۹۶- دایره‌ای از نقاط $A(-2,4)$ و $B(4,6)$ می‌گذرد و معادلهٔ یکی از قطرهای آن $x+y=4$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۹۷- شعاع دایره‌ای که مرکز آن $O(1,-3)$ و بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y=2$ مماس‌خارج باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۹۸- شعاع دایره‌ای که از نقطهٔ $A(1,2)$ می‌گذرد و بر دو محور مختصات مماس باشد، کدام است؟

۱) ۲ یا ۳ ۲) ۱ یا ۵ ۳) ۱ یا ۳ ۴) ۲ یا ۵

۹۹- دو نقطهٔ $A(-1,0)$ و $B(2,0)$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای مانند M که $MA=2MB$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2=4$ ۲) $y=0$ ۳) $x^2+y^2-6x+5=0$ ۴) $x+y=4$

۱۰۰- معادلهٔ تمام قطرهای دایره‌ای به صورت $(m-2)x+(m+3)y=3m+4$ هستند. شیب خط مماس بر این دایره در نقطهٔ $A(3,1)$ واقع بر دایره کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰

• موضوع: دایره (آزمون دوم) • نوع آزمون: مبحثی

• صفحهٔ کتاب درسی: ۴۰ تا ۴۶ • ۱۰ تست در ۱۸ دقیقه

۱۰۱- معادلهٔ دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس بوده و مرکز آن روی خط $2y-3x=5$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2+10x+10y=25$ ۲) $x^2+y^2+10x+10y+25=0$

۳) $x^2+y^2+10x+10y=5$ ۴) $x^2+y^2+10x+10y+5=0$

۱۰۲- اگر خط‌المرکزین دو دایرهٔ $x^2+y^2-2y=0$ و $x^2+y^2+ax+2y=1$ منطبق بر خط $y=x+b$ باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{5}$

۱۰۳- اگر طول مماسی که از نقطهٔ $A(3,2)$ بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-2x=a$ رسم می‌شود، برابر $\sqrt{6}$ باشد، a کدام است؟

۱) -1 ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) -5

۱۰۴- اگر دو دایرهٔ $x^2+y^2-6x+8y=0$ و $(x+3)^2+(y-4)^2=m^2$ مماس‌داخل باشند، m کدام است؟

۱) ± 5 ۲) ± 10 ۳) ± 15 ۴) گزینه‌های (۱) و (۳)

۱۰۵- اگر خط $y=x$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+2y+m=0$ مماس باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $m=0$ ۲) $m=1$ ۳) $m=-2$ ۴) $m=-1$

۱۰۶- معادلهٔ قطری از دایرهٔ $x^2+y^2-4x+8y-3=0$ که بر خط $3x+2y+1=0$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $2y=3x-14$ ۲) $2y=3x-16$ ۳) $3y=2x-14$ ۴) $3y=2x-16$

۱۰۷- به ازای کدام مقدار m، خط $3x+my+(3m-1)=0$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ مماس است؟

۱) $\frac{11}{20}$ ۲) $\frac{20}{11}$ ۳) $\frac{11}{10}$ ۴) $\frac{10}{11}$

۱۰۸- دایرهٔ $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ روی خط $3x+4y+19=0$ وتری جدا می‌کند. طول این وتر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۰۹- دایرهٔ $x^2+y^2-2x=3$ مفروض است. معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر این دایره رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $x+y=5$ ۲) $x^2+y^2-2y=3$ ۳) $x^2+y^2-2x=7$ ۴) $2x+y=3$

۱۱۰- دو دایرهٔ $x^2+y^2-2ax+by+5a=0$ و $x^2+y^2-18x+by+81=0$ دارای دو مماس‌مشترک خارجی موازی با هم و یک مماس‌مشترک داخلی عمود بر خط‌المرکزین دو دایره هستند. $a+b$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) ۱ ۴) -13

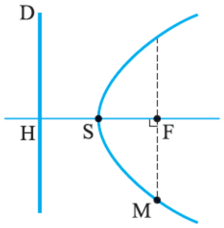
۱۲۳- نقطهٔ $M(-۳,۴)$ بر یک سهمی به کانون $F(۲,-۱)$ قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ M تا خط هادی سهمی کدام است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۱۰

۱۲۴- معادلهٔ سهمی که $F(۳,-\frac{۵}{۲})$ کانون و خط $y=\frac{۷}{۲}$ خط هادی آن باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۶x+۱۲y+۳=۰$ ۲) $x^۲-۶x-۱۲y+۱۵=۰$ ۳) $x^۲-۶x+۱۲y+۱۵=۰$ ۴) $x^۲-۶x-۱۲y+۳=۰$

۱۲۵- شکل مقابل، یک سهمی است که خط D هادی، S رأس، F کانون و M یک نقطهٔ آن است به طوری که $MF \perp SF$. اگر H نقطهٔ برخورد امتداد SF با خط D باشد، حاصل $\frac{MH}{MF}$ کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۲۶- سهمی با کانون $F(۳,-۴)$ و خط هادی $y=۱۲$، محور xها را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۲۷- در یک سهمی، نقطه‌های $F(۱,۲)$ و $S(-۱,۲)$ به ترتیب، کانون و رأس آن هستند. اگر از F عمودی بر SF رسم کنیم تا سهمی را در M و N قطع کند، طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۲۸- اگر دایره‌ای به شعاع واحد که مرکز آن، منطبق بر رأس سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y=۴x-۵$ است رسم شود، آن‌گاه ....

۱) این دایره خط هادی را در دو نقطه قطع می‌کند و مرکزش روی خط هادی است.

۲) این دایره خط هادی را قطع نمی‌کند.

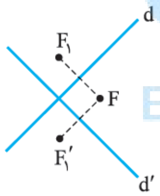
۳) این دایره خط هادی را در دو نقطه قطع می‌کند و مرکزش روی خط هادی نیست.

۴) این دایره بر خط هادی مماس است.

۱۲۹- سهمی $x^۲=۴y$ را در نظر بگیرید. پرتوی در امتداد خط $x=۲$ بر این سهمی می‌تابد، معادلهٔ پرتو بازتابش از روی سهمی، کدام است؟

۱) $۱۵x-۲y+۲=۰$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=۱$ ۴) $۱۵x+۲y-۲=۰$

۱۳۰- در شکل مقابل، نقطهٔ F کانون سهمی و دو خط d و d' بر سهمی مماس‌اند. اگر بازتاب‌های F نسبت به d و d' را $F_۱$ و $F'_۱$ و خطی که از $F_۱F'_۱$ می‌گذرد را L بنامیم، کدام درست است؟



۱) L خطی است که در رأس سهمی بر آن مماس است. ۲) L هادی سهمی است.

۳) L فقط موازی هادی است ولی بر آن منطبق نیست. ۴) $F_۱$ و $F'_۱$ روی سهمی هستند.

۱۳

- موضوع: جامع فصل
- صفحهٔ کتاب درسی: ۳۴ تا ۵۹
- نوع آزمون: استاندارد
- ۱۵ تست در ۲۴ دقیقه

۱۳۱- مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر محور yها به فاصلهٔ ۲ باشند، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲x-۳=۰$ ۳) $x^۲+y^۲+۲y-۳=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$

۱۳۲- نمودار معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲y+۱=۰$ کدام شکل است؟

۱) یک نقطه ۲) یک دایره ۳) تهی ۴) سهمی

۱۳۳- معادلهٔ $(k-۱)x^۲+y^۲+kx-۲y=۲$ یک دایره است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۳۴- اندازهٔ مماسی که از نقطهٔ $A(۲,۳)$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲y=۸$ رسم می‌شود، چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۱۱}$

۱۳۵- معادلهٔ خطی که در نقطهٔ $A(۴,۳)$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y=۳۵$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $y-۳x+۹=۰$ ۲) $۳y+x-۱۳=۰$ ۳) $y+۳x-۱۵=۰$ ۴) $۳y-x-۵=۰$

۱۳۶- اگر خط $3x-2y+m+1=0$ دایرهٔ $x^2+y^2-(m-2)x+(4-m)y+11=n$ را در نقطهٔ $(1,-2)$ قطع کند، شعاع دایره کدام است؟

۱) $13\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{13}$

۱۳۷- اگر دایرهٔ $x^2+y^2+2x=k$ بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مماس باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۳) -2

۱۳۸- طول شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر دو دایرهٔ $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ و $x^2+y^2-8x+2y+13=0$ مماس باشد، کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۹- در یک بیضی، طول قطر بزرگ، سه برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ $\frac{c}{a}$ در این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

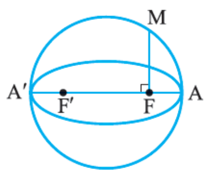
۱۴۰- نسبت دو قطر یک بیضی $\frac{\sqrt{13}}{3}$ می‌باشد. کدام رابطه درست است؟

۱) $2c=3b$ ۲) $3a=2c$ ۳) $2b=3c$ ۴) $2a=3c$

۱۴۱- در یک بیضی، نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ، B و B' دو سر قطر کوچک و F و F' کانون‌های آن و F کانون نزدیک‌تر به رأس A است. اگر $FB=10$ و $AB=2\sqrt{34}$ باشد، مساحت مثلث ABF کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۲- در شکل مقابل، دایره‌ای به قطر AA' رسم شده است و AA' قطر بزرگ بیضی با کانون‌های F و F' است. اگر M نقطه‌ای از دایره باشد به طوری که $MF \perp AA'$، آن‌گاه طول MF کدام است؟



۱) $\frac{3a}{2}$ ۲) $\frac{ac}{b}$ ۳) b ۴) $\frac{ab}{c}$

۱۴۳- در سهمی $y^2-4y+8x+2=0$ فاصلهٔ کانون تا خط هادی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۴۴- به ازای چه مقدار k، کانون سهمی $y^2-2y+4x+k=0$ روی خط $x-3y+2=0$ قرار دارد؟

