' > 0$ و عرض تابع برابر صفر است.

۱۴- در هر یک از موارد، نمودار تابعی را رسم کنید که از $A(2, 2)$ و $B(3, 3)$ گذشته و

الف) $m_{AB} > 0$ و $m_B = 0$, $m_A = 0$ (ب)

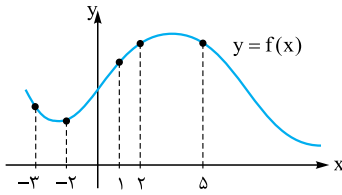
الف) $m_{AB} > 0$ و $m_B < 0$, $m_A > 0$

۱۵- اگر $f(x) = (x-1)^3$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید.

۱۶- در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، شیب خط مماس بر f در $x = 4$ را به دست آورید.

۱۷- معادله خط مماس بر تابع $f(x) = x^2 + 2$ در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن را بنویسید.

۱۸- با توجه به نمودار $y = f(x)$ ، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



الف) $f'(1) > f'(2)$

ب) $f'(5) > f'(-3)$

پ) $f'(-2) < f(5)$

ت) $f'(-3) < f'(-2) < f'(2) < f'(1)$

۲ مشتق پذیری و پیوستگی

در درس گذشته دو تعریف برای $f'(a)$ به صورت مقابل گفتیم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگر حدهای بالا موجود باشند می‌گوییم f در $x = a$ مشتق پذیر است. بررسی مشتق پذیری با تعریف‌های بالا، واقعاً کار سخت و زمان‌بری است. برای

همین از یک قضیه کمک می‌گیریم که ما را از شر تعریف مشتق راحت می‌کند.

در این درس ابتدا ارتباط بین پیوستگی و مشتق پذیری و بعد از آن، مشتق چپ و راست را می‌گوییم.

مشتق پذیری و پیوستگی

این درس را با یک قضیه بسیار مهم شروع می‌کنیم:

قضیه: اگر f در $x = a$ مشتق پذیر باشد (حد بالا موجود باشد)، قطعاً در $x = a$ پیوسته هم است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

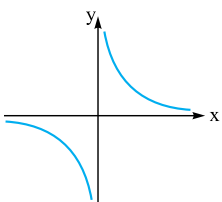
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

توجه: اگر f در a پیوسته نباشد، در a مشتق پذیر هم نیست. (پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری) بگذارید یک مثال بزنیم:

می‌خواهیم مشتق پذیری تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنیم:

خب! قبل از هر چیزی به نمودار $\frac{1}{x}$ توجه کنید:

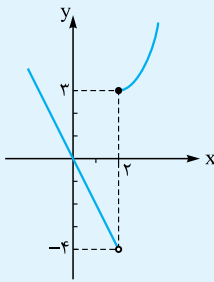


همان‌طور که می‌بینید این تابع در $x = 0$ تعریف نشده است ($D_f = \mathbb{R} - \{0\}$)؛ پس در $x = 0$ ناپیوسته و در نتیجه

مشتق ناپذیر است.

مثال و پاسخ

مثال: به کمک نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 2 \\ -2x & x < 2 \end{cases}$ بگویید آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟



پاسخ: نمودار f به صورت مقابل است:

همان طور که مشاهده می کنید، $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر هم نیست. (راستی این بوری هم همیشه گفت که اصلاً در $x = 2$ فط مماس وجود ندارد).

خلاصه این درس به صورت زیر است:

الف) اگر f در a مشتق پذیر باشد \leftarrow در a پیوسته هم است.

ب) اگر f در a پیوسته نباشد \leftarrow در a مشتق پذیر هم نیست.

هالا باید براتون یک سؤال ایثار شده باشد. شد؟؟؟

سؤال این است! اگر f در $x = a$ پیوسته باشد، آن گاه حتماً مشتق پذیر است؟ نه برای پاسخ دقیق به این سؤال باید درس بعدی را به خوبی مطالعه کنید.

