کتاب کنکور

پایا

هندسه جامع

(دوازدهم)

از مجموعه **مرشد**

رشته ریاضی فیزیک

علی اصغر شریفی

دانیال ابراهیمی

بسم
الله
الرحمن
الرحیم

مقدمه

به نام او، به یاد او، برای او

می‌گویند زمانی در آمریکا بسیاری از مردم به دنبال کشف و استخراج طلا بودند تا پول‌دار شوند، اما تعداد کمی به طلا رسیدند. در عوض، افراد زیادی با فروش بیل و کلنگ به این جستجوگران طلا ثروتمند شدند! حکایت کنکور هم بی‌شباهت به این داستان نیست. تعداد زیادی داوطلب کنکور به امید نتیجه‌ای طلایی تلاش می‌کنند و در نهایت معلم‌ها پول‌دار می‌شوند! کتاب‌ها هم نقش بیل و کلنگ را بازی می‌کنند!! حالا ما وسط این بازار بیل و کلنگ چه می‌کنیم؟ راستش، با خودمان گفتیم حالا که داریم همه را به سمت معادن طلا (!) می‌فرستیم، حداقل بیل و کلنگ درست و حسابی دست‌شان بدهیم. بیل و کلنگی در حد تیشهٔ فرهاد تا بتوانند دل کوه را بشکافند و به طلا برسند؛ نه بیل و کلنگی که فقط به درد بریدن و خوردن ماست بخورد! تمام تلاش‌مان را کردیم که بهترین محصول این بازار را تولید کنیم و معتقدیم که به این هدف رسیدیم. اگر اصرار به بهترین بودن نداشتیم و وسواس به خرج نمی‌دادیم، حتماً ماه‌ها قبل این کتاب در بازار بود. البته ناگفته نماند که اگر از ابتدا می دانستیم که ساختن بیل و کلنگ سالم از خودِ رسیدن به طلا سخت‌تر است، هیچ‌گاه وارد این بازار نمی‌شدیم!

الآن حق دارید سؤال کنید که چرا این قدر سنگ بیل و کلنگ خودمان را به سینه می‌زنیم؟ اصلاً مگر بیل با بیل فرق دارد؟! در بازار پُر زرق و برقی که یواش یواش تعداد بیل‌ها از تعداد طلاجویان بیشتر می‌شود، انتخاب بیل مناسب بسیار سخت است! ما معتقدیم کسانی می‌توانند راه درست رسیدن به طلا را نشان دهند که خودشان به طلا رسیده باشند و سختی راه را حس کرده باشند. علاوه بر این که خودِ ما در زمان کنکورمان جزو رتبه‌های خوب بودیم، برای نگارش و ویرایش این کتاب از دانش‌آموزان سابق‌مان هم کمک گرفته‌ایم. دانش‌آموزانی که در کنکور ۹۷ رتبه‌های برتر را کسب کرده‌اند و الان دوستان و همکاران جوان و تازه نفس ما محسوب می‌شوند. از این فرصت استفاده می‌کنیم و از این دوستان قدردانی و تشکر می‌کنیم: سید محمد صادق کشاورزی (رتبه ۱ منطقه و ۲ کشوری)، محمدرضا اسکندری (رتبه ۲ منطقه و ۴ کشوری)، مهراد صاحبی (رتبه ۱۲ منطقه و ۱۹ کشوری)، امیررضا دانشور آملی (رتبه ۳۳ منطقه و ۴۸ کشوری)، علی محسنی‌نژاد (رتبه ۵۰ منطقه و ۷۴ کشوری)، علی قوام‌پور (رتبه ۶۴ منطقه و ۹۸ کشوری)، محمد مقدم (رتبه ۶۵ منطقه و ۹۹ کشوری) و ... .

نحوهٔ استفاده از این کتاب ساده است. کافی است درسنامهٔ هر مبحث را بخوانید، مثال‌های آن را با دقت بررسی کنید و سپس تست‌های آن مبحث را بزنید! هیچ علامت خاص یا سطح‌بندی تست‌ها در این کتاب وجود ندارد، چون معتقدیم برای موفقیت در درس «**هندسه دوازدهم**»، یاد گرفتن تمام تست‌های این کتاب لازم و کافی است.

