مقدمهٔ مؤلف

بـه نـام خداونـد جـان و خـرد　　کزیـن برتـر اندیشـه برنگـذرد

العِلمُ یُنجِدُ الفِکرَ: دانش، روشنی‌بخش اندیشه است. (امام علی علیه‌السلام)

زمانی که در کلاس‌های پیش‌دانشگاهی تدریس می‌کردم و در فرازهایی از تدریس، تأکید می‌نمودم که «این قسمت در امتحانات نهایی از اهمیت بالایی برخوردار است»، دانش‌آموزان اعتراض می‌نمودند که *«آقا، چیزایی بگین که در کنکور مهم باشه! چون امتحان نهایی رو هر جوری شده پاسش می‌کنیم»*. بیان این جملاتِ تناقض‌نما[1]، روح هر معلمی را آزرده می‌کرد؛ از این جهت می‌گویم تناقض‌نما که آموختن هر جزء از درس‌های ریاضی، از واجبات است؛ چه برای آزمون‌های تشریحی و چه برای آزمون‌های چندگزینه‌ای؛ تا این‌که در اخبار سراسری شنیدم درصدی از امتیازات کنکور سراسری، وابسته به نمرات امتحان نهایی خواهد بود. صرف‌نظر از ایراداتی که بعضی کارشناسان به این طرح وارد می‌کنند، برای اغلب معلم‌ها، این خبر، مسرت‌بخش بود؛ زیرا به واسطهٔ آن، اهمیت کلاس‌های دبیرستان بسیار افزایش خواهد یافت و دانش‌آموزان بهای بیشتری به این کلاس‌ها می‌دهند و علاوه بر این، دانش‌آموزی که با فشار بیش از حد به خودش در آزمون‌های چندگزینه‌ای، حداکثر ۲۰ تا ۲۵ درصد امتیاز آن را کسب می‌نمود، با کمی دقت در امتحان نهایی می‌تواند نمرهٔ خوبی کسب کند، طوری که دست‌کم ۹۰ درصد امتیاز آن را به دست آورد و بدین سبب درک او از مطالب درسی افزایش می‌یابد و در نتیجه درصد پاسخگویی او به پرسش‌های چندگزینه‌ای نیز افزایش خواهد یافت.

از این به بعد، مطمئن باشید که با کمی تلاشِ توأم با دقت، می‌توانید حدود ۳۰٪ از امتیازات کنکور را برای خودتان ذخیره کنید و این از نظر روانی به شما اطمینان خاطر القا می‌کند و هم‌چنین باعث افزایش امتیازتان در آزمون‌های چندگزینه‌ای نیز خواهد شد.

در این کتاب سعی کرده‌ام تا تمام زوایای پنهان کتاب درسی را با ارائهٔ سؤال مناسب، آشکار کنم. مثال‌های متن کتاب و تنوع آن‌ها به گونه‌ای است که تمام کتاب درسی را فرامی‌گیرد و چنان‌چه با دقت آن‌ها را دریافت کنید، نه‌تنها پاسخ به پرسش‌های کتاب درسی برایتان ساده خواهد شد، بلکه توانایی شما در پاسخ به پرسش‌های چندگزینه‌ای نیز افزایش خواهد یافت. تمرین‌های پایان هر درس که در سطوح مختلف طراحی شده‌اند، به تدریج باعث افزایش درک شما از درس خواهند شد؛ علاوه بر آن چون فهم شما از زاویه‌های مختلف آن مطلب بیشتر می‌شود، توانایی‌تان در پاسخ درست به پرسش‌های چندگزینه‌ای نیز شدیداً رشد خواهد کرد. در انتهای کتاب نیز شش آزمون که دوتا از آن‌ها برای نیم‌سال اول و چهارتای دیگر آن برای امتحان پایان سال می‌باشد، ارائه شده‌اند تا بتوانید سنجش مناسبی از خودتان داشته باشید.

در پایان از تمامی دست‌اندرکاران انتشارات محترم خیلی‌سبز به دلیل فراهم‌آوردن تسهیلات لازم در تهیهٔ این کتاب، تشکر ویژه دارم، از ویراستاران گرامی که در تصحیح کتاب سهم بسزایی داشتند ممنونم، از خانم مریم طاهری به سبب پیگیری‌های توأم با مهربانی‌اش سپاس‌گزارم.

۱- paradoxical

فهرست

فصل اول
ماتریس و کاربردها

۱ ماتریس‌های خاص و جمع ماتریس‌ها

تعریف ماتریس هر آرایش مستطیل‌شکل از اعداد حقیقی را یک ماتریس می‌نامیم.

به عنوان مثال آرایش عددهای $\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ -2 & \sqrt{3} \end{matrix}$ یک ماتریس است، زیرا آرایش مستطیل‌شکل تشکیل داده‌اند.

برای نمایش ماتریس، اعداد آن را داخل دو کروشه قرار می‌دهیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مثل A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

به عنوان مثالی دیگر؛ عبارت زیر، یک ماتریس است. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است و اصطلاحاً می‌گوییم این ماتریس از مرتبهٔ ۳×۲ است.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & \sqrt{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \end{array} \end{array}$$

مرتبهٔ ماتریس به طور کلی، اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌گوییم ماتریس A از مرتبهٔ $m \times n$ است و گاهی آن را با نماد $A_{m\times n}$ نیز نمایش می‌دهیم.

درایه‌های ماتریس هر یک از عددهای موجود در ماتریس را یک «درایه» از آن ماتریس می‌نامند. واضح است که تعداد درایه‌های ماتریس $A_{m\times n}$ برابر $m \times n$ است. اگر درایه‌ای در محل برخورد سطر دوم و ستون سوم قرار داشته باشد، آن را با نماد a_{23} نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، در ماتریس فوق، درایهٔ $\sqrt{2}$ در محل برخورد سطر دوم با ستون سوم قرار دارد، پس می‌گوییم $a_{23} = \sqrt{2}$ و در همین ماتریس $a_{12} = 0$. به طور کلی درایه‌ای که در سطر iام و ستون jام قرار دارد با a_{ij} نمایش داده می‌شود. a_{ij} را «درایهٔ عمومی» ماتریس A می‌نامند.

تذکر مهم هر ماتریس از مرتبهٔ ۱×۱ را معادل با یک عدد حقیقی در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر $A = [a]_{1\times 1}$، آن‌گاه می‌گوییم: $A = [a]_{1\times 1} = a$.

نتیجه مجموعهٔ عددهای حقیقی، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ ماتریس‌ها می‌باشد، زیرا هر عدد حقیقی معادل با یک ماتریس از مرتبهٔ ۱×۱ است.

۴. ماتریس قطری

ماتریس مربعی را که تمام درایه‌های **غیرواقع بر قطر اصلی** آن صفر باشند، ماتریس قطری می‌نامند. (توجه داشته باشیم که درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و می‌توانند مخالف صفر باشند.) در زیر، چند نوع ماتریس قطری آورده شده است:

$$A=\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

۵. ماتریس اسکالر

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامند. در زیر، چند نوع ماتریس اسکالر آورده شده است:

$$A=\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}k & ۰ & ۰\\ ۰ & k & ۰\\ ۰ & ۰ & k\end{bmatrix}$$

مثال **ماتریس $A=\begin{bmatrix}m+۱ & n-۱\\ ۲m & m+n-۱\end{bmatrix}$ قطری است. مقادیر m و n را بیابید.**

پاسخ ماتریس قطری، ماتریسی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر از قطر اصلی آن صفر باشند؛ پس داریم:

$$n-۱=۰ \Rightarrow n=۱$$
$$۲m=۰ \Rightarrow m=۰$$

مثال **مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر از مرتبهٔ ۳ مساوی ۶ است. این ماتریس را با درایه‌هایش مشخص کنید.**

پاسخ می‌دانیم که در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند و بقیهٔ درایه‌ها هم صفرند؛ پس داریم:

$$A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & a & ۰\\ ۰ & ۰ & a\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} a+a+a=۶ \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

۶. ماتریس واحد (ماتریس همانی)

یک ماتریس اسکالر را که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند، ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامند و با I نمایش می‌دهند.

در مقابل، دو نوع ماتریس واحد از مرتبه‌های مختلف نمایش داده شده‌اند:

$$I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\ \text{و}\ I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

۷. ماتریس صفر

ماتریسی را که **تمام** درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌نامند. معمولاً ماتریس صفر از مرتبهٔ $n\times p$ را با نماد $\bar{O}_{n\times p}$ نمایش می‌دهند.

در زیر، چند ماتریس صفر نمایش داده شده‌اند:

$$\bar{O}_{۱\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\ ,\ \bar{O}_{۲\times۴}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\ ,\ \bar{O}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

جمع‌بندی

انواع ماتریس	نماد پارامتری	مثال
۱. ماتریس مربعی	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n}\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ a_{n۱} & a_{n۲} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$	$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}$ $A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۲ & ۵\\ ۰ & ۰ & -۳\end{bmatrix}$
۲. ماتریس سطری	$A_{۱\times n}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n}\end{bmatrix}$	$A_{۱\times۳}=\begin{bmatrix}-۲ & ۳ & ۰\end{bmatrix}$ $A_{۱\times۵}=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & ۱ & ۲ & -۵\end{bmatrix}$

انواع ماتریس	نماد پارامتری	مثال
۳. ماتریس ستونی	$A_{n\times ۱}=\begin{bmatrix}a_{۱۱}\\a_{۲۱}\\\vdots\\a_{n۱}\end{bmatrix}$	$A_{۴\times ۱}=\begin{bmatrix}۰\\-۱\\-۴\\۳\end{bmatrix}$ $\quad A_{۳\times ۱}=\begin{bmatrix}۵\\۶\\۷\end{bmatrix}$
۴. ماتریس قطری	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&۰&۰&\cdots&۰\\۰&a_{۲۲}&۰&\cdots&۰\\۰&۰&a_{۳۳}&\cdots&۰\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\۰&۰&۰&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$	$A_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$ $\quad A_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}-۴&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&-۳\end{bmatrix}$
۵. ماتریس اسکالر	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix}a&۰&۰&\cdots&۰\\۰&a&۰&\cdots&۰\\۰&۰&a&\cdots&۰\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\۰&۰&۰&\cdots&a\end{bmatrix}$	$A_{۵\times ۵}=\begin{bmatrix}۴&۰&۰&۰&۰\\۰&۴&۰&۰&۰\\۰&۰&۴&۰&۰\\۰&۰&۰&۴&۰\\۰&۰&۰&۰&۴\end{bmatrix}$
۶. ماتریس همانی	$I_{n}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&\cdots&۰\\۰&۱&۰&\cdots&۰\\۰&۰&۱&\cdots&۰\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\۰&۰&۰&\cdots&۱\end{bmatrix}$	$I_{۴\times ۴}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\\۰&۰&۰&۱\end{bmatrix}$
۷. ماتریس صفر	$\bar{O}_{n\times m}=\begin{bmatrix}۰&۰&\cdots\\۰&۰&\\۰&&۰\\\vdots&&\ddots\end{bmatrix}$	$O_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ $\quad A_{۳\times ۴}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس زمانی مساوی هستند که هر دو شرط زیر را داشته باشند:

الف) دو ماتریس هم‌مرتبه باشند؛ یعنی تعداد سطر و نیز تعداد ستون آن‌ها با هم برابر باشد.

ب) تمام درایه‌های نظیر به نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

برای مثال؛ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&-۱\\۴&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x&۲\\۳&y\\۲z&۶\end{bmatrix}$ **که هم‌مرتبه هستند** وقتی با هم برابرند که $x=a_{۱۱}=۱$، $y=a_{۲۲}=-۱$ و $۲z=a_{۳۱}=۴$ یا $z=۲$ باشد.

مثال اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x+۲y&۱\\۲&x^۲+۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵&x+۲\\۲&z+۱\end{bmatrix}$ برابر باشند، مقادیر x، y و z را پیدا کنید.

پاسخ هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند، پس شرط اول تساوی دو ماتریس برقرار است. اکنون باید شرط دوم برقرار باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x+۲y=۵\xrightarrow{x=-۱}y=۳\\x+۲=۱\Rightarrow x=-۱\\z+۱=x^۲+۱\xrightarrow{x=-۱}z=۱\end{cases}$$

توجه حاصل‌جمع هر ماتریس با قرینهٔ همان ماتریس، برابر ماتریس صفر از همان مرتبه است؛ یعنی: $A+(-A)=\bar{O}$

نتیجه اگر A، ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ و $\bar{O}$ نیز ماتریس صفر از مرتبهٔ $m\times n$ باشد، آن‌گاه $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$؛ یعنی ماتریس صفر، عضو بی‌اثر عمل جمع ماتریس‌ها است.

مثال **دو ماتریس ۲×۳ و ناصفر مثال بزنید که مجموع آن‌ها برابر ماتریس صفر باشد.**

پاسخ فرض کنیم A و B دو ماتریس ۲×۳ باشند، طوری که $A+B=\bar{O}_{۳\times۲}$، پس $B=\bar{O}_{۳\times۲}-A$ یا $B=-A$؛ یعنی کافی است تمام درایه‌های ماتریس A را قرینه کنیم، بنابراین به عنوان نمونه؛ اگر $A=\begin{bmatrix}۳&۴\\-۲&۰\\۱&-۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه $B=-A=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۲&۰\\-۱&۳\end{bmatrix}$.