مشتق چپ و راست

تعریف: مشتق چپ و راست تابع f در $x = a$ را به ترتیب با نماد $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{یا} \quad f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{یا} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همان طور که می دانید تعبیر هندسی $f'(a)$ ، شیب خط مماس بر نمودار f در $x = a$ است پس به طور مشابه می توان نتیجه گرفت:

شیب نیم مماس راست بر f در $x = a$: $f'_+(a)$ شیب نیم مماس چپ بر f در $x = a$: $f'_-(a)$

این قضیه را هم بگوییم و برویم سراغ مثال ها.

قضیه: تابع $f(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر است، اگر:

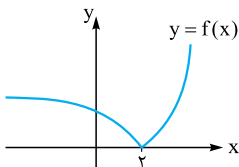
الف) در a پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

ب) مشتق چپ و راست f در a موجود و مساوی باشند (موجود بودن یعنی جواب حد ∞ نشود):

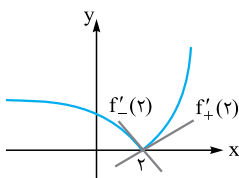
$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

برای درک قضیه بالا به نمودار f توجه کنید:



این تابع در تمامی نقاط (حتی $x = 2$) پیوسته است. سؤالی که مطرح می شود این است که آیا f در $x = 2$ مشتق پذیر است؟

نه! اگر f خواهد در $x = 2$ مشتق پذیر باشد (با فرض پیوستگی)، باید شیب نیم مماس راست ($f'_+(2)$) با شیب نیم مماس چپ ($f'_-(2)$) با هم برابر باشند. اما نمودار زیر را ببینید:

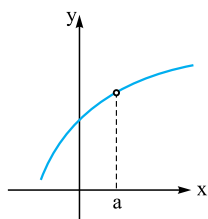
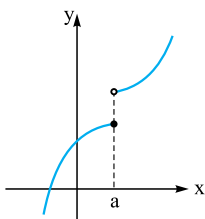


واضح است که $f'_+(2) > 0$ و $f'_-(2) < 0$ هستند پس با هم برابر نیستند و در نتیجه f در $x = 2$ مشتق ناپذیر است (اگر بخواهد مشتق پذیر باشد باید نیم مماس چپ و راست روی هم منطبق باشند). کتاب درسی به نقاطی که مشتق چپ و راست دو عدد نابرابر می شوند نقاط گوشه می گوید (زاویه دار هم می گفتن).

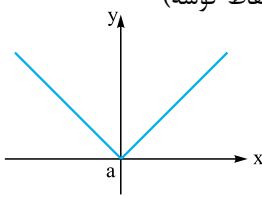
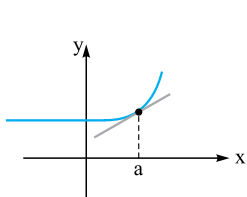
توجه: پس به طور کلی، اگر یک تابع پیوسته باشد، لزوماً مشتق پذیر نیست و مشتق پذیری آن باید بررسی شود.

بررسی مشتق پذیری تابع از روی نمودار آن

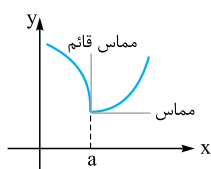
موارد الف تا ث همگی نشان‌دهنده نقاط مشتق ناپذیر در یک تابع هستند. به شکل‌ها و اسم‌های آن‌ها خوب دقت کنید:



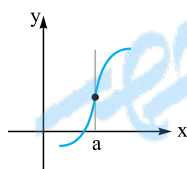
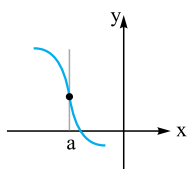
ب در f پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در a ، هر دو متناهی و نابرابر باشد. (نقاط گوشه)