به جز دانش‌آموزان سابق‌مان، دوستان زیادی در تهیهٔ این کتاب زحمت کشیدند که بدون حضورشان انجام کار غیرممکن بود. از استاد و دوست عزیزمان جناب آقای حسین حاجیلو بسیار سپاس‌گزاریم که با نظرات سازنده‌شان ساختار کتاب را منسجم‌تر نمودند. از جناب مهندس هادی عزیززاده تشکر می‌کنیم که بی‌نهایت صبور بودند و در تمام مراحل تهیهٔ کتاب در کنارمان بودند. همچنین از خانم‌ها سپیده خداوردی (صفحه‌آرا)، مریم رسولی و بهاره خدامی (گرافیست‌ها) و مینا هرمزی (طراح جلد) بسیار سپاسگزاریم و برای همهٔ این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

در انتها، از دانش‌آموزان و دبیران هندسه دوازدهم یک درخواست نامتعارف داریم! همیشه به عنوان معلم و مشاور به دانش‌آموزان توصیه کرده‌ایم که خودتان را با کسی مقایسه نکنید. الآن از شما درخواست داریم که لطفاً کتاب ما را مقایسه کنید! مقایسه کردن دو تا خوبی دارد: اولیش برای شماست که بهترین را انتخاب می‌کنید و دومیش برای ماست که می‌توانیم از نظرات شما استفاده کنیم. در همین راستا، لطفاً پیشنهادهای خود را از طریق تلگرام به شماره ۹۵ ۱۵ ۲۱۶ ۰۹۱۲ به اطلاع مؤلفین برسانید تا در ویرایش‌های بعدی در نظر بگیریم.

علی اصغر شریفی / دانیال ابراهیمی

فهرست

فصل اول: ماتریس و کاربردها

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل سوم: بردارها

۱

فصل اول: ماتریس و کاربردها

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

معرفی ماتریس

تعریف (ماتریس): به هر آرایش مستطیلی از اعداد، ماتریس می‌گویند.

برای مثال:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۷\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۱\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}۲\\ -۱\\ -۱\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\quad,\quad E=\begin{bmatrix}۲\end{bmatrix}$$

به هر کدام از اعداد داخل ماتریس، یک درایه می‌گویند. هر ماتریس تعدادی سطر و تعدادی ستون دارد. هر سطر ماتریس متشکل از درایه‌هایی است که به صورت افقی در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. سطرها از بالا به پایین شماره‌گذاری می‌شوند. برای مثال ماتریس B دو سطر دارد که سطر یکم آن $[۱ \quad -۲ \quad ۴]$ است.

هر ستون ماتریس از درایه‌هایی تشکیل شده است که به صورت عمودی در کنار همدیگر قرارگرفته‌اند. ستون‌ها از چپ به راست شماره‌گذاری می‌شوند. برای مثال ماتریس B دارای سه ستون است که ستون یکم آن $\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}=B$ است.

به ماتریسی که دارای تنها یک سطر باشد، ماتریس سطری و به ماتریسی که دارای تنها یک ستون باشد، ماتریس ستونی می‌گوییم.

برای مثال در بالا ماتریس C ستونی، ماتریس D سطری و ماتریس E هم سطری و هم ستونی است. منظور از اندازه یا ابعاد یا مرتبهٔ یک ماتریس تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن است که معمولاً به صورت «تعداد ستون‌ها × تعداد سطرها» نشان داده می‌شود. برای مثال اندازهٔ ماتریس B در بالا، ۳×۲ است. برخی مواقع اندازهٔ ماتریس را به صورت اندیس آن نمایش می‌دهیم. برای مثال برای ماتریس‌های بالا داریم: $A_{۲\times۲}$ ، $B_{۲\times۳}$ ، $C_{۳\times۱}$ ، $D_{۱\times۴}$ و $E_{۱\times۱}$

درایه‌ها با توجه به شمارهٔ سطر و ستونی که در آن قرار گرفته‌اند، مشخص می‌شوند؛ یعنی منظور از a_{ij} درایه‌های واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A است. بنابراین در ماتریس A تعریف شده در بالا داریم:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}\;;\; a_{۱۱}=۱\quad,\quad a_{۱۲}=۲\quad,\quad a_{۲۱}=-۱\quad,\quad a_{۲۲}=۷$$

در یک ماتریس، درایه‌های a_{ij} می‌توانند تابعی از i و j باشند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۲}$ را بیابید که در آن $a_{ij}=i+۲j$.

پاسخ: طبق صورت سؤال $a_{ij}=i+۲j$. به عنوان مثال، $a_{۲۱}=۲+۲(۱)=۴$. به همین ترتیب سایر درایه‌ها را یافته و ماتریس مطلوب را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}a_{۱۱}=۱+۲(۱)=۳\\ a_{۱۲}=۱+۲(۲)=۵\\ a_{۲۱}=۲+۲(۱)=۴\\ a_{۲۲}=۲+۲(۲)=۶\\ a_{۳۱}=۳+۲(۱)=۵\\ a_{۳۲}=۳+۲(۲)=۷\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳ & ۵\\ ۴ & ۶\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}$$

نکته ۱: ماتریس ۱×۱ معادل یک عدد است. برای مثال در بالا ماتریس E همان عدد ۲ است. برعکس، هر عدد حقیقی a را نیز می‌توان به صورت ماتریس $[a]_{۱\times۱}$ نوشت.