۱) -7 ۲) 4 ۳) 3 ۴) 2

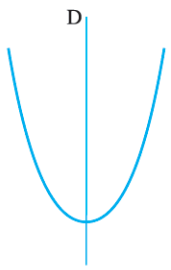
۱۴۵- پرتوی موازی با محور xها به دیوارهٔ سهمی $y^2-8x-6y+33=0$ می‌تابد. بازتاب این پرتو از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

۱) $(5,5)$ ۲) $(3,3)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(5,3)$

۱۴

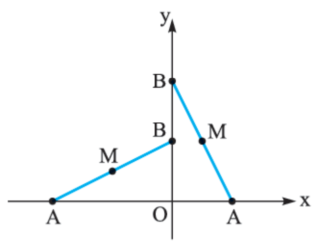
- موضوع: جامع فصل
- صفحهٔ کتاب درسی: ۳۴ تا ۵۹
- نوع آزمون: به سوی ۱۰۰
- ۱۵ تست در ۲۶ دقیقه

۱۴۶- سهمی شکل مقابل را حول خط D، محور تقارن آن، دوران می‌دهیم؛ صفحه‌ای عمود بر D تمام سهمی‌های دوران‌یافته را قطع می‌کند. مقطع حاصل کدام شکل است؟



۱) بیضی
۲) مستطیل
۳) دایره
۴) مربع

۱۴۷- پاره‌خط ثابت AB به طول ۱۰ طوری جابه‌جا می شود که نقطهٔ A همواره روی محور xها و نقطهٔ B همواره روی محور yها باشد. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، مکان هندسی نقطهٔ M کدام است؟



۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵
۲) بیضی به مرکز O که طول قطر بزرگ آن ۱۰ است.
۳) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۱۰
۴) بیضی به مرکز O که طول قطر کوچک آن ۱۰ است.

۱۴۸- مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $A(2,3)$ دو برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $B(-1,3)$ باشد، کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ ۲) دایره‌ای به مرکز $O(-2,3)$ و شعاع ۱

۳) دایره‌ای به مرکز $O(-2,3)$ و شعاع ۲ ۴) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲

۱۴۹- خط $y = 2x - 5$، دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 1$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۵۰- اندازهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ $x^2 + y^2 - x = 0$ و $x^2 + y^2 = 2y$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۱۵۱- معادلهٔ دایره‌ای که بر خط $3x + 2y - 6 = 0$ مماس بوده و با دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$ هم مرکز باشد، کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 3$ ۲) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 8 = 0$

۳) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 13 = 0$ ۴) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 8$

۱۵۲- اگر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3m - 4 = 0$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض -3 قطع کند، طول قطر آن کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) $8\sqrt{2}$

۱۵۳- دو سر نخی به طول L را در دو نقطهٔ ثابت نصب کرده‌ایم و مدادی به این نخ متکی کرده‌ایم تا نخ به حالت کشیده درآید، با حرکت مداد، یک بیضی حاصل می‌شود. اگر مختصات دو سر نخ $A(1,2)$ و $B(1,-4)$ و نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی به نقطهٔ A، $M(1,4)$ باشد، طول نخ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۸

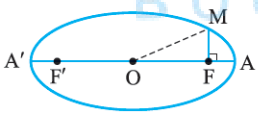
۱۵۴- اگر در یک بیضی فاصلهٔ یک کانون از دورترین نقطهٔ واقع بر بیضی، ۴ برابر فاصلهٔ آن تا نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی باشد، آن‌گاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۵۵- طول قطرهای بزرگ و کوچک یک بیضی به ترتیب، ۱۲ و ۶ و کانون‌های آن F و F′ هستند. اگر M، نقطه‌ای روی بیضی باشد، طوری که $MF \perp MF'$ و بدانیم $MF < MF'$. آن‌گاه طول MF کدام است؟

۱) $6 + 3\sqrt{2}$ ۲) $6 - 3\sqrt{2}$ ۳) $6 + 3\sqrt{3}$ ۴) $6 - 3\sqrt{3}$

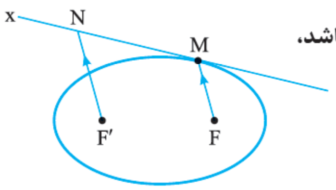
۱۵۶- در بیضی شکل مقابل، $a = 5$، $FF' = 8$، $MF \perp AA'$ و O مرکز بیضی است. فاصلهٔ M از O کدام است؟



۱) ۴ ۲) $\frac{29}{6}$

۳) $\frac{\sqrt{473}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{481}}{5}$

۱۵۷- در بیضی شکل مقابل، $a = 5$، $b = 3$، $MF = 4$ و Mx بر بیضی مماس است. اگر $F'N \parallel MF$ باشد، طول NF′ کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۸- در سهمی به معادلهٔ $k(x^2 - 4x + 5) = (k+1)y$، فاصلهٔ رأس تا خط هادی، برابر ۲ و دهانهٔ سهمی به طرف بالا است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) -3

۱۵۹- معادلهٔ سهمی که خط هادی آن $x = 0$، محور تقارن آن $y = 3$ و از نقطهٔ $A(2,5)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y^2 - 10y - 8x + 41 = 0$ ۲) $y^2 - 6y + 4x - 3 = 0$

۳) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$ ۴) $y^2 - 6y - 4x + 13 = 0$

۱۶۰- نقاط متمایز A و B غیر واقع بر خط Δ و در یک طرف آن هستند. چند سهمی می‌توان مشخص نمود که Δ خط هادی آن باشد و از نقاط A و B بگذرد؟

۱) حداکثر یکی ۲) حداکثر دوتا ۳) دقیقاً یکی ۴) بی‌شمار

۲۶۹- اگر $A^۲=\begin{bmatrix}۷&۴\\۶&۷\end{bmatrix}$، $B^۲=\begin{bmatrix}-۱&-۴\\۸&۷\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۷&۵\\۱۶&-۷\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۳&۶\\۵&۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳&۶\\۱۶&۷\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۷&۶\\۱۶&۷\end{bmatrix}$

۲۷۰- اگر دستگاه $\begin{cases}۲x+ky=۱\\kx+۸y=-۲\end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مقدار k کدام است؟

۱) فقط -۴ ۲) فقط ۴ ۳) ±۴ ۴) هیچ مقدار k

۲۵

- موضوع: جامع (آزمون سوم)
- صفحه کتاب درسی: ۱۰ تا ۸۴
- ۱۰ تست در ۲۵ دقیقه

۲۷۱- اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۴۵° باشد، زاویهٔ بین بردارهای $\frac{|\vec{b}|\vec{a}}{۳}$ و $\frac{-۵\vec{b}}{|\vec{a}|}$ کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۹۰° ۳) ۴۵° ۴) ۱۸۰°

۲۷۲- اگر $\vec{a}=(۲,۳,-۱)$، $\vec{b}=(۱,k,۲)$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|$، آن‌گاه k کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳+\sqrt{۱۶۱}}{۸}$ ۴) $\frac{۳-\sqrt{۱۶۱}}{۸}$

۲۷۳- نقاط $A(۰,۱)$، $B(۰,۴)$ و $C(۳,k)$ سه رأس مثلث ABC هستند. با تغییر k، مکان هندسی نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC کدام است؟

۱) خطی موازی با محور xها ۲) خطی موازی با محور yها

۳) خطی موازی با نیمساز ربع اول و سوم ۴) خطی موازی با نیمساز ربع دوم و چهارم

۲۷۴- از نقطهٔ $A(۴,۰)$ دو مماس AT و AT′ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۴$ رسم شده‌اند. طول وتر TT′ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

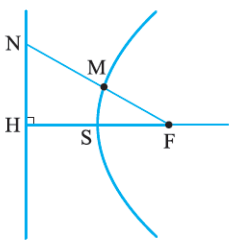
۲۷۵- اگر نقاط A و A′ دو سر قطر بزرگ و B و B′ دو سر قطر کوچک یک بیضی باشند که F و F′ کانون‌های آن بیضی هستند و داشته باشیم $\frac{FF'}{AA'}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$، آن‌گاه حاصل $\frac{BB'}{AA'}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}$

۲۷۶- در یک بیضی، طول‌های قطر بزرگ و کوچک ۱۰ و ۶ هستند. چند نقطه روی بیضی یافت می‌شود که از مرکز بیضی به فاصلهٔ ۴ باشد؟

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک

۲۷۷- در شکل مقابل، اگر نقطهٔ F کانون سهمی، M نقطه‌ای از آن، NH روی خط هادی آن، $MF=۴$ و فاصلهٔ M از محور تقارن سهمی $۲/۴$ باشد، حاصل $\frac{FN}{FS}$ کدام است؟



۱) $۲/۴$ ۲) $۲/۵$ ۳) $۲/۶$ ۴) $۲/۷$

۲۷۸- اگر نقطهٔ S، رأس سهمی $y=۴x^۲$ باشد و نقطهٔ M روی این سهمی حرکت کند، چنان‌چه نقطهٔ A وسط پاره‌خط SM باشد، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ A کدام است؟

۱) $y=۸x^۲$ ۲) $y=\frac{x^۲}{۴}$ ۳) $y=۲x^۲$ ۴) $y=\frac{x^۲}{۲}$

۲۷۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^۵\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=A^۴\begin{bmatrix}۴&۵\\۱&۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) -۵

۲۸۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}0 & : i=j\\ 1 & : i<j\\ 2 & : i>j\end{cases}$ و $b_{ij}=i-j$ باشند، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون دوم ماتریس AB چند برابر درایهٔ نظیر در ماتریس BA است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵- ۴) ۲-

۲۶

• موضوع: جامع (آزمون چهارم)
• صفحهٔ کتاب درسی: ۱۰ تا ۸۴
• ۱۰ تست در ۲۵ دقیقه

۲۸۱- نقاط $A(1,1,-2)$ و $B(-3,2,-1)$ مفروض‌اند. اگر $2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{BM}$ باشد، مختصات نقطهٔ M کدام است؟