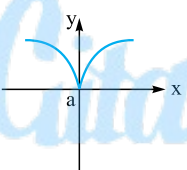
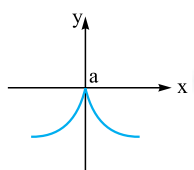
پ در f پیوسته باشد و یکی از مشتق‌های چپ یا راست متناهی و دیگری نامتناهی باشد. (نقاط گوشه)



ت مشتق چپ و راست در a نامتناهی (∞) و هم‌علامت باشند. (مماس قائم)

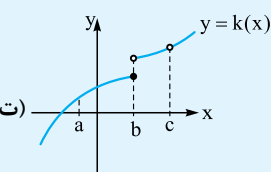
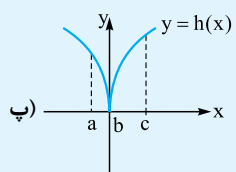
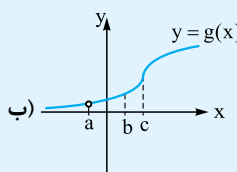
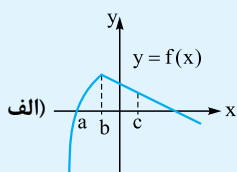


ث مشتق چپ و راست در a نامتناهی (∞) و غیرهم‌علامت باشند. (مماس قائم)



مثال و پاسخ

مثال: در شکل‌های زیر وضعیت مشتق‌پذیری را در نقاط a ، b و c بررسی کنید.



پاسخ: الف به نمودار $f(x)$ توجه کنید:

همان‌طور که می‌بینید در نقاط a و c مشتق چپ و راست با هم برابرند ولی در نقطه b مشتق چپ و راست فرق دارند:

$$f'_-(b) > 0, f'_+(b) < 0$$

پس f در a و c مشتق‌پذیر و در b مشتق‌ناپذیر است.

ب نمودار $g(x)$:

ف! $g(x)$ در $x=a$ تعریف‌نشده است پس ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

$g(x)$ در $x=b$ مشتق‌پذیر است زیرا مشتق چپ و راست با هم برابرند (قریبی‌ها بوش می‌گفتن

فقط مماس واحد‌داره) و در نهایت، این تابع در $x=c$ مشتق‌ناپذیره، چون $g'_+(c)$ و $g'_-(c)$ هر دو بی‌نهایت‌اند (گفتیم که مشتق نباید ∞

بشه). در این حالت می‌گوییم $g(x)$ در $x=b$ مماس قائم دارد.

	$f(x)$	$f'(x)$	توضیح و مثال
۱	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$ مشتق تابع ثابت صفر است، مثلاً:
۲	$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
۳	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	باید f مشتق پذیر و گویا باشد، مثلاً: $y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$ $y = \sqrt{4x^2 - x + 1} \Rightarrow y' = \frac{8x-1}{2\sqrt{4x^2 - x + 1}}$
۴	$g = \sqrt[3]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}$	باید f مشتق پذیر و گویا باشد، مثلاً: $y = \sqrt[3]{4x-1} \Rightarrow y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x-1)^2}}$ $y = \sqrt[3]{5x^2 - 2x - 1} \Rightarrow y' = \frac{10x-2}{3\sqrt[3]{(5x^2 - 2x - 1)^2}}$

توجه: مشتق سه تابع زیر که مربوط به حالت‌های خاص جدول بالا است را حتماً حفظ کنید:

۱ $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
۲ $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
۳ $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

در قسمت (۲) جدول بالا، حالت کلی‌تر هم برقرار است یعنی (لزومی ندارد توان عدد صحیح باشد، کسری هم باشه آکبه)، مثلاً:

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

مثال و پاسخ

مثال: مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = x^{-3}$ ب) $f(x) = \sqrt{4x-2}$ پ) $f(x) = \sqrt{-x^2+x+1}$ ت) $f(x) = \sqrt[3]{4x^3-x}$

