مقدمهٔ مولفان

در این جلد سنگین (از نظر جرم، حجم و محتوا!) درس‌نامه‌ها و پاسخ تست‌های جلد سؤال رو آوردیم که ساختار و ویژگی‌هاش عبارت‌اند از:

- **درس‌نامه**: قبل از پاسخ تست‌های هر درس، اول درس‌نامهٔ اون درس اومده.

ما سعی کردیم فهمیدنی‌ترین و مفیدترین درس‌نامه‌های فیزیک رو بنویسیم. این درس‌نامه‌ها پر از تست‌های آموزشیه که خیلی باارزشن. بقیهٔ ویژگی‌های درس‌نامه رو خودتون توی خود درس‌نامه‌ها ببینین. بهتون قول می‌دیم که اگه درس‌نامه‌ها رو خوب بخونید و یاد بگیرید، تست‌ها براتون خیلی آسون‌تر می‌شن. پس لطفاً خوندن درس‌نامه‌ها فراموش نشه.

- **و اما پاسخ‌های تشریحی**: برای خیلی از تستا دو یا سه روش حل نوشتیم و تا جایی که امکانش بود روش‌های حل سریعِ معتبر و به‌دردبخور رو هم آوردیم. توصیهٔ ما به شما اینه:

حتماً پاسخ‌های خودتون رو با پاسخ‌های تشریحی ما چک کنید. اگه پاسخ‌های ما بهتر بود که بهترش رو یاد بگیرید. اگه پاسخ‌های شما بهتر بود به ما هم بگین تا ما پاسخ‌هامون رو بهتر کنیم.

راستی تا یادمون نرفته یه خواهشی از شما داریم:

از شما می‌خوایم که ایرادامون رو بهمون بگید. حتی اگه فکر می‌کنید ایراد کوچیکیه بهمون بگید؛ همون‌جوری که یه دوست واقعی ایرادای دوستش رو می‌گه. دم همهٔ شما گرم.

براتون آرزوی کلی اتفاقای خوب و باحال داریم.

حرف آخر: **یک مرد بزرگ گفت**:

«ما با یکی از چغر و بدبدن‌ترین حریفان عرصهٔ تاریخ معاصر جهان مواجهیم! اما این نهایتاً بدان معنا است که ما کاری بسیار سخت و سترگ پیش رو داریم و نه بیشتر از این؛ بسیار سخت اما نه غیرممکن.»

پایدار باشید

Telegram:@Physics12om
Instagram:@Physics12om

دستتون درد نکنه و از این حرفا:

- خیلی ممنونیم از دکتر امید و دکتر کمیل نصری و مهندس مهدی بقایی عزیز که هر کدام به نوبهٔ خود خیلی به‌موقع و به‌جا به ما شوک وارد کردید و ما را از خواب غفلت رهانیدین!
- سپاس از خانم ملیکا مهری که مهرت از اندازه فزون است و وجودت رسانندهٔ این کتاب. امیدواریم به هر چی می‌خوای برسی.
- امین امینی عزیز درود بر تو. رد چشمان تو در واژه واژهٔ این کتاب به‌جا مانده. الهی عاقبت‌به‌خیر بشی جوان.
- درود و سپاس از کارشناسان خبره، آقایان مجید ساکی، سعید فرهادی، علی‌رضا گونه، حمید فدائی‌فرد، احسان حسینیان، امیر عباسی منجزی و محمدرضا محمدی که با نظرات گرانبهایشان در این کتاب ما را یاری کردند.
- هم‌چنین سپاس ویژه از همکار دانشمند و بااخلاقمون جمال خم‌خاجی بزرگ‌وار و درود و سپاس از ویراستاران دقیق و کاردرست، خانم‌ها نرجس تیمناک، مریم گلی‌حسنلو، فریده قزوینی، زهرا دادخواه و سارا دانائی کجانی و آقایان محمدرضا فضلی، مهدی لشگری، محمد پوررضا، مهدی بابائی، احمد نعمتی، امیر مقیم‌نژاد، بهزاد آزادفر، امیر محمودی انزابی، امیرمحمد یوسفی، محمد احمدبیکی، علی ونکی فراهانی، محمدجواد سورچی، امیرعلی فراهانی، امید احسانی و محمد قریب که در بهبود کیفیت علمی کتاب ما را یاری کردند.
- درود بی‌کران بر سهیل سمائی عزیز و بروبچه‌های تولید که همیشه بیشترین همکاری رو با ما داشتند و سپاس از کاوه چمن‌کار و طراحان جلد باذوق و خلاق این کتاب و هم‌چنین خانم لولاو مرادی که برای به ثمر رسیدن جلد این کتاب خیلی زحمت کشیدن.
- و یک تشکر ویژه از مهندس فرزاد وزیری و همکاران پرتلاش چاپندهٔ خیلی‌سبز و هم‌چنین دوست خوبمان میثم درویش و تیم همیشه سرفراز فروش و خلاصه همهٔ دست‌اندرکاران تولید و پخش این کتاب ... .

فهرست

فصل اول

حرکت شناسی

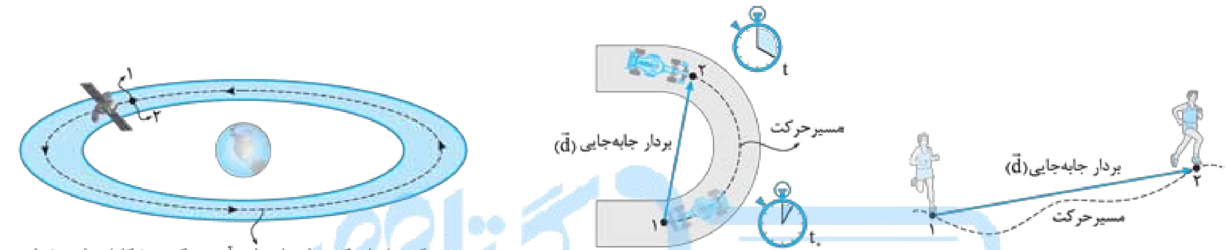
فصل ۱ شناخت حرکت

درس اول جابه‌جایی و مسافت پیموده شده

وقتی می‌گوییم یک جسم حرکت کرده است، منظورمان این است که آن جسم در طی زمان، مسافتی را پیموده و **احتمالاً** جابه‌جا هم شده است. *حالا چرا احتمالاً! مگه می‌شه یک جسم راه بره ولی جابه‌جا نشه؟* جواب این سؤال را باید در تعریف جابه‌جایی جست‌وجو کنیم.

جابه‌جایی (تغییر مکان)

جابه‌جایی یا تغییر مکان، **برداری** است که از نقطهٔ آغاز حرکت به نقطهٔ پایان کشیده می‌شود. بردار جابه‌جایی را با $\vec{d}$ نشان می‌دهیم. در شکل‌های (الف) و (ب)، مسیر حرکت و بردار جابه‌جایی متحرک را نشان داده‌ایم.



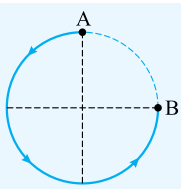
مسیر حرکت ماهواره که بردار جابه‌جایی آن در یک دورهٔ کامل برابر صفر است. (یعنی در یک دور، با آن که حرکت داریم ولی جابه‌جایی صفر است.)
(پ)

مسیر حرکت و بردار جابه‌جایی اتومبیل
(ب)

مسیرحرکت و بردار جابه‌جایی دونده
(الف)

چند نکته ① جابه‌جایی یک کمیت برداری است. یعنی به‌جز اندازه، جهت هم دارد. در شکل‌های (الف) و (ب) جهت بردار جابه‌جایی را نشان داده‌ایم.

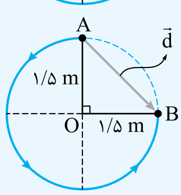
② جابه‌جایی بین دو نقطهٔ معین اصلاً به مسیر حرکت ربطی ندارد و فقط نقطهٔ ابتدا را به نقطهٔ انتهای حرکت وصل می‌کند؛ یعنی چیزی که در جابه‌جایی برای ما اهمیت دارد نقطهٔ اولیه و پایانی است. برای همین است که صفرشدن جابه‌جایی لزوماً به معنی بی‌حرکتی نیست! (شکل (پ))



تست ۱ در شکل روبه‌رو متحرکی بر روی محیط دایره‌ای از مسیر نشان داده شده، از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک چند متر است؟ (قطر دایره $3\ \text{m}$ است و $\pi \simeq 3$)

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $1/5\sqrt{2}$

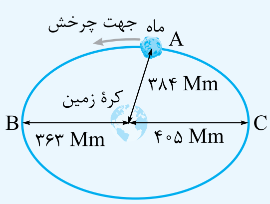
۳) $2/25$ ۴) $6/75$



پاسخ ۲ گفتیم جابه‌جایی ربطی به مسیر حرکت ندارد و برای رسم بردار جابه‌جایی کافی است مانند شکل روبه‌رو نقطهٔ ابتدای حرکت (یعنی A) را به نقطهٔ انتها (یعنی B) وصل کنید. در شکل روبه‌رو اندازهٔ بردار $\vec{d}$ برابر وتر مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ است:

$$d = \sqrt{(1/5)^2 + (1/5)^2} = 1/5\sqrt{2}\ \text{m}$$

گاهی در صورت سؤال انتخاب نقطه‌های ابتدا و انتهای حرکت را بر عهدهٔ خودتان می‌گذارند. مثلاً وقتی می‌پرسند اندازهٔ بزرگ‌ترین جابه‌جایی در طی مسیر چه‌قدر است، شما باید دو نقطه از مسیر را که بیشترین فاصله از هم دارند، به عنوان نقطهٔ ابتدا و انتها انتخاب کنید. تست زیر را ببینید:



تست ۲ مطابق شکل، مدار چرخش ماه به دور زمین، یک بیضی است. با توجه به این شکل، اندازهٔ بزرگ‌ترین جابه‌جایی که ماه نسبت به کرهٔ زمین در طول مسیر حرکتش دارد، چند مگامتر است؟

۱) ۸۱۱ ۲) ۷۹۰

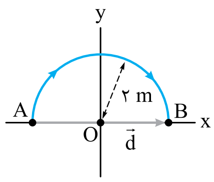
۳) ۷۶۸ ۴) ۴۰۵

پاسخ ۳ واضح است که بزرگ‌ترین جابه‌جایی که ماه می‌تواند داشته باشد، از نقطهٔ B تا C یا از نقطهٔ C تا B است. پس قطر بزرگ بیضی (یعنی طول BC)، جواب این تست است:

$$BC = 363 + 405 = 768\ \text{Mm}$$

حواستون باشه در صورت تست گفتیم «**جابه‌جایی ماه نسبت به کرهٔ زمین**» یعنی کرهٔ زمین را مبدأ بگیرید و در نتیجه با حرکت ماه به خاطر چرخش زمین به دور خورشید کاری نداریم.