بررسی ماتریس‌های خاص

تعریف (ماتریس صفر): ماتریس $m\times n$ را که همه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر می‌گویند و با $O_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

تعریف (ماتریس مربعی): ماتریس $n\times n$ را ماتریس مربعی از مرتبهٔ n می‌گویند. در یک ماتریس مربعی، منظور از قطراصلی ماتریس، درایه‌هایی است که شمارهٔ سطر و ستون آن‌ها با هم برابر است (در واقع درایه‌های به شکل a_{ii}).

به عنوان مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۷\end{bmatrix}$ ، یک ماتریس مربعی از مرتبه ۲ می‌باشد و درایه‌های $a_{۱۱}=۱$ و $a_{۲۲}=۷$، درایه‌های روی قطر اصلی آن هستند.

تعریف (ماتریس قطری): ماتریس مربعی که همه درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشد $(i\neq j \Rightarrow a_{ij}=۰)$ ، ماتریس قطری نامیده می‌شود. به عنوان مثال ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ، قطری هستند (دقت کنید که درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند).

تعریف (ماتریس اسکالر): ماتریس قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

تعریف (ماتریس همانی): ماتریس قطری از مرتبهٔ n را که همه درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابر و برابر با ۱ باشند، ماتریس همانی می‌گویند و با I_n نمایش می‌دهند.

$$I_n=\left[a_{ij}\right]\ ,\ a_{ij}=\begin{cases}۰ & i\neq j\\ ۱ & i=j\end{cases}$$

تعریف (ماتریس بالامثلثی): ماتریس مربعی را که همهٔ درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشد، بالامثلثی می‌گویند. $\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ ۰ & ? & ?\\ ۰ & ۰ & ?\end{bmatrix}$

تعریف (ماتریس پایین مثلثی): ماتریس مربعی را که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشد، پایین‌مثلثی می‌گویند. $\begin{bmatrix}? & ۰ & ۰\\ ? & ? & ۰\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}$

به عنوان مثال، ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\end{bmatrix}$ پایین‌مثلثی، ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$ بالامثلثی و ماتریس $C=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی است.

تساوی ماتریس‌ها

تعریف (تساوی ماتریس‌ها): دو ماتریس A و B مساوی‌اند، اگر دارای مرتبه یکسان و درایه‌های متناظر برابر باشند.

جبر ماتریس‌ها

تعریف (جمع ماتریس‌ها): جمع ماتریس‌ها تنها برای ماتریس‌های هم‌مرتبه تعریف می‌شود. حاصل جمع دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ ماتریسی است هم‌مرتبه با این دو ماتریس که هر درایهٔ آن برابر با حاصل جمع درایه‌های متناظر این دو ماتریس است.

به بیان دیگر: $C_{m\times n}=A_{m\times n}+B_{m\times n}\rightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

تعریف (ضرب عدد در ماتریس): برای ضرب عدد حقیقی r در ماتریس A، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به بیان دیگر، اگر $r\in\mathbb{R}$ و $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، آن‌گاه داریم: $rA=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$

تعریف (قرینهٔ ماتریس): قرینهٔ ماتریس A را با $-A$ نشان می‌دهیم که برابر است با $-A=(-۱)A$.

نکته ۲ (ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس): برای ماتریس‌های هم‌مرتبهٔ A، B و C و اعداد حقیقی r و s خاصیت‌های زیر برقرار است:

۱) خاصیت جابه‌جایی ← $A+B=B+A$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری ← $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳) عضو خنثی جمع ماتریس‌ها ← $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$

۴) وارون جمعی ← $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$

۵) ضرب عدد صفر در ماتریس ← $۰\times A=\bar{O}$

۶) ضرب عدد در ماتریس صفر ← $r\bar{O}=\bar{O}$

۷) توزیع‌پذیری ضرب عدد در ماتریس نسبت به جمع ماتریس‌ها ——— $r(A+B)=rA+rB$

۸) توزیع‌پذیری ضرب عدد در ماتریس نسبت به جمع اعداد ——— $(r+s)A=rA+sA$

۹) شرکت‌پذیری ضرب اعداد و ضرب عدد در ماتریس ——— $r(sA)=(rs)A$

مثال ۲: اگر $A=[i+2j]_{2\times3}$ و $B=[2i-j]_{2\times3}$، ماتریس $A-2B$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا ماتریس‌های B و A را تشکیل می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&2&1\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&6&8\end{bmatrix}$$

حال حاصل $A-2B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A-2B=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&6&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&-2\\6&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&9\\-2&2&6\end{bmatrix}$$

مثال ۳: ماتریس X را در معادلهٔ $3X+\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\1&1\end{bmatrix}$ بیابید.