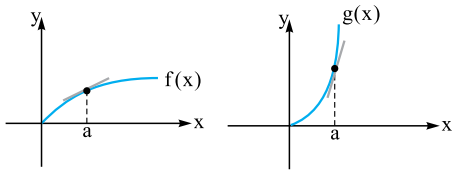
پاسخ:

الف) $f'(x) = -3x^{-4}$ ب) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}}$ پ) $f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x+1}}$ ت) $f'(x) = \frac{12x^2-1}{3\sqrt[3]{(4x^3-x)^2}}$

اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند:

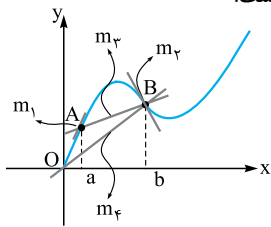
	$h(x)$	$h'(x)$	توضیح و مثال
۱	$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$h(x) = x^2 + x^3 \Rightarrow h'(x) = 2x + 3x^2$ $h(x) = x^4 - \frac{1}{x} \Rightarrow h'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x^2}$
۲	$h(x) = kf(x)$	$h'(x) = kf'(x)$	f مشتق پذیر است و k یک عدد ثابت است، مثلاً: $h(x) = 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3(2x) = 6x$ (فرضیه رو نگه دار و از بقیه مشتق بگیر.)
۳	$h(x) = f(x) \times g(x)$	$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	$h(x) = \overbrace{(2x+1)}^f \overbrace{(x-1)}^g$ $\Rightarrow h'(x) = \underbrace{(2)}_{f'} \underbrace{(x-1)}_g + \underbrace{(1)}_{g'} \underbrace{(2x+1)}_f$
۴	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$)	مواضع باشه + نیست!!! $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$	$g(x) \neq 0$ پس: $h(x) = \frac{\overbrace{f}^f}{\underbrace{x-1}_g} \Rightarrow h'(x) = \frac{\overbrace{f'}^f \overbrace{g}^g - \overbrace{g'}^g \overbrace{f}^f}{(x-1)^2}$ $= \frac{(2)(x-1) - (1)(2x+1)}{(x-1)^2}$

شیب خط مماس بر $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ مثبت است ولی در تابع $h(x)$ ، شیب خط مماس در $x = a$ منفی است. همچنین واضح است که بین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ، شیب خط مماس بر $g(x)$ در $x = a$ بیشتر از شیب خط مماس بر $f(x)$ در $x = a$ است:



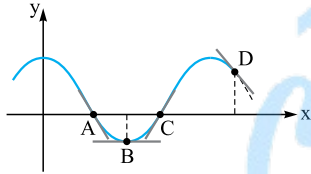
پس می‌توان نوشت: $m_{h(a)} < m_{f(a)} < m_{g(a)}$

۱۲- نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر است:



با کمی دقت از روی نمودار نتیجه می‌گیریم: $m_A > m_C > m_B$

۱۳- نمودار $y = f(x)$ را ببینید:



حالا گزاره‌ها:

(الف) نقطه‌ای که در آن $f' < 0$ و تابع بعد از آن اکیداً نزولی است:

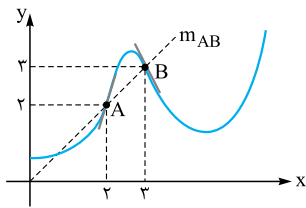
جواب نقطه D

(ب) نقطه‌ای که در آن $f' = 0$ و $f < 0$: جواب نقطه B

(پ) نقطه‌ای که در آن $f' > 0$ و عرض تابع برابر صفر است: جواب

نقطه C

۱۴- الف) نمودار خواسته شده به صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید تابع از A و B گذشته، $m_A > 0$ ، $m_B < 0$ و $m_{AB} > 0$ است.

(ب) نمودار به صورت زیر است:

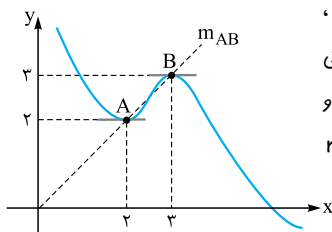
از A و B گذشته و $m_A = 0$ و $m_B = 0$

(راستی) $m_{AB} > 0$ و $m_B = 0$

په‌ها چون تابع از $A(2, 2)$ و

$B(3, 3)$ می‌گذرد همیشه $m_{AB} > 0$

(است.)