۳) بردار جابه‌جایی را مانند همهٔ بردارها می‌توانید به صورت بردارهای یکه هم بنویسید. مثلاً در شکل روبه‌رو متحرک بر روی مسیر نیم‌دایره از A تا B رفته است. همین‌طور که می‌بینید متحرک از A تا B، $4\,m$ در جهت مثبت محور x جابه‌جا شده است؛ یعنی داریم: $\vec{d}=4\vec{i}$



تست | طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، $18\,cm$ است. بردار جابه‌جایی نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار، از ساعت ۸:۰۵ تا ساعت ۱۱:۵۵ در SI کدام است؟

۱) $0/18\vec{i}$

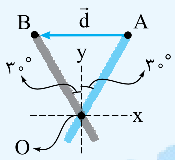
۲) $-0/18\vec{i}$

۳) $0/18\sqrt{3}\vec{i}$

۴) $-0/18\sqrt{3}\vec{i}$

پاسخ ۲ | **گام اول:** در شکل (الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار را در موقعیت $5'$ و $55'$ نشان داده‌ایم و در شکل (ب) بردار جابه‌جایی نوک این عقربه را از $5'$ تا $55'$ مشخص کرده‌ایم.


(الف)



(ب)

گام دوم: عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر ۵ دقیقه زاویهٔ بین دو عدد روی ساعت را طی می‌کند. می‌دانید که روی ساعت، ۱۲ قسمت ۵ دقیقه‌ای وجود دارد. پس زاویه‌ای که عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر ۵ دقیقه طی می‌کند، برابر می‌شود با:

$$\alpha=\frac{\text{زاویهٔ یک دور کامل}}{12}=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$$

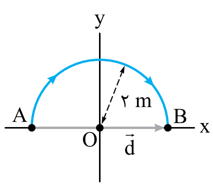
گام سوم: همین‌طور که در شکل ب می‌بینید، زاویهٔ بین دو وضعیت عقربهٔ دقیقه‌شمار از $5'$ تا $55'$ برابر 60° است. بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و اندازهٔ جابه‌جایی (طول ضلع AB) برابر طول عقربهٔ دقیقه‌شمار (یعنی $18\,cm$) است.

با توجه به این‌که بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ در خلاف جهت محور x است، داریم:

$$\vec{d}=-(18\,cm)\vec{i}\xrightarrow{\text{در SI}}\vec{d}=-(0/18\,m)\vec{i}$$

مسافت پیموده‌شده (l) و مقایسهٔ آن با جابه‌جایی $(\vec{d})$

به طول مسیری که متحرک می‌پیماید، مسافت می‌گوییم و آن را با حرف l نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو، متحرکی بر روی مسیر دایره‌ای‌شکل به شعاع $2\,m$ حرکت می‌کند. اگر نقطه‌های (A) و (B) را ابتدا و انتهای حرکت در نظر بگیریم، مسیر حرکت یک نیم‌دایره است که طول آن برابر می‌شود با:



$$\text{مسافت پیموده‌شده}=\text{طول مسیر حرکت}=l=\frac{1}{2}(\text{محیط دایره})=\frac{1}{2}(2\pi r)=\pi r=3/14\times 2=6/28\,m$$

پس در این شکل طول مسیر حرکت یا مسافتی که این متحرک پیموده، برابر $6/28\,m$ است، اما اندازهٔ بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ برابر قطر دایره است. یعنی:

$$d=2r=2\times 2=4\,m$$

نتیجه این‌که **«مسافت کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد ولی جابه‌جایی فقط به نقطهٔ آغاز و پایان وابسته است.»**

چند نکته

۱) جابه‌جایی یک کمیت برداری است (یعنی علاوه بر اندازه، جهت هم دارد)؛ اما مسافت یک کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد.

۲) همیشه طول مسیر حرکت از طول پاره‌خطی که ابتدای مسیر را به انتهای آن وصل می‌کند، بزرگ‌تر یا مساوی با آن است. پس می‌توانیم بگوییم: **«همواره مسافت از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر یا مساوی با آن است»**

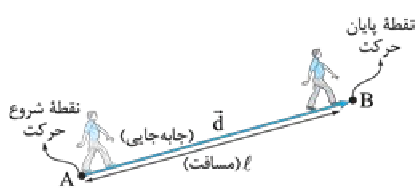
$$l\geq d$$

پرسش | **در چه صورتی مسافت طی‌شده توسط یک متحرک با اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر می‌شود؟**

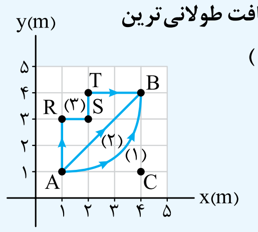
پاسخ | برای آن‌که مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی برابر شود، دو شرط لازم است:

۱) **مسیر حرکت مستقیم باشد.** ۲) **متحرک در طول مسیر تغییر جهت ندهد.**

مثلاً در شکل روبه‌رو متحرک بدون این‌که تغییر جهت بدهد، بر روی خط راست از A تا B رفته است و داریم: $l=d$



تست سه متحرک طی مسیرهای مختلف نشان داده شده در شکل روبه‌رو از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌روند. اختلاف مسافت طولانی‌ترین مسیر و کوتاه‌ترین مسیر و اندازهٔ جابه‌جایی هر یک چند متر است؟ (مسیر (۱) یک ربع دایره است، $\pi = ۳$, $\sqrt{۲} = ۱/۴$)



۱) ۴/۲ ، ۱/۸

۲) ۴/۵ ، ۱/۸

۳) ۴/۲ ، ۰/۵

۴) ۴/۵ ، ۰/۵

پاسخ ۱ **گام اول**: ابتدا مسافت طی‌شده در هر مسیر را حساب می‌کنیم:

مسیر ۱: متحرک (۱) مسیری به شکل ربع دایره را طی کرده است. با توجه به شکل، شعاع این دایره $۳\,m$ است. مسافتی که متحرک (۱) طی کرده، برابر است با:

$$l_۱ = \frac{۱}{۴}(\text{محیط دایره}) = \frac{\pi r}{۲} = \frac{۳\times۳}{۲} = ۴/۵\ m$$

مسیر ۲: متحرک (۲) پاره‌خط AB را طی کرده است، AB وتر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$l_۲ = \overline{AB} = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}\ m = ۳\times۱/۴ = ۴/۲\ m$$

مسیر ۳: متحرک (۳) هم مسافتی برابر با $۶\,m$ را طی می‌کند، زیرا:

$$l_۳ = \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TB} = ۲+۱+۱+۲ = ۶\ m$$

همین‌طور که می‌بینید طولانی‌ترین مسیر، مسیر (۳) و کوتاه‌ترین مسیر، مسیر (۲) است و اختلاف مسافت طولانی‌ترین و کوتاه‌ترین مسیر برابر می‌شود با:

$$l_۳ - l_۲ = ۶ - ۴/۲ = ۱/۸\ m$$

گام دوم: و اما اندازهٔ جابه‌جایی!

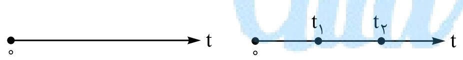
اندازهٔ جابه‌جایی هر سه مسیر برابر طول پاره‌خط AB (یعنی $۴/۲\,m$) است:

$$d_{AB} = \overline{AB} = ۴/۲\ m$$

همین‌طور که می‌بینید در مسیر ۲، مسافت برابر اندازهٔ جابه‌جایی است، اما در هر مسیری به‌جز این مسیر، مسافت از اندازهٔ جابه‌جایی (یعنی $۴/۲\,m$) بزرگ‌تر است.

لحظه، بازهٔ زمانی و نمایش آن‌ها بر روی محور زمان

بالاخره هر تغییری، مدت زمانی طول می‌کشد. پس زمان، کمیت مهمی است. یکی از روش‌های نمایش زمان، رسم محور زمان است (شکل (الف)). جهت مثبت این محور، سپری‌شدن زمان را نشان می‌دهد.



(الف) (ب)

- **نمایش لحظه بر روی محور زمان** • یک **لحظه** را بر روی محور زمان با یک **نقطه** نشان می‌دهیم. در شکل (ب) لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را مشخص کرده‌ایم.

حواستون باشه *وقتی می‌گیم $t_۱ = ۳\,s$ یعنی یک نقطه روی محور زمان که لحظهٔ $۳\,s$ رو نشون می‌ده. (نکنه فکر کنین $t_۱ = ۳\,s$ ، $۳\,s$ طول کشیده‌ها.) در ضمن مبدأ زمان هم خودش یه لحظه است، لحظهٔ $t_۰ = ۰$.*

- **نمایش بازهٔ زمانی بر روی محور زمان** • فاصلهٔ زمانی بین دو لحظه را **بازهٔ زمانی** می‌گوییم. بازهٔ زمانی را با Δt نشان می‌دهیم.

مثلاً در شکل (پ)، Δt، بازهٔ زمانی بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ است و برابر است با:

$$\Delta t = t_۲ - t_۱$$

(پ)

نکته گاهی بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ را به صورت $(t_۱, t_۲)$ هم نشان می‌دهیم. مثلاً وقتی می‌گوییم $(۳\,s, ۱۹\,s)$ یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۱۹\,s$.

حواستون باشه *زمان هرگز به عقب برنمی‌گرده. پس همیشه بازهٔ زمانی، عددی مثبته: $\Delta t > ۰$.*

- **مفهوم لحظه** • گفتیم «لحظه» را بر روی محور t با یک نقطه نشان می‌دهیم. در واقع لحظه، یک بازهٔ زمانی خیلی خیلی خیلی کوچک (به اندازهٔ یک نقطه روی محور t) است.