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر r و s دو عدد حقیقی و A، B و C سه ماتریس از مرتبهٔ $n\times p$ باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار هستند:

ردیف	خاصیت	نمایش اختصاری	مثال
۱	خاصیت جابه‌جایی در جمع ماتریس‌ها برقرار است.	$A+B=B+A$	$\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$
۲	خاصیت شرکت‌پذیری در جمع ماتریس‌ها برقرار است.	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix})+\begin{bmatrix}۳&۰\\۲&-۳\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+(\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۰\\۲&-۳\end{bmatrix})$
۳	ماتریس صفر، عضو خنثی در عمل جمع است.	$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$	$\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}$
۴	جمع هر ماتریس با قرینهٔ خودش، برابر ماتریس صفر است.	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$	$\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۲&۰+۰\\۱-۱&-۱+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$
۵	ویژگی توزیع‌پذیریِ ضرب یک عدد در جمع (یا تفریق) ماتریس‌ها برقرار است.	$r.(A\pm B)=rA\pm rB$	$۲(\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix})$ $=۲\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۰\end{bmatrix}$
۶	طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد ضرب یا بر عددی ناصفر تقسیم کرد.	$A=B\xrightarrow{r\neq ۰}rA=rB$ $kA=kB\xrightarrow{k\neq ۰}A=B$	$\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۲&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&۴\\-۴&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲\\-۶&۰\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\div(۲)}\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۳&۰\end{bmatrix}$
۷	اگر حاصل‌ضرب یک عدد در ماتریس، برابر ماتریس صفر شود، یا آن عدد صفر است یا آن ماتریس، ماتریس صفر است:	$kA=O\Rightarrow k=۰$ یا $A=\bar{O}$	$۰\times\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ $۲\times\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$
۸	ویژگی توزیع‌پذیری ضرب بردار در مجموع یا تفاضل دو عدد	$(r\pm s)A=rA\pm sA$	$(۲+۳)\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&5\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0&2&7\\4&0&-1\end{bmatrix}$، آن‌گاه نشان دهید رابطهٔ $A+(B+C)=(A+B)+C$ برقرار است.

پاسخ

$$B+C=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&7\\4&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&11\\6&-1&4\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&3&11\\6&-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&14\\10&4&10\end{bmatrix}\quad(1)$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&7\\6&4&11\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}4&3&7\\6&4&11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&7\\4&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&14\\10&4&10\end{bmatrix}\quad(2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow A+(B+C)=(A+B)+C$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}4&-3\\1&2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1&2\\5&-1\end{bmatrix}$ و $r=3$، آن‌گاه نشان دهید: $r(A+B)=rA+rB$

پاسخ

$$A+B=\begin{bmatrix}4&-3\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\6&1\end{bmatrix}$$

$$r(A+B)=3\begin{bmatrix}5&-1\\6&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&-3\\18&3\end{bmatrix}\quad(1)$$

از طرفی داریم:

$$rA=3\begin{bmatrix}4&-3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-9\\3&6\end{bmatrix},\ rB=3\begin{bmatrix}1&2\\5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\15&-3\end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$rA+rB=\begin{bmatrix}12&-9\\3&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&6\\15&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&-3\\18&3\end{bmatrix}\quad(2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow r(A+B)=rA+rB$

مثال ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس؛ یعنی ویژگی (۱) از جدول صفحهٔ قبل را ثابت کنید.

پاسخ فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، بنا بر تعریف جمع دو ماتریس هم‌مرتبه داریم:

$A+B=[a_{ij}]_{n\times p}+[b_{ij}]_{n\times p}$

$=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس

$=[b_{ij}+a_{ij}]_{n\times p}$ ویژگی جابه‌جایی عمل جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی

$=[b_{ij}]_{n\times p}+[a_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف عمل جمع ماتریس‌ها

$=B+A$

مثال ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک ماتریس در جمع دو عدد حقیقی؛ یعنی ویژگی (۸) را ثابت کنید.

پاسخ فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. اکنون داریم:

$(r+s)\cdot A=(r+s)\cdot[a_{ij}]_{n\times p}$

$=[(r+s)\cdot a_{ij}]_{n\times p}$ بنا بر تعریف ضرب عدد در یک ماتریس

$=[r\cdot a_{ij}+s\cdot a_{ij}]_{n\times p}$ ویژگی توزیع‌پذیری ضرب در جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی

$=[r\cdot a_{ij}]_{n\times p}+[s\cdot a_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس

$=r\cdot[a_{ij}]_{n\times p}+s\cdot[a_{ij}]_{n\times p}$ بنا بر تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=r\cdot A+s\cdot B$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

گفتیم اگر A ماتریس سطری از مرتبهٔ $۱\times n$ و B ماتریس ستونی از مرتبهٔ $n\times۱$ باشد، آن‌گاه ضرب A در B تعریف‌پذیر است و حاصل آن ماتریسی از مرتبهٔ ۱×۱ می‌باشد که معادل با یک عدد حقیقی است. برای پیداکردن حاصل‌ضرب $A\times B$ هر درایه از ماتریس A مانند a_{1i} را در درایهٔ b_{i1} از ماتریس B ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها را به دست می‌آوریم.

به عنوان مثال؛ اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۵ & -۲\end{bmatrix}_{۱\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\۲\\۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}$، آن‌گاه داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & ۵ & -۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳\\۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\times۳+۵\times۲+(-۲)\times۱\end{bmatrix}_{۱\times۱}=\begin{bmatrix}۲۰\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۲۰$$

و به طور کلی اگر $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n}\end{bmatrix}_{۱\times n}$ و $B=\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\b_{۲۱}\\\vdots\\b_{n۱}\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n}\end{bmatrix}_{۱\times n}\times\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\b_{۲۱}\\\vdots\\b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times۱}=\begin{bmatrix}a_{۱۱}\cdot b_{۱۱}+a_{۱۲}\cdot b_{۲۱}+\dots+a_{۱n}\cdot b_{n۱}\end{bmatrix}_{۱\times۱}$$

$$=a_{۱۱}\cdot b_{۱۱}+a_{۱۲}\cdot b_{۲۱}+\dots+a_{۱n}\cdot b_{n۱}$$

ضرب ماتریس در ماتریس

فرض کنید دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\۳ & ۲\\-۱ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\-۲ & ۲\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ داده شده باشند. برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب $C=A\times B$ باید هر یک از سطرهای A را در تک‌تک ستون‌های B ضرب کرده و در جای خودش بنویسیم. بنابراین در این مثال از ماتریس اول، سطر اول A یعنی $\begin{bmatrix}۱ & -۲\end{bmatrix}$ و از ماتریس دوم، ستون اول B یعنی $\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و درایه‌های سطر اول A و ستون اول B را نظیربه‌نظیر در هم ضرب می‌کنیم و سپس اعداد به دست آمده را جمع می‌کنیم. عدد حاصل، درایهٔ سطر اول و ستون اول ماتریس C، یعنی $c_{۱۱}$ است حالا سطر اول A را در ستون دوم B ضرب می‌کنیم تا درایهٔ $C_{۱۲}$ به دست آید. همین اعمال را برای سطر دوم و همچنین برای سطر سوم A اجرا می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$c_{۱۱}=۱\times(-۱)+(-۲)(-۲)=۳$$

$$A_{۳\times۲}\times B_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\۳ & ۲\\-۱ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\-۲ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{۱۱}=۱\times(-۱)+(-۲)\times(-۲) & c_{۱۲}=۱\times۰+(-۲)\times(۲)\\c_{۲۱}=۳\times(-۱)+۲\times(-۲) & c_{۲۲}=۳\times۰+۲\times۲\\c_{۳۱}=(-۱)\times(-۱)+۰\times۰ & c_{۳۲}=-۱\times۰+۰\times۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\-۷ & ۴\\۱ & ۰\end{bmatrix}=C_{۳\times۲}$$

نکته

برای پیداکردن درایهٔ سطر iام، ستون jام ماتریس حاصل‌ضرب، باید سطر iام ماتریس A را در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۱\\۰ & ۲ & ۴\\۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۵\\۴ & -۲\\۳ & ۰\end{bmatrix}$، آیا ماتریس $A\times B$ وجود دارد؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، ماتریس حاصل‌ضرب را پیدا کنید.

پاسخ مرتبهٔ ماتریس A، ۳×۳ و ماتریس B، ۳×۲ است. چون تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم، برابر است، پس ماتریس $A\times B$ تعریف‌پذیر است و ماتریس حاصل‌ضرب از مرتبهٔ ۳×۲ است.

اکنون هر یک از سطرهای ماتریس A را در هر یک از ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم: (اگر سطر iام ماتریس A را در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم، آن‌گاه حاصل آن، درایهٔ سطر iام، ستون jام از ماتریس حاصل‌ضرب است)

$$A\times B=\begin{bmatrix} \boxed{۲ \quad ۳ \quad -۱} \\ ۰ \quad ۲ \quad ۴ \\ ۲ \quad ۱ \quad ۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۴ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۱+۳\times۴+(-۱)\times۳ & ۲\times۵+۳\times(-۲)+(-۱)\times۰ \\ ۰\times۱+۲\times۴+۴\times۳ & ۰\times۵+۲\times(-۲)+۴\times۰ \\ ۲\times۱+۱\times۴+۰\times۳ & ۲\times۵+۱\times(-۲)+۰\times۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۴ \\ ۲۰ & -۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

مثال **اگر** $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ x & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ **باشد، مقدار x را پیدا کنید.**

پاسخ ابتدا دو ماتریس سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ x & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۲x+۳x & ۱+۰+x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۵x & ۱+x \end{bmatrix}$$

حالا حاصل را در ماتریس سمت راست ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ x & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۵x & ۱+x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳(۲+۵x)+۱\times(۱+x) \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۶x+۷ \end{bmatrix}=۰$$

اما هر ماتریس ۱×۱ متناظر با درایهٔ آن است، پس:

$$۱۶x+۷=۰ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۱۶}$$

تذکر توجه کنید که ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی گاهی $A\times B$ قابل تعریف است ولی $B\times A$ قابل تعریف نیست و حتی گاهی $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف‌پذیرند ولی با هم برابر نیستند.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی (۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

ویژگی (۲) اگر A، ماتریس $n\times n$ و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد، آن‌گاه A و I تعویض‌پذیر هستند؛ یعنی داریم: $A\times I=I\times A=A$

مثال **اگر** $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ **و I ماتریس همانی ۲×۲ باشد، نشان دهید $A\times I=I\times A=A$.**

پاسخ

$$A\times I=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۱+۴\times۰ & ۲\times۰+۴\times۱ \\ ۳\times۱-۵\times۰ & ۳\times۰-۵\times۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}=A \quad (۱)$$

$$I\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times۲+۰\times۳ & ۱\times۴+۰\times(-۵) \\ ۰\times۲+۱\times۳ & ۰\times۴+۱\times(-۵) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}=A \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A\times I=I\times A=A$$

مثال **ماتریس دلخواهی از مرتبهٔ ۳×۳ مانند A را در نظر بگیرید. حاصل $A\times I_۳$ و $I_۳\times A$ را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

پاسخ فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$، پس داریم:

$$A\times I_۳=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=A$$

هم‌چنین داریم:

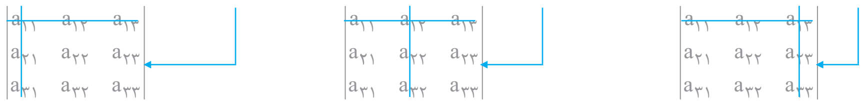
$$I_۳\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=A$$

نتیجه می‌شود ماتریس $I_۳$، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها از مرتبهٔ ۳×۳ است و هم‌چنین به گونه‌ای استثنایی دارای ویژگی جابه‌جایی نیز می‌باشد.

دترمینان ماتریس ۳×۳

۱.روش بسط ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. دترمینان این ماتریس با روش بسط براساس سطر اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$



یعنی هر درایه از سطر اول مانند $a_{۱j}$ را در $(-۱)^{۱+j}$ ضرب کرده و سپس آن را در دترمینان ماتریس ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستونی که درایه روی آن قرار دارد، ضرب و سپس تمام عددهای به دست آمده را با هم جمع جبری می‌کنیم.

حال اگر بخواهیم دترمینان را براساس ستون دوم پیدا کنیم، داریم:

$$|A|=a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۲۲}\times(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}+a_{۳۲}\times(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۳} \end{vmatrix}$$

مثال **اگر بدانیم** $\begin{vmatrix} ۱ & a \\ ۵ & -۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$**، آن‌گاه مقدار a را پیدا کنید.**

پاسخ واضح است که $\begin{vmatrix} a & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}=۵a+۱$. حالا دترمینان ماتریس ۳×۳ را براساس بسط روی سطر اول پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & a \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۲\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+۳\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix}+a\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=۲\times(۶-۴)-۳\times(۳-۱۲)+a\times(۱-۶)=-۵a+۳۱$$

چون این دو دترمینان باید برابر باشند، داریم:

$$-۵a+۳۱=۵a+۱\Rightarrow -۱۰a=-۳۰\Rightarrow a=۳$$

توجه دترمینان یک ماتریس ۳×۳ براساس هر سطر یا هر ستون جواب یکسان دارد.