پاسخ: داریم:

$$3X+\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow 3X=\begin{bmatrix}3&-2\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix}\Rightarrow 3X=\begin{bmatrix}3&-3\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

تعریف (ضرب ماتریس‌ها): حاصل‌ضرب ماتریس A در ماتریس B تنها در حالتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد. در این صورت درایه‌های واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس AB برابر با ضرب داخلی سطر iام A در ستون jام B است. به بیان دقیق‌تر، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{n\times p}$. حاصل‌ضرب A در B را C بنامیم، آنگاه $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ که در آن:

$$c_{ij}=[a_{i1},\boxed{a_{j2}},\dots,a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\\boxed{b_{2j}}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+\boxed{a_{i2}}\,\boxed{b_{2j}}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-2&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$ حاصل AB و BA را بیابید.

پاسخ: دقت کنید که در حالت کلی در ضرب ماتریس‌ها، خاصیت جابه جایی وجود ندارد. داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\7&3&1\\1&-5&3\end{bmatrix}\quad,\quad BA=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&-1\\3&2&0\\-1&-4&1\end{bmatrix}$$

مثال ۵: مقدار x را در معادلهٔ مقابل بیابید.

$$[x\quad 1]\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$$

پاسخ: از سمت چپ معادله عملیات ضرب را آغاز می‌کنیم:

$$\underbrace{\underbrace{[x\quad 1]\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}}_{[x+2\quad 3x+6]}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}}_{[x^2+2x+3x+6]}=0\Rightarrow x^2+5x+6=0\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=-3\end{cases}$$

تعریف (به توان رساندن ماتریس‌ها): ماتریس A^n به صورت مقابل تعریف شود:

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\dots\times A}_{n\text{ مرتبه}}=A\times A^{n-1}=A^{n-1}\times A$$

نکته ۳ (ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها): برای ماتریس‌های A، B و C خاصیت‌های زیر برقرار است:

۱) عدم وجود خاصیت جابه‌جایی ⟵ $AB \neq BA$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری ⟵ $A(BC) = (AB)C$

۳) عضو خنثای ضرب ماتریس‌ها ⟵ $AI = IA = A$

۴) ضرب ماتریس صفر در یک ماتریس ⟵ $\bar{O} \times A = A \times \bar{O} = \bar{O}$

۵) شرکت‌پذیری ضرب اعداد و ضرب ماتریس‌ها ⟵ $(rA)(sB) = (rs)(AB)$

۶) توزیع‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع ماتریس‌ها ⟵ $\begin{cases} A(B+C) = AB + AC \\ (B+C)A = BA + CA \end{cases}$

۷) ضرب طرفین تساوی در یک ماتریس ⟵ $B = C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ BA = CA \end{cases}$

۸) به توان رساندن حاصل‌ضرب عدد در ماتریس ⟵ $(rA)^n = r^n A^n$

نکته ۴: حواستان به موارد زیر باشد:

۱) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست؛ یعنی $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. برای مثال:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ولی به وضوح ماتریس‌های B و C با هم برابر نیستند.

۲) اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شود، لزوماً یکی از آن‌ها ماتریس صفر نیست. برای مثال دو ماتریس زیر، دو ماتریس غیرصفر هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها صفر می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۳) از تساوی‌های $AC = CA = A$ نمی‌توان نتیجه گرفت $C = I$. برای مثال:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

۴) ماتریسی همانی I در ضرب ماتریس‌ها نقشی مشابه عدد ۱ را در ضرب اعداد دارد، یعنی:

$$AB + A = A(B+I) \ , \ AB + B = (A+I)B$$

نکته ۵: ماتریس مربعی A و ماتریس $B = mA + nI$ تعویض‌پذیر هستند، یعنی $AB = BA$.