نکته همین‌طور که می‌دانید، ثانیه (s) یکای زمان در SI است. میلی‌ثانیه (ms)، دقیقه (min)، ساعت (h)، روز (day) و ... یکاهای دیگر زمان هستند.

$$۱min = ۶۰\,s \quad ; \quad ۱h = ۳۶۰۰\,s$$

حواستون باشه *سال نوری واحد طوله نه واحد زمان! (سال نوری مسافتیه که نور در مدت ۱ سال در خلأ می‌پیماید.)*

آشنایی با اصطلاحات زمان و جدول اصطلاحات زمان

در تست‌های کنکور با بعضی از اصطلاحات زمانی روبه‌رو می‌شویم، مثل لحظهٔ $t = ۳\,s$، ثانیهٔ سوم، ۳ ثانیهٔ اول یا ابتدای ۳ ثانیهٔ سوم که همهٔ این‌ها با هم فرق دارند و حل تست وابسته به دانستن مفهوم این اصطلاحات است.

در جدول زیر در هر ستون یکی از این اصطلاحات را معرفی کرده‌ایم:

اصطلاح	توضیح	نمایش بر روی محور زمان	مثال
لحظهٔ $t = n\,(s)$	یک نقطه بر روی محور زمان است و اصلاً طول نمی‌کشد.	$t=۰$ $t=۱s$ $t=۲s$ $t=۳s$ $t=n-۱(s)$ $t=n(s)$ $t(s)$	لحظهٔ $t=۲\,s$ یک نقطه بر روی محور t است.
ثانیهٔ nام	به بازهٔ زمانی $t_۱=(n-۱)\,s$ تا $t_۲=n\,s$ می‌گوییم ثانیهٔ nام. ثانیهٔ nام، ۱s طول می‌کشد.	$t=۰$ $t=۱s$ $t=۲s$ $t=۳s$ $t=n-۱(s)$ $t=n(s)$ $t(s)$ ثانیهٔ اول ثانیهٔ دوم ثانیهٔ سوم ثانیهٔ nام	ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=۱\,s$ تا $t=۲\,s$
T ثانیهٔ nام	به بازهٔ زمانی $t_۱=(n-۱)T\,s$ تا $t_۲=nT\,s$ می‌گوییم Tثانیهٔ nام. T ثانیهٔ nام، T ثانیه طول می‌کشد.	$t=۰$ $t=T(s)$ $t=۲T(s)$ $t=(n-۱)T(s)$ $t=nT(s)$ $t(s)$ T ثانیهٔ اول T ثانیهٔ دوم Tثانیهٔ nام	۳ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=۳\,s$ تا $t=۶\,s$

نکته هر بازهٔ زمانی محدود به دو لحظهٔ ابتدا و انتهای آن است. مثلاً ابتدای ثانیهٔ سوم، $t=۲\,s$ و انتهای آن $t=۳\,s$ است. یا ابتدای ۳ ثانیهٔ سوم، $t=۶\,s$ و انتهای آن $t=۹\,s$ است.

تکنیک برای آن‌که بتوانید سریع‌تر ابتدا و انتهای Tثانیهٔ nام را تشخیص بدهید. اول n را در T ضرب کنید تا انتهای آن بازه معلوم شود و سپس از nT به اندازهٔ Tثانیه کم کنید تا ابتدای بازه مشخص شود.

۷ ثانیهٔ چهارم ⟵ لحظهٔ انتهای بازه: $t_۲ = ۴\times ۷ = ۲۸\,s$ ⟵ لحظهٔ ابتدای بازه: $t_۱ = ۲۸ - ۷ = ۲۱\,s$

پس ۷ ثانیهٔ چهارم از لحظهٔ $t_۱=۲۱\,s$ شروع می‌شود و در لحظهٔ $t_۲=۲۸\,s$ تمام می‌شود.

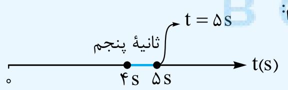
تست ۱ ثانیهٔ پنجم در کدام‌یک از بازه‌های زمانی زیر قرار دارد؟

الف) $t=۵\,s$ ب) $(۰/۹\,s, ۱۰/۹\,s)$ پ) ۳ ثانیهٔ دوم ت) ۲ ثانیهٔ چهارم

۱) (الف) و (ب) ۲) (ب) و (پ) ۳) (پ) و (ت) ۴) (الف) و (ت)

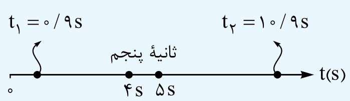
پاسخ ۲ ثانیهٔ پنجم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱=۴\,s$ تا $t_۲=۵\,s$. حالا حالت‌های (الف) تا (ت) را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

الف) لحظهٔ $t=۵\,s$ فقط یک لحظه است و قبل و بعد ندارد. می‌دانید که ثانیهٔ پنجم (که خودش یک بازهٔ زمانی است) در یک لحظهٔ نمی‌گنجد! ✗



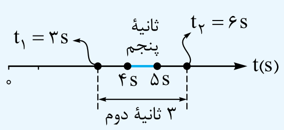
(الف)

ب) $(۰/۹\,s, ۱۰/۹\,s)$ یعنی بازهٔ زمانی $t_۱=۰/۹\,s$ تا $t_۲=۱۰/۹\,s$. همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، ثانیهٔ پنجم در بازهٔ $(۰/۹\,s, ۱۰/۹\,s)$ قرار دارد. ✓



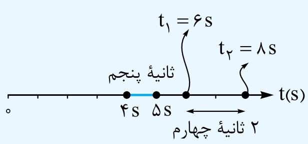
(ب)

پ) ۳ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱=۳\,s$ تا $t_۲=۶\,s$. همین‌طور که در شکل (پ) می‌بینید ثانیهٔ پنجم در ۳ ثانیهٔ دوم قرار دارد. ✓



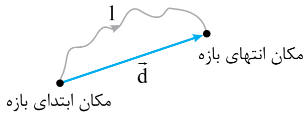
(پ)

ت) ۲ ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱=۶\,s$ تا $t_۲=۸\,s$ و ثانیهٔ پنجم در این بازه قرار ندارد. (شکل (ت)) ✗



(ت)

۱. گزینه ۴ مطابق شکل، مسافت طی‌شده، طول مسیری است که متحرک طی کرده است؛ اما جابه‌جایی، برداری است که مکان ابتدای حرکت را به مکان انتهای آن وصل می‌کند.



برای همین هیچ‌وقت مسافت طی‌شدهٔ متحرک در یک بازهٔ زمانی مشخص، کوچک‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی‌اش نخواهد بود. به زبان ریاضی:

اندازهٔ جابه‌جایی ≤ مسافت طی‌شده

اصلاح سایر گزینه‌ها:

۱) بردار جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ زمانی، برداری است که مکان متحرک در ~~انتهای~~ ابتدای بازه را به مکان آن در ~~ابتدای~~ انتهای بازه وصل می‌کند.

۲) مسافت طی‌شده و ~~جابه‌جایی متحرک~~ ، کمیت‌هایی نرده‌ای هستند.

(جابه‌جایی کمیتی جهت‌دار و برداری است.)

۳) در یک حرکت، مسافت طی‌شده و ~~جابه‌جایی متحرک~~ به مسیر حرکت وابسته است.

(جابه‌جایی بین دو نقطه، مستقل از مسیر حرکت است و فقط به مکان ابتدایی و انتهایی بستگی دارد.)

۲. گزینه ۴ اگر راستای حرکت و جهت آن تغییری نکند، مسافت طی‌شده توسط متحرک با اندازهٔ جابه‌جایی‌اش برابر می‌شود؛ با این حساب فقط در **شکل (ت)** مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی متحرک برابر خواهد بود، چراکه نه راستای حرکت تغییری کرده، نه جهت آن!

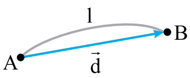
حواستون باشه در شکل (ب) با آن‌که راستای حرکت (مسیر) یک خط راست است و تغییری نکرده، اما جهت حرکت متحرک روی آن تغییر کرده، به خاطر همین اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت طی‌شدهٔ آن یکی نیست!

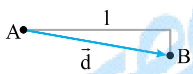
۳. گزینه ۱ عبارت‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

الف) در حرکت رفت و برگشت کامل، مکان ابتدا و انتهای حرکت یکی است، پس اندازهٔ جابه‌جایی صفر می‌شود. ✗

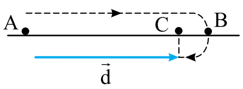
ب) در این حالت طول پاره‌خطی که نقطهٔ ابتدا و انتهای حرکت را به هم وصل می‌کند، حتماً از طول مسیر حرکت کوچک‌تر است! پس حتماً اندازهٔ جابه‌جایی متحرک از مسافت طی‌شده توسط آن کوچک‌تر است. ✓

و برای درک بهتر:



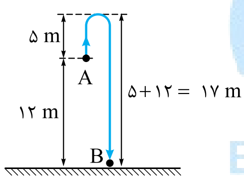


پ) در این حالت هم اگر تغییر جهت داشته باشیم، مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی با هم برابر نمی‌شوند. مثلاً در شکل مقابل متحرک روی خط راست از نقطهٔ A تا B می‌رود و سپس به نقطهٔ C باز می‌گردد. اما همان‌طور که پیداست، اندازهٔ جابه‌جایی کوچک‌تر از مسافت طی‌شده است. ✗



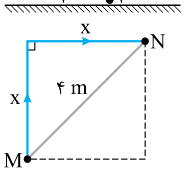
ت) جابه‌جایی یک کمیت برداری است، برای همین علاوه بر اندازه (فاصلهٔ مکان آغازین و پایانی)، جهت هم دارد. ✗

۴. گزینه ۳ مطابق شکل، توپ از نقطهٔ A حرکت کرده و در نهایت به نقطهٔ B رسیده است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی آن ۱۲ m می‌شود، اما در مورد مسافت قضیه فرق می‌کند. مطابق شکل توپ ۵ m بالا می‌رود و ۱۷ m پایین می‌آید؛ بنابراین:



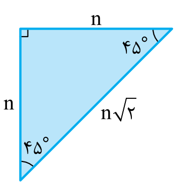
$$\text{مسافت پیموده‌شده} = ۵ + (۵ + ۱۲) = ۲۲\ m$$

۵. گزینه ۳ با توجه به شکل اندازهٔ جابه‌جایی متحرک برابر قطر مربع و مسافت طی‌شده، ۲ برابر ضلع مربع است. یعنی مسافت طی‌شده برابر با $۲x\ (m)$ است؛ حالا کافی است به کمک قضیهٔ فیثاغورس x را حساب کنیم و دو برابر آن را مساوی مسافت قرار دهیم:



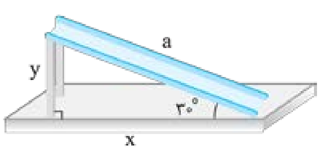
$$d = ۴ = \sqrt{x^۲ + x^۲} \Rightarrow ۴ = \sqrt{۲x^۲} \Rightarrow ۱۶ = ۲x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲}\ m \Rightarrow l = ۲x = ۴\sqrt{۲}\ m$$