مثال **دترمینان ماتریس** $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ **را یک بار براساس سطر دوم و یک بار هم براساس ستون سوم بسط دهید و نتایج حاصل را با هم مقایسه کنید.**

پاسخ ابتدا دترمینان را براساس سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$|A|=-۳\times(-۱)^{۲+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}+۲\times(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix}+۱\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$=-۳\times(-۱)\times(۱۵-۸)+۲\times۱\times(۱۰-۱۲)+۱\times(-۱)\times(۴-۹)=۲۱-۴+۵=۲۲$$

اکنون براساس ستون سوم، دترمینان را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=۴\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} -۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}+۱\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}+۵\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$=۴\times۱\times(-۶-۶)+۱\times(-۱)\times(۴-۹)+۵\times۱\times(۴+۹)$$

$$=-۴۸+۵+۶۵=۲۲$$

ملاحظه می‌کنید، همان‌گونه که انتظار داشتیم، هر دو روش جوابی یکسان داشتند.

تذکر هر چند محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس ۳×۳ براساس هر سطر یا هر ستون به نتیجه‌ای یکسان خواهد رسید ولی اگر سطر یا ستونی تعداد درایه‌های صفر آن بیشتر باشد، محاسبهٔ دترمینان براساس آن سطر یا ستون ساده‌تر صورت می‌گیرد.

مثال دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۰&۵\\۶&۰&۷\end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

پاسخ چون ستون دوم، دارای دو درایهٔ صفر است، راحت‌تر آن است که دترمینان را براساس ستون دوم محاسبه کنیم، پس داریم:

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}۴&۵\\۶&۷\end{vmatrix}+۰+۰=-۲\times(۲۸-۳۰)=۴$$

۲. روش ساروس این روش **فقط** برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ مورد استفاده دارد و مراحل محاسبهٔ آن به صورت زیر است:

مرحله اول دو ستون اول و دوم را به همین ترتیب بعد از ستون سوم کنار آن می‌نویسیم:

$$\left|\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\right|\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}$$

مرحله دوم درایه‌هایی را که روی قطر اصلی هستند در هم ضرب می‌کنیم و هم‌چنین هر سه درایه‌ای را که روی خطی موازی با قطر اصلی و در سمت راست آن قرار دارند در یکدیگر ضرب و عددهای حاصل را با هم جمع جبری می‌کنیم:

$$\left|\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\right|\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}$$

$$M=aei+bfg+cdh$$

مرحله سوم درایه‌هایی را که روی قطر فرعی هستند در هم ضرب می‌کنیم و هم‌چنین هر سه درایه‌ای را که روی خطی موازی با قطر فرعی و در سمت راست آن واقع‌اند در یکدیگر ضرب و آن‌ها را نیز با هم جمع جبری می‌کنیم:

$$\left|\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\right|\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}$$

$$N=ceg+afh+bdi$$

مرحله چهارم حالا عدد حاصل از مرحلهٔ (۳) را از عدد حاصل از مرحلهٔ (۲) کم می‌کنیم، عددی که به دست می‌آید دترمینان ماتریس $A_{۳\times۳}$ است؛ یعنی $|A|=M-N$.

مثال دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۳&۴\\-۳&۲&۱\\۳&۲&۵\end{bmatrix}$ را با روش ساروس محاسبه کنید و حاصل را با آن‌چه که در مثال قبلی به دست آمد مقایسه کنید.

پاسخ

$$\left|\begin{matrix}۲&۳&۴\\-۳&۲&۱\\۳&۲&۵\end{matrix}\right|\begin{matrix}۲&۳\\-۳&۲\\۳&۲\end{matrix}$$

$$|A|=(۲۰+۹-۲۴)-(۲۴+۴-۴۵)=۵-(-۱۷)=۲۲$$

ملاحظه می‌کنید که نتیجهٔ حاصل با آن‌چه که از مثال قبلی به دست آمد یکسان است.

۳. روش مثلثی این روش، به نوعی همان روش ساروس می‌باشد که در آن نیازی به نوشتن دو ستون اضافی نیست و به صورت زیر است:

مرحله اول درایه‌های قطر اصلی را در هم ضرب می‌کنیم و سپس دو عددی که موازی قطر اصلی هستند را در دورترین درایه نسبت به آن ضرب می‌کنیم (یعنی $d\times h$ را در c و $b\times f$ را در g ضرب می‌کنیم) و هر سه را جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\Rightarrow M=aei+dhc+gbf$$

مرحله دوم همین اعمال را برای قطر فرعی انجام می‌دهیم و هر سه را جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\Rightarrow N=ceg+bdi+afh$$

مرحله سوم حالا حاصل مرحلهٔ (۲) را از مرحلهٔ (۱) کم می‌کنیم. عدد به دست آمده دترمینان ماتریس $A_{۳\times۳}$ است؛ یعنی: $|A|=M-N$

تذکر هر چند در نگاه اول، این روش مناسب به نظر نمی‌رسد ولی با چند بار اجراکردن آن، سهولت کار برایتان روشن خواهد شد.

تذکر: واضح است که $|A|=۰$ هم‌ارز با معادلهٔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ است، پس برای تشخیص در حالت موازی و متمایز بودن یا منطبق بودن دو خط، کافی است یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از دو خط انتخاب کنیم. اگر این نقطه روی خط دیگر صدق کند، آن دو خط منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد و اگر صدق نکرد، دو خط موازی و متمایزند و دستگاه جواب ندارد.

مثال: اگر دستگاه $\begin{cases}۳x-۵y=۳\\ ۲x+my=۷\end{cases}$ فقط یک جواب داشته باشد، آن‌گاه m چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ: یک دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی، زمانی یک جواب منحصربه‌فرد دارد که دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن، متقاطع باشند و این زمانی است که دترمینان ماتریس ضرایب، مخالف صفر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & m\end{vmatrix}\neq ۰ \Rightarrow ۳m+۱۰\neq ۰ \Rightarrow m\neq -\frac{۱۰}{۳}$$

پس اگر m هر عددی حقیقی به‌جز $-\frac{۱۰}{۳}$ باشد، آن‌گاه دستگاه موردنظر دارای جواب منحصربه‌فرد است.

مثال: دربارهٔ تعداد جواب‌های دستگاه روبه‌رو، بدون حل آن، تحقیق کنید: $\begin{cases}۳x-۲y=۱\\ -۶x+۴y=۳\end{cases}$

پاسخ: ماتریس ضرایب این دستگاه $A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۶ & ۴\end{bmatrix}$ است و دترمینان آن $|A|=۰$ است، پس دو خطی که معادلات این دستگاه را تشکیل می‌دهند موازی با یکدیگر هستند.

اگر این دو خط، موازی و متمایز باشند، دستگاه جواب ندارد و اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، آن‌گاه مسئله بی‌شمار جواب دارد.

برای تشخیص این دو حالت از یکدیگر، کافی است یک نقطه از یکی از دو خط را اختیار کنیم؛ اگر این نقطه در معادلهٔ خط دیگر صدق کند، دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد ولی در غیر این صورت دستگاه جواب ندارد.

با کمی دقت می‌توان پی برد که به عنوان مثال؛ نقطهٔ $B(۱,۱)$ در معادلهٔ خط اول صدق می‌کند ولی این نقطه در معادلهٔ خط دوم صدق نمی‌کند، پس این دو خط، موازی و متمایز هستند و دستگاه جواب ندارد.

نکته

دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

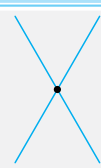
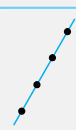
۱) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، آن‌گاه دستگاه دارای جواب منحصربه‌فرد است. (در واقع شیب‌های دو خط، نابرابر هستند، در نتیجه دو خط در یک نقطه متقاطع‌اند.)

۲) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۳) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، آن‌گاه دو خط با هم موازی و متمایزند و دستگاه جواب ندارد.

در مثال قبل داریم $\frac{۱}{۳}\neq\frac{-۲}{۴}=\frac{۳}{-۶}$، پس با توجه به بند ۳ از نکتهٔ فوق، این دستگاه دارای جواب نیست.

جمع‌بندی

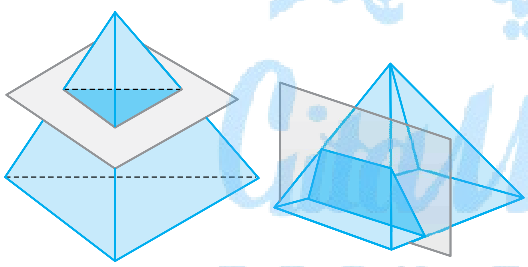
تعداد نقاط مشترک	شکل	وضعیت دترمینان ماتریس ضرایب	وضعیت شیب‌ها	وضعیت دو خط
۱		$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq ۰$	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	متقاطع‌اند.
۰		$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}= ۰$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	موازی و متمایزند
بی‌نهایت		$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}= ۰$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	منطبق‌اند.

آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل دوم

۱ آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

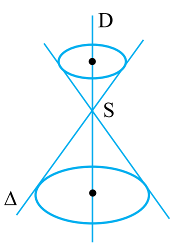
در هندسهٔ (۱) با مفهوم برش و سطح مقطع آشنا شدیم و آموختیم که سطح مقطع هر صفحه با یک جسم فضایی، شکل مسطحی است که از برخورد آن صفحه با جسم فضایی پدید می‌آید؛ به عنوان مثال، اگر هرمی با قاعدهٔ مثلث (هرم چهاروجهی) را با صفحه‌ای که موازی یکی از وجه‌های آن است و از رأس هرم نمی‌گذرد قطع دهیم، شکل مقطع، همان‌گونه که در شکل (الف) مشاهده می‌کنید، یک مثلث می‌باشد و اگر هرمی قائم با قاعدهٔ مربع را با صفحه‌ای که موازی محور هرم است، ولی این صفحه از رأس هرم نمی‌گذرد برش دهیم، همان‌گونه که در شکل (ب) دیده می‌شود شکل حاصل از برش، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.



(الف) (ب)

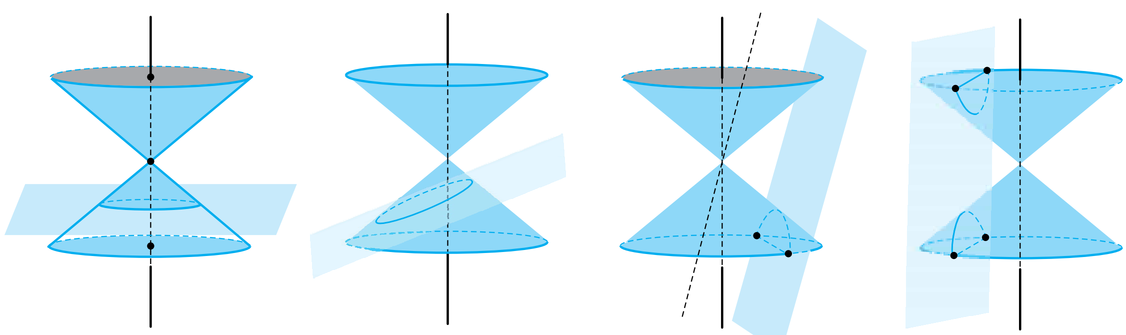
اکنون می‌خواهیم مقطع یک صفحه با رویه‌ای مخروطی را در حالات مختلف مشخص کنیم؛ برای این منظور باید ابتدا رویهٔ مخروطی را بشناسیم.

رویهٔ مخروطی



دو خط D و Δ را در فضا که در نقطهٔ S متقاطع‌اند در نظر بگیرید. اگر خط Δ حول خط D یک دوران کامل کند، شکلی که حاصل می‌شود را «رویهٔ مخروطی» می‌نامند. S را رأس رویهٔ مخروطی، D را محور رویهٔ مخروطی و تمام خط‌هایی را که از رأس می‌گذرند و بر دایرهٔ بالا و پایین (قاعده‌ها) متکی‌اند (مثل خط Δ)، مولدهای رویهٔ مخروطی می‌نامند. توجه داشته باشیم که رویهٔ مخروطی از هر دو طرف رأس آن تا بی‌نهایت ادامه دارد.

مقطع‌های رویهٔ مخروطی با یک صفحه در حالت‌های مختلف



(الف) (ب) (پ) (ت)

اگر یک رویهٔ مخروطی را با یک صفحه برش دهیم، در حالت‌های مختلف، شکل مقطع متفاوت به وجود می‌آیند:

الف اگر صفحه‌ای عمود بر محور رویهٔ مخروطی باشد که از رأس آن نگذرد، مقطع آن صفحه با رویهٔ مخروطی، یک دایره است. هر چه‌قدر فاصلهٔ این صفحه از رأس بیشتر باشد، شعاع دایرهٔ مقطع بزرگ‌تر است.