۱) $(-7,8,-7)$ ۲) $(7,-8,7)$ ۳) $(-\frac{7}{5},\frac{8}{5},-\frac{7}{5})$ ۴) $(\frac{7}{5},-\frac{8}{5},\frac{7}{5})$

۲۸۲- اگر نقاط $A(-1,0,1)$، $B(2,-3,1)$ و $C(4,1,5)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، مختصات نقطهٔ D کدام است؟

۱) $(1,-3,2)$ ۲) $(6,-2,6)$ ۳) $(3,1,6)$ ۴) $(1,4,5)$

۲۸۳- اگر سه نقطهٔ $A(1,1,2)$، $B(0,-1,4)$ و $C(1,0,1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع CH کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۲۸۴- نقاط $A(0,1)$ و $B(0,4)$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ مفروض‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M واقع بر صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ طوری که $AM=2BM$ باشد، کدام است؟

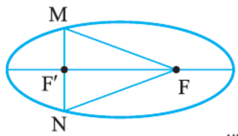
۱) خطی موازی AB ۲) دایره‌ای به شعاع ۲ ۳) خطی عمود بر AB ۴) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۸۵- اگر خط $3x-4y=5$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-4x+4y+m-1=0$ مماس باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{94}{25}$ ۲) $-\frac{94}{25}$ ۳) $\frac{144}{25}$ ۴) $\frac{12}{5}$

۲۸۶- در یک بیضی، قطر کوچک از کانون F با زاویهٔ 30° رؤیت می‌شود. اگر قطر بزرگ این بیضی ۲۴ واحد باشد، فاصلهٔ مرکز بیضی تا BF چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱



۲۸۷- اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک آن ۸ باشد، چنان‌چه MN وتری از بیضی باشد که از F′ گذشته و بر محور کانونی عمود باشد، مساحت مثلث MNF کدام است؟

۱) ۱/۹۲ ۲) ۱۹۲ ۳) ۱۹/۲ ۴) ۳/۸۴

۲۸۸- در سهمی به معادلهٔ $y^2+2y-6x=0$ خط گذرنده از کانون و موازی با خط هادی، سهمی را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۸۹- معادلهٔ خط هادی سهمی $y^2-6x=3(2y-4x)$ کدام است؟

۱) $x=\frac{3}{2}$ ۲) $y=\frac{3}{2}$ ۳) $x=0$ ۴) $x=3$

۲۹۰- اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر و ماتریس‌های B و C نیز تعویض‌پذیر باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) A و C تعویض‌پذیرند. ۲) B و AC تعویض‌پذیرند. ۳) B و A + C تعویض‌پذیرند. ۴) B و A − C تعویض‌پذیرند.

۲۷

• موضوع: جامع (آزمون پنجم)
• صفحهٔ کتاب درسی: ۱۰ تا ۸۴
• ۱۰ تست در ۲۵ دقیقه

۲۹۱- قرینهٔ نقطهٔ $A(-1,2,3)$ نسبت به نقطهٔ $B(0,1,-4)$ کدام است؟

۱) $(1,4,-5)$ ۲) $(1,0,-11)$ ۳) $(-2,3,10)$ ۴) $(-2,4,5)$

این دایره از نقطهٔ $A(1,2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه باید در معادلهٔ دایره صدق کند.

$$1^2+2^2-2R\times1-2R\times2+R^2=0 \Rightarrow R^2-6R+5=0$$

$\Rightarrow R=1$ یا ۵

۹۹- گزینهٔ ۳ اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان باشد، آن‌گاه:

$$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-0)^2}$$

$$\Rightarrow MA^2=x^2+y^2+2x+1 \quad (1)$$

$$MB=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$

$$\Rightarrow MB^2=x^2+y^2-4x+4 \quad (2)$$

می‌خواهیم $MA=2MB$ یا $MA^2=4MB^2$ (۳) باشد. از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$x^2+y^2+2x+1=4x^2+4y^2-16x+16$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2-18x+15=0 \Rightarrow x^2+y^2-6x+5=0$$

۱۰۰- گزینهٔ ۴ **روش ۱** تمام قطرهای دایره از مرکز آن می‌گذرند، پس کافی است دوتا از قطرها را با هم تلاقی دهیم تا مختصات مرکز دایره به دست آید و برای این منظور کافی است به m دو مقدار دلخواه نسبت دهیم تا معادله‌های دو قطر به دست آیند و مختصات نقطهٔ برخورد آن‌ها را پیدا کنیم؛ اما برای راحتی محاسبات، بهتر است مقدارهایی که به m نسبت می‌دهیم، یک بار ضریب x را صفر کند و بار دیگر ضریب y را:

$$m=2 \Rightarrow 0\times x+(2+3)y=3\times2+4 \Rightarrow y=2$$

$$m=-3 \Rightarrow (-3-2)x+(-3+3)y=3\times(-3)+4$$

$$\Rightarrow x=1$$

$\Rightarrow O(1,2)$ مرکز دایره

خط مماس بر دایره از نقطهٔ A بر شعاع OA عمود است، پس:

$$\text{شیب } OA=m_{OA}=\frac{2-1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

$\text{شیب مماس بر دایره در نقطهٔ } A=2$

روش ۲ شیب قطرها $-\frac{m-2}{m+3}$ هستند و چون A روی یکی از قطرها قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند و داریم:

$$(m-2)\times3+(m+3)\times1=3m+4$$

$$\Rightarrow 4m-3=3m+4 \Rightarrow m=7$$

$$\text{شیب قطر گذرنده از } A=-\frac{7-2}{7+3}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ شیب مماس بر دایره در نقطهٔ $A=2$

آزمون ۱۰

۱۰۱- گزینهٔ ۲ مرکز تمام دایره‌هایی که در ناحیهٔ اول و سوم بر محورهای مختصات مماس باشند، روی خط $y=x$ قرار دارند.

پس مختصات مرکز دایرهٔ مسئله از تلاقی خط $y=x$ با خط داده‌شده به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=x \\ 2y-3x=5 \end{cases} \Rightarrow 2x-3x=5 \Rightarrow x=-5$$

$$\Rightarrow O(-5,-5)$$

شعاع دایره نیز فاصلهٔ این نقطه تا هر یک از محورها می‌باشد، پس شعاع دایره $R=5$ است، در نتیجه داریم:

$$(x+5)^2+(y+5)^2=5^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+10x+10y+25=0$$

۱۰۲- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ اول $O_1(0,1)$ است و این نقطه باید روی خط $y=x+b$ باشد، پس $1=0+b$ یا $b=1$.

مرکز دایرهٔ دوم $O_2(-\frac{a}{2},-1)$ است و این نقطه نیز باید روی خط موردنظر باشد، پس $-1=-\frac{a}{2}+b$ یا $-1=-\frac{a}{2}+1$ در نتیجه $a=4$ بنابراین $O_2(-2,-1)$. اکنون داریم:

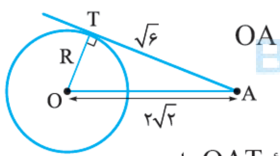
$$O_1O_2=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۱۰۳- گزینهٔ ۳ **روش ۱**

مرکز دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-a=0$، نقطهٔ $O(1,0)$ و شعاع آن $R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4\times(-a)}=\sqrt{1+a}$ است.

طول OA برابر است با:

$$OA=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$$



با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT داریم:

$$R^2=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2=8-6=2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+a})^2=2 \Rightarrow 1+a=2 \Rightarrow a=1$$

روش ۲ اگر نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ بیرون دایرهٔ به معادلهٔ $C(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$ باشد و از A مماسی بر این دایره رسم کنیم، طول مماس از رابطهٔ $\sqrt{C(x_1,y_1)}$ به دست می‌آید.

پس اگر $C(x,y)=x^2+y^2-2x-a$ باشد، آن‌گاه طول مماسی که از $A(3,2)$ بر دایره رسم می‌شود، برابر است با:

$$\text{طول مماس مرسوم از نقطهٔ } A=\sqrt{C(3,2)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3-a} \Rightarrow \sqrt{6}=\sqrt{7-a}$$

$$\Rightarrow a=1$$

۱۰۴- گزینهٔ ۳ شعاع‌ها، مرکزها و طول خط‌المرکزین دو دایره را حساب می‌کنیم. داریم:

$O(3,-4)$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{36+64}=5$

$O'(-3,4)$ و $R'=\pm m$

$$OO'=\sqrt{(3+3)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{36+64}=10$$

برای این‌که دو دایره، مماس‌داخل باشند باید داشته باشیم:

$$|R-R'|=OO' \Rightarrow$$

$$|5\mp m|=10 \Rightarrow \begin{cases}5\pm m=10 \Rightarrow m=\pm 5\\ 5\pm m=-10 \Rightarrow m=\pm 15\end{cases}$$

باید توجه کرد که اگر $m=\pm 5$ را بپذیریم، شعاع دو دایره با هم مساوی می‌شود و دو دایره با شعاع‌های مساوی نمی‌توانند مماس داخل باشند.