تکنیک مانند شکل روبه‌رو مسیر حرکت و جابه‌جایی آن یک مثلث ۴۵° ـ ۴۵° تشکیل می‌دهد. بنابراین داریم:



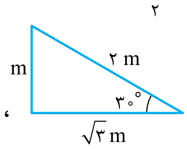
$$n\sqrt{۲} = ۴ \Rightarrow n = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow l = ۲n = ۴\sqrt{۲}\ m$$

۶. گزینه ۱ مطابق شکل مسافت طی‌شدهٔ توسط کودک برابر $y + a$ و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر x است. حالا برای آن‌که نسبت اندازهٔ جابه‌جایی به مسافت طی‌شده توسط این کودک را حساب کنیم، کافی است کمی روابط مثلثاتی بلد باشیم:



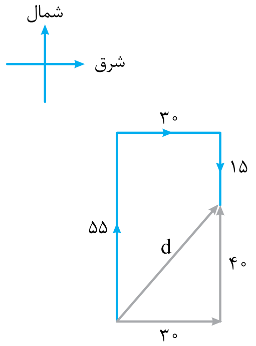
$$\frac{d}{l} = \frac{x}{y+a} \xrightarrow[y=a\sin ۳۰^\circ]{x=a\cos ۳۰^\circ} \frac{d}{l} = \frac{a\cos ۳۰^\circ}{\underbrace{a\sin ۳۰^\circ + a}_{a(\sin ۳۰^\circ + ۱)}} = \frac{\cos ۳۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ + ۱} \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\underbrace{\frac{۱}{۲} + ۱}_{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

تکنیک با الگوی مثلث



، روبه‌رو هستیم؛ بنابراین:

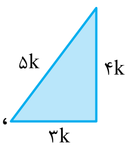
$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{۳}\ m}{m + ۲m} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



۷. گزینه ۴ **گام اول**: رسم یک شکل خوب، کمک زیادی به حل این مسئله می‌کند. مطابق شکل خودرو ۵۵ m در جهت شمال و ۱۵ m در جهت جنوب حرکت کرده، پس در مجموع ۴۰ m در جهت شمال حرکت کرده و ۳۰ m در جهت شرق! بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی خودرو برابر است با:

$$d=\sqrt{30^2+40^2}=50\,m$$

تکنیک با توجه به شکل، این‌جا با الگوی مثلث

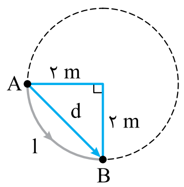


، روبه‌رو هستیم؛ بنابراین:

$$3k=30 \Rightarrow d=5k=50\,m$$

گام دوم: حالا مسافت طی‌شده و سپس نسبت مسافت به اندازهٔ جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$l=55+30+15=100\,m \Rightarrow \frac{l}{d}=\frac{100}{50}=2$$

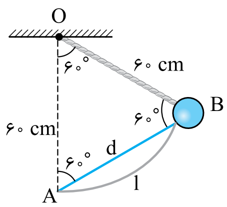


۸. گزینه ۱ **مسافت پیموده‌شده**: برابر طول کمان AB است. مطابق شکل، این مسیر ربع دایره‌ای به شعاع ۲ m است:

$$l=\widehat{AB}=\frac{\text{محیط دایره}}{4}=\frac{2\pi R}{4}=\frac{2\pi(2)}{4}=\pi\,m$$

اندازهٔ جابه‌جایی: برابر طول برداری است که A را به B وصل می‌کند. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، این بردار وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با ساق‌هایی به طول ۲ m است:

$$d=\overline{AB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\,m$$



۹. گزینه ۲ **گام اول**: ابتدا مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی را باید حساب کنیم:

محاسبهٔ مسافت طی‌شده: برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده، باید ببینیم کمان ۶۰ درجه‌ای چه کسری از کل محیط دایره است:

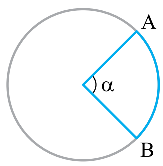
$$l=\overset{\frac{1}{6}}{\frac{60}{360}}\times 2\pi R=\frac{\pi R}{3}=\frac{3.14\times 60}{3}=62.8\,cm$$

یادآوری برای محاسبهٔ طول یک کمان در دایره، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{طول کمان}=\widehat{AB}=\frac{\alpha}{360}\times \text{محیط دایره}$$

این رابطه به ما می‌گوید که کمان مورد نظر چه کسری از محیط دایره است:

$$\frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\alpha}{360}$$

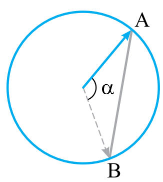


محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی: با توجه به شکل از آن‌جا که $OA=OB$ و زاویهٔ رأس آن 60° است؛ طول جابه‌جایی (AB) یکی از ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰ سانتی‌متری است؛ یعنی:

$$d=AB=60\,cm$$

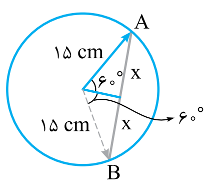
گام دوم: حالا اختلاف این دو مقدار جواب تست را مشخص می‌کند:

$$l-d=62.8-60=2.8\,cm$$



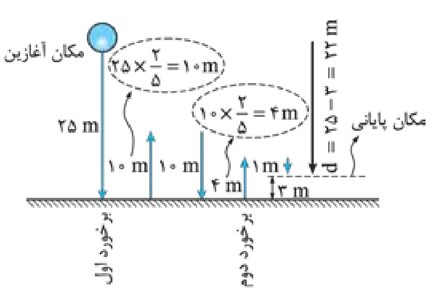
۱۰. گزینه ۳ **گام اول**: ابتدا با توجه به مسافت طی‌شده، باید بفهمیم چه کسری (چند درجه) از محیط دایره طی شده است. برای این کار محیط دایره را حساب می‌کنیم تا مقدار α را پیدا کنیم:

$$\text{محیط دایره}=2\pi R=2\pi\times 15=30\pi \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\alpha}{360} \Rightarrow \frac{10\pi}{30\pi}=\frac{\alpha}{360} \Rightarrow \alpha=120^\circ$$



گام دوم: حالا باید اندازهٔ پاره‌خط AB را حساب کنیم تا اندازهٔ جابه‌جایی معلوم شود. برای این کار مطابق شکل نیمساز زاویهٔ α را رسم می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه به دست آمده، اندازهٔ x و سپس (AB)۲x را محاسبه کنیم:

$$\sin 60^\circ=\frac{x}{15} \Rightarrow x=15\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB=2x=2\times 15\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}\,cm$$



۱۱. گزینه ۲ از این‌که بیشینهٔ ارتفاع توپ بعد از هر بار برخورد به سطح زمین، ۶۰ درصد نسبت به حالت قبلش کم می‌شود می‌فهمیم که بیشینهٔ ارتفاع توپ بعد از هر بار برخورد $\frac{2}{5}$ برابر (یا همان ۴۰ درصد) حالت قبلش است. پس برای آن‌که توپ مسافت ۵۰ m را طی کند باید مسیر شکل روبه‌رو را بپیماید.

$$l=50\,m=25+10+10+4+1$$

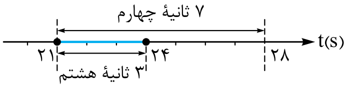
همین‌طور که در شکل معلوم است، فاصلهٔ نهایی توپ از سطح زمین پس از طی مسافت ۵۰ m برابر ۳ m است. بنابراین جابه‌جایی از لحظهٔ رها شدن توپ تا لحظه‌ای که توپ مسافت ۵۰ m را طی کرده برابر می‌شود با:

$$d=25-3=22\,m$$

۱۲. گزینه ۲ هفتمین نیم‌ثانیه یا نیم‌ثانیهٔ هفتم می‌شود از $t_1=(7-1)\times 0.5\,s$ تا $t_2=7\times 0.5\,s$؛ یعنی بازهٔ زمانی $(3\,s, 3.5\,s)$

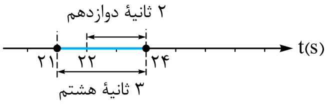
۱۳. گزینه ۱ ۳ ثانیهٔ هشتم می‌شود بازهٔ زمانی $t_1=(8-1)\times 3=21\,s$ تا $t_2=8\times 3=24\,s$، حالا با توجه به این موضوع، بازه‌های زمانی «الف» تا «ت» را با ۳ ثانیهٔ هشتم مقایسه می‌کنیم:

الف) ۷ ثانیهٔ چهارم می‌شود بازهٔ زمانی $t_1=(4-1)\times 7=21\,s$ تا $t_2=4\times 7=28\,s$؛ همین‌طور که در شکل (الف) می‌بینید ۳ ثانیهٔ هشتم در ۷ ثانیهٔ چهارم قرار دارد. ✓



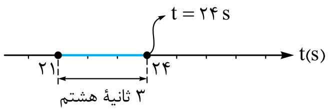
(الف)

ب) ۲ ثانیهٔ دوازدهم می‌شود بازهٔ زمانی $t_1=(12-1)\times 2=22\,s$ تا $t_2=12\times 2=24\,s$؛ در شکل (ب) نشان داده‌ایم که ۳ ثانیهٔ هشتم از بازهٔ ۲ ثانیهٔ دوازدهم بزرگ‌تر است. (در کل هر ۳ ثانیه‌ای از هر ۲ ثانیه‌ای بزرگ‌تر است!) ✗



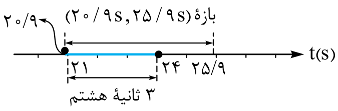
(ب)

پ) $t=24\,s$ فقط یک لحظه است و هیچ بازهٔ زمانی‌ای در یک لحظه جا نمی‌شود! (شکل پ) ✗



(پ)

ت) بازهٔ زمانی $20/9\,s$ تا $25/9\,s$ را بر روی محور ببینید (شکل ت). ۳ ثانیهٔ هشتم در داخل این بازه قرار دارد. ✓



(ت)

درس دوم سرعت متوسط و تندی متوسط

در یک حرکت معین، جابه‌جایی و مسافت دو کمیتی است که هم‌زمان با هم ایجاد می‌شوند. اگر Δt زمان حرکت باشد، می‌توانیم با تقسیم جابه‌جایی و مسافت بر Δt به کمیت‌های جدیدی برسیم. اسم این کمیت‌ها به ترتیب «**سرعت متوسط**» و «**تندی متوسط**» است.