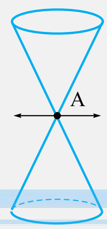
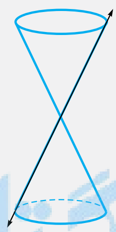
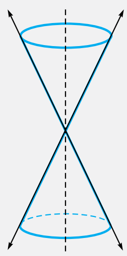
ب اگر صفحه‌ای نه عمود بر محور و نه موازی با آن باشد و هم‌چنین با هیچ‌یک از مولدهای آن موازی نباشد و از رأس نیز نگذرد، مقطع آن صفحه با رویهٔ مخروطی، یک بیضی است. هر چه‌قدر فاصلهٔ این صفحه از رأس بیشتر باشد، قطرهای بزرگ و کوچک بیضی حاصل نیز بزرگ‌تر هستند.

پ اگر صفحه‌ای با یکی از مولدهای رویهٔ مخروطی، موازی باشد و از رأس هم نگذرد، مقطع آن، یک منحنی به نام سهمی است.

ت اگر صفحه‌ای بعضی از مولدهای رویهٔ مخروطی را در یک طرف رأس و بقیهٔ مولدها را در طرف دیگر آن قطع کند، منحنی مقطع، دارای دو شاخه است که آن را هذلولی می‌نامند.

نکته

اگر صفحهٔ برش، **از رأس رویهٔ مخروطی بگذرد**، با توجه به زاویهٔ صفحه سه حالت مختلف اتفاق می‌افتد:

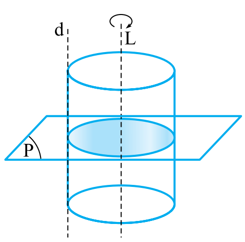
حالت	۱) صفحه عمود بر محور باشد.	۲) صفحه از مولد بگذرد.	۳) صفحه شامل محور باشد.
شکل			
سطح مقطع	یک نقطه	یک خط	دو خط متقاطع

مثال **فرض کنیم دو خط d و L موازی باشند. اگر d را حول خط ثابت L دوران دهیم، شکلی هندسی پدید می‌آید که آن را «سطح استوانه‌ای» می‌نامند. صفحه‌ای دلخواه در نظر بگیرید که این سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ شکل سطح مقطع، بحث کنید.**

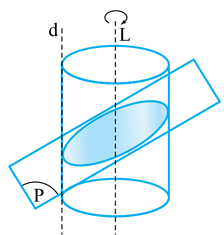
پاسخ **الف** خط L همان محور سطح استوانه‌ای است. اگر صفحهٔ P بر محور L عمود باشد، مقطع یک دایره است.

ب اگر صفحهٔ P بر محور L عمود نباشد ولی آن را قطع کند، مقطع یک بیضی است.

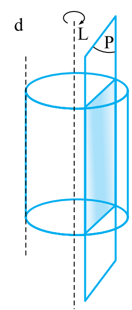
پ اگر صفحهٔ P با محور L موازی باشد و سطح استوانه‌ای را قطع کند، مقطع یک مستطیل است.



(الف)



(ب)



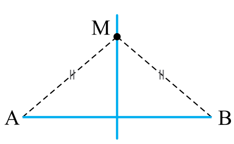
(پ)

مکان هندسی

مجموعهٔ همهٔ نقاطی که دارای «ویژگی مشترکی» هستند، به طوری که هر نقطه از این مجموعه، دارای آن ویژگی باشد و هر نقطه که دارای آن ویژگی است، عضوی از این مجموعه باشد، «مکان هندسی» نامند. به عنوان مثال؛ به چند مکان هندسی پرکاربرد در ادامه توجه کنید:

چند مکان هندسی معروف

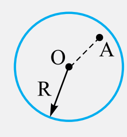
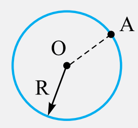
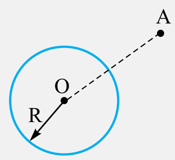
۱. عمودمنصف پاره‌خط AB در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، خط عمودمنصف پاره‌خط AB می‌باشد.



۳ مسائل مربوط به نقطه، خط و دایره

وضعیت نسبی یک نقطه با یک دایره

هر دایره، صفحه را به سه بخش جدا از هم تقسیم می‌کند. یک بخش آن، نقطه‌هایی از صفحه هستند که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره می‌باشند، این نقطه‌ها را نقطه‌های درونی دایره می‌نامند. (شکل الف) بخش دوم، نقطه‌هایی از صفحه هستند که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره‌اند، این نقطه‌ها را محیط دایره می‌نامند (شکل ب) و بخشی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره هستند، این بخش را نقطه‌های بیرونی دایره می‌نامند. (شکل پ)

الف) نقطهٔ درون دایره	ب) نقطهٔ روی دایره	پ) نقطهٔ بیرون دایره
 $OA < R$	 $OA = R$	 $OA > R$
در این حالت، فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است.	در این حالت، فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است.	در این حالت، فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است.

مثال: معادلهٔ دایره‌ای به صورت $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ است. وضعیت نقطهٔ $A(1,2)$ را نسبت به این دایره مشخص کنید.

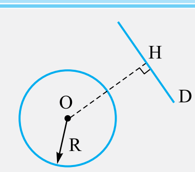
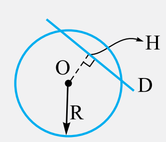
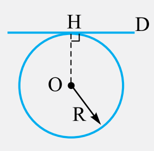
پاسخ: مرکز دایره، نقطهٔ $O(-1,2)$ و شعاع آن $R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4\times(-4)}=3$ است. از طرفی فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره، برابر $AO=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=2$ می‌باشد؛ چون $AO=2<R=3$ است، پس نقطهٔ A درون دایره قرار دارد.

تذکر مهم: اگر معادلهٔ دایره‌ای به صورت $C(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد، چنان‌چه بخواهیم وضعیت نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ را نسبت به این دایره مشخص کنیم، کافی است مختصات این نقطه را در معادله بگذاریم؛ یعنی حاصل $C(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c$ را پیدا کنیم، اگر این مقدار مثبت باشد، نقطهٔ A بیرون دایره است و اگر این مقدار برابر صفر باشد، روی دایره و چنان‌چه منفی باشد، نقطهٔ A درون دایره قرار دارد.

در مثال بالا داریم $C(1,2)=1^2+2^2+2\times1-4\times2-4=-5<0$، در نتیجه این نقطه درون دایره می‌باشد.

اوضاع نسبی خط و دایره

دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را در نظر بگیریم، هر خط مانند D با دایرهٔ C یکی از سه حالت زیر را دارد:

الف) خط D دایره را قطع نمی‌کند.	ب) خط D دایره را قطع می‌کند.	پ) خط D بر دایره مماس است.
 $OH > R$	 $OH < R$	 $OH = R$
در این حالت، فاصلهٔ مرکز دایره، از خط D بیشتر از شعاع دایره است.	در این حالت، فاصلهٔ مرکز دایره، از خط D کم‌تر از شعاع دایره است	در این حالت، فاصلهٔ مرکز دایره، از خط D (خط مماس) برابر با شعاع دایره است.

یادآوری: برای به دست آوردن طول OH یعنی فاصلهٔ مرکز دایره تا خط D، از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط استفاده می‌کنیم.

یادآوری می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

را به هم وصل می‌کند (خط‌المرکزین دو دایره) برابر $OO' = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (-۲-۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$ است. اگر شعاع دایرهٔ موردنظر را R بگیریم، چون می‌خواهیم دو دایره بر هم مماس خارج باشند، باید داشته باشیم $OO' = R + R'$ یا $\sqrt{۱۰} = R + ۲$ و در نتیجه $R = \sqrt{۱۰} - ۲$، بنابراین، معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = (\sqrt{۱۰} - ۲)^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۹ + ۴\sqrt{۱۰} = ۰$$

مثال **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(۲,۱)$ باشد و بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ مماس‌داخل باشد.**

پاسخ مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$، نقطهٔ $O'(۰,۰)$ و شعاع آن $R' = ۲$ است.

طول خط‌المرکزین دو دایره را پیدا می‌کنیم: $OO' = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (۱-۰)^۲} = \sqrt{۵}$

چون دو دایره مماس‌داخل هستند، پس باید طول خط‌المرکزین برابر با قدرمطلق تفاضل دو شعاع باشد:

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{۵} = |R - ۲| \Rightarrow R - ۲ = \pm\sqrt{۵}$$

از $R - ۲ = -\sqrt{۵}$ نتیجه می‌شود $R = ۲ - \sqrt{۵} < ۰$ و در این صورت دایره‌ای وجود ندارد. از $R - ۲ = \sqrt{۵}$ نتیجه می‌شود $R = ۲ + \sqrt{۵} > ۰$ و در این صورت معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = (۲+\sqrt{۵})^۲ \quad \text{یا} \quad x^۲ + y^۲ - ۴x - ۲y - ۴ - ۴\sqrt{۵} = ۰$$

در امتحان نهایی چه خبر

معمولاً به بخش «مسائل مربوط به نقطه، خط و دایره» در امتحان‌های نهایی توجه ویژه می‌شود. ببینید:

تیپ۱ وضعیت نسبی نقطه و دایره: در این سؤالات یک یا چند نقطه می‌دهند و ما باید مشخص کنیم که روی دایره، داخل یا خارج از آن است. در مورد روش حل این سؤال به درس‌نامه مراجعه کنید.

حالا تو حل کن سؤال ۳۳ بخش (الف) / سؤال ۳۴ بخش (الف) / سؤال‌های ۳۵ و ۳۶

تیپ۲ وضعیت نسبی خط و دایره: در مورد خط‌های خارج، مماس و یا متقاطع با دایره هم در درس‌نامه مفصل توضیح دادیم. تعداد نقاط اشتراک خط و دایره هم جزء این تیپ سؤال قرار می‌گیرد.

حالا تو حل کن سؤال ۳۳ بخش (پ) / سؤال ۳۴ بخش (ب) / سؤال‌های ۳۷ تا ۴۵

تیپ۳ در این تیپ یک نقطه و معادلهٔ دایره را می‌دهند و معادلهٔ خط مماس بر دایره را می‌خواهند.

روش حل برای نوشتن معادلهٔ یک خط به یک نقطه و شیب خط احتیاج داریم. مختصات نقطه که در صورت سؤال هست. شیب خط هم معکوس و قرینهٔ شیب قطر دایره در نقطهٔ تماس است. چرا؟

حالا تو حل کن سؤال ۴۶

تیپ۴ وضعیت نسبی دو دایره نسبت به هم: دو دایره در ۶ وضعیت نسبت به یکدیگر می‌تواند قرار بگیرند و این تیپ سؤال بسیار مورد علاقهٔ طراحان امتحان نهایی است.

گاهی این تیپ سؤال با سؤال‌های به دست آوردن معادلهٔ دایره ترکیب می‌شود.

حالا تو حل کن سؤال ۳۳ بخش (ب) / سؤال ۳۴ بخش (پ) و (ت) / سؤال‌های ۴۷ تا ۵۳

سؤال‌های امتحانی

۳۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

الف) نقطهٔ $(۳,-۲)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد.

ب) دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + ۴y = ۰$ متخارج هستند.

پ) خط به معادلهٔ $x + y = ۵$، دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۹$ را قطع می‌کند.

۳۴- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید:

الف) نقطهٔ $A(1,-2)$ در .... دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ قرار دارد. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

ب) اگر خط $3x+4y+8=0$ بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x=a$ مماس باشد، مقدار a برابر با .... است.

پ) دو دایرهٔ به معادله‌های $x^2+y^2+6x=0$ و $x^2+y^2-8y=0$ نسبت به یکدیگر .... هستند.

ت) اگر دو دایرهٔ $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-8x=a$ بر یکدیگر مماس‌خارج باشند، مقدار a برابر با .... است.

۳۵- وضعیت نسبی دو نقطهٔ $A(1,0)$ و $B(2,-5)$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-x+3y=4$ مشخص کنید.

۳۶- وضعیت نقطهٔ $A(1,-2)$ نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ را تعیین کنید. (نهایی خرداد ۹۹)

۳۷- وضعیت خط $x+y=2$ و دایرهٔ $x^2+y^2=2$ را نسبت به هم مشخص کنید. (نهایی شهریور ۹۸)

۳۸- وضعیت خط $3x+y=0$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ مشخص کنید. (نهایی دی ۹۸)

۳۹- وضعیت خط $x-y-1=0$ و دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید. (نهایی شهریور ۹۹)

۴۰- به ازای چه مقدار a، دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ بر خط به معادلهٔ $x+3y=0$ مماس است؟

۴۱- اگر خط $y+x=k$ دایرهٔ $x^2+y^2-2x=1$ را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، حدود k را به دست آورید.