۱- الف) نادرست، شیب خط مماس در A مثبت و در B منفی است.

(ب) نادرست

۲- A

۳- الف) a (ب) د

۴- الف) گزینه «۲»

(ب) گزینه «۱»

(پ) گزینه «۲»

$$m_A < m_{AB} = 0 < m_B$$

۶- الف) مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ ، همان شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $x = 2$ می‌باشد.

خط $(0, 1) \in$ شیب خط مماس $= \frac{3-1}{2-0} = 1$

خط $(2, 3) \in$ مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ $= 1$

(ب) برای به دست آوردن معادله خط کافی است، مقدار شیب در نقطه A را در رابطه $y - y_A = m(x - x_A)$ جای گذاری کنیم:

$$A(2, 3), y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

الف) $x = b$ (ب) $x = c$

۸- معادله خط مماس را به دست آورده، سپس مختصات نقاط B و C را حساب می‌کنیم:

$$A(4, 25), f'(4) = 1/5, y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 25 = 1/5(x - 4) \Rightarrow y = 1/5x + 19$$

$$x_B = 5 \Rightarrow y_B = 1/5(5) + 19 = 26/5$$

$$x_C = 3 \Rightarrow y_C = 1/5(3) + 19 = 23/5$$

۹-

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

۱۰- به نمودار تابع $f(x)$ توجه کنید:

همان‌طور که می‌بینید شیب

خط مماس در A و B مثبت،

در C و E منفی و در D صفر

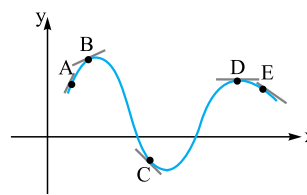
است و همچنین $m_A > m_B$

(به وضوح شیب توی A بیشتره

نسبت به B) و $m_C < m_E$.

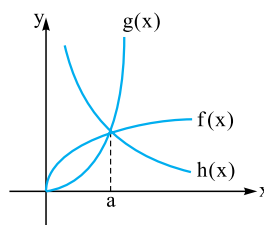
پس تکمیل شده جدول به صورت

مقابل است:



شیب	-3	-1	0	1	2
نقاط	C	E	D	B	A

۱۱- به نمودار مقابل توجه کنید:



۱۵- همه هر بلرین درگاه! ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید بعدش باید به کمک اتحاد، تقسیم، مزدوج و ... رفع ابهام کنید.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^3 - 1}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ ابهام}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{رفع ابهام به کمک}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - x + 1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 3$$

توجه کنید برای تجزیه عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ به عامل $x-2$ آن را بر $x-2$ تقسیم کردیم. (فردتون انجام بدین).

۱۶- شیب خط مماس بر f در $x=4$ همان $f'(4)$ است، پس:

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0} \text{ ابهام}$$

$$\xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{رفع ابهام به کمک}} \lim_{x \rightarrow 4} \underbrace{\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}}_{\text{کنار هم بنویسشون}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

۱۷- با جای گذاری $x=0$ در تابع داریم: $f(0) = 2$ ؛ پس $A(0, 2)$ روی f است. همچنین برای نوشتن معادله خط مماس به شیب خط مماس در $x=0$ نیاز داریم، پس:

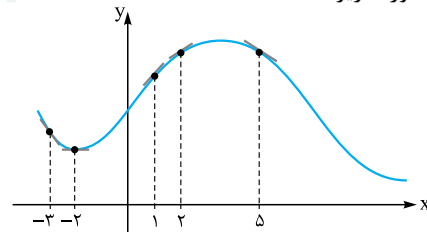
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - 2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

در نتیجه معادله خط به صورت مقابل است:

$$y - 2 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 2$$

تابع f در $x=0$ مماس افقی دارد.