۱۰۵- گزینهٔ ۱ اگر خطی بر یک منحنی (هر نوع منحنی) مماس باشد، معادلهٔ حاصل از برخورد آن‌ها باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases}y=x\\ x^2+y^2-2x+2y+m=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+x^2\cancel{-2x+2x}+m=0 \Rightarrow 2x^2+m=0$$

این معادله باید دارای ریشهٔ مضاعف باشد، پس باید $\Delta=0$ باشد.

$$\Delta=0^2-4\times 2\times m=0 \Rightarrow m=0$$

۱۰۶- گزینهٔ ۴ چون قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد، پس باید از نقطهٔ $O(2,-4)$ بگذرد. از طرفی چون قطری از دایرهٔ موردنظر است که بر خط $3x+2y+1=0$ عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب خط مذکور می‌باشد. داریم: $2y=-3x-1$

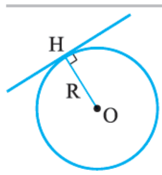
$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب قطر موردنظر}=\frac{2}{3}$$

پس معادلهٔ خط موردنظر، به صورت زیر می‌باشد:

$$y-(-4)=\frac{2}{3}(x-2)$$

$$3y+12=2x-4 \Rightarrow 3y=2x-16$$

۱۰۷- گزینهٔ ۱ اگر خطی بر دایره‌ای مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط موردنظر، برابر با شعاع دایره می‌باشد، پس داریم:



$O(2,-1)$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{16+4-4}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

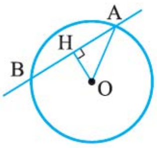
$$OH=\frac{|3\times 2+m\times(-1)+3m-1|}{\sqrt{9+m^2}}=\frac{|2m+5|}{\sqrt{m^2+9}}=2$$

$$\Rightarrow |2m+5|=2\sqrt{m^2+9}$$

به توان ۲ می‌رسانیم: $\Rightarrow 4m^2+20m+25=4m^2+36$

$$\Rightarrow 20m=11 \Rightarrow m=\frac{11}{20}$$

۱۰۸- گزینهٔ ۲ مرکز دایره $O(-1,1)$ و شعاع آن $R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-2)^2-4\times(-23)}=5$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از خط $3x+4y+19=0$ برابر است با:



$$OH=\frac{|3\times(-1)+4\times 1+19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

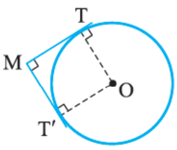
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

$$AH^2=OA^2-OH^2=25-16=9 \Rightarrow AH=3$$

چون قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس:

$$AB=2AH=2\times 3=6$$

۱۰۹- گزینهٔ ۳ اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای باشد که از آن بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم نمود، چنان‌چه O مرکز دایره و شعاع آن R باشد، چهارضلعی $OTMT'$ مربعی به ضلع R و در نتیجه طول قطر آن $MO=R\sqrt{2}$ است.



چون O نقطه‌ای ثابت و $R\sqrt{2}$ نیز مقداری ثابت است، پس فاصلهٔ M از نقطهٔ ثابت O، مقداری ثابت است و در نتیجه M روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ است.

مختصات مرکز دایره $O(1,0)$ و اندازهٔ شعاع آن برابر با $R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0-4(-3)}=2$ است، پس معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M به صورت زیر است:

$$(x-1)^2+(y-0)^2=(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2-2x=7$$

۱۱۰- گزینهٔ ۴ زمانی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره، موازی یکدیگرند که شعاع‌های آن دو دایره برابر باشند، پس:

$$R_1=R_2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{(-2a)^2+b^2-4\times 5a}=\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{(-18)^2+b^2-4\times 81}$$

به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4a^2+b^2-20a=b^2 \Rightarrow 4a^2-20a=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=0\\ a=5\end{cases}$$

دو دایره وقتی مماس‌مشترکی عمود بر خط‌المرکزین دارند که آن دو دایره، مماس‌خارج باشند، پس باید طول خط‌المرکزین دو دایره برابر مجموع دو شعاع باشد.

اگر $a=0$ باشد، آن‌گاه: $O_1(0,-\frac{b}{2})$ و $O_2(9,-\frac{b}{2})$

$$\Rightarrow O_1O_2=9=R_1+R_2$$

$$9=\frac{1}{2}\sqrt{0+b^2-0}+\frac{1}{2}\sqrt{324+b^2-324} \Rightarrow 9=|b|$$

$$\Rightarrow b=\pm 9 \Rightarrow a+b=\pm 9$$

و اگر $a=۵$ باشد، آن‌گاه: $O_۱(۵,-\frac{b}{۲})$ و $O_۲(۹,-\frac{b}{۲})$

$O_۱O_۲=۴=R_۱+R_۲$

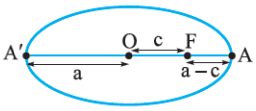
$\Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰+b^۲-۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲۴+b^۲-۳۲۴}$

$\Rightarrow ۴=|b| \Rightarrow b=\pm ۴$

$\Rightarrow a+b=۵+۴=۹$ یا $a+b=۵-۴=۱$

آزمون ۱۱

۱۱۱- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، در هر بیضی می‌توان گفت $FA'=a+c$ بیشترین فاصلهٔ کانون F از نقاط بیضی و $FA=a-c$ کوچک‌ترین فاصلهٔ کانون F از نقاط بیضی است.



پس با توجه به صورت سؤال داریم:

$a+c=\frac{۵}{۲}(a-c) \Rightarrow ۲a+۲c=۵a-۵c$

$\Rightarrow ۷c=۳a \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۳}{۷}$

۱۱۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم طول قطر کوچک بیضی $۲b$ می‌باشد، پس داریم:

$۲b=BB'=۴ \Rightarrow b=۲$

از طرفی در هر بیضی داریم:

$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow{a=۳c} ۹c^۲=۴+c^۲$

$\Rightarrow ۸c^۲=۴ \Rightarrow c^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\Rightarrow a=۳c=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow$ طول قطر بزرگ $=۲a=۳\sqrt{۲}$

۱۱۳- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف بیضی می‌دانیم:

$OA=a, OB=b, OF=OF'=c$

پس داریم:

$S_{OAB}=\frac{OA\times OB}{۲}=\frac{ab}{۲}$

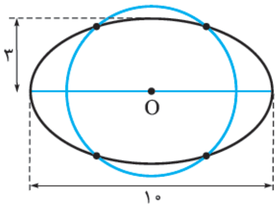
$S_{FBF'}=\frac{FF'\times OB}{۲}=\frac{۲c.b}{۲}=bc$

اکنون داریم:

$\frac{a\cancel{b}}{۲}=\frac{۳}{۵}\cancel{b}c \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{۶}{۵}$

۱۱۴- گزینهٔ ۱ چون $۲a=۱۰$ و $۲c=۸$، پس $a=۵$ و $c=۴$ و بنا بر رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ نتیجه می‌شود $b=۳$.

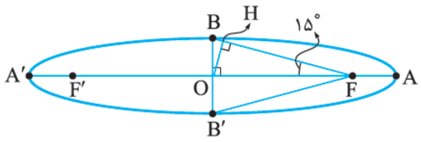
اگر به مرکزِ مرکز بیضی، دایره‌ای به شعاع ۳/۵ رسم کنیم، چون شعاع این دایره از $b=۳$ بیشتر است، بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند.



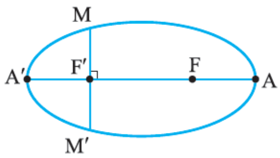
۱۱۵- گزینهٔ ۱ چون AA' محور تقارن بیضی است، پس AA' عمودمنصف BB' نیز می‌باشد و در نتیجه AA' نیمساز زاویهٔ $B\hat{F}B'$ است، بنابراین $B\hat{F}O=۱۵^\circ$. می‌دانیم ارتفاع نظیر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش ۱۵° باشد، برابر $\frac{۱}{۴}$ وتر است، در نتیجه:

$OH=\frac{۱}{۴}BF$

اما $BF=a=\frac{۱۶}{۲}=۸$، پس $OH=۲$.



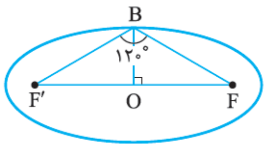
۱۱۶- گزینهٔ ۳ وتری که از کانون بیضی می‌گذرد و بر قطر بزرگ بیضی عمود می‌باشد، همان وتر کانونی است و می‌دانیم طول آن برابر $MM'=\frac{۲b^۲}{a}$ است. چون قطر بزرگ، دو برابر قطر کوچک است، پس:



$a=۲b$

$\frac{MM'}{AA'}=\frac{\frac{۲b^۲}{a}}{۲a}=(\frac{b}{a})^۲=(\frac{b}{۲b})^۲=\frac{۱}{۴}$

۱۱۷- گزینهٔ ۴ اگر F و F' کانون‌های بیضی و B یک رأس ناکانونی آن باشد، بنا به فرض $F'\hat{B}F=۱۲۰^\circ$. از طرفی می‌دانیم $BF=BF'=a$ و $\hat{F}=\hat{F'}=۳۰^\circ$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOF داریم:



$\cos\hat{F}=\frac{OF}{BF} \Rightarrow \cos ۳۰^\circ=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۱۸- گزینهٔ ۲

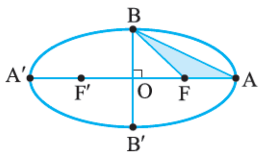
$۲b=۱۲ \Rightarrow b=۶$

$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow c=\frac{۴}{۵}a$

$b^۲+c^۲=a^۲ \Rightarrow ۳۶+\frac{۱۶}{۲۵}a^۲=a^۲ \Rightarrow \frac{۹a^۲}{۲۵}=۳۶$

$\Rightarrow a^۲=۱۰۰ \Rightarrow a=۱۰$ و $c=۸$

با توجه به شکل داریم:



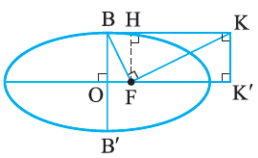
$FA=OA-OF$

$=a-c=۱۰-۸=۲$

اکنون داریم:

$S_{BAF}=\frac{۱}{۲}FA\times BO=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶=۶$

۱۱۹- گزینهٔ ۴ اگر از F عمود FH را بر BK رسم کنیم، چهارضلعی‌های BHFO و $HKK'F$ مستطیل هستند، پس $BH=OF=۴$ ،$HF=OB$ و $HK=FK'=۹$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BFK، پاره‌خط FH ارتفاع نظیر وتر است، پس داریم:



$HF^۲=BH\times HK=۴\times ۹ \Rightarrow HF=۶ \Rightarrow OB=۶$

پس طول قطر کوچک برابر $BB'=۲OB=۱۲$ است.