نکته ۶: اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، هر توانی از آن‌ها نیز تعویض‌پذیر هستند، به عبارت ساده‌تر:

$$AB = BA \Rightarrow A^m B^n = B^n A^m$$

نکته ۷: در صورتی که دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند، تمام اتحادهای جبری برای این دو ماتریس هم برقرار است. برای مثال:

۱) $(AB)^n = A^n B^n$

۲) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$

۳) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

۴) $(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B^1 + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + \binom{n}{n}B^n$

نکته ۸: حاصل‌ضرب دو ماتریس بالامثلثی، یک ماتریس بالامثلثی است که درایه‌های قطر اصلی ماتریس حاصل‌ضرب، برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی آن دو ماتریس است:

$$\begin{bmatrix} a & & \\ 0 & b & \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & & \\ 0 & e & \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & & \\ 0 & be & \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که راجع به درایه‌های بالای قطر اصلی در ماتریس حاصل‌ضرب اطلاعاتی نداریم.

به طور مشابه، این نکته در مورد حاصل‌ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی نیز برقرار است. بنابراین اگر D یک ماتریس قطری باشد، D^n نیز یک ماتریس قطری است که هر درایهٔ روی قطر اصلی آن برابر توان nام درایه‌های متناظر آن در ماتریس D است:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

مثال ۶: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ ، x را طوری بیابید که درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم ماتریس A^2 برابربا ۳ باشد.

پاسخ: دقت کنید که نیازی به انجام عملیات ضرب ماتریس‌ها (به طور کامل) نیست. درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم ماتریس A^2، از ضرب سطر دوم ماتریس A در ستون دوم ماتریس A به دست می‌آید:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & x+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x+1=3} x = 2$$

مثال ۷: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ ، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا $A^2 = \bar{O}$ ؟

پاسخ: ماتریس A^2 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & ab-ba \\ -ba+ab & -b^2+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & -b^2+a^2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم برای این‌که یک ماتریس برابر با ماتریس صفر شود، باید تمام درایه‌های این ماتریس برابر صفر شود. داریم:

$$a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = \pm b$$

مثال ۸: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^8 را بیابید.

پاسخ: سعی می‌کنیم با محاسبهٔ A^2 و A^3 به الگویی مناسب برای توان‌های بالاتر برسیم:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

الان الگوی توان‌های بالاتر را می‌توان حدس زد:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\ A^3 = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{الگو}} A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & -(3)^{n-1} & 3^{n-1} \\ -(3)^{n-1} & 3^{n-1} & -(3)^{n-1} \\ 3^{n-1} & -(3)^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

بنابراین A^8 برابر است با:

$$A^8 = \begin{bmatrix} 3^7 & -(3)^7 & 3^7 \\ -(3)^7 & 3^7 & -(3)^7 \\ 3^7 & -(3)^7 & 3^7 \end{bmatrix}$$

مثال ۹: اگر $A=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که به ازای آن $A^n=\bar{O}$.

پاسخ: ابتدا A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=A^2A=\begin{bmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین به ازای $n=3$، $A^n=\bar{O}$ برقرار خواهد بود.

مثال ۱۰: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ، حاصل A^6 را بیابید.

پاسخ: ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

حال A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که:

$$A^n=\begin{bmatrix}1&2n&2n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

پس A^6 برابر است با:

$$A^6=\begin{bmatrix}1&12&12\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

مثال ۱۱: اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}$ ، حاصل A^n+A^{n-1} را بیابید.

پاسخ: ابتدا A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-8\end{bmatrix}$$

پس:

$$A^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&(-2)^n\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$A^n+A^{n+1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&(-2)^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&(-2)^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&-(-2)^n\end{bmatrix}$$

دقت کنید که:

$$(-2)^n+(-2)^{n+1}=(-2)^n(1+(-2))=-(-2)^n$$

مثال ۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$ حاصل A^{100} را بیابید.

پاسخ: ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

حال A^{100} را به دست می‌آوریم:

$$A^{100}=(A^2)^{50}=I^{50}=I$$

مثال ۱۳: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ، حاصل A^{100} را بیابید.

پاسخ: ابتدا A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم تا الگویی برای A^n پیدا کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین طبق الگویی که مشاهده می‌کنید، داریم:

$$A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 100\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال ۱۴: اگر داشته باشیم $A^2=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ ، $B^2=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ، حاصل $AB+BA$ را بیابید.

پاسخ: مطابق صورت سؤال $A+B$ را داریم. اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت:

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^2=\underbrace{A^2}_{\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}}+AB+BA+\underbrace{B^2}_{\begin{bmatrix}6 & 3\\ 7 & 8\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 3\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 10 & 12\end{bmatrix}$$

مثال ۱۵: اگر $A^2=A$ و $B=2A+3I$ ، حاصل B^2 را برحسب B و I بیابید.