سرعت متوسط $(\vec{v}_{av})$ [۱و۲]

در یک حرکت، به نسبت جابه‌جایی $(\vec{d})$ به زمان حرکت (Δt)، **سرعت متوسط** $(\vec{v}_{av})$ می‌گوییم:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}}$$

با توجه به رابطهٔ بالا، یکای سرعت در SI، متر بر ثانیه (m/s) است.

در واقع سرعت متوسط، برداری است که جابه‌جایی متحرک در یکای زمان (مثلاً هر ثانیه) را به طور متوسط نشان می‌دهد. مثلاً اگر سرعت متوسط یک متحرک $2\,m/s$ باشد، یعنی این متحرک به طور متوسط در هر ثانیه $2\,m$ جابه‌جا می‌شود.

چند نکته

۱) سرعت متوسط یک کمیت برداری است، زیرا از حاصل‌ضرب $\frac{1}{\Delta t}$ در بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ به دست می‌آید. از آن‌جا که $\frac{1}{\Delta t}$ مقداری همواره مثبت است می‌توانیم بگوییم، بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با بردار جابه‌جایی است.

۲) سرعت متوسط هم مثل جابه‌جایی اصلاً ربطی به مسیر حرکت ندارد و فقط به نقطهٔ ابتدا و انتهای حرکت وابسته است. *(یادمون نره بردار سرعت متوسط همیشه هم‌جهت با بردار جابه‌جاییه)*

تندی متوسط (s_{av}) [۳] و مقایسهٔ آن با سرعت متوسط $(\vec{v}_{av})$

تندی متوسط نسبت مسافتی که یک متحرک می‌پیماید به زمان حرکتش است و آن را با نماد s_{av} نشان می‌دهیم.

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{s_{av}=\frac{l}{\Delta t}}$$

براساس رابطهٔ بالا، یکای تندی هم (مانند سرعت) در SI، متر بر ثانیه (m/s) است.

تندی متوسط به ما می‌گوید که متحرک به طور متوسط در یکای زمان (مثلاً هر ثانیه) چه مسافتی را می‌پیماید. مثلاً اگر تندی متحرکی $2/5\,m/s$ باشد، یعنی این متحرک به طور متوسط در هر ثانیه مسافت $2/5\,m$ را طی می‌کند.

---

۱ و ۲- av مخفف واژهٔ «average» به معنی «متوسط» است. v هم مخفف واژهٔ «velocity» به معنای «سرعت» است.

۳- s مخفف واژهٔ «speed» به معنی «تندی» است.

چند نکته بدانید و آگاه باشید که شباهت‌ها و تفاوت‌های سرعت متوسط و تندی متوسط مانند شباهت‌ها و تفاوت‌های جابه‌جایی و مسافت است. پس در تمام نکته‌های زیر این موضوع را فراموش نکنید:

۱) تندی متوسط مانند مسافت یک کمیت نرده‌ای است (برخلاف سرعت متوسط که مانند جابه‌جایی یک کمیت برداری و جهت‌دار است.)

۲) همان‌طور که در یک حرکت مسافت همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است، تندی متوسط هم همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ سرعت متوسط است. زیرا:

$$l \geq d \xrightarrow{\text{دو طرف را بر } \Delta t \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{l}{\Delta t} \geq \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} \geq v_{av}$$

۳) برای آن‌که در یک حرکت تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط شود، دو شرط لازم است: *(همون شرایطی که برای مسافت و جابه‌جایی هم داشتیم.)*

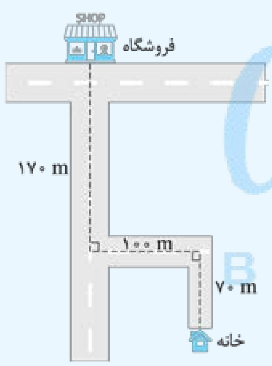
شرط ۱: مسیر حرکت مستقیم باشد. شرط ۲: متحرک تغییر جهت ندهد.

زیرا با وجود این دو شرط $l = d$ می‌شود و در نتیجه $\frac{l}{\Delta t}$ هم مساوی $\frac{d}{\Delta t}$ خواهد شد.

در جدول زیر سرعت متوسط و تندی متوسط را در یک نگاه با هم مقایسه کرده‌ایم.

	سرعت متوسط	تندی متوسط
رابطه	$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$	$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$
یکا در SI	m/s	m/s
نوع کمیت	برداری (هم‌جهت با جابه‌جایی)	نرده‌ای
وابستگی به مسیر حرکت	مستقل از مسیر حرکت (به نقطهٔ آغاز و پایان وابسته است.)	وابسته به مسیر حرکت
مقایسهٔ اندازهٔ این دو کمیت	$s_{av} \geq v_{av}$ (اگر حرکت مستقیم و بدون تغییر جهت باشد، تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط می‌شود.)	

تست شکل روبه‌رو موقعیت خانه و فروشگاه یک شخص را نشان می‌دهد. اگر این شخص در مدت ۸ min از روی مسیر مشخص‌شده در شکل از خانه به فروشگاه برود، تندی متوسط او چند متر بر ثانیه از اندازهٔ سرعت متوسطش بیشتر است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*



۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

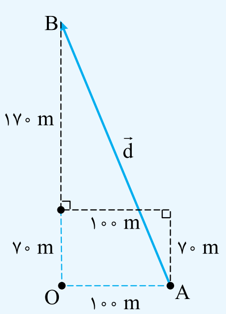
۳) ۱

۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ ۱ **گام اول**: با توجه به مسافتی که شخص برای رسیدن از خانه به فروشگاه می‌پیماید، تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۷۰+۱۰۰+۱۷۰}{۸\times۶۰} = \frac{۳۴۰}{۸\times۶۰} = \frac{۱۷}{۲۴}\ m/s$$

گام دوم: برای محاسبهٔ سرعت متوسط ابتدا باید جابه‌جایی را حساب کنیم.



همین‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، اندازهٔ جابه‌جایی برابر وتر مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ است. پس داریم:

$$d = \sqrt{(۱۰۰)^۲ + (۱۷۰+۷۰)^۲} = ۲۶۰\ m$$

تکنیک اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB مطابق با الگوی ۱۳n، ۱۲n، ۵n است. یعنی:

$$\begin{cases} OA = ۵\times۲۰ \\ OB = ۱۲\times۲۰ \end{cases} \Rightarrow d = AB = ۱۳\times۲۰ = ۲۶۰\ m$$

حالا اندازهٔ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۲۶۰}{۸\times۶۰} = \frac{۱۳}{۲۴}\ m/s$$

گام سوم: **روش I** اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط را می‌خواهیم:

$$s_{av} - v_{av} = \frac{۱۷}{۲۴} - \frac{۱۳}{۲۴} = \frac{۴}{۲۴} = \frac{۱}{۶}\ m/s$$

روش II می‌توانید اول اختلاف مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی را به دست بیاورید و پس حاصل را بر زمان تقسیم کنید:

$$s_{av} - v_{av} = \frac{l-d}{\Delta t} = \frac{۳۴۰-۲۶۰}{۸\times۶۰} = \frac{۱}{۶}\ m/s$$

تست ؟ | **طول عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعت دیواری روبه‌رو ۹۰ cm است. در بازهٔ زمانی $۹:۲۵'$ تا $۱۰:۴۰'$ تندی متوسط نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار چند متر بر ثانیه از اندازهٔ سرعت متوسط آن بیشتر است؟ ($\sqrt{۲}=۱/۴$, $\pi \simeq ۳$)**

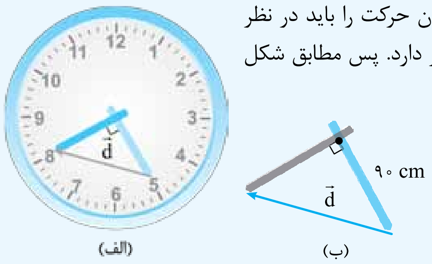
۱) ۲×۱۰^{-۲}
۲) $۱/۲۲\times ۱۰^{-۱}$
۳) ۲×۱۰^{-۴}
۴) $۱/۲۲\times ۱۰^{-۳}$

پاسخ ۴ | **گام اول:** ابتدا باید بفهمیم که عقربهٔ دقیقه‌شمار در بازهٔ زمانی $۹:۲۵'$ تا $۱۰:۴۰'$ چه‌قدر پیشروی می‌کند. این بازهٔ زمانی ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه طول می‌کشد. یعنی عقربهٔ دقیقه‌شمار ۱ دور کامل و $\frac{۱}{۴}$ دور می‌زند. پس داریم:

$$l=(۱+\frac{۱}{۴})۲\pi r=\frac{۵}{۴}\times ۲\times \pi\times ۹۰ \xrightarrow{\pi=۳} l=۶۷۵\ \text{cm}$$

گام دوم: برای محاسبهٔ جابه‌جایی، مهم نیست که عقربه چند دور چرخیده باشد! بلکه نقطهٔ آغاز و پایان حرکت را باید در نظر بگیریم. مطابق شکل الف عقربهٔ دقیقه‌شمار در $۹:۲۵'$ بر روی عدد ۵ و در $۱۰:۴۰'$ بر روی عدد ۸ قرار دارد. پس مطابق شکل (ب) زاویهٔ بین دو وضعیت ۹۰° است و جابه‌جایی نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار به این صورت حساب می‌شود:

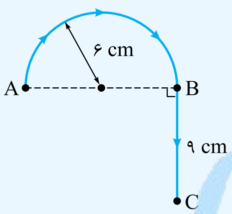
$$d=\sqrt{۹۰^۲+۹۰^۲}=۹۰\sqrt{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} d=۹۰\times ۱/۴=۱۲۶\ \text{cm}$$



(الف) (ب)

گام سوم: اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط را می‌خواهیم. پس داریم:

$$s_{av}-v_{av}=\frac{l-d}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=۱\,h,۱۵\,min=۷۵\times ۶۰\,s} s_{av}-v_{av}=\frac{(۶۷۵-۱۲۶)\times ۱۰^{-۲}}{۷۵\times ۶۰}=\frac{\overset{۶۱}{\cancel{۵۴۹}}\times ۱۰^{-۲}}{\underset{۲۵}{\cancel{۷۵}}\times \underset{۲۰}{\cancel{۶۰}}}=۱/۲۲\times ۱۰^{-۳}\ \text{m/s}$$