۱۸- نمودار $f(x)$ به صورت زیر است:



الف) این گزاره درست است یعنی $f'(1) > f'(2)$ (زیرا شیب خط مماس بر f در نقطه ۱ از ۲ بیشتره).

ب) این گزاره درست است یعنی $f'(5) > f'(-3)$ (شیب مماس در ۳ منفی تره).

پ) این گزاره هم درست است یعنی $f'(-2) < f'(5)$. همان طور که می‌بینید $f'(-2) = 0$ است و مقدار f در نقطه $x=5$ عددی مثبت است. ($f'(5)$ نیست!)

ت) این گزاره هم درست است، یعنی:

$$\underbrace{f'(-3)}_{\text{منفی}} < \underbrace{f'(-2)}_{0} < \underbrace{f'(2)}_{\text{مثبت}} < \underbrace{f'(1)}_{\text{مثبت}}$$

ب) مماس قائم

۱۹- الف) پیوسته

پ) نقطه گوشه‌ای

۲۰- الف) درست
ب) نادرست

پ) نادرست؛ خط $x=0$ مماس قائم منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ است.

ت) نادرست؛ این تابع در $x=0$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

$$x = b \quad -21$$

$$x = d \quad -22$$

۲۳- الف) تابع در $x=1$ مماس قائم است و اکیداً یکنوا می‌باشد.

جواب: تابع $h(x)$. همان طور که می‌بینید در $x=1$ مماس قائم دارد

و همچنین اکیداً صعودی هم هست.

ب) تابع در $x=1$ نقطه گوشه‌ای است.

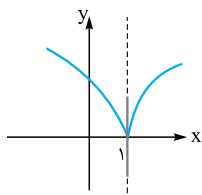
جواب: تابع $g(x)$. می‌دانیم که نقطه گوشه یعنی مشتق چپ و راست دو عدد

نابرابر باشند.

پ) تابع بیشتر از یک نقطه مشتق ناپذیر دارد. جواب: تابع $f(x)$. این

تابع در $x=0$ و $x=1$ پیوسته نیست. (در $x=0$ اصلاً تعریف نشده)

پس مشتق ناپذیر است.



ت) تابع در $x=1$ مشتق چپ و راست نامتناهی غیرهم‌علامت دارد: جواب: تابع $k(x)$

همان طور که می‌بینید، مشتق چپ و راست این تابع در $x=1$ بی‌نهایت

است و هم‌علامت هم نیست. (از چپ $-\infty$ و از راست $+\infty$ است.)

۲۴- تابع f در $x=-1$ پیوسته است.

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^2 + x| - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x(x+1)}{x+1} = -1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 + x| - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = 1$$

مشتق‌های چپ و راست متناهی و نابرابر هستند، پس $x=-1$ نقطه گوشه‌ای تابع است.

۲۵- در درس‌نامه این قضیه اثبات شده است.

۲۶- تابع f در $x=1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3 = 4$$

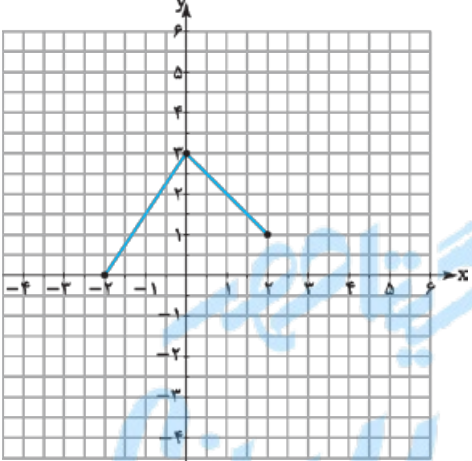
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x + 1 = 4$$