پاسخ: داریم:

$$B=2A+3I\xrightarrow{\text{توان ۲}}B^2=(2A+3I)^2=4\underbrace{A^2}_{A}+9I+12A=16A+9I\Rightarrow B^2=16A+9I$$

$$\xrightarrow{B=2A+3I\Rightarrow A=\frac{1}{2}(B-3I)}B^2=16(\frac{1}{2}(B-3I))+9I\Rightarrow B^2=8B-15I$$

مثال ۱۶: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$ و $2A^2-mA+nI=\bar{O}$ ، مقادیر m و n را بیابید.

پاسخ: ابتدا A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{bmatrix}$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$\underbrace{2\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{bmatrix}-m\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}}_{B}=\bar{O}\Rightarrow\begin{cases}b_{21}=-18-3m=0\Rightarrow m=-6\\ b_{11}=-10-m+n=0\xrightarrow{m=-6}n=4\end{cases}$$

مثال ۱۷: اگر $AB=2BA$ و $AB^2=kB^2A$ ، مقدار k را بیابید.

پاسخ: طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$AB=2BA\Rightarrow(AB)B=(2BA)B\Rightarrow AB^2=2B\underbrace{AB}_{2BA}\Rightarrow AB^2=4B^2A\xrightarrow{AB^2=kB^2A}k=4$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

آشنایی با ماتریس‌ها

۱. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A=[a_{ij}]_{4\times4}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} i+j & j>i \\ i\times j & i=j \\ -2i & j<i \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۱- ۳) ۴ ۴) ۴-

۲. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، اگر $a_{ij}=\begin{cases} 2i+3j & i>j \\ 1 & i=j \\ j^2 & i<j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی چقدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۸ ۳) ۳ ۴) ۲۶

۳. اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های $6A-5B$ کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۴۵ ۳) ۳۶ ۴) ۵۵

۴. اگر $A=[3i-2j]_{3\times4}$ ، $B=[4i-j]_{3\times4}$ و $2A-4B=[c_{ij}]$، آنگاه c_{ij} کدام است؟

۱) $i-10j$ ۲) $-10i$ ۳) $5i$ ۴) $10i+j$

۵. دو ماتریس $M=[3i-3j]_{3\times2}$ و $N=[i+2j]_{3\times2}$ را داریم اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $a=M_{12}$ ، $b=N_{21}$ و $c=(M+N)_{32}$ آن‌گاه حاصل $x_1^2+x_2^2$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند)

۱) $\frac{44}{9}$ ۲) ۱۲ ۳) $-\frac{44}{99}$ ۴) $\frac{76}{9}$

اعمال روی ماتریس‌ها

۶. اگر $A=\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه درایه واقع در سطر دوم، ستون دوم A^2 کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۲۰- ۳) ۵۳ ۴) ۳۷

۷. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 4 & x & 0 \\ 4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر عنصر واقع در سطر اول و ستون دوم ماتریس AB برابر ۲۰- باشد، آنگاه x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۵ ۴) ۵-

۸. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & ; \; i=j \\ 2 & ; \; i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۹. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $AB-BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۴ & -۴ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۴ & -۴ \\ -۱۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ -۱۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۱۱. اگر $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه $AB^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱۶ & ۱۲ \\ ۱۸ & ۷ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵۴ & ۱۲ \\ ۳۴ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۵۴ & ۷ \\ ۱۸ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۶ & ۷ \\ ۳۴ & ۷ \end{bmatrix}$

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]$ ماتریسی ۳×۳ با این ویژگی باشد که $b_{ij}=\begin{cases} ۱: & i\le j \\ ۰: & i>j \end{cases}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A-B)^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند، اگر $(A-B)^۲+A=C-B$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۱۰

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۴$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۱۵. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض است. حاصل جمع درایه‌ها در ماتریس $A^۴$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۷ ۳) ۲۴۳ ۴) ۹

۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، کدام گزینه ماتریس $A^۴$ را دقیق‌تر توصیف می‌کند؟ (خارج ۹۲)

۱) فقط بالامثلثی ۲) همانی ۳) قطری غیرهمانی ۴) فقط پایین مثلثی

۱۷. هرگاه $A=\begin{bmatrix} ۰ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^{۱۹}$ برابر کدام است؟

۱) $۵۱۲I$ ۲) $۵۱۲A$ ۳) $\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^{۵۸}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، $۳A^{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۷۵ & ۷۲ \\ ۷۲ & -۶۹ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۷۵ & -۷۲ \\ ۷۲ & -۶۹ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۷۵ & ۷۲ \\ -۷۲ & -۶۹ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۷۵ & ۷۲ \\ ۷۲ & ۶۹ \end{bmatrix}$

۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۸ ۳) ۵۴ ۴) ۴۸

۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۶}$ کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۱ ۳) $(۲\times ۳^{۶})+۱$ ۴) $(۲\times ۳^{۵})+۱$

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۶۱}$ برابر کدام است؟

۱) $۲^{۱۶۲}$ ۲) ۳×۲^{۸۱} ۳) $۲^{۸۰}$ ۴) $-۲^{۸۲}$

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۶}$ کدام است؟

۱) $۳^{۵}$ ۲) $۳^{۶}$ ۳) $۳^{۷}$ ۴) $۳^{۸}$

۲۴. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $A^{۱۰۰}$ مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$، در ماتریس $A^{۱۶}$ مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴ ۴) ۱۹

۲۶. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^{۱۱}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۹}$

۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۷}-A^{۶}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۲ & -۳\end{bmatrix}$

۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^{۲}+A^{۳}+A^{۴}+A^{۵}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) ۲

۲۹. اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $A^{۲}=\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$، آنگاه مقدار ab کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۱

۳۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^{۱۳۹۵}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آنگاه $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۳۹۵ ۲) ۱۳۹۶ ۳) ۱۳۹۷ ۴) ۱۳۹۸

۳۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B=A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۷}+A^{۱۳۹۷}-A^{۱۳۹۶}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۳۲. ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۲}-A^{۲۰}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۴۹ ۳) $۳^{۲۶}$ ۴) ۸×۳^{۲۰}

۳۳. اگر داشته باشیم $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A+A^{۲}+...+A^{۹۹۹}+A^{۱۰۰۰}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱۰۰۰ \\ ۰ & -۱۰۰۰ & ۰ \\ -۱۰۰۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱۰۰۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۰۰۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۵۰۰ & ۰ & -۵۰۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۵۰۰ & ۰ & ۵۰۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۵۰۰ & ۰ & ۵۰۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵۰۰ & ۰ & ۵۰۰ \end{bmatrix}$

۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه کدام یک از عبارت زیر صحیح است؟

۱) $A^{۲k}=(۳^{۲k})A$
۲) $A^{۲k}=A$
۳) $A^{۲k+۱}=A$
۴) $A^{۲k+۱}=(۳^{۲k+۱})A$

۳۵. اگر $B=\begin{bmatrix} ۰ & \tan x \\ \cot x & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $B^{n+۱}+B^{n}$ کدام است؟

۱) به n بستگی دارد.
۲) $\begin{bmatrix} ۰ & \tan x \\ \cot x & ۰ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & \tan x \\ \cot x & ۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} \tan x & ۱ \\ ۱ & \cot x \end{bmatrix}$

۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم و سوم ماتریس A^{n} کدام است؟

۱) $n+۱$
۲) $n+۲$
۳) $۲n$
۴) $۲n+۱$

۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix} \tan x & -۱ \\ \frac{۱}{\cos^{۲} x} & -\tan x \end{bmatrix}$، در صورتی‌که $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه حاصل $۵A^{۸}+۶A^{۶۰}+۳A^{۱۸}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $۱۴I$
۲) $۸I$
۳) $-۸I$
۴) $-۱۴I$

۳۸. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده است. به ازای کدام مقدار n مجموع درایه‌های ماتریس $A^{n}+A^{n+۲}$ برابر ۱۲۸۲ می‌شود؟

۱) ۱۰
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۸

۳۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱۷ \\ ۱۹ & ۱ \end{bmatrix}$ و $BA^{n}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳۲ \\ ۱۹ & ۹۶ \end{bmatrix}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۱

۴۰. اگر همهٔ درایه‌های ماتریس $A_{۲\times۲}$ برابر با x باشد و $A^{n}=۱۲^{n-۱}A$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۸۸
۳) ۱۴۴
۴) ۶

۴۱. اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۵} \\ \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{n} کدام است؟

۱) $۲^{n-۱}\times(\frac{۳}{۵})^{n}$
۲) $۲^{n}\times(\frac{۳}{۵})^{n}$
۳) $۲\times(\frac{۳}{۵})^{n}$
۴) $۲\times(\frac{۶}{۵})^{n}$

۴۲. حاصل $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^{۲۰}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^{۲۲}$ کدام است؟

۱) $-I$
۲) I
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴۳. چند ماتریس مانند $A_{2\times2}$ وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\8&4\end{bmatrix}$ باشد؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) بی‌شمار   ۴) ۲