۴۲- اگر خط $y=mx$ بر دایرهٔ $x^2+y^2+x+y-2=0$ مماس باشد، حدود m چیست؟

۴۳- خط $x+ky=2$ دایرهٔ $x^2+y^2-4x-5=0$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه چه‌قدر است؟

۴۴- دو خط $2x+y-2=0$ و $x-2y-1=0$ دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ را به ترتیب در A' ،A ،B' و B قطع می‌کنند. محیط چهارضلعی $ABA'B'$ را بیابید.

۴۵- اگر خط $3x+my+m-4=0$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ مماس باشد، مقدار m را به دست آورید.

۴۶- در نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

(نهایی خرداد ۹۸، شهریور ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۰)

۴۷- دایره‌های $x^2+y^2-2x=4$ و $x^2+y^2=4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (نهایی دی ۹۷)

۴۸- وضعیت دو دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید. (نهایی دی ۹۹)

۴۹- وضعیت دایرهٔ $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ با دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

۵۰- مقدار m را چنان بیابید که دو دایرهٔ $x^2+y^2+2x+2y-m=0$ و $x^2+y^2+2x+8y+16=0$ بر یکدیگر مماس خارج باشند.

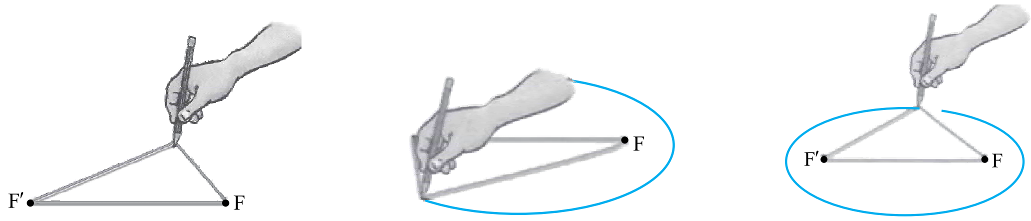
۵۱- وضعیت نسبی دایره‌ای به مرکز $O(3,1)$ که بر خط $y=\frac{-4}{3}x+\frac{5}{3}$ مماس است با دایرهٔ $x^2+y^2+4x=0$ چگونه است؟

۵۲- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,-2)$ بوده و بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y=4$ مماس‌خارج باشد. (نهایی دی ۹۸)

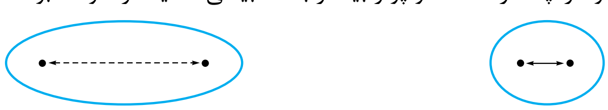
۵۳- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس‌داخل باشد. (نهایی شهریور ۹۹)

۴ بیضی

چگونه یک بیضی رسم کنیم؟ روی یک صفحهٔ مسطح دو پونز در دو نقطهٔ ثابت F و F' نصب کنید و نخ بسته‌ای را که کشسان نباشد و طول کل نخ از دو برابر فاصلهٔ F و F' بیشتر باشد دور این دو پونز حلقه کنید و قلم را روی نخ تکیه داده طوری که نخ به حالت کشیده درآید و سپس قلم را حرکت دهید. شکلی که نوک قلم بر صفحه پدید می‌آورد، بیضی نامیده می‌شود.



اگر بدون تغییر طول نخ، جای دو پونز را تغییر دهیم، آن‌گاه بیضی‌های متفاوت به دست می‌آیند. در این صورت هر چه‌قدر فاصلهٔ دو پونز کم‌تر باشد، آن‌گاه بیضی حاصل به دایره شبیه‌تر است و هر چه‌قدر فاصلهٔ دو پونز بیشتر باشد، بیضی کشیده‌تر خواهد بود.



بیضی کشیده‌تر　　　　بیضی شبیه به دایره

به دست می‌آیند، هم‌نهشت هستند، مسئله در واقع یک جواب دارد.

اگر دایره، بر بیضی در دو نقطه مماس باشد، مسئله به ظاهر، دارای ۲ جواب است ولی چون دو مثلثی که پدید می‌آیند هم‌نهشت هستند، باز هم مسئله یک جواب دارد.

اگر دایره و بیضی نقطهٔ مشترک نداشته باشند، آن‌گاه مسئله جواب ندارد.

در امتحان نهایی چه خبر

*در این‌جا می‌خواهیم از پرتکرارترین سؤالات امتحان نهایی از بخش «بیضی» صحبت کنیم. پیشنهاد می‌کنم بعد از خواندن هر تیپ سؤال و روش حل آن به سراغ سؤال‌های بخش **حالا تو حل کن** بروید:*

تیپ۱ اولین و ساده‌ترین تیپ سؤال‌های بیضی در مورد تعاریف اولیه یا همان پارامترهای بیضی است؛ یعنی سؤال از ما طول قطرها، فاصلهٔ کانونی و ... را می‌خواهد. در این سؤالات از رابطهٔ اصلی بین پارامترهای بیضی یعنی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ زیاد استفاده می‌شود.

حالا تو حل کن سؤال ۵۵ بخش (ث) / سؤال‌های ۵۶ و ۵۷ / سؤال‌های ۶۳ تا ۷۰ / سؤال‌های ۸۰ و ۸۱

تیپ۲ دومین تیپ در مورد خروج از مرکز بیضی است. یک سری از ویژگی‌های بیضی را می‌دهد و $e = \frac{c}{a}$ را می‌خواهد یا برعکس. این تیپ سؤال بسیار پرکاربرد ولی ساده است.

حالا تو حل کن سؤال ۵۴ بخش (الف)، (ب) و (پ) / سؤال ۵۵ بخش (الف)، (پ) و (ج) / سؤال‌های ۵۸ تا ۶۲

تیپ۳ این تیپ در مورد نقاط داخل، خارج و روی بیضی است. باید بدانید که مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از کانون‌ها برابر قطر بزرگ بیضی است.

حالا تو حل کن سؤال ۵۴ بخش (ث) / سؤال ۵۵ بخش (ب) / سؤال‌های ۷۱ و ۷۲

تیپ۴ در مورد وتر کانونی بیضی است که اندازهٔ آن برابر است با: $MN' = \frac{۲b^۲}{a}$

حالا تو حل کن سؤال ۵۴ بخش (ج) / سؤال‌های ۷۳ تا ۷۵

تیپ۵ خط مماس بر بیضی در مورد ویژگی‌های این تیپ سؤالات در درس‌نامه کامل توضیح دادیم.

حالا تو حل کن سؤال ۵۴ بخش (چ) / سؤال‌های ۷۶ تا ۷۸ / سؤال ۸۲

تیپ۶ این تیپ سؤال در مورد خاصیت بازتابندگی بیضی است. همین که اگر پرتو نوری از یک کانون بر بیضی بتابد، پرتوی بازتاب آن حتماً از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند.

حالا تو حل کن سؤال ۵۴ بخش (ت) / سؤال ۵۵ بخش (ت) / سؤال ۸۳

تیپ۷ و تیپ آخر سؤالات بیضی در مورد ترکیب دایره و بیضی است.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۸۴ تا ۸۶

سؤال‌های امتحانی

۵۴- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود. *(نهایی دی ۹۸ و دی ۱۴۰۰)*

ب) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. *(نهایی فرداد ۹۹)*

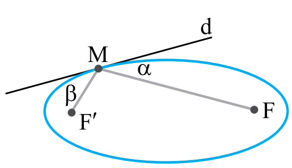
پ) اگر قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک آن باشد، خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۲}$ است.

ت) پرتوی که از کانون یک بیضی بر آن بتابد، موازی با قطر بزرگ بیضی بازتاب می‌یابد.

ث) اگر M نقطه‌ای درون بیضی با کانون‌های F و F' باشد، آن‌گاه حاصل $MF + MF'$ کوچک‌تر از قطر بزرگ بیضی است.

ج) اگر از کانون بیضی، عمودی بر قطر بزرگ آن رسم کنیم تا بیضی را در نقاط M و M' قطع کند، آن‌گاه $MM' = \frac{۲b^۲}{a}$ است. (a و b نصف قطر بزرگ و کوچک بیضی‌اند).

چ) در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد، زاویهٔ $F\hat{M}F' = ۵۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\alpha = \beta = ۶۰^\circ$ است. *(نهایی فرداد ۱۴۰۱)*



۵۵- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک .... می‌شود. (نهایی فرداد ۹۸، فرداد ۱۴۰۰ و مشابه فرداد ۱۴۰۱)

ب) اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطهٔ A در .... بیضی است. (نهایی فرداد ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصلهٔ کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است. (نهایی شهریور ۹۹)

ت) پرتوی که از کانون بیضی بر آن بتابد، بازتابش آن از .... می‌گذرد.

ث) اگر BB' قطر کوچک یک بیضی به کانون‌های F و F' باشد، آن‌گاه طول BF برابر با .... است.

ج) در حالتی که $\frac{c}{a}=1$ باشد، بیضی تبدیل به .... می‌شود. (نهایی شهریور ۱۴۰۰)

۵۶- در یک بیضی، نقاط A و A' دو انتهای قطر بزرگ، B و B' دو انتهای قطر کوچک و $AA'=3FF'$ است که در آن F و F' کانون‌های بیضی هستند. نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ چه‌قدر است؟

۵۷- طول قطر کوچک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس قطر بزرگ برابر ۲ است. طول قطر بزرگ را به دست آورید.

۵۸- اگر قطر بزرگ بیضی $2\sqrt{7}$ و قطر کوچک آن $\sqrt{7}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۵۹- در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است، (نهایی شهریور ۹۸، شهریور ۹۹ و فرداد ۱۴۰۱)

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.

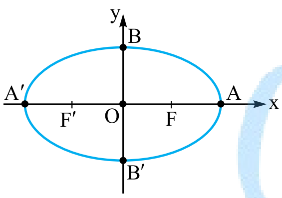
ب) مختصات کانون‌ها (F',F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A',A) و دو سر قطر کوچک (B',B) را به دست آورید.

پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

۶۰- اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصلهٔ یک کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. (نهایی فرداد ۹۹)

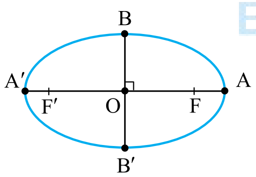
۶۱- اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ و فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورید. (نهایی فرداد ۹۹)

۶۲- بیضی با مشخصات $a=8$ و $e=\frac{1}{2}$ را به طور تقریبی رسم کنید.

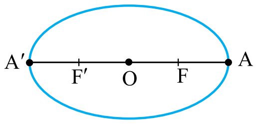


۶۳- مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل، بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید. (نهایی شهریور ۹۹)

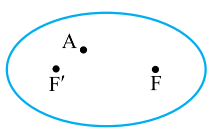
۶۴- A یک سر قطر بزرگ، B یک سر قطر کوچک و F کانونی از بیضی باشد که به A نزدیک‌تر است. مساحت مثلث‌های AFB و $AF'B$ را برحسب a، b و c پیدا کنید.



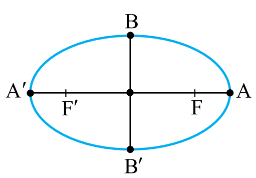
۶۵- در بیضی روبه‌رو، $OA=OA'=a$ ، $OB=OB'=b$ و $OF=OF'=c$. ثابت کنید: $b^2+c^2=a^2$ (نهایی فرداد ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۰)



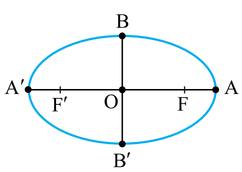
۶۶- در بیضی زیر، نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند. ثابت کنید $A'F'=AF$. (نهایی شهریور ۱۴۰۰)



۶۷- در شکل مقابل، نقطهٔ A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل نقطهٔ A از F و F' کوچک‌تر از قطر بزرگ بیضی است. (نهایی شهریور ۹۸)

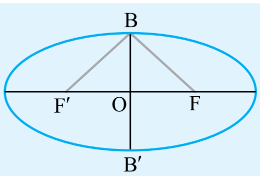


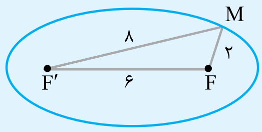
۶۸- اگر در بیضی، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ (نهایی دی ۹۷ و دی ۱۴۰۰)



۶۹- در بیضی شکل مقابل، طول قطر بزرگ $\sqrt{2}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ (نهایی فرداد ۹۹)

آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون جمع‌بندی	«رشتهٔ ریاضی و فیزیک»	مدت امتحان: ۱۶۵ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ثابت r که بر دایره‌ای ثابت $C(O,R)$ مماس‌خارج باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+r$ است. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ثابت d واقع در آن صفحه به فاصلهٔ معلوم k $(k>0)$ باشند، یک خط به موازات d است. پ) اگر صفحه‌ای تمام یال‌های یک رویهٔ مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند و از رأس مخروط نگذرد، مقطع حاصل دایره یا بیضی است. ت) بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت و یک خط ثابت غیرواقع بر آن خط به یک فاصله باشند. ث) خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d واقع در صفحهٔ دایره، کوچک‌تر از قطر دایره باشد، خط d با دایرهٔ C دو نقطهٔ مشترک دارد. ج) رابطهٔ $x^2+y^2-2x+6y+11=0$ معادلهٔ یک دایره است.					۱/۵
۲	جاهای خالی را با عبارت‌هایی مناسب چنان پر کنید تا گزاره‌ای درست حاصل شود. الف) مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی است که همهٔ آن‌ها دارای یک .... هستند و هر نقطه که دارای آن ویژگی باشد، .... از آن مجموعه است. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت واقع در همان صفحه مقداری ثابت باشد، .... است. پ) سهمی به کانون F و خط هادی Δ را در نظر بگیرید. اگر A نقطه‌ای از صفحه باشد، طوری که فاصلهٔ A از خط Δ بیشتر از فاصلهٔ A از F باشد، نقطهٔ A .... سهمی است. ت) اگر پرتوی از کانون سهمی بگذرد و بر سهمی بتابد، بازتابش آن .... است. ث) اگر خروج از مرکز بیضی به ۱ نزدیک شود، بیضی به .... شبیه خواهد شد.					۱/۵
۳	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(1,2)$ می‌گذرد و دو قطر آن منطبق بر خط‌های $y=x-6$ و $2x+3y=2$ باشند.					۱
۴	دایره‌ای از دو نقطهٔ $A(1,8)$ و $B(-2,7)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط $y=3x$ قرار دارد. شعاع این دایره چه‌قدر است؟					۱
۵	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y+3=0$ مماس باشد و مرکز آن نقطهٔ $O(1,1)$ باشد.					۱
۶	دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y=4$ از خط به معادلهٔ $4x+3y=3$ وتری جدا می‌کند. طول این وتر چه‌قدر است؟					۱/۵
۷	دایره‌ای از سه نقطهٔ $M(0,0)$، $A(1,2)$ و $B(3,0)$ می‌گذرد. مختصات مرکز و طول شعاع این دایره را بیابید.					۱
۸	شعاع دایره‌ای که بر دو دایرهٔ $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2+6x+5=0$ مماس داخل و مرکز آن روی محور yها باشد، چه‌قدر است؟					۱/۵
۹	از نقطهٔ M به طول ۶ واقع بر محور xها دو مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2=6$ رسم کرده‌ایم. طول هر یک از مماس‌ها را پیدا کنید.					۱
۱۰	در بیضی شکل مقابل، قطر کوچک $\sqrt{3}$ برابر فاصلهٔ کانونی آن است. اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ را مشخص کنید.  					۱

۱۱	درشکل زیر، نقاط F و F' کانون‌های بیضی و نقطهٔ M روی بیضی است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. 	۱
۱۲	در یک بیضی با کانون‌های F و F' نقطهٔ M نقطه‌ای روی بیضی است. اگر طول قطر بزرگ بیضی ۲۰ و فاصلهٔ M تا مرکز بیضی برابر ۸ و $MF' \perp MF$ باشد، طول MF چه مقادیری می‌تواند باشد؟	۱
۱۳	اگر F و F' کانون‌های یک بیضی و نقاط M و N روی بیضی ولی در دو طرف محور کانونی باشند، طوری که $MF' = NF$، نشان دهید $MF' \parallel NF$.	۱
۱۴	اگر $S(2,1)$ رأس سهمی و خط $y = 3$ هادی آن باشد، معادلهٔ سهمی را به دست آورید.	۱/۵
۱۵	معادلهٔ یک سهمی به صورت $y^2 - 6y + 8x + 1 = 0$ است. مختصات کانون، رأس سهمی و نیز معادلهٔ خط هادی آن را پیدا کرده و نمودار تقریبی آن را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.	۱/۵
۱۶	سهمی با رأس S، کانون F و خط هادی Δ مفروض است. بیضی‌ای که یک کانون آن منطبق بر F و کانون دیگر آن منطبق بر S و مماس بر خط Δ باشد، در نظر بگیرید. خروج از مرکز این بیضی چه‌قدر است؟	۱
۱۷	بیضی با کانون‌های F و F' که طول قطر بزرگ آن $2a$ باشد، در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکزِ مرکز بیضی و شعاع a رسم کرده‌ایم. اگر از F عمودی بر محور کانونی بیضی رسم کنیم تا این دایره را در نقطه‌های p و p' قطع کند، نشان دهید $pp' = 2b$ ($2b$ طول قطر کوچک بیضی است.)	۱
	مجموع نمرات	۲۰

برای دانلود حل ویدیوئی آزمون‌های جمع‌بندی، QRcode روبه‌رو را اسکن کنید.

۷ ضرب خارجی دو بردار

حاصل ضرب خارجی دو بردار

بردارهای $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ را در نظر می‌گیریم. ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$، برداری به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2\,,a_3b_1-a_1b_3\,,a_1b_2-a_2b_1)$$

که آن را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهند.

برای این‌که بتوانیم ضرب خارجی را ساده‌تر محاسبه کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله اول در یک سطر، عنصرهای بردار اول و در سطر بعدی عنصرهای بردار دوم را زیر آن می‌نویسیم. (شکل زیر)

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

مرحله دوم دو ستون اول را تکرار می‌کنیم:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

مرحله سوم برای پیداکردن **اولین** عنصرِ بردار حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار، ستون **اول** را کنار می‌گذاریم و دترمینان دو ستون بعدی را به دست می‌آوریم.

ستون اول حذف

$$\begin{matrix} \cancel{a_1} & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

دترمینان این دو ستون را پیدا می‌کنیم $\rightarrow a_2b_3-a_3b_2$

مرحله چهارم برای پیداکردن **دومین** عنصرِ بردار حاصل‌ضرب خارجی، ستون **دوم** را کنار می‌گذاریم و دترمینان دو ستون بعدی را به دست می‌آوریم:

ستون دوم

$$\begin{matrix} a_1 & \cancel{a_2} & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & \cancel{b_2} & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

دترمینان این دو ستون را پیدا می‌کنیم $\rightarrow a_3b_1-a_1b_3$

مرحله پنجم برای پیداکردن **سومین** عنصر نیز ستون **سوم** را حذف و دترمینان دو ستون بعدی را پیدا می‌کنیم:

ستون سوم حذف

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cancel{a_3} & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & \cancel{b_3} & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

دترمینان این دو ستون را پیدا می‌کنیم $\rightarrow a_1b_2-a_2b_1$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}=(a_2b_3-a_3b_2\,,a_3b_1-a_1b_3\,,a_1b_2-a_2b_1)$$

قضیه ثابت کنید $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ که θ زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

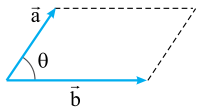
اثبات فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$، آن‌گاه:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

از طرفی چون $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2\,,a_3b_1-a_1b_3\,,a_1b_2-a_2b_1)$، پس:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|(a_2b_3-a_3b_2\,,a_3b_1-a_1b_3\,,a_1b_2-a_2b_1)|^2$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$=a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(a\cdot b)^2$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

نتیجه‌مهم از هندسهٔ (۲) می‌دانیم مساحت یک متوازی‌الاضلاع که طول اضلاع آن a و b و زاویهٔ بین دو ضلع آن θ باشد برابر $S = ab\sin\theta$ است، بنابراین از قضیهٔ فوق چنین نتیجه می‌شود که:



اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که با آن دو بردار ساخته می‌شود.

مثال بردارهای $\vec{a} = (۳,۲,-۱)$ و $\vec{b} = (۱,۲,۳)$ را در نظر بگیرید. مساحت متوازی‌الاضلاعی را که با این دو بردار ساخته می‌شود، پیدا کنید.

پاسخ بنا بر نتیجه‌ای که در بالا بیان شد، مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با اندازهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$؛ به بیان دیگر:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

ابتدا بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (۳,۲,-۱)\times(۱,۲,۳) = \left|\begin{matrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{matrix} = (۸,-۱۰,۴)$$

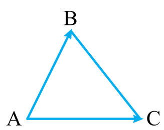
$$\underset{۸}{} \quad \underset{-۱۰}{} \quad \underset{۴}{}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{۸^۲+(-۱۰)^۲+۴^۲} = \sqrt{۱۸۰} = ۶\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = ۶\sqrt{۵}$$

مثال اگر $A(۱,۲,۳)$ ، $B(۲,-۱,۴)$ و $C(۳,۰,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث را پیدا کنید.



پاسخ اگر بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را ضرب خارجی کنیم، آن‌گاه بنا بر نتیجهٔ فوق، اندازهٔ بردار حاصل‌ضرب خارجی برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از این دو بردار و نصف آن، برابر مساحت مثلث است.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,,\, y_B - y_A\,,\, z_B - z_A) = (۲-۱, -۱-۲, ۴-۳) = (۱,-۳,۱)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A\,,\, y_C - y_A\,,\, z_C - z_A) = (۳-۱, ۰-۲, ۱-۳) = (۲,-۲,-۲)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (۱,-۳,۱)\times(۲,-۲,-۲) = (۸,۴,۴)$$

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = |(۸,۴,۴)| = |۴(۲,۱,۱)| = ۴|(۲,۱,۱)| = ۴\sqrt{۲^۲+۱^۲+۱^۲} = ۴\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۶}) = ۲\sqrt{۶}$$

خواص ضرب خارجی

فرض کنید $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ دو بردار باشند. در این صورت خواص زیر برای آن‌ها برقرار است:

۱ ضرب خارجی دو بردار در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست. $\quad \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

مثال اگر $\vec{a} = (۲,۱,-۳)$ و $\vec{b} = (۴,-۱,۲)$، آن‌گاه $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ را به دست آورید و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ با توجه به مراحلی که در بالا به آن‌ها اشاره شدند، خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} ۲ & ۱ & -۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ & ۴ & -۱ \end{matrix}$$

$$\underset{۲-۳}{} \quad \underset{-۱۲-۴}{} \quad \underset{-۲-۴}{}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (۲,۱,-۳)\times(۴,-۱,۲) = (-۱,-۱۶,-۶)$$

به همین ترتیب حاصل $\vec{b}\times\vec{a}$ را به دست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$\vec{b}\times\vec{a} = (۴,-۱,۲)\times(۲,۱,-۳) = (۱,۱۶,۶)$$

ملاحظه می‌شود که دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$، قرینهٔ یکدیگرند.

۲ اگر r عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $\quad r\vec{a}\times\vec{b} = r(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times r\vec{b}$

۳ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر و ناموازی باشند، آن‌گاه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر یک از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

نکته

با توجه به خاصیت (۳) می‌توان نتیجه گرفت که چون $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = ۰$ و $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = ۰$ یعنی: «ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آن دو بردار.»

اثبات

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = a_۱(a_۲b_۳ - a_۳b_۲) + a_۲(a_۳b_۱ - a_۱b_۳) + a_۳(a_۱b_۲ - a_۲b_۱) = ۰$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = b_۱(a_۲b_۳ - a_۳b_۲) + b_۲(a_۳b_۱ - a_۱b_۳) + b_۳(a_۱b_۲ - a_۲b_۱) = ۰$$

۱- الف) نادرست؛ (شاید بعضی از درایه‌های قطر اصلی صفر باشند.)

ب) درست

پ) نادرست؛ (شاید مربعی باشند ولی هم‌مرتبه نباشند.)

ت) درست

ث) درست؛ (زیرا $A(-A^{۲})=I$، پس $A^{-۱}=-A^{۲}$)

ج) نادرست؛ (زیرا در ماتریس‌ها، قاعدهٔ حذف برقرار نیست.)

۲- الف) غیرواقع بر قطر اصلی ـ واقع بر قطر اصلی

ب) همان مرتبه　　　پ) I

ت) مخالف صفر

ث) حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن

۳-

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۵ & ۷\\ ۱ & -۲ & ۹\end{bmatrix}$$

۴- فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، پس باید داشته باشیم:

$$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix}۲ & -۴\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & -۴\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}۲a-۴c & ۲b-۴d\\ a-۲c & b-۲d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲a+b & -۴a-۲b\\ ۲c+d & -۴c-۲d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲a-۴c=۲a+b \Rightarrow b=-۴c\\ ۲b-۴d=-۴a-۲b \Rightarrow d=b+a\\ a-۲c=۲c+d \Rightarrow ۴c=a-d\\ b-۲d=-۴c-۲d \Rightarrow b=-۴c \text{ تکراری}\end{cases}$$

مقادیر a، b، c و d باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که در دو رابطهٔ $d=b+a$ و $b=-۴c$ صدق کنند. به ازای مقادیر دلخواه a و b، مقادیری برای c و d به دست می‌آیند و مسئله بی‌شمار جواب دارد. به عنوان مثال؛ اگر $a=۵$ و $b=-۴$ باشد، آن‌گاه $c=+۱$ و $d=۱$ خواهد بود؛ یعنی $B=\begin{bmatrix}۵ & -۴\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ یکی از ماتریس‌های مورد نظر است.