اگر M نقطهٔ برخورد پرتو $x=۲$ با سهمی باشد، آن‌گاه طول نقطهٔ M برابر ۲ است و در نتیجه عرض آن $y=\frac{۱}{۴}\times ۲^۲=۱$ است؛ یعنی مختصات نقطهٔ M به صورت $(۲,۱)$ می‌باشد.

$$FM\ \text{شیب}=m_{FM}=\frac{۱-۱}{۲-۰}=۰$$

معادلهٔ پرتو بازتابش به صورت زیر است:

$$FM\ \text{معادله}: y-۱=۰\times(x-۰)\Rightarrow y=۱$$

۱۳۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم بازتاب کانون سهمی، نسبت به هر خط مماس بر آن، روی خط هادی سهمی است، پس F_1 و F'_1 روی خط هادی سهمی هستند و در نتیجه امتداد این دو نقطه، همان خط هادی سهمی است.

آزمون ۱۳

۱۳۱- گزینهٔ ۱ مختصات نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر محور y ها به صورت $A(۰,۱)$ است. تمام نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ هستند و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۲^۲\Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$$

۱۳۲- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^۲+(y-۱)^۲=۰$$

پس این معادله، دایره‌ای به شعاع صفر است؛ یعنی یک نقطه است. (این نقطه همان مرکز؛ یعنی نقطهٔ $O(۰,۱)$ می‌باشد.)

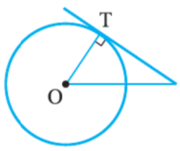
۱۳۳- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ دایره باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر باشند، پس:

$$k-۱=۱\Rightarrow k=۲$$

اکنون معادلهٔ آن به صورت $x^۲+y^۲+۲x-۲y-۲=۰$ است و داریم:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲-۴\times(-۲)}=۲$$

۱۳۴- گزینهٔ ۴ **روش ۱** مرکز دایره $O(۰,-۱)$ و شعاع آن $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+۲^۲-۴\times(-۸)}=۳$ است.



طول پاره‌خط OA برابر است با:

$$OA=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۲۰}$$

اگر AT بر دایره مماس باشد، آن‌گاه OT بر AT عمود است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT داریم:

$$AT^۲=OA^۲-\underbrace{OT^۲}_{R}=۲۰-۳^۲=۱۱\Rightarrow AT=\sqrt{۱۱}$$

روش ۲ طول مماسی که از نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ واقع در خارج دایرهٔ $C(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ بر آن رسم می‌شود برابر است با $\sqrt{C(x_1,y_1)}$، پس داریم:

$$\text{طول مماس}=\sqrt{C(۲,۳)}=\sqrt{۲^۲+۳^۲+۲\times ۳-۸}=\sqrt{۱۱}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۳ با تحقیق ساده‌ای معلوم می‌شود که نقطهٔ A روی دایره است. مرکز دایره $O(-۲,۱)$ است، پس مماس بر دایره بر OA عمود می‌باشد.

$$OA\ \text{شیب}=\frac{۳-۱}{۴-(-۲)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\ A\ \text{شیب مماس بر دایره در نقطهٔ}=m=-۳$$

اکنون معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-۳=-۳(x-۴)\Rightarrow y+۳x-۱۵=۰$$

۱۳۶- گزینهٔ ۴ نقطهٔ تقاطع باید در معادلات خط و دایره صدق کند، پس داریم:

$$۳x-۲y+m+۱=۰\Rightarrow ۳+۴+m+۱=۰\Rightarrow m=-۸$$

اکنون معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$x^۲+y^۲+۱۰x+۱۲y+۱۱=n$$

$$\xrightarrow{(۱,-۲)\in\text{دایره}} ۱+۴+۱۰-۲۴+۱۱=n\Rightarrow n=۲$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۱۰x+۱۲y+۹=۰$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰+۱۴۴-۳۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰۸}=۲\sqrt{۱۳}$$

۱۳۷- گزینهٔ ۲ **روش ۱** معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x$ است. اگر این خط بر دایره مماس باشد، باید معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

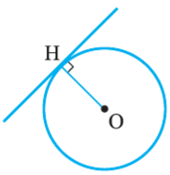
خط و دایره را تلاقی می‌دهیم. (در یک دستگاه قرار می‌دهیم.)

$$\begin{cases}y=x\\x^۲+y^۲+۲x=k\end{cases}\xrightarrow{y=x} x^۲+x^۲+۲x=k$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x-k=۰$$

$$\Delta=۲^۲-۴\times ۲\times(-k)=۰\Rightarrow ۸k+۴=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

روش ۲ اگر خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس، برابر با شعاع دایره است.



مرکز دایره $O(-۱,۰)$ و شعاع آن به‌صورت زیر است:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴k}=\sqrt{۱+k}$$

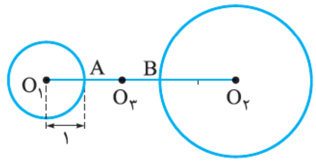
$$x-y=۰\ \text{از خط}\ O\ \text{فاصلهٔ}=R\Rightarrow\frac{|-۱-۰|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\sqrt{۱+k}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۱+k}\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}\frac{۱}{۲}=۱+k\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

۱۳۸- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ اول $O_1(۱,۳)$ و شعاع آن $R_1=۱$، مرکز دایرهٔ دوم $O_2(۴,-۱)$ و شعاع آن $R_2=۲$ و طول

خط‌المرکزین این دو دایره $O_1O_2=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2}=5$ است و چون $O_1O_2>R_1+R_2$ می‌باشد، پس این دو دایره متخارج‌اند.

با توجه به شکل مقابل، کوچک‌ترین دایره‌ای که بر این دو دایره مماس باشد، دایره‌ای به قطر $AB=2$ است؛ یعنی قطر دایرهٔ موردنظر ۲ و در نتیجه شعاع آن ۱ است.



۱۳۹- گزینهٔ ۳

$$2a=3(2b) \Rightarrow b=\frac{a}{3}$$

$$c^2=a^2-b^2 \xrightarrow{b=\frac{a}{3}} c^2=a^2-\frac{a^2}{9} \Rightarrow c^2=\frac{8a^2}{9}$$

$$\Rightarrow c=\frac{2\sqrt{2}}{3}a \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۱۴۰- گزینهٔ ۳ چون عدد داده‌شده بزرگ‌تر از یک می‌باشد، پس حتماً نسبت داده‌شده برابر با $\frac{a}{b}$ می‌باشد و داریم:

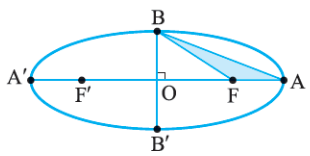
$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{13}}{3}b$$

از طرفی در هر بیضی داریم:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{13}{9}b^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{4}{9}b^2=c^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}b=c \Rightarrow 2b=3c$$

۱۴۱- گزینهٔ ۴ چون $OF=c$ و $OB=b$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF داریم:



$$BF^2=OB^2+OF^2$$

$$=b^2+c^2=a^2$$

$$\Rightarrow BF=a=10$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBA داریم:

$$AB^2=OA^2+OB^2 \Rightarrow (2\sqrt{34})^2=a^2+b^2$$

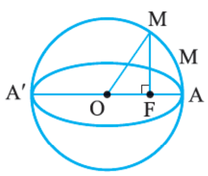
$$\Rightarrow 136=10^2+b^2 \Rightarrow b=6$$

با استفاده از رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ نتیجه می‌شود $c=8$. از طرفی:

$$FA=OA-OF=a-c=10-8=2$$

$$S_{ABF}=\frac{1}{2}FA\times BO=\frac{1}{2}\times 2\times 6=6$$

۱۴۲- گزینهٔ ۳ اگر O مرکز بیضی و دایره باشد، آن‌گاه $MO=a$ و $OF=c$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MOF داریم:



$$MF^2=MO^2-OF^2$$

$$=a^2-c^2=b^2 \Rightarrow MF=b$$

۱۴۳- گزینهٔ ۲ معادله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$y^2-4y+4=-8x-2+4 \Rightarrow (y-2)^2=-8x+2$$

$$(y-2)^2=-8(x-\frac{1}{4}) \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$$

از طرفی در هر سهمی فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر با $|2a|$ می‌باشد، پس $|2a|=4$.

۱۴۴- گزینهٔ ۱

$$y^2-2y=-4x-k$$

$$\Rightarrow (y-1)^2=-4x-k+1 \Rightarrow (y-1)^2=-4(x+\frac{k-1}{4})$$

محور این سهمی افقی است و در آن $4a=-4$ یا $a=-1$ است.

رأس آن $S(-\frac{k-1}{4},1)$ و کانون آن به صورت زیر است:

$$F=(-\frac{k-1}{4}+(-1),1)=(\frac{-k-3}{4},1)$$

این نقطه باید روی خط $x-3y+2=0$ باشد، پس:

$$\frac{-k-3}{4}-3\times 1+2=0 \Rightarrow \frac{-k-3}{4}=1 \Rightarrow k=-7$$

۱۴۵- گزینهٔ ۴ محور این سهمی موازی با محور xها است، در نتیجه پرتو تابیده‌شده به سهمی موازی با محور سهمی است و بازتابش آن از کانون سهمی می‌گذرد، پس باید مختصات کانون سهمی را مشخص کنیم:

$$y^2-6y=8x-33 \Rightarrow y^2-6y+9=8x-24$$

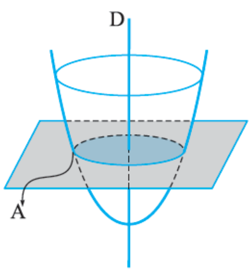
$$\Rightarrow (y-3)^2=8(x-3)$$

پس $4a=8$ یا $a=2$ و رأس سهمی $S(3,3)$ است، بنابراین مختصات کانون آن $F(\alpha+a,\beta)=(3+2,3)=(5,3)$ است.

آزمون ۱۴

۱۴۶- گزینهٔ ۳ چون صفحه عمود بر محور سهمی است، اگر این صفحه، سهمی اولیه را در نقطه‌ای مانند A قطع کند، گویی نقطهٔ A را حول خط D دوران داده‌ایم.

پس مقطع حاصل، یک دایره است.