$$\Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

حالا مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1}$$

ردیف	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	حسابان ۲	نمونه امتحان نیمسال اول	رشته ریاضی و فیزیک	کheilisabz.com	نمره
۱	نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.						۱
۲	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ ، یکنوایی آن را در دامنه‌اش بررسی کنید.						۱
۳	مجموعه جواب نامعادله $\log \frac{2x-4}{3} < 1$ را پیدا کنید.						۱
۴	اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x) = mx^3 + x^2 - x$ بر $x-1$ برابر با ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^7 + mx$ بر $x+1$ به دست آورید.						۱
۵	درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. الف) در تجزیه عبارت $p(x) = 125x^3 + 8$ عامل $5x+2$ وجود دارد. ب) اگر تابع f صعودی باشد و g نزولی باشد، تابع $f \times g$ صعودی است. پ) اگر برد تابع $f(x)$ ، $[-4, 3]$ باشد، برد تابع $y = -\frac{1}{4}f(x-1) - 1$ برابر $[-\frac{5}{4}, 1]$ است.						۱/۵
۶	دوره تناوب، مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 2 \cos \pi x$ را به دست آورید.						۰/۷۵
۷	ضابطه تابع سینوسی به صورت $f(t) = a \sin bt$ را بنویسید که دوره تناوب آن $\frac{3\pi}{4}$ و ماکزیمم آن ۳ باشد.						۱
۸	جواب‌های معادله $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.						۱
۹	هر یک از معادلات زیر را حل کنید. الف) $\tan 5x = \tan 3x$ ب) $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$						۱/۵
۱۰	اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان α در ربع اول باشد، حاصل $\tan 2\alpha$ را به دست آورید.						۲
۱۱	حاصل هر یک از حدهای زیر را پیدا کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{1-x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}$ پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{1-x}$ ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 + x$						۲
۱۲	اگر $f(x) = \frac{2x^n+1}{x^3-1}$ باشد و داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ ، حاصل $f(2)$ را پیدا کنید.						۱
۱۳	نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را با هم داشته باشد: الف) $y=1$ مجانب افقی آن باشد. ب) $x=1$ مجانب قائم آن باشد. پ) تابع در دو طرف مجانب قائم صعودی باشد.						۰/۷۵
۱۴	مجانب‌های قائم و افقی تابع‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید. الف) $f(x) = \frac{4x^2-4}{x^2+4x+3}$ ب) $g(x) = \frac{3x}{x^2-1}$						۳
۱۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$ را در حوالی مجانب قائمش رسم کنید.						۱/۵
۲۰	جمع نمرات						

ردیف	نمونه امتحان نیم سال دوم	رشته ریاضی و فیزیک	حسابان ۲
	امتحان شماره ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	نهایی خردادماه ۱۴۰۱
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن گاه $f'(a)$ وجود ندارد. ب) هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.		۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = 7 \sin\left(\frac{-\pi}{4}x\right) + 2$ برابر است. ب) اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ؛ آن گاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.		۱
۳	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.		۱
			
۴	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌های اکیداً صعودی و در چه بازه‌های اکیداً نزولی است.		۱
۵	باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.		۰/۵
۶	معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.		۱/۵
۷	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^3}{2x - 1}$		۱
۸	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.		۱/۵
۹	مشتق پذیری تابع $f(x) = 2x - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.		۱/۵
۱۰	برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.		۱/۵
۱۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5(2x)$ ب) $g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$ پ) $h(x) = \frac{2}{x}$		۲/۵
۱۲	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟		۱
۱۳	اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.		۱/۵

پاسخ‌نامه تشریحی

الف) $x = b$ (۰٫۲۵)

-۱۱

ب) $x = d$ (۰٫۲۵)

پ) $x = c$ (۰٫۲۵)

-۱۲

الف) $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$ (۰٫۵)

سرعت متوسط

ب) $h'(t) = -1 \cdot t + 4 \Rightarrow h'(3) = 1$ (۰٫۵)

$y = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ (۰٫۵)