تست ؟ | **مطابق شکل روبه‌رو مورچه‌ای در مدت Δt ابتدا مسیر نیم‌دایره‌ای AB به شعاع ۶ cm و سپس در همان مدت مسیر مستقیم BC به طول ۹ cm را می‌پیماید. اگر تندی متوسط مورچه در مسیر نیم‌دایره ۳ cm/s باشد، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسطش در کل مسیر به ترتیب از راست به چپ، چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ($\pi \simeq ۳$)**

۱) ۱/۲۵ ـ ۲/۲۵
۲) ۲/۲۵ ـ ۱/۲۵
۳) ۱/۷۵ ـ ۲/۲۵
۴) ۱/۲۵ ـ ۱/۷۵

پاسخ ۱ | **گام اول:** برای محاسبهٔ Δt، تندی متوسط در مسیر نیم‌دایرهٔ AB را داریم و مسافت طی‌شده در این مسیر (طول نیم‌دایره) را می‌توانیم حساب کنیم؛ یعنی:

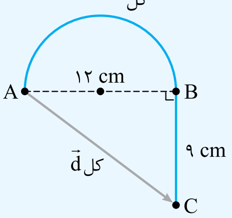
$$l_{AB}=\frac{\text{محیط دایره}}{۲}=\frac{۲\pi r}{۲}=\pi r=۳\times ۶=۱۸\ \text{cm} \qquad s_{av,AB}=\frac{l_{AB}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{l_{AB}}{s_{av,AB}}=\frac{۱۸}{۳}=۶\ \text{s}$$

گام دوم: صورت سؤال می‌گوید مورچه مسیر BC را هم در همین مدت (یعنی ۶ s) پیموده است. پس زمان کل حرکت $۲\Delta t$ است و داریم:

$$s_{av,\text{کل}}=\frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{l_{AB}+l_{BC}}{۲\Delta t}=\frac{۱۸+۹}{۲\times ۶}=۲/۲۵\ \text{cm/s}$$

(تا این‌جا یا ۱ درست است یا ۳)

گام سوم: برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط باید اندازهٔ جابه‌جایی کل یعنی طول AC را داشته باشیم.



$$d=\sqrt{۱۲^۲+۹^۲}=۱۵\ \text{cm}$$

با توجه به شکل داریم:

$$v_{av,\text{کل}}=\frac{d_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{۱۵}{۱۲}=۱/۲۵\ \text{cm/s}$$

۱۴. گزینه ۱ عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) **درست؛** سرعت متوسط یک کمیت برداری است؛ یعنی جهت دارد. سرعت (چه متوسط و چه لحظه‌ای) جزء کمیت‌های فرعی است.

یادآوری کمیت‌های اصلی عبارت‌اند از: ۱- طول ۲- جرم ۳- زمان ۴- جریان الکتریکی ۵- دما ۶- مقدار ماده (mol) ۷- شدت روشنایی

ب) **نادرست؛** تندی متوسط یک کمیت نرده‌ای است؛ یعنی اصلاً جهت ندارد که بخواهد با جابه‌جایی هم‌جهت باشد.

پ) **نادرست؛** سرعت متوسط نسبت جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی است؛ نه نسبت مسافت به زمان!

ت) **نادرست؛** اگر متحرک روی همان خط راست تغییر جهت بدهد، اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر نمی‌شود.

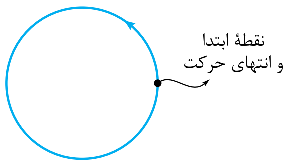
۱۵. گزینه ۲ برای آن‌که اندازهٔ سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن در یک بازهٔ زمانی برابر شود، باید متحرک **روی خط راست** حرکت کند و تغییر جهت هم **ندهد**. شکل‌های (الف) و (پ) این ویژگی را دارند.

حواستون باشه در شکل (ب) متحرک روی خط راست حرکت کرده ولی تغییر جهت داده!

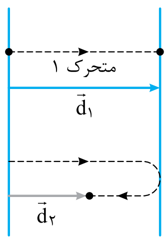
۱۶. گزینه ۴ از آن‌جا که نقطهٔ شروع حرکت (نقطهٔ A) و نقطهٔ پایان حرکت (نقطهٔ B) هر دو متحرک یکسان است، جابه‌جایی هر دو متحرک برابر است.
دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:
چون مسیر حرکت دو متحرک با هم فرق می‌کند، مسافت طی‌شده هم لزوماً برابر نیست. ضمناً چون اطلاعاتی از زمان حرکت دو متحرک نداریم، با وجود جابه‌جایی یکسان دو متحرک، نمی‌توانیم بگوییم سرعت متوسط آن‌ها الزاماً برابر است! در مورد تندی متوسط $(\frac{l}{\Delta t})$ هم نمی‌توانیم اظهار نظر قطعی کنیم، چون نه از طول مسیرها چیزی می‌دانیم و نه از زمان حرکت دو متحرک.

۱۷. گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) وقتی تندی متوسط صفر است، یعنی مسافت طی‌شده توسط متحرک صفر است. یعنی متحرک اصلاً حرکت نکرده است. واضح است جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرکی که حرکت نکند هم صفر است. ✓



۲) متحرک می‌تواند مانند شکل روبه‌رو مسیری را طی کرده باشد و دوباره به مکان اولیه برگردد. در این حالت، سرعت متوسط صفر است ولی تندی متوسط صفر نیست. ✗

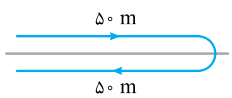


۳) برای رد این گزینه یک مثال نقض می‌زنیم. دو متحرک روبه‌رو را در نظر بگیرید. جابه‌جایی متحرک (۱) از جابه‌جایی متحرک (۲) بیشتر است. اما اگر این دو متحرک کل مسیر حرکتشان را در زمان‌های مساوی طی کنند، تندی متوسط متحرک (۲) بیشتر می‌شود. ✗

$$\begin{cases}\Delta t_۱ = \Delta t_۲ \\ l_۱ < l_۲\end{cases} \Rightarrow s_{av,۱} < s_{av,۲}$$

۴) وقتی متحرک روی خط راست حرکت کند و تغییر جهت ندهد، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط برابر می‌شود. ✗

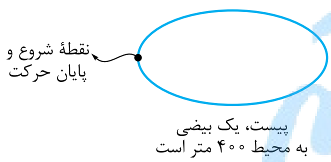
۱۸. گزینه ۳ چون تندی متوسط را می‌خواهیم، باید مسافت پیموده‌شده را تقسیم بر زمان طی مسافت کنیم.



مطابق شکل، فلیپس ۵۰ m می‌رود و ۵۰ m هم برمی‌گردد؛ یعنی ۱۰۰ m را طی می‌کند، با این حساب:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۰۰}{۵۰} = ۲\,m/s$$

۱۹. گزینه ۴ با توجه به شکل روبه‌رو، رودیشا برای این‌که ۸۰۰ m را طی کند، ۲ بار بیضی را دور زده و به جای اول خودش برگشته است؛ پس جابه‌جایی رودیشا و سرعت متوسطش هم صفر می‌شود؛ به زبان ریاضی:



$$\Delta x = ۰ \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰}{۱۰۰\,s} = ۰$$

۲۰. گزینه ۴ **گام اول:** فرد مورد نظر در بازهٔ $(۲\,s, ۱۶\,s)$ از A تا B به اندازهٔ ۱۰ m و از B تا C به اندازهٔ ۴ m را طی می‌کند؛ پس تندی متوسط آن برابر است با:

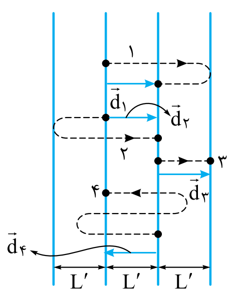
$$l_{AC} = ۱۰ + ۴ = ۱۴\,m \Rightarrow s_{av,AC} = \frac{l_{AC}}{\Delta t} = \frac{۱۴}{۱۶-۲} = \frac{۱۴}{۱۴} = ۱\,m/s$$

گام دوم: در مسیر A تا B، جابه‌جایی برابر ۱۰ m است؛ با این حساب سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $(۲\,s, ۱۲\,s)$ برابر است با:

$$v_{av,AB} = \frac{d_{AB}}{\Delta t'} = \frac{۱۰}{۱۲-۲} = \frac{۱۰}{۱۰} = ۱\,m/s$$

گام سوم: چون $s_{av,AC} = v_{av,AB}$ است، نسبت $\frac{s_{av,AC}}{v_{av,AB}}$ برابر ۱ می‌شود.

۲۱. گزینه ۴ به کمک شکل روبه‌رو و با توجه به این‌که $\Delta t_۱ = \Delta t_۲ = \Delta t_۳ = \Delta t_۴$ است، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



اندازهٔ جابه‌جایی هر سه متحرک با هم برابر است، ولی جهت بردار $\vec{d}_۴$ در خلاف جهت بردارهای دیگر است.

$$\vec{d}_۱ = \vec{d}_۲ = \vec{d}_۳ = -\vec{d}_۴ \Rightarrow d_۱ = d_۲ = d_۳ = d_۴ = L' \Rightarrow \frac{d_۱}{\Delta t_۱} = \frac{d_۲}{\Delta t_۲} = \frac{d_۳}{\Delta t_۳} = \frac{d_۴}{\Delta t_۴} \Rightarrow v_{av,۱} = v_{av,۲} = v_{av,۳} = v_{av,۴}$$

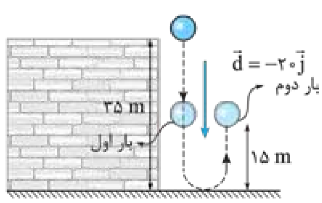
پس ۱ و ۳ درست هستند.
در شکل کاملاً مشخص است که $l_۳ = L'$ و $l_۱ = l_۲ = ۳L'$. اما در مورد متحرک (۴) باید دقت کنیم که متحرک مسافتی بیش از $۳L'$ را طی کرده است؛ یعنی: $l_۴ > ۳L'$
با توجه به این موضوع می‌توانیم بفهمیم که $l_۳ < l_۱ = l_۲ < l_۴$ است و ۴ نادرست است. با این حال به سراغ ۲ هم می‌رویم.
می‌دانیم که زمان‌های حرکت با هم برابر و مثبت است؛ پس:

$$l_۴ > l_۱ = l_۲ > l_۳ \xrightarrow{\Delta t_۱ = \Delta t_۲ = \Delta t_۳ = \Delta t_۴} \frac{l_۴}{\Delta t_۴} > \frac{l_۱}{\Delta t_۱} = \frac{l_۲}{\Delta t_۲} > \frac{l_۳}{\Delta t_۳} \Rightarrow s_{av,۴} > s_{av,۱} = s_{av,۲} > s_{av,۳}$$