۱۴۷- گزینهٔ ۱ مثلث OAB مثلثی قائم‌الزاویه در رأس O است و OM میانهٔ نظیر وتر می‌باشد، پس $OM=\frac{AB}{2}=5$. چون فاصلهٔ M از نقطهٔ ثابت O مقدار ثابت ۵ است، پس مکان نقطهٔ M، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ خواهد بود.

۱۴۸- گزینهٔ ۳ اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم $MA=2MB$ یا $MA^2=4MB^2$.

از طرفی داریم:

$$MA=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$MB=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4(x+1)^2+4(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=4x^2+8x+4+4y^2-24y+36$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+12x-18y+27=0$$

بر ۳ تقسیم می‌کنیم: $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

این معادلهٔ یک دایره است که مرکز آن $O(-2,3)$ و شعاعش $R=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2-4\times 9}=2$ می‌باشد.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ روش ۱ خط و دایره را با هم تلاقی می‌دهیم، پس کافی است به جای y، عبارت $2x-5$ را قرار دهیم:

$$x^2+(2x-5)^2-2x-4(2x-5)-1=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x^2-20x+25-2x-8x+20-1=0$$

$$\Rightarrow 5x^2-30x+44=0 \Rightarrow \Delta=900-880=20$$

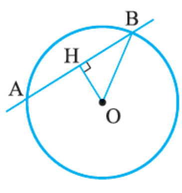
$$\Rightarrow x=\frac{30\pm 2\sqrt{5}}{10} \Rightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{5}}{5}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{15+\sqrt{5}}{5}\\ 2(\frac{15+\sqrt{5}}{5})-5=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}\frac{15-\sqrt{5}}{5}\\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2+(\frac{4\sqrt{5}}{5})^2}=\sqrt{\frac{4\times 5}{25}+\frac{16\times 5}{25}}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{16}{5}}=\sqrt{\frac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$$

روش ۲ با توجه به شکل مقابل، داریم:



$AB=2HB$

اگر O مرکز دایره باشد، OB شعاع دایره و OH فاصلهٔ نقطهٔ O از خط موردنظر می‌باشد، پس داریم:

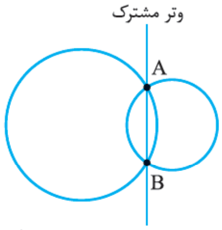
$$R=OB=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}$$

$O(1,2)$ و $y-2x+5=0$

$$OH=\frac{|2-2+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow HB^2=OB^2-OH^2=6-5=1 \Rightarrow AB=2HB=2$$

۱۵۰- گزینهٔ ۴ دو دایره را با تلاقی می‌دهیم تا معادلهٔ وتر مشترک را در صورت وجود به دست آوریم:



$$\begin{cases}x^2+y^2=2y\\ x^2+y^2=x\end{cases} \Rightarrow x=2y \text{ معادلهٔ وتر مشترک}$$

اکنون این خط را با یکی از دایره‌ها (مثلاً دایرهٔ دوم) تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقاط برخورد آن‌ها به دست آیند:

$$\begin{cases}x=2y\\ x^2+y^2=2y\end{cases} \xrightarrow{x=2y} (2y)^2+y^2=2y$$

$$\Rightarrow 5y^2-2y=0 \Rightarrow \begin{cases}y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,0)\\ y=\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{4}{5} \Rightarrow B(\frac{4}{5},\frac{2}{5})\end{cases}$$

اکنون طول AB را که همان طول وتر مشترک است، پیدا می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(\frac{4}{5}-0)^2+(\frac{2}{5}-0)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{20}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ مرکز دایرهٔ داده‌شده تا خط موردنظر، برابر با شعاع دایرهٔ موردنظر می‌باشد. داریم:

$$O(-1,-2) \text{ و } OH=R=\frac{|-3-4-6|}{\sqrt{9+4}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

پس معادلهٔ دایرهٔ مطلوب به صورت زیر است:

$$(x+1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{13})^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2x+4y=8$$

۱۵۲- گزینهٔ ۱ چون دایره محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -3 قطع می‌کند، پس نقطهٔ $A(0,-3)$ روی دایره است و مختصات آن باید در معادلهٔ دایره صدق کند. داریم:

$$0^2+(-3)^2-4\times 0+2\times(-3)+3m-4=0$$

$$\Rightarrow 3m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

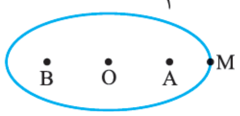
پس معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ است.

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+12} \Rightarrow 2R=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

۱۵۳- گزینهٔ ۳ طول نخ برابر $2a$ (طول قطر بزرگ بیضی) است. A و B کانون‌های بیضی هستند، پس وسط آن‌ها مرکز بیضی است.

$$O\ (\frac{1+1}{2},\frac{2+(-4)}{2})=(1,-1) \text{ وسط } AB$$

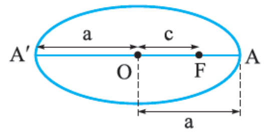
فاصلهٔ O از M، برابر a است:



$$a=OM=\sqrt{(1-1)^2+(4-(-1))^2}=5$$

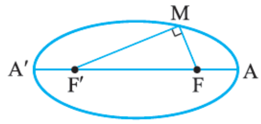
پس طول نخ، برابر $L=2a=10$ است.

۱۵۴- گزینهٔ ۱ در شکل مقابل، FA' دورترین فاصلهٔ کانون F از نقاط واقع بر بیضی و FA نزدیک‌ترین فاصلهٔ آن نقاط از بیضی است.



$$FA' = ۴FA \Rightarrow a+c = ۴(a-c)$$
$$\Rightarrow a+c = ۴a-۴c \Rightarrow ۵c = ۳a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵}$$

۱۵۵- گزینهٔ ۲ چون $۲a = ۱۲$ و $۲b = ۶$، پس $a = ۶$ و $b = ۳$ و در نتیجه:



$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \Rightarrow c = ۳\sqrt{۳}$$

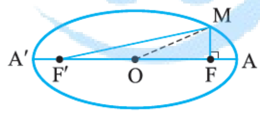
اگر $MF = x$ باشد، از آن‌جا که $MF + MF' = ۲a = ۱۲$، پس $MF' = ۱۲ - x$

$$\overset{\Delta}{MFF'}: MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ + (۱۲-x)^۲ = (۶\sqrt{۳})^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۱۴۴ - ۲۴x + x^۲ = ۱۰۸$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۲۴x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۲x + ۱۸ = ۰$$
$$x = \frac{۱۲ \pm \sqrt{۱۴۴-۷۲}}{۲} = \frac{۱۲ \pm ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۶ \pm ۳\sqrt{۲}$$

چون $MF < MF'$، پس $x < ۱۲ - x$ یا $x < ۶$ و در نتیجه:

$$x = MF = ۶ - ۳\sqrt{۲}$$

۱۵۶- گزینهٔ ۴



$$FF' = ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

و چون $a = ۵$، پس $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۵^۲ - ۴^۲ = ۹$ یا $b = ۳$.

پاره‌خط MF نصف وتر کانونی است، پس:

$$MF = \frac{b^۲}{a} = \frac{۹}{۵}$$

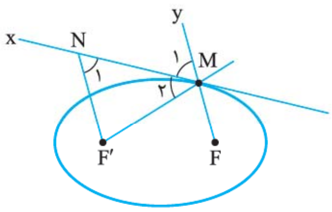
و از آن‌جا که M روی بیضی است، پس داریم:

$$MF + MF' = ۲a \Rightarrow \frac{۹}{۵} + MF' = ۱۰$$
$$\Rightarrow MF' = ۱۰ - \frac{۹}{۵} = \frac{۴۱}{۵}$$

در مثلث MFF'، پاره‌خط MO میانه است و بنا بر قضیهٔ میانه‌ها در مثلث، داریم:

$$۴MO^۲ = ۲(MF^۲ + MF'^۲) - FF'^۲ = ۲(\frac{۸۱}{۲۵} + \frac{۱۶۸۱}{۲۵}) - ۸^۲$$
$$۴MO^۲ = \frac{۲ \times ۱۷۶۲ - ۶۴ \times ۲۵}{۲۵}$$
$$\xrightarrow{\text{بر ۴ تقسیم می‌کنیم}} MO^۲ = \frac{۸۸۱ - ۴۰۰}{۲۵} = \frac{۴۸۱}{۲۵}$$
$$\Rightarrow MO = \frac{\sqrt{۴۸۱}}{۵}$$

۱۵۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم خط مماس بر بیضی در نقطهٔ M، زاویهٔ بین $F'M$ و امتداد MF را نصف می‌کند، پس:



$$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \quad (۱)$$

از طرفی چون $F'N \parallel MF$ و MN مورب است، داریم:

$$\hat{N}_۱ = \hat{M}_۱ \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\hat{N}_۱ = \hat{M}_۲$، پس:

$$NF' = MF'$$

از طرفی چون M روی بیضی است، پس:

$$F'M + MF = ۲a \Rightarrow F'M + ۴ = ۲ \times ۵ \Rightarrow F'M = ۶$$

در نتیجه $NF' = ۶$.

۱۵۸- گزینهٔ ۳ معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۴x + ۵ = \frac{k+۱}{k}y \Rightarrow (x-۲)^۲ + ۱ = \frac{k+۱}{k}y$$
$$\Rightarrow (x-۲)^۲ = \frac{k+۱}{k}y - ۱$$
$$\Rightarrow (x-۲)^۲ = \frac{k+۱}{k}(y - \frac{k}{k+۱})$$

در این سهمی $a = \frac{k+۱}{۴k}$ است. فاصلهٔ رأس تا خط هادی برابر $|a|$ است، پس:

$$|\frac{k+۱}{۴k}| = ۲ \Rightarrow \frac{k+۱}{۴k} = \pm ۲$$
$$\boxed{-} \Rightarrow -۸k = k+۱ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۹}$$
$$\boxed{+} \Rightarrow ۸k = k+۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۷}$$

چون دهانهٔ سهمی به طرف بالاست باید $a > ۰$ باشد، پس $\frac{k+۱}{۴k} > ۰$ در نتیجه $k > ۰$ یا $k < -۱$. در نتیجه $k = \frac{۱}{۷}$ قابل قبول است.