-۱۳

$y'_-(1) \neq y'_+(1)$ (۰٫۲۵)

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. (۰٫۲۵)

-۱۴

الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^3 - 1) + (\sqrt{3x} + 1)(6x^2)$ (۰٫۷۵)

ب) $g'(x) = 6 \tan x(1 + \tan^2 x) + 2x(-\sin x^2)$ (۱)

پ) $h'(x) = \frac{(2x - 3)(\Delta x) - (\Delta)(x^2 - 3x)}{(\Delta x)^2}$ (۰٫۷۵)

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases}$ (۰٫۵)

-۱۵

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}$ (۰٫۵)

$f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3, f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0$ (۰٫۲۵)

-۱۶

$\Rightarrow a = 3, b = 0$ (۰٫۵)

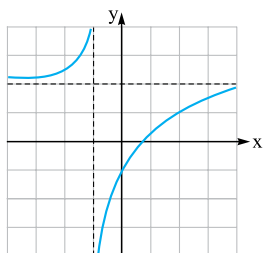
مجانب قائم: $x = -1$ (۰٫۲۵)

مجانب افقی: $y = 2$ (۰٫۲۵)

$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ (۰٫۲۵)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	2	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$

رسم جدول (۱)



رسم شکل (۰٫۵)

ب) \mathbb{R} (۰٫۲۵)

۱- الف) یکنوا (۰٫۲۵)

ت) پیوسته (۰٫۲۵)

پ) $+\infty$ (۰٫۲۵)

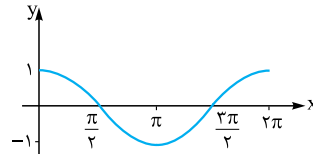
ب) نادرست (۰٫۲۵)

۲- الف) درست (۰٫۲۵)

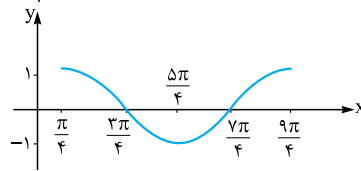
ت) درست (۰٫۲۵)

پ) درست (۰٫۲۵)

-۳

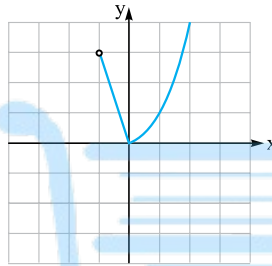


رسم شکل (۰٫۵)



رسم شکل (۰٫۲۵)

-۴



رسم شکل (۰٫۲۵)

$[-1, 0]$ اکیداً نزولی (۰٫۲۵)

$[0, +\infty)$ اکیداً صعودی (۰٫۲۵)

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 7 \\ q(-2) = 11 \end{cases}$ (۰٫۵)

-۵

$\Rightarrow a = -9$ (۰٫۲۵)

$|b| = \frac{2\pi}{3}$ (۰٫۲۵)

-۶

$|a| = 1, c = 4$ (۰٫۲۵)

$\Rightarrow y = \sin \frac{2\pi}{3}x + 4$ یا $y = -\sin \frac{2\pi}{3}x + 4$ (۰٫۲۵)

«تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.»

$-2 \sin^2 x - \sin x + 3 = 0$ (۰٫۲۵)

-۷

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{-3}{2} \end{cases}$ (۰٫۵)

الف) $\frac{3}{0^+} = +\infty$ (۰٫۵)

ب) $\frac{3+0}{0-2} = \frac{-3}{2}$ (۰٫۵)

-۸

$x^2 - 1 = 0$ (۰٫۲۵)

-۹

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ (۰٫۲۵)
مجانب‌های قائم

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1} = -2$ (۰٫۲۵)

$\Rightarrow y = -2$ (۰٫۲۵)
مجانب افقی

$f'(x) = 2x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1$ (۰٫۵)

-۱۰

$\Rightarrow f(1) = -1$ (۰٫۲۵)

$\Rightarrow y = x - 2$ (۰٫۷۵)