۲۲. گزینه ۳ **گام اول:** مطابق شکل توپ ابتدا ۳۵ m به سمت پایین و سپس ۱۵ m به سمت بالا حرکت کرده است؛ بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی (d) و مسافت طی‌شده توسط آن (l) برابر است با:

$$d = ۲۰\,m, l = ۳۵ + ۱۵ = ۵۰\,m$$

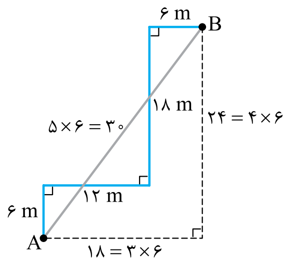
گام دوم: با توجه به این‌که $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ و $v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$ است، نسبت $\frac{s_{av}}{v_{av}}$ را حساب می‌کنیم:



$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{d}{\Delta t}} = \frac{l}{d} = \frac{۵۰}{۲۰} = \frac{۵}{۲}$$

۲۳. گزینه ۳ **گام اول**: برای محاسبهٔ تندی کافی است طول‌ها را با هم جمع کنیم تا مسافت به دست آید و این مقدار را بر زمان طی مسافت تقسیم کنیم:

$$s_{av}=\frac{6+12+18+6}{10}=\frac{42}{10}=4/2\ m/s=4/2\times3/6\ km/h=15/12\ km/h$$

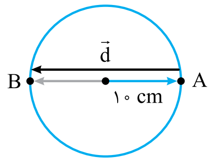


گام دوم: برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط باید اندازهٔ جابه‌جایی را حساب کنیم برای این کار مطابق شکل طول AB را محاسبه و سپس در رابطهٔ سرعت متوسط قرار می‌دهیم:

$$AB=\sqrt{18^2+24^2}=30\ m$$

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{30}{10}=3\ m/s=3\times3/6\ km/h=10/8\ km/h$$

۲۴. گزینه ۴ برای محاسبهٔ سرعت متوسط، باید اندازهٔ جابه‌جایی و زمان آن را بدانیم. مطابق شکل نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار از نقطهٔ A، $(3:15')$ به نقطهٔ B، $(3:45')$ رفته است؛ بنابراین:



$$\begin{cases}d=2\times10=20\ cm=0/2\ m\\ \Delta t=45-15=30\ min=0/5\ h\end{cases}\Rightarrow v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{0/2}{0/5}=0/4\ m/h$$

۲۵. گزینه ۴ **گام اول**: بازهٔ زمانی $3:10'$ تا $4:25'$ به اندازهٔ ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه طول می‌کشد. یعنی عقربهٔ دقیقه‌شمار، ۱ دور کامل و $\frac{1}{4}$ دور می‌زنند. پس مسافتی که نوک این عقربه می‌پیماید، برابر است با:

$$l=2\pi r+\frac{1}{4}(2\pi r)=\frac{5}{4}(2\pi r)=\frac{5}{4}\times2\times\pi\times36=90\pi\ cm$$

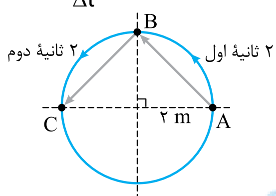
گام دوم: حالا با داشتن مسافت و زمان حرکت، می‌توانیم تندی متوسط را حساب کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=1\,h,15\,min=75\times60\,s}s_{av}=\frac{90\pi}{75\times60}=0/02\pi\ cm/s$$

تکنیک **از آن‌جایی که عقربه‌های ساعت به طور یکنواخت حرکت می‌کنند، تندی متوسط نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر بازهٔ زمانی دلخواه یکسان است (البته عقربه‌های ثانیه‌شمار و ساعت‌شمار هم همین‌طور هستند.) پس می‌توانیم به جای تندی متوسط در بازهٔ خواسته‌شده در تست، تندی متوسط در مدت 1h (یعنی یک دور چرخیدن عقربهٔ دقیقه‌شمار) را حساب کنیم:**

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow{l=2\pi r,\,\Delta t=1h=60\times60\,s}s_{av}=\frac{2\pi\times36}{60\times60}=0/02\pi\ cm/s$$

۲۶. گزینه ۱ با توجه به شکل عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:



الف) مسافت طی‌شدهٔ متحرک در ۲ ثانیهٔ اول برابر مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ دوم است؛ پس تندی متوسط آن در ۲ ثانیهٔ اول با ۲ ثانیهٔ دوم برابر است. ✓

ب) با این‌که اندازهٔ جابه‌جایی ۲ ثانیهٔ اول (AB) با اندازهٔ جابه‌جایی ۲ ثانیهٔ دوم (BC) برابر است؛ اما چون جهت‌های متفاوتی دارند! سرعت متوسطشان برابر نخواهد بود. ✗

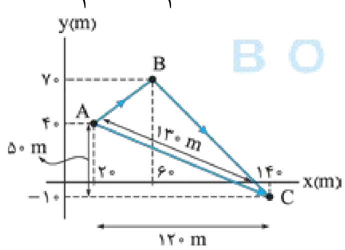
پ) در ۴ ثانیهٔ اول، متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ C می‌رود؛ بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط آن برابر است با:

$$v_{av}=\frac{2\times2}{4}=1\ m/s$$ ✗

ت) برای محاسبهٔ تندی متوسط باید مسافت طی‌شده از نقطهٔ A تا C را حساب کنیم؛ از شکل پیداست که این مسافت، نصف محیط دایره است؛ یعنی:

$$s_{av}=\frac{\pi r}{4}=\frac{2\times3/14}{4}=1/57\ m/s$$ ✗

۲۷. گزینه ۴ **محاسبهٔ سرعت متوسط**: مطابق شکل مقابل نقطهٔ A را به C وصل می‌کنیم و جابه‌جایی را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم، سپس مقدار جابه‌جایی را تقسیم بر زمان می‌کنیم تا اندازهٔ سرعت متوسط به دست آید:

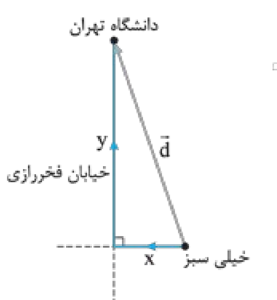


$$d=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{50^2+120^2}=130\ m\Rightarrow v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{130}{10}=13\ m/s$$

محاسبهٔ تندی متوسط: برای به دست آوردن تندی متوسط، باید مسافت طی‌شده را حساب کنیم. برای به دست آوردن مسافت باید مطابق شکل طول‌های AB و BC را به دست آوریم:

$$\begin{cases}AB=\sqrt{(60-20)^2+(70-40)^2}=\sqrt{1600+900}=\sqrt{2500}=50\ m\\ BC=\sqrt{(140-60)^2+(70-(-10))^2}=\sqrt{2\times80^2}=80\sqrt{2}=112\ m\end{cases}\Rightarrow s_{av}=\frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\text{زمان}}=\frac{50+112}{10}=\frac{162}{10}=16/2\ m/s$$

۲۸. گزینه ۲ **گام اول**: مسیر حرکت مانند شکل روبه‌رو دو پاره‌خط عمود بر هم به طول‌های x و y است. ما در این تست مقدار x را می‌خواهیم برای محاسبهٔ مقدار x در اولین قدم اندازهٔ $\vec{d}$ را به دست می‌آوریم:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=5\,min}\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{d}{5\times60}\Rightarrow d=100\sqrt{10}\ m$$

گام دوم: از رابطهٔ فیثاغورس می‌دانیم $x^2+y^2=d^2$ است؛ پس:

$$x^2+y^2=(100\sqrt{10})^2=100000$$

گام سوم: از طرفی چون طول مسیر $x+y=400$ است، داریم:

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=(400)^2=160000$$

$$(x^2+y^2+2xy)-(x^2+y^2)=160000-100000=60000\Rightarrow 2xy=60000\Rightarrow y=\frac{30000}{x}$$

گام چهارم: حالا مقدار $y=\frac{30000}{x}$ را در $x+y=400$ قرار می‌دهیم و x را حساب می‌کنیم:

$$x+\frac{30000}{x}=400\Rightarrow x^2-400x+30000=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=100\ m\\ x_2=300\ m\end{cases}$$

در واقع x_1 و x_2 همان x و y در شکل بالا هستند، پس، باید مقدار کوچک‌تر یعنی x_1 را انتخاب کنیم.

۲۹. (گزینه ۴) **گام اول:** از تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ اول $(۰,۴\ s)$ و ۲ ثانیهٔ سوم $(۴\ s,۶\ s)$، می‌توان مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $(۰,۶\ s)$ را فهمید:

$$\left.\begin{array}{l} s_{av(۰,۴)}=\dfrac{l_{(۰,۴)}}{۴-۰}\Rightarrow ۴=\dfrac{l_{(۰,۴)}}{۴}\Rightarrow l_{(۰,۴)}=۱\,cm \\ s_{av(۴,۶)}=\dfrac{l_{(۴,۶)}}{۶-۴}\Rightarrow ۷=\dfrac{l_{(۴,۶)}}{۲}=l_{(۴,۶)}=۱۴\,m \end{array}\right\}\Rightarrow l_{(۰,۶)}=l_{(۰,۴)}+l_{(۴,۶)}=۱۶+۱۴=۳۰\,m$$

گام دوم: حالا که مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $(۰,۶\ s)$ را می‌دانیم، تندی متوسط آن هم به راحتی حساب می‌شود.

$$s_{av(۰,۶)}=\frac{l_{(۰,۶)}}{۶-۰}=\frac{۳۰}{۶}=۵\,m/s$$

۳۰. (گزینه ۲) **گام اول:** زمان طی مسافت را برای هر قسمت به دست می‌آوریم:

برگشت: $\Delta t_۲=\dfrac{l}{s_{av,۲}}=\dfrac{۳۶۰\,km}{۷۲\,km/h}=۵\,h=۱۸۰۰۰\,s$

رفت: $\Delta t_۱=\dfrac{l}{s_{av,۱}}=\dfrac{۳۶۰\,km}{۳۰\,m/s}=\dfrac{۳۶۰۰۰۰\,m}{۳۰\,m/s}=۱۲۰۰۰\,s$