۴۴. اگر $\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix}A=A\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix}$ باشد و درایه‌های ماتریس A اعداد صحیح و مثبت باشند، کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}c&d\\b&a\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-d&-c\\-b&-a\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}$

۴۶. اگر ماتریس‌های $\begin{bmatrix}-2&-2\\a&b\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-x&1\\-3&y\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۶   ۳) ۲-   ۴) ۵

۴۷. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times4}$ ، $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ و $C=[c_{ij}]_{4\times4}$ باشند، کدام ماتریس قابل تعریف است؟

۱) ACB   ۲) CBA   ۳) BAC   ۴) CAB

۴۸. اگر بدانیم دو ماتریس AB و $A+C$ تعریف شده‌اند، چه تعداد از ماتریس‌های زیر لزوماً تعریف شده هستند؟

الف) BC ب) CB ج) AC د) $(A+C)B$ ه) $B+C$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۴۹. اگر A ، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $AB=\bar{O}\Rightarrow BA=\bar{O}$ ۲) $AB=\bar{O}\Rightarrow A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$

۳) $(AB)C=A(BC)$ ۴) $AB=AC\Rightarrow B=C$

۵۰. مجموع جواب‌های قابل قبول برای x از معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&3\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۵   ۴) ۱

۵۱. مجموع جواب‌های قابل قبول برای x از معادلهٔ $\begin{bmatrix}x&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\3&-1&1\\1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) صفر   ۴) $-\frac{9}{2}$

۵۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&2&1\\1&-x&-1\\-1&2&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-x\\3\end{bmatrix}=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵۳. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^2(A-I)$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۸   ۴) صفر

۵۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-2&4&7\\-3&2&1\\13&1&2\end{bmatrix}$ ، درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم $(A+3I)(A-2I)$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۱-   ۳) ۱۱-   ۴) ۳

۵۵. اگر $(A-I)^۲=\bar{O}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $A^۳$ برابر کدام است؟

۱) $۴A-۳I$
۲) I
۳) $۳A-۲I$
۴) $-I$

۵۶. در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۳(A+I)$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۱۶
۳) ۹۴
۴) ۴۸

۵۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^۴+AB^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۳۸ & ۴\\ ۱۰ & ۳۶\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۳۸ & ۱۱\\ ۱۰ & ۱۲\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}۳۶ & ۴\\ ۳ & ۱۲\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۳۶ & ۱۱\\ ۳ & ۱۲\end{bmatrix}$

۵۸. اگر $A=\begin{bmatrix}b+۱ & ۳\\ ۲d & ۲a-b\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲a+۱ & c+۱\\ ۴+d & -b\end{bmatrix}$ و $A+۲B=I$، آن‌گاه حاصل $۷a+۱۴b+۲c+d$ کدام است؟

۱) $-۲/۵$
۲) -۱۶
۳) $-۱۷/۵$
۴) $-۴/۵$

۵۹. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I_۲$، دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) (۲,۱۱)
۲) (۲,۱۳)
۳) (۴,۱۱)
۴) (۴,۱۳)

۶۰. اگر A ماتریسی مربعی و $(A+I)^۲-A=\bar{O}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{۱۹۸}$ کدام است؟

۱) $A^۴$
۲) $A^۲$
۳) I
۴) O

۶۱. اگر $AB+kBA=\bar{O}$ و $AB^۲=tB^۲A$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ $(k,t\in\mathbb{Z})$

۱) $t=k^۲$
۲) $t=k$
۳) $tk=-۱$
۴) $tk=۱$

۶۲. اگر A و B ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB^۲-I=\bar{O}$، ماتریس $(A^۲B^۳)^۳\times B^۳$ کدام است؟

۱) A
۲) AB
۳) B
۴) I

۶۳. اگر $A^۳=\begin{bmatrix}\sin x & ۱\\ ۱ & \cos x\end{bmatrix}$ و $A+B=\bar{O}$، آن‌گاه حاصل $A\times(A+۲B)\times(۲A+B)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\sin x & ۱\\ ۱ & \cos x\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}-\sin x & ۱\\ ۱ & -\cos x\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-\sin x & -۱\\ -۱ & -\cos x\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$

۶۴. اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند و $AB=\begin{bmatrix}۸ & ۲\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۵ & ۱\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۲
۳) ۱۴
۴) ۱۳

۶۵. برای ماتریس مربعی A داریم: $A^۳=۳A+I$، ماتریس $A^۷$ برابر کدام است؟

۱) $۶A^۲+۲۸A+۹I$
۲) $۶A^۲+۱۸A+۹I$
۳) $A^۲+۶A+۹I$
۴) $۹A^۲+۶A+I$