۵- تمام درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A، صفر هستند. بنابر مطالب متن درس، دترمینان آن برابر با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی است، پس $|A|=۳$ و به سادگی معلوم می‌شود $|B|=-۵$ و $|I_۳|=۱$ در نتیجه:

$$|A\times B|-|۳I_۳|=|A|\times|B|-۳^۳|I_۳|$$
$$=۳\times(-۵)-۲۷\times۱=-۴۲$$

۶-

$$\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ x & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & ۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲a+۲ & ۲+a\\ ax+۶ & x+۳a\end{bmatrix}$$

ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}۲+a=۰\\ ax+۶=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-۲\\ -۲x+۶=۰ \Rightarrow x=۳\end{cases}$$

۷- دو ماتریس هم‌مرتبه زمانی برابرند که درایه‌های نظیر برابر باشند:

$$\begin{cases}y-۱=x^۲ \xrightarrow{x=۲} y=۵\\ x+۱=۳ \Rightarrow x=۲\\ ۲z=y \xrightarrow{y=۵} z=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

$$x+۲y+۴z=۲+۲\times۵+۴\times\frac{۵}{۲}=۲۲$$

۸- ابتدا $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=۳I$$

$$A^۵=A\times A^۴=A\times(A^۲)^۲=A\times(۳I)^۲=A\times۹I^۲=۹A$$

$$A^۸=(A^۲)^۴=(۳I)^۴=۳^۴I^۴=۸۱I$$

۹- باتوجه به ضابطهٔ a_{ij} داریم:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۳}{۲} & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۳}{۲} & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۳}{۲} & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}\\ \frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲}+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۹}{۴} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

۱۰- از این‌که $A^۲=A$ است نتیجه می‌شود:

$$A^۳=A^۲\times A \xrightarrow{A^۲=A} A^۳=A\times A=A^۲$$
$$\xrightarrow{A^۲=A} A^۳=A$$

چون A و I تعویض‌پذیرند، پس اتحادهای جبری در مورد این دو ماتریس برقرار است و داریم:

$$(A+I)^۳=A^۳+۳A^۲I+۳AI^۲+I^۳$$
$$=A^۳+۳A^۲+۳A+I=A+۳A+۳A+I=۷A+I$$

۱۱- چون $A^۲=A$، پس $A^n=A$ و همچنین $B^n=B$ و چون بنا به فرض ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند، پس $AB=BA$.

چون A و B تعویض‌پذیرند، پس اتحادهای جبری برقرار است:

$$(A+B)^۳=A^۳+۳A^۲B+۳AB^۲+B^۳$$
$$=A+۳AB+۳AB+B=A+۶AB+B$$

۱۲- ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۴\\ ۱۳\end{bmatrix}$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times(-۱)-۴\times۵}\begin{bmatrix}-۱ & -۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲۳}\begin{bmatrix}-۱ & -۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=-\frac{۱}{۲۳}\begin{bmatrix}-۱ & -۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۱۳\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲۳}\begin{bmatrix}-۶۹\\ ۲۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=۳\\ y=-۱\end{cases}$$

و چون OBPH مستطیل است، پس $OH=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a$.

$$OH=OA+AH \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a$$

$$=a+AH \Rightarrow AH=\frac{(۲\sqrt{۳}-۳)}{۳}a \quad (۱)$$

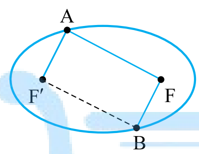
به سادگی معلوم می‌شود $B\hat{F}O=۳۰^\circ$، پس $OB=\frac{۱}{۲}BF$؛ یعنی $b=\frac{۱}{۲}a$؛ از طرفی:

$$c^۲=a^۲-b^۲=a^۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{۳}a}{۲}$$

$$FA=OA-OF=a-c=a-\frac{\sqrt{۳}a}{۲}=\frac{(۲-\sqrt{۳})a}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{AH}{AF}=\frac{\frac{(۲\sqrt{۳}-۳)a}{۳}}{\frac{(۲-\sqrt{۳})a}{۲}}=\frac{۲(۲\sqrt{۳}-۳)}{۳(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۷۹-



A روی بیضی است. $\Rightarrow AF+AF'=۲a$

B روی بیضی است. $\Rightarrow BF+BF'=۲a$

$BF=AF'$ بنا به فرض

$\Rightarrow AF=BF'$

چون در چهارضلعی $AFBF'$ اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو برابرند، پس این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه BF' و AF موازی هستند.

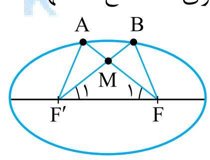
۸۰- چون A روی بیضی است، پس: $AF+AF'=۲a \quad (۱)$

و از آن‌جا که B هم روی بیضی است، پس: $BF+BF'=۲a \quad (۲)$

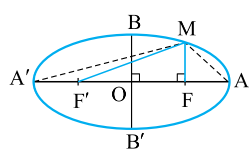
$$(۱),(۲) \Rightarrow AF+AF'=BF+BF'$$

$$\xrightarrow{AF'=BF} AF=BF'$$

اکنون دو مثلث AFF' و BFF' به حالت برابری سه ضلع، همنهشت هستند، پس اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابرند، در نتیجه $\hat{F}_۱=\hat{F}'_۱$ و بنابراین مثلث MFF' در رأس M متساوی‌الساقین است.



۸۱- چون M روی بیضی است، پس:



$$MF+MF'=۲a \quad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' داریم:

$$MF'^۲-MF^۲=FF'^۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{(MF'+MF)}_{۲a}(MF'-MF)=۴c^۲$$

$$\Rightarrow MF'-MF=\frac{۲c^۲}{a} \xrightarrow{(۱)} (۲a-MF)-MF=\frac{۲c^۲}{a}$$

$$\Rightarrow ۲MF=۲a-\frac{۲c^۲}{a}=\frac{۲(a^۲-c^۲)}{a}=\frac{۲b^۲}{a} \Rightarrow MF=\frac{b^۲}{a}$$

$$S_{MFF'}=\frac{۱}{۲}MF\times FF'=\frac{۱}{۲}\times\frac{b^۲}{a}\times ۲c=b^۲\times\frac{c}{a}=b^۲e$$

همچنین:

$$S_{MAA'}=\frac{۱}{۲}AA'\times MF=\frac{۱}{۲}\times ۲a\times\frac{b^۲}{a}=b^۲$$

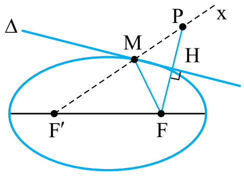
و نیز:

$$S_{MAF'}=\frac{۱}{۲}AF'\times MF=\frac{۱}{۲}(a+c)\frac{b^۲}{a}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{a}{a}+\frac{c}{a})b^۲=\frac{۱}{۲}(۱+e)b^۲$$

۸۲- الف) می‌دانیم مماس بر بیضی در نقطهٔ M، نیمساز زاویهٔ بین MF و امتداد MF' است، پس Δ نیمساز زاویهٔ FMx می‌باشد.

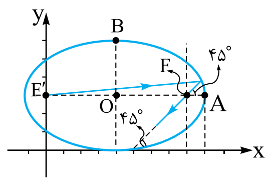
اگر امتداد عمودی که از F بر Δ رسم می‌شود، Mx را در P قطع کند، چون در مثلث MPF، پاره‌خط MH هم ارتفاع و هم نیمساز است، پس عمودمنصف نیز می‌باشد، در نتیجه نقطهٔ P، بازتاب نقطهٔ F نسبت به خط Δ می‌باشد، بنابراین F'، M و P بر یک راستا هستند.



ب) زیرا M روی بیضی است.

$$PF'=\underbrace{PM}_{=MF}+MF'=MF+MF'=۲a$$

۸۳- واضح است که مختصات مرکز بیضی $O(۴,۳)$ است. از طرفی $a=OA=۹-۴=۵$ و $b=OB=۶-۳=۳$. در بیضی رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است، پس داریم:



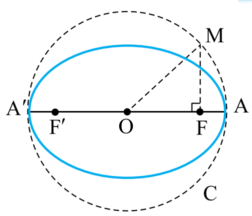
$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۵^۲=۳^۲+c^۲ \Rightarrow c^۲=۱۶ \Rightarrow c=۴$$

در نتیجه مختصات کانون F به صورت $F(۴+۴,۳)$ یا $F(۸,۳)$ می‌باشد.

بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی، پرتویی که از یک کانون بیضی بر آن بتابد، بازتابش آن از کانون دیگر می‌گذرد، پس نقطهٔ F روی پرتو بازتابش قرار دارد. چون پرتو بازتابش با AA' زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد، پس بنا بر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، پرتو بازتابش با جهت مثبت محور xها نیز زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل می‌دهد و در نتیجه شیب این خط $m=\tan ۴۵^\circ=۱$ است. اکنون معادلهٔ پرتو بازتابش را پیدا می‌کنیم:

$$y-۳=۱\times(x-۸) \Rightarrow y=x-۵$$

۸۴- چون قطر دایره برابر $AA'=۲a$ است، پس شعاع آن a می‌باشد و در نتیجه $OM=a$. از طرفی $OF=c$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMF بنا بر رابطهٔ فیثاغورس داریم:

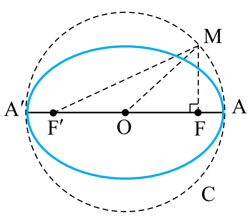


$$MF^۲+OF^۲=OM^۲ \Rightarrow MF^۲+c^۲=a^۲$$

$$\Rightarrow MF^۲=a^۲-c^۲=b^۲ \Rightarrow MF=b$$

یعنی MF نصف قطر کوچک بیضی است.

۸۵- از O به M وصل می‌کنیم، پس $OM=a$ و $OF=c$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMF داریم:



$$MF^۲=OM^۲-OF^۲$$

$$=a^۲-c^۲=b^۲ \Rightarrow MF=b$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' داریم:

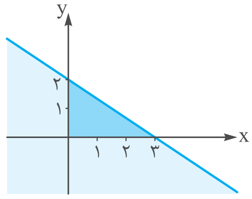
$$MF'^۲=MF^۲+FF'^۲=b^۲+۴c^۲$$

$$=\underbrace{b^۲+c^۲}_{=a^۲}+۳c^۲=a^۲+۳c^۲ \Rightarrow MF'=\sqrt{a^۲+۳c^۲}$$

۱- الف) $1<m<2$، در ربع چهارم مختصات، مؤلفهٔ اول (x) مثبت و مؤلفهٔ دوم (y) منفی است، پس داریم:

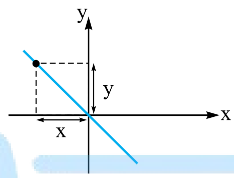
$$\left.\begin{matrix} m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ m-2<0 \Rightarrow m<2\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<m<2$$

ب) ۳، ابتدا رابطهٔ $2x+3y<6$ را رسم می‌کنیم. برای این کار نامعادله را به معادلهٔ $2x+3y=6$ تبدیل می‌کنیم:

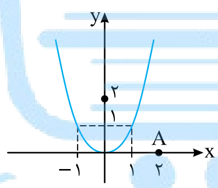


نقطهٔ دلخواه $(0,0)$ در نامعادلهٔ $2x+3y<6$ صدق می‌کند. پس ناحیهٔ مطلوب زیر خط $2x+3y=6$ است و مساحت بخشی از آن که در ربع اول قرار دارد، برابر است با: $S=\frac{1}{2}\times3\times2=3$

۲- هر نقطه روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم از دو محور x و y به یک فاصله است ولی با توجه به شکل، این دو مقدار، مختلف‌العلامه می‌باشند، پس معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم به صورت $y=-x$ است.

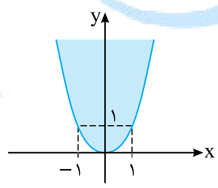


۳- نمودار $x^2=y$ به شکل مقابل است. (شکل ۱)



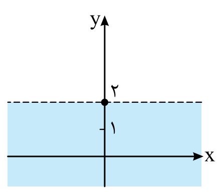
شکل (۱)

نقطهٔ $A(2,0)$ را در نامعادلهٔ $x^2\le y$ آزمایش می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت $2^2\le 0$ که نادرست است، پس نقاط درون سهمی و روی آن جواب‌های این نامعادله هستند (شکل ۲).



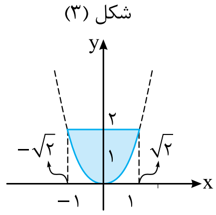
شکل (۲)

چون باید $y\le 2$ باشد، پس تمام نقاط زیر خط $y=2$ و روی آن جواب‌های این معادله هستند (شکل ۳).



شکل (۳)

اشتراک شکل‌های (۲) و (۳) جواب‌های مسئله هستند (شکل ۴).

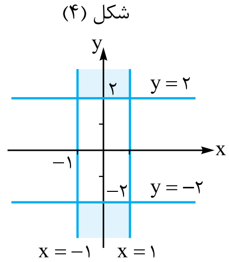


شکل (۴)

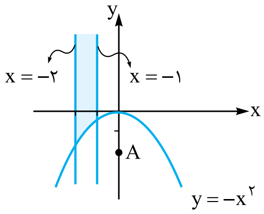
۴- الف) $y^2\ge 4\equiv y\ge 2$ یا $y\le -2$

$x^2\le 1\equiv -1\le x\le 1$

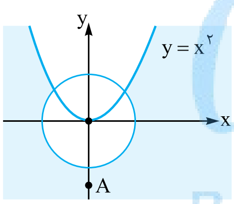
در شکل مقابل، اشتراک بین دو ناحیه به صورت رنگی نمایش داده شده و جواب مسئله می‌باشد.