۱۵۹- گزینهٔ ۴ چون خط هادی سهمی $x = ۰$ است، پس محور سهمی افقی است و معادلهٔ آن به صورت $(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha)$ و رأس آن $S(\alpha,\beta)$ است. چون $y = ۳$ محور آن است، پس $\beta = ۳$ و معادلهٔ هادی آن $\Delta: x = \alpha - a = ۰$ و در نتیجه: $\alpha = a$.

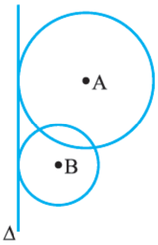
اکنون معادلهٔ سهمی به صورت $(y-۳)^۲ = ۴a(x-a)$ است و چون نقطهٔ M روی این سهمی است باید در آن صدق کند:

$$(۵-۳)^۲ = ۴a(۲-a) \Rightarrow ۴ = ۴(۲a - a^۲)$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (a-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$(y-۳)^۲ = ۴(x-۱) \Rightarrow y^۲ - ۶y + ۹ = ۴x - ۴$$
$$\Rightarrow y^۲ - ۶y - ۴x + ۱۳ = ۰$$

۱۶۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم مرکز دوایری که از یک نقطهٔ ثابت مانند F می‌گذرند و بر خط ثابت Δ مماس هستند، روی یک سهمی به کانون F و خط هادی Δ واقع‌اند. پس اگر به مراکز A و B دو دایره چنان رسم کنیم که بر خط Δ مماس باشند، نقاط برخورد این دو دایره، کانون سهمی موردنظر هستند. می‌دانیم دو دایره حداکثر در دو نقطه می‌توانند متقاطع باشند، پس حداکثر دو سهمی می‌توان رسم نمود که از A و B بگذرند و Δ خط هادی آن باشد.



آزمون ۱۵

۱۶۱- گزینهٔ ۳ چون $a \neq ۰$، پس $a^۲ > ۰$ و $a^۲ + ۱ > ۰$ ولی $a - ۳$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد، در نتیجه M می‌تواند در ناحیه‌های اول یا پنجم باشد؛ یعنی می‌تواند در دو ناحیه قرار گیرد.

۱۶۲- گزینهٔ ۴

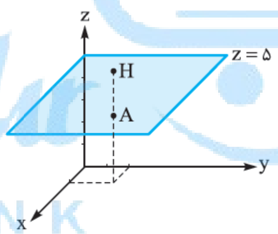
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{۱+۴+(m-۱)^۲} = \sqrt{(۳-m)^۲+۱+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵+(m-۱)^۲ = (۳-m)^۲+۲$$

$$\Rightarrow ۵+\cancel{m^۲}-۲m+۱ = ۹-۶m+\cancel{m^۲}+۲$$

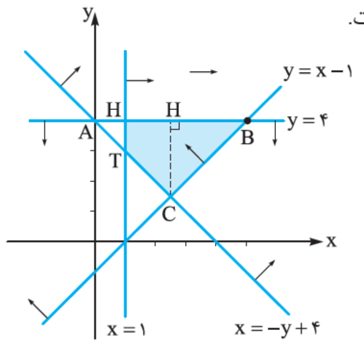
$$\Rightarrow ۴m = ۵ \Rightarrow m = \frac{۵}{۴}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,b,c)$ از صفحهٔ $z=k$ برابر است با $|k-c|$. با توجه به شکل، داریم:



$$AH = \text{فاصلهٔ } A \text{ از صفحهٔ } z=۵ = |۵-۳| = ۲$$

۱۶۴- گزینهٔ ۱ مساحت موردنظر، مساحت مثلث ABC منهای مساحت مثلث AHT است.



B نقطهٔ برخورد دو خط $y=۴$ و $y=x-۱$ است، پس $B(۵,۴)$ است. به وضوح $A(۰,۴)$ می‌باشد و C نقطهٔ برخورد دو خط $y=x-۱$ و $x=-y+۴$ است. از حل این دستگاه داریم $C(\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲})$ است، پس $AB=۵$ و $CH=|۴-\frac{۳}{۲}|=\frac{۵}{۲}$. به همین ترتیب $T(۱و۳)$، پس:

$$S_{AHT} = \frac{۱}{۲}AH \times HT = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB \times CH = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times \frac{۵}{۲} = \frac{۲۵}{۴}$$

در نتیجه:

$$\text{مساحت رنگی} = S_{ABC} - S_{ATH} = \frac{۲۳}{۴}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳ چون بردار $\vec{a}$ بر صفحهٔ xOz واقع است، پس مقدار y آن باید صفر باشد، بنابراین داریم:

$$m+۳=۰ \Rightarrow m=-۳$$

$$\vec{a}=(-۷,۰,۵) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{۴۹+۲۵}=\sqrt{۷۴}$$

۱۶۶- گزینهٔ ۴ اگر $\vec{a}=(x,y,z)$، آن‌گاه تصویر بردار $\vec{a}$ روی صفحات xOy، xOz و yOz به ترتیب برابر با $\vec{a}_۱=(x,y,۰)$ و $\vec{a}_۲=(x,۰,z)$ و $\vec{a}_۳=(۰,y,z)$ هستند. پس داریم:

$$|a_۱|=\sqrt{x^۲+y^۲}=۳\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲+y^۲=۱۸$$

$$|a_۲|=\sqrt{x^۲+z^۲}=۲ \Rightarrow x^۲+z^۲=۴$$

$$|a_۳|=\sqrt{y^۲+z^۲}=\sqrt{۵} \Rightarrow y^۲+z^۲=۵$$

سه رابطهٔ فوق را با هم جمع می‌کنیم؛ داریم:

$$۲(x^۲+y^۲+z^۲)=۲۷ \Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=\frac{۲۷}{۲}$$

$$\Rightarrow |a|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۶۷- گزینهٔ ۲ واضح است که $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۳$، پس داریم:

$$\frac{۲}{۳}(۳\vec{b}-۳\vec{a})=۲(\vec{b}-\vec{a})=۲(۱-۲,-۲-(-۲),۲-۱)$$

$$=(-۲,۰,۲)$$

۱۶۸- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y,z)$ از محور xها برابر $\sqrt{y^۲+z^۲}$ و فاصله‌اش از محور yها برابر $\sqrt{x^۲+z^۲}$ و از محور zها برابر $\sqrt{x^۲+y^۲}$ است.

$$\text{فاصلهٔ } A \text{ از محور xها} = \sqrt{y_A^۲+z_A^۲}=\sqrt{(-۴)^۲+۳^۲}=۵$$

۱۶۹- گزینهٔ ۳ عرض نقاط M، N و P برابر -۱ است؛ یعنی عرض همهٔ نقاط این راستا $y=-۱$ است. پس تمام این نقاط روی صفحهٔ $y=-۱$ هستند. از طرفی طول نقاط M و P برابر ۳ است؛ یعنی طول تمام نقاط این راستا $x=۳$ است. به عبارت دیگر، تمام این نقاط روی صفحهٔ $x=۳$ هستند. در نتیجه معادلهٔ راستای موردنظر $\begin{cases} x=۳ \\ y=-۱ \end{cases}$ است و تنها ۳ در آن صدق می‌کند.

۱۷۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم فاصلهٔ دو خط $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ و $\begin{cases} x=a' \\ z=c \end{cases}$ برابر است با $|a-a'|$ و فاصلهٔ دو خط $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ و $\begin{cases} z=c \\ y=b' \end{cases}$ نیز برابر با $|b-b'|$ است.

فاصلهٔ هر دو خط از سه خط D، D′ و D″ برابر طول یکی از یال‌های مکعب‌مستطیل است.

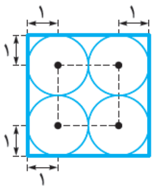
هر دو خط D و D′ بر محور xها عمودند، پس فاصلهٔ این دو خط برابر است با قدرمطلق اختلاف xهای این دو خط، بنابراین اندازهٔ

۲۶۳- گزینهٔ ۴ می‌دانیم: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=\vec{O}$

پس داریم:

$$(۳\vec{a}-۲\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{O}+۳\vec{a}\times\vec{b}-۲\vec{b}\times\vec{a}+\vec{O}$$
$$=۳\vec{a}\times\vec{b}+۲\vec{a}\times\vec{b}=۵\vec{a}\times\vec{b}=(۱۰,-۱۵,۵)$$
$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=(۲,-۳,۱)\Rightarrow$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|=\sqrt{۴+۹+۱}=\sqrt{۱۴}$$

۲۶۴- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل مقابل، مکان هندسی مرکزهای دایره‌ها، مربعی به ضلع ۲ است که قطرهایش منطبق بر قطرهای مربع اولیه هستند، پس مساحت آن $۲^۲=۴$ است.



۲۶۵- گزینهٔ ۱ به سادگی معلوم می‌شود که نقطهٔ A روی دایره است. پس اگر O مرکز دایره باشد، مماس بر دایره در نقطهٔ A بر شعاع OA عمود است.