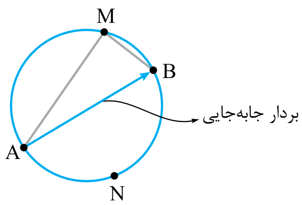
گام دوم: تندی متوسط کل حرکت برابر با مسافت طی‌شده در رفت و برگشت تقسیم بر زمان کل است:

$$\text{تندی متوسط کل}=\frac{\text{مسافت پیمودهٔ کل}}{\text{زمان کل}}=\frac{۳۶۰۰۰۰\times ۲}{۱۲۰۰۰+۱۸۰۰۰}=۲۴\,m/s$$

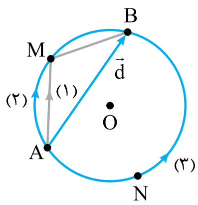
۳۱. (گزینه ۲) با توجه به مقدار تندی متوسط در حرکت رفت و برگشت و اختلاف زمان رفت و برگشت، یک معادله می‌نویسیم تا فاصلهٔ بین دو شهر معلوم شود. (برای تسریع در محاسبات، سرعت‌ها را برحسب کیلومتر بر ساعت و زمان را برحسب ساعت قرار می‌دهیم.)

$$\Delta t_۲-\Delta t_۱=\frac{۳۶}{۶۰}=۰/۶\,h\xrightarrow{\Delta t=\frac{l}{s_{av}}}\frac{l}{۷۵}-\frac{l}{۹۰}=۰/۶\Rightarrow\frac{۶l-۵l}{۴۵۰}=۰/۶\Rightarrow l=۴۵۰\times۰/۶=۲۷۰\,km$$

۳۲. (گزینه ۴) از آن‌جا که جابه‌جایی $(\overrightarrow{AB})$ و مدت زمان جابه‌جایی $(۱۰\,min)$ هر سه مسیر با هم برابر است، سرعت متوسط هم در هر سه مسیر یکسان است.



۳۳. (گزینه ۳) **گام اول:** مطابق شکل جابه‌جایی‌های هر سه متحرک با هم برابر است، از طرفی طبق گفتهٔ سؤال، سرعت متوسط سه متحرک هم با هم برابر است، با این حساب:



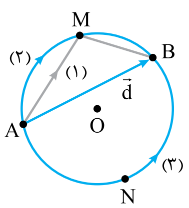
$$v_{av,۱}=v_{av,۲}=v_{av,۳}\Rightarrow\frac{\vec d_۱}{\Delta t_۱}=\frac{\vec d_۲}{\Delta t_۲}=\frac{\vec d_۳}{\Delta t_۳}\xrightarrow{\text{جابه‌جایی‌ها برابر } \vec d \text{ است}}\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t_۳$$

گام دوم: حالا که فهمیدیم زمان حرکت هر سه متحرک یکسان است. تشخیص این‌که تندی متوسط کدام متحرک بیشتر است، اصلاً کاری ندارد؛ چون مطابق شکل $l_۱<l_۲<l_۳$ است؛ یعنی:

$$l_۱<l_۲<l_۳\xrightarrow{\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t_۳}\frac{l_۱}{\Delta t_۱}<\frac{l_۲}{\Delta t_۲}<\frac{l_۳}{\Delta t_۳}\Rightarrow s_{av,۱}<s_{av,۲}<s_{av,۳}$$

تکنیک وقتی که در یک جابه‌جایی یکسان، سرعت متوسط چند متحرک با هم برابر می‌شود، آن متحرکی که بیشترین مسافت طی‌شده را دارد، بیشترین تندی متوسط را هم دارد. $(s_{av}\propto l)$

۳۴. (گزینه ۱) **گام اول:** با توجه به شکل روبه‌رو و این‌که $\overset{\frown}{ANB}>\overset{\frown}{AMB}$ است، فهمیدیم که بین مسافت‌ها رابطهٔ $l_۳>l_۲>l_۱$ برقرار است.



از طرفی چون تندی متوسط متحرک‌ها برابر است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} l_۳>l_۲>l_۱ \\ s_{av,۳}=s_{av,۲}=s_{av,۱} \\ \Delta t=\dfrac{l}{s_{av}} \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تندی همواره مثبت است.}}\frac{l_۳}{s_{av,۳}}>\frac{l_۲}{s_{av,۲}}>\frac{l_۱}{s_{av,۱}}\Rightarrow\Delta t_۳>\Delta t_۲>\Delta t_۱\quad (I)$$

گام دوم: همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید جابه‌جایی هر سه متحرک $\vec d$ است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی این سه متحرک برابر با d یعنی $d_۱=d_۲=d_۳=d$ است. از طرفی براساس نامساوی (I) و مثبت‌بودن بازه‌های زمانی داریم:

$$\Delta t_۳>\Delta t_۲>\Delta t_۱\Rightarrow\frac{۱}{\Delta t_۳}<\frac{۱}{\Delta t_۲}<\frac{۱}{\Delta t_۱}\xrightarrow{\times d}\frac{d}{\Delta t_۳}<\frac{d}{\Delta t_۲}<\frac{d}{\Delta t_۱}\Rightarrow v_{av,۳}<v_{av,۲}<v_{av,۱}$$

تکنیک وقتی تندی متوسط چند متحرک با هم برابر می‌شود، یعنی نسبت $\dfrac{l}{\Delta t}$ آن‌ها برابر است، پس آن متحرکی که مسافت کم‌تری طی کرده است، زمان حرکتش هم کم‌تر بوده است. حالا اگر جابه‌جایی‌ها یکسان باشد، متحرکی که زمان حرکتش کم‌تر است، بیشترین سرعت متوسط را دارد. پس مسیر کوتاه‌تر (یعنی (۱)) را انتخاب می‌کنیم:

$$v_{av}\propto\frac{۱}{\Delta t}\xrightarrow{l\propto\Delta t}v_{av}\propto\frac{۱}{l}$$

۳۵. (گزینه ۱) عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) طبق رابطهٔ $s_{av}=\dfrac{l}{\Delta t}$، اگر تندی متوسط متحرک‌ها یکسان باشد، آن متحرکی که مسافت کم‌تری طی می‌کند، زودتر به مقصد می‌رسد! $(\Delta t\propto l)$. با این حساب چون جابه‌جایی متحرک‌ها یکسان است، متحرکی که بیشترین زمان طی‌شده را دارد، سرعت متوسط کم‌تری دارد. $(v_{av}\propto\dfrac{۱}{\Delta t})$ ✗

ب) از شکل واضح است که جابه‌جایی متحرک مسیر (۱)، همان مسافت طی‌شده متحرک مسیر (۲) است. ✗

پ) چون جابه‌جایی هر سه متحرک یکسان است، اگر هر سه متحرک با هم به نقطهٔ B برسند $(\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3)$، قاعدتاً سرعت‌های متوسط برابری هم خواهند داشت. ✗

$$(v_{av} = \frac{\overbrace{\vec{d}}^{\text{یکسان}}}{\underbrace{\Delta t}_{\text{یکسان}}})$$

ت) در عبارت (الف) فهمیدیم که اگر تندی متوسط متحرک‌ها یکسان باشد، متحرکی که مسیر کم‌تری طی می‌کند، زودتر به مقصد می‌رسد؛ یعنی همان متحرک مسیر (۲) ✓!

درس سوم حرکت در راستای خط راست

حرکت می‌تواند در یک راستا (یک‌بعدی) یا در یک صفحه (دوبعدی) یا در فضا (سه‌بعدی) باشد. از این‌جا به بعد، کتاب درسی حرکت در یک راستا را بررسی کرده است. ما هم سعی می‌کنیم از چهارچوب کتاب درسی خارج نشویم.

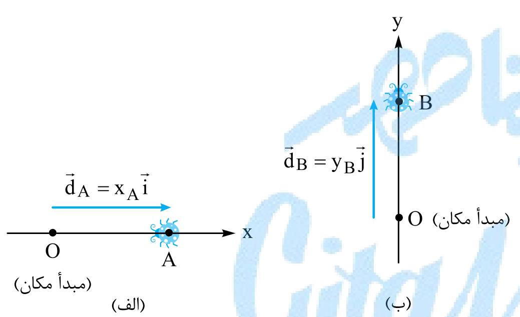
ما به حرکت‌هایی که مسیر آن مستقیم است اصطلاحاً حرکت راست‌خط می‌گوییم. برای تحلیل این حرکت‌ها محوری (مانند محور x) را منطبق بر مسیر حرکت در نظر می‌گیریم تا بتوانیم مفاهیمی مانند «**بردار مکان**» و «**جابه‌جایی**» را بر روی آن تفسیر کنیم.

بردار مکان در حرکت یک‌بعدی

بر روی هر محوری مانند x و y یک نقطه به نام **مبدأ مکان** مشخص می‌کنیم. مبدأ مکان جایی است که مکان آن صفر $(x = 0)$ است.

«**بردار مکان**» برداری است که از «**مبدأ مکان**» به محل جسم کشیده می‌شود. در شکل (الف) متحرک (کفشدوزک) در نقطهٔ A بر روی محور x و در شکل (ب) متحرک (کفشدوزک) در نقطهٔ B، بر روی محور y قرار دارد.

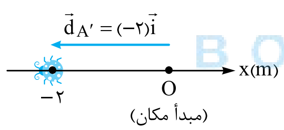
همین‌طور که در شکل‌ها می‌بینید بردارهای مکان A و B را با $\vec{d}_A$ و $\vec{d}_B$ نشان داده‌ایم و آن‌ها را برحسب بردارهای یکه نوشته‌ایم.



چند نکته

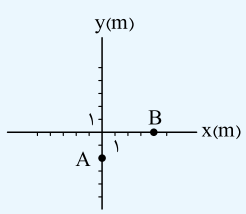
۱) برحسب این‌که مکان جسم، قبل یا بعد از مبدأ باشد، علامت بردار مکان می‌تواند منفی یا مثبت شود. مثلاً در شکل روبه‌رو کفشدوزک قبل از مبدأ است و بردار مکان آن منفی است.

$\vec{d}_{A'} = -2\vec{i}$



۲) ویژگی جسم متحرک این است که بردار مکانش لحظه به لحظه تغییر می‌کند.

تست ؟ در شکل زیر، متحرکی از نقطهٔ A به نقطهٔ B جابه‌جا شده است. بردارهای مکان اولیهٔ متحرک $(\vec{d}_i)$ و مکان نهایی آن $(\vec{d}_f)$ در SI کدام است؟



۱) $\vec{d}_f = 4\vec{j}$ و $\vec{d}_i = -2\vec{i}$

۲) $\