ب) ابتدا نمودار $x^2+y=0$ را که معادل با $y=-x^2$ است، رسم می‌کنیم و نقطهٔ $A(0,-2)$ را در نامساوی $x^2+y\ge 0$ می‌گذاریم؛ نتیجه می‌شود $0-2\ge 0$ که نادرست است، پس قسمتی از صفحه که بیرون سهمی قرار دارد جواب نامعادله می‌باشد. اینک محدودهٔ $-2\le x\le -1$ که بین دو خط $x=-2$ و $x=-1$ است را مشخص می‌کنیم. اشتراک این دو محدوده آن‌ها جواب مسئله می‌باشد که در شکل، با رنگ مشخص شده است.

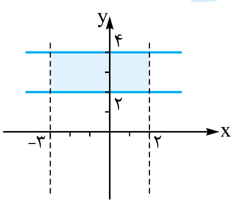


پ) همانند قسمت (ب) ابتدا نمودار $y=x^2$ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ $A(0,-2)$ را آزمایش می‌کنیم. مشاهده می‌شود که در نامساوی اول صدق می‌کند، پس نقاط بیرون سهمی در این نامعادله صدق می‌کنند حالا نمودار $x^2=1-y^2$ را که معادل با $x^2+y^2=1$ است، رسم می‌کنیم که یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است. نقطهٔ A در نامساوی دوم صدق می‌کند، پس نقاط بیرون یا روی دایره در این نامعادله صدق می‌کنند. اشتراک این دو ناحیه جواب مسئله است. در این‌جا محدودهٔ جواب با رنگ مشخص شده است.

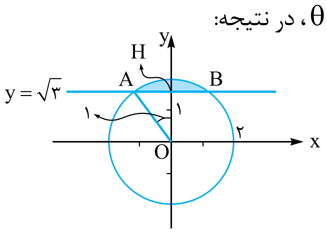


$x^2\ge 1-y^2\equiv x^2+y^2\ge 1$

۵- الف) ناحیهٔ محدودشده، مستطیلی به طول ۵ و عرض ۲ است که مساحت آن $2\times 5=10$ می‌باشد.



ب) مساحت محدودشده، قطعه‌ای از دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است. می‌دانیم مساحت قطعه‌ای از دایره که مقابل به زاویهٔ مرکزی θ رادیان باشد از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$ به دست می‌آید. با توجه به شکل، چون $OA=2$ و $OH=\sqrt{3}$ است، پس $\hat{O}_1=30^\circ$، بنابراین $\theta=A\hat{O}B=60^\circ=\frac{\pi}{3}$، در نتیجه:



$$S=\frac{1}{2}\times 2^2\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$$

۶- الف) درست؛ (هر نقطه با ارتفاع صفر، روی صفحهٔ xoy است و برعکس).

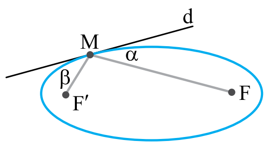
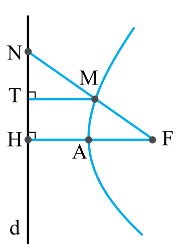
ب) درست؛ (هر نقطه با طول صفر، روی صفحهٔ yoz است و برعکس).

نمونه امتحان نیمسال اول		رشتهٔ ریاضی و فیزیک	هندسه ۳	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۱	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	ماتریسی از مرتبهٔ ۴×۳ بنویسید طوری که برای هر i و j، رابطهٔ $a_{ij}=۲i-j$ برقرار باشد.	۰/۷۵
۲	ماتریسی اسکالر از مرتبهٔ ۴ بنویسید که مجموع تمام درایه‌های آن ۳۶ باشد.	۱
۳	با فرض این‌که X ماتریسی ۲×۲ باشد، از رابطهٔ مقابل، ماتریس X را مشخص کنید: $۲\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&-۵\end{bmatrix}+۳X=\begin{bmatrix}۱&-۶\\۲&-۱\end{bmatrix}$	۱/۲۵
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}$ و $I=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^۲-۲A+۳I$ را پیدا کنید.	۱
۵	ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ به صورت‌های $a_{ij}=\begin{cases}۲ & : i\neq j\\ i+j & : i=j\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases}i+j & : i\neq j\\ i-۱ & : i=j\end{cases}$ تعریف شده‌اند. حاصل $B\times A$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۶	اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریسی مخالف B چنان بیابید که رابطهٔ $AB=AC$ برقرار باشد.	۱
۷	اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x+۳y&۵\\۲&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&x^۲+۴y\\۲&y-x\end{bmatrix}$ برابر باشند، آن‌گاه x و y را پیدا کنید.	۰/۷۵
۸	اگر $A=\begin{bmatrix}a_۱&۰&۰\\۰&a_۲&۰\\۰&۰&a_۳\end{bmatrix}$ و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد، ماتریس‌های AB و BA را تشکیل دهید و نتیجهٔ حاصل را بیان کنید.	۱
۹	اگر A و B دو ماتریس قطری از مرتبهٔ ۳ باشند، حاصل $A\times B$ را تشکیل دهید و نتیجهٔ حاصل را بیان کنید. آیا AB و BA برابر هستند؟	۱
۱۰	اگر $A=[۲]$، $B=\begin{bmatrix}۳&۴\\۱&۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۳&۱&۲\\۲&۱&۳\\۳&۱&۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\|A\|+\|B\|+\|C\|$ را به دست آورید.	۱
۱۱	اگر $A=\begin{bmatrix}۵\\۲\\۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&-۱&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\|AB\|$ را پیدا کنید. (دترمینان AB را پیدا کنید.)	۰/۷۵
۱۲	دستگاه معادلات $\begin{cases}۳x+۲y=۴\\x-y=۳\end{cases}$ را در نظر بگیرید. بدون حل دستگاه، بررسی کنید که این دستگاه دارای جواب است؛ سپس با استفاده از ماتریس وارون، آن را حل کنید.	۱/۲۵
۱۳	اگر صفحه‌ای بر محور رویهٔ مخروطی عمود نباشد و از رأس رویه نیز نگذرد و با هیچ‌یک از یال‌های آن موازی نباشد، مقطع آن صفحه با رویهٔ مخروطی چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟	۰/۷۵
۱۴	مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌اش از خط d، واقع در همان صفحه، برابر r باشد $(r>۰)$ چیست؟ شکل مناسبی رسم کنید.	۱
۱۵	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(۱,-۲)$ بگذرد و بر دو محور مختصات، مماس باشد.	۱/۵
۱۶	وضعیت نسبی خط $۴x-۳y=۰$ با دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۱۷	معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلثی را که مختصات سه رأس آن $A(۲,۱)$، $B(۳,۲)$ و $O(۰,۰)$ باشند، پیدا کنید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در نقطهٔ A پیدا کنید.	۲
۱۸	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(-۲,۴)$ و $B(۴,۶)$ بگذرد و معادلهٔ یکی از قطرهای آن $x+y=۴$ باشد.	۱/۵
	جمع نمرات	۲۰

نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشتهٔ ریاضی و فیزیک	هندسه ۳

ردیف	امتحان شمارهٔ ۳	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	نهایی خردادماه ۱۴۰۱	Kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	عبارت‌های زیر را کامل کنید. الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با .... است. ب) اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کم‌تر شده و بیضی به .... نزدیک‌تر می‌شود. پ) نقطهٔ $A(۱,-۲)$ در .... دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. ت) اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر .... است.	۱
۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید. الف) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و ۵ = | A | باشد، آن‌گاه ۴۰ = | ۲A | است. ب) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است.  پ) در شکل روبه‌رو، اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و زاویهٔ $F\hat{M}F'=۵۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=\beta=۶۰^\circ$ است. ت) برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل‌ضرب خارجی $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{O}$ است.	۱/۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	۱
۴	ماتریس A مربعی مرتبهٔ سه به صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد: الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۵	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۲۵
۶	نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد(بحث کنید).	۱/۵
۷	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.	۱
۸	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است: الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون‌ها (F',F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A',A) و دو سر قطر کوچک (B',B) را به دست آورید. پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.	۱/۵
۹	الف) معادلهٔ متعارف و فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y-۸x+۹=۰$ را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.	۱/۵
۱۰	در شکل روبه‌رو، سهمی با رأس A، کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\dfrac{FN}{FA}=\dfrac{۲NT}{TH}$ 	۱/۲۵
۱۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $x^۲\le y\le ۲$ را رسم کنید.	۰/۵

۱- الف) ۸ (۰/۲۵) ب) خط (۰/۲۵)

پ) دایره (۰/۲۵) ت) ۶ (۰/۲۵)

۲- الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

پ) درست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)

۳-

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ & (۰/۲۵) \\ n=-۱ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

۴- $|۲A|=(|A|^۲+۴)$ (۰/۵) $\Rightarrow (|A|-۲)^۲=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow |A|=۲$ (۰/۲۵)

$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$ (۰/۲۵) $=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

۵- $$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\underbrace{\underbrace{\frac{۱}{۳+۸}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

۶- فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r=\frac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \quad (۰/۵)$$

معادلهٔ دایره‌ای برابر است با: $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$ (۰/۵)

۷- مرکز و شعاع دایره:

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱$$

برابر است با $r'=۱$ ، $O'=(۳,۱)$ (۰/۵)

فاصلهٔ دو مرکز برابر: $d=OO'=\sqrt{(۳)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$ (۰/۵) و

$d>r+r'=۲$ (۰/۲۵)

دو دایره بیرون یکدیگرند. (متخارج‌اند) (۰/۲۵)

۸- نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه:

(۰/۲۵) $BF=BF'$ (۱)

فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

(۰/۲۵) $BF+BF'=۲a \xrightarrow{(۱)} BF=BF'=a$

بنا به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

(۰/۲۵) $OF^۲+OB^۲=BF^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^۲+b^۲=a^۲$

۹- الف)

$$\begin{cases} ۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵ \\ ۲b=۶ \Rightarrow b=۳ \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow c=۴$ (۰/۲۵)

در مثلث MFF' میانهٔ وارد بر یک ضلع $MO=\frac{۱}{۲}FF'=۴$ نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. (۰/۲۵)

ب) $MF+MF'=۲a=۱۰ \Rightarrow MF'=۱۰-MF$ (۰/۲۵)

$$MF^۲+MF'^۲=FF'^۲ \Rightarrow \underbrace{MF^۲+(۱۰-MF)^۲=۸^۲}_{(۰/۲۵)}$$

$\Rightarrow MF=۵-\sqrt{۷}$ (۰/۲۵)

۱۰- الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $a=۴$ (۰/۲۵)

دهانهٔ سهمی رو به پایین است و معادلهٔ آن برابر است با:

$(x-۲)^۲=-۴(۴)(y-۳)$ (۰/۵)

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با $F=(۲,-۱)$ (۰/۵)

۱۱- اگر قطر دهانهٔ دیش را با $۲b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر (۰/۲۵) $a=\frac{۴b^۲}{۱۶h}$ است.

$h=۹$ ، $۲b=۶۰$ را با جای‌گذاری در رابطهٔ فوق داریم:

$$a=\frac{(۲b)(۲b)}{۱۶h}=\frac{۶۰\times ۶۰}{۱۶(۹)}=۲۵ \quad (۰/۵)$$

(اگر رابطهٔ فوق به صورت (۰/۷۵) $a=\frac{b^۲}{۴h}=\frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)}=۲۵$ نوشته شود درست است.)

۱۲- الف) $b=-۳$ (۰/۵) ب) محور zها (۰/۵)

پ) نقطهٔ $A=(۰,۲,۳)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با:

$(-۲,۴,۰)$ (۰/۲۵)

۱۳-

$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)$ (۰/۵)

$$\vec{a}'=\underbrace{\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}+\vec{c}|^۲}}_{(۰/۲۵)}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶) \quad (۰/۷۵)$$

۱۴-

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{O}|^۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow |\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$ (۰/۵)

$\Rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷$ (۰/۲۵)

۱۵- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{۰}|$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\times\sin\theta=۰$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{|\vec{a}|\neq۰,|\vec{b}|\neq۰} \sin\theta=۰$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow \theta=۰\vee\theta=\pi$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ (۰/۲۵)

۱۶- الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$(-۲\vec{b})\times\vec{c}$ (۰/۲۵) $=(۲,-۲,۰)$ (۰/۲۵) $\times(۲,۱,-۲)$

$=(۴,۴,۶)$ (۰/۵)

ب) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$|(\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}))|$ (۰/۲۵) $=|(۲,۳,۱).\underbrace{(-۲,-۲,-۳)}_{(۰/۵)}|=۱۳$ (۰/۲۵)