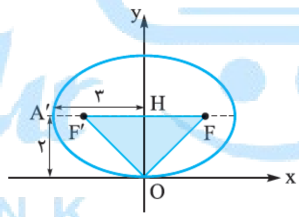
مختصات مرکز دایره به صورت $O(۱,-۲)$ است، پس:

$$\text{شیب شعاع } OA=\frac{-۲-۱}{۱-۲}=۳\Rightarrow \text{شیب مماس}=m=-\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه معادلهٔ خط مماس به صورت زیر می‌باشد:

$$y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۲)\Rightarrow ۳y+x=۵$$

۲۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به مختصات نقطهٔ A' در شکل به سادگی معلوم می‌شود که $a=۳$ و $b=۲$، بنا بر رابطهٔ مهم بیضی داریم:



$$c^۲=a^۲-b^۲=۳^۲-۲^۲=۵\Rightarrow c=\sqrt{۵}$$

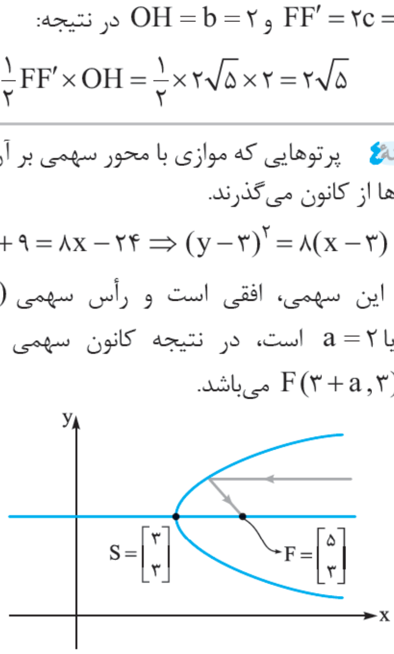
پس $FF'=۲c=۲\sqrt{۵}$ و $OH=b=۲$ در نتیجه:

$$S_{OFF'}=\frac{۱}{۲}FF'\times OH=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۵}\times ۲=۲\sqrt{۵}$$

۲۶۷- گزینهٔ ۴ پرتوهایی که موازی با محور سهمی بر آن می‌تابند، بازتابش آن‌ها از کانون می‌گذرند.

$$y^۲-۶y+۹=۸x-۲۴\Rightarrow (y-۳)^۲=۸(x-۳)$$

پس محور این سهمی، افقی است و رأس سهمی $S(۳,۳)$ و $۴a=۸$ یا $a=۲$ است، در نتیجه کانون سهمی به صورت $F(۳+a,۳)=(۵,۳)$ می‌باشد.



۲۶۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر ماتریسی قطری به توان n برسد، ماتریس A^n نیز ماتریسی قطری است که درایه‌هایش برابر با توانِ nام درایه‌های نظیر ماتریس A است، پس داریم: $A+A^۲+A^۳$

$$=\begin{bmatrix}-۳&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹&۰&۰\\۰&۲۵&۰\\۰&۰&۱۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲۷&۰&۰\\۰&۱۲۵&۰\\۰&۰&۶۴\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-۲۱&۰&۰\\۰&۱۵۵&۰\\۰&۰&۸۴\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^۲+A^۳$ برابر است با:

$$=-۲۱+۱۵۵+۸۴=۲۱۸$$

۲۶۹- گزینهٔ ۳

$$(A+B)^۲=A^۲+B^۲+AB+BA$$
$$\Rightarrow AB+BA=(A+B)^۲-A^۲-B^۲$$
$$=\begin{bmatrix}۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۵&۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۷&۴\\۶&۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱&-۴\\۸&۷\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}۹&۶\\۳۰&۲۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۷&۴\\۶&۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱&-۴\\۸&۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۶\\۱۶&۷\end{bmatrix}$$

۲۷۰- گزینهٔ ۱ دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ زمانی دارای بی‌شمار جواب است که در آن، رابطهٔ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ برقرار باشد.

$$\frac{۲}{k}=\frac{k}{۸}=\frac{۱}{-۲}\Rightarrow k=-۴$$

آزمون ۲۵

۲۷۱- گزینهٔ ۱ بردار $\frac{|\vec{b}|}{۳}\vec{a}$ مضرب مثبتی از بردار $\vec{a}$ است، پس هم‌جهت با بردار $\vec{a}$ است. همچنین $\frac{-۵}{|\vec{a}|}\vec{b}$ مضربی منفی از بردار $\vec{b}$ است، پس در خلاف جهت بردار $\vec{b}$ خواهد بود. در نتیجه زاویهٔ بین این دو بردار، برابر با زاویهٔ بین بردار $\vec{a}$ و $-\vec{b}$ است (دقت کنید که عدد مضرب مهم نیست و فقط علامت آن مهم می‌باشد.) و این زاویه برابر با ۱۳۵° است.

۲۷۲- گزینهٔ ۳

$$\vec{a}.\vec{b}=۲+۳k-۲=۳k$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|=|(۲,۳,-۱)+(۱,k,۲)|=|(۳,۳+k,۱)|$$
$$=\sqrt{۹+(۳+k)^۲+۱}=\sqrt{k^۲+۶k+۱۹}$$

پس باید داشته باشیم $۳k=\sqrt{k^۲+۶k+۱۹}$. واضح است که چون سمت راست معادله، مثبت است، باید سمت چپ آن نیز مثبت باشد؛ یعنی باید $k>۰$ باشد. اکنون دو طرف این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۹k^۲=k^۲+۶k+۱۹\Rightarrow ۸k^۲-۶k-۱۹=۰$$

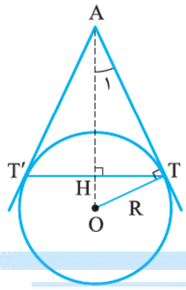
جواب‌های این معادله $k=\frac{3\pm\sqrt{161}}{8}$ هستند و چون باید $k>0$ باشد، پس $k=\frac{3+\sqrt{161}}{8}$.

۲۷۳- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ همرسی سه میانهٔ مثلث ABC به صورت زیر است:

$$G\begin{vmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{vmatrix}\Rightarrow G\begin{vmatrix}\frac{0+0+3}{3}\\ \frac{1+4+k}{3}\end{vmatrix}\Rightarrow G(1,\frac{5+k}{3})$$

طول تمام نقاط G ثابت و برابر ۱ است؛ یعنی معادلهٔ مکان این نقطه، خط $x=1$ می‌باشد که خطی موازی محور yهاست.

۲۷۴- گزینهٔ ۴



مرکز دایره $O(0,0)$ و شعاع آن $R=2$ است، پس:
$$AO=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2}=4$$
در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOT از رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود: $AT=AT'=2\sqrt{3}$

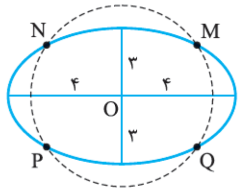
در مثلث AOT چون $AO=2OT$، پس $\hat{A}_1=30^\circ$ و در نتیجه $T'\hat{A}T=60^\circ$، بنابراین مثلث ATT' متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $TT'=AT=2\sqrt{3}$.

۲۷۵- گزینهٔ ۲ در هر بیضی می‌دانیم:
$AA'=2a$ و $BB'=2b$ و $FF'=2c$

از طرفی در هر بیضی داریم: $a^2=b^2+c^2$

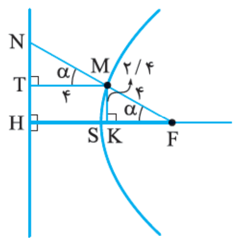
پس داریم:
$$\frac{FF'}{AA'}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$$
$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2=b^2+\frac{5}{9}a^2$$
$$\Rightarrow\frac{4}{9}a^2=b^2\Rightarrow\frac{2}{3}a=b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$$
بنابراین:
$$\frac{BB'}{AA'}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$$

۲۷۶- گزینهٔ ۱ $a=5$ و $b=3\Rightarrow c=4$



نقاطی که از مرکز بیضی به فاصلهٔ ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکزِ مرکز بیضی و شعاع ۴ قرار دارند. با توجه به شکل، چهار نقطه با این شرایط وجود دارند.

۲۷۷- گزینهٔ ۲ از M عمودهای MT و MK را به ترتیب، بر خط هادی و محور سهمی رسم می‌کنیم. بنا بر تعریف سهمی داریم:



$$MF=MT=4$$

$$\overset{\Delta}{MKF}\sim\overset{\Delta}{NTM}\Rightarrow\frac{NT}{MK}=\frac{MN}{MF}$$
$$\Rightarrow\frac{NT}{2/4}=\frac{\sqrt{16+NT^2}}{4}\Rightarrow 4NT=2/4\sqrt{16+NT^2}$$
$$\Rightarrow NT=0/6\sqrt{16+NT^2}$$
$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} NT^2=0/36\times16+0/36NT^2$$
$$\Rightarrow 0/64NT^2=0/36\times16\Rightarrow 0/8NT=0/6\times4$$
$$\Rightarrow NT=3\Rightarrow MN=5$$
$$TM\parallel FH\Rightarrow\frac{TM}{HF}=\frac{MN}{NF}\Rightarrow\frac{4}{2FS}=\frac{5}{9}\Rightarrow FS=\frac{18}{5}$$
$$\frac{FN}{FS}=\frac{9}{\frac{18}{5}}=\frac{5}{2}=2/5$$

۲۷۸- گزینهٔ ۱ اگر نقطهٔ $M(X,Y)$ روی سهمی باشد، آن‌گاه $Y=4X^2$؛ یعنی $M(X,4X^2)$ است. رأس این سهمی $S(0,0)$ است. اگر A وسط MS باشد، آن‌گاه:
$$A(\frac{X+0}{2},\frac{4X^2+0}{2})=(\frac{X}{2},2X^2)$$
پس در نقطهٔ A، $x=\frac{X}{2}$ و $y=2X^2$.
$$x=\frac{X}{2}\Rightarrow X=2x$$
معادلهٔ مکان نقطهٔ A: $y=2X^2=2(2x)^2\Rightarrow y=8x^2$

۲۷۹- گزینهٔ ۳
$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$
پس $A^4=I$ و $A^5=A$. اکنون داریم:
$$A\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=I\begin{bmatrix}4&5\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\1&2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\-c&-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\\c=-1\\d=-2\end{cases}$$
در نتیجه: $a+b+c+d=4+5-1-2=6$

۲۸۰- گزینهٔ ۴ با توجه به درایه‌های داده‌شده داریم:
$A=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس AB برابر است با:

سطر دوم A × ستون دوم B $=\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=-2$

درایهٔ سطر دوم ستون دوم ماتریس BA برابر است با:

سطر دوم B × ستون دوم A $=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1$

پس درایهٔ سطر دوم و ستون دوم AB، ۲- برابر درایهٔ نظیر از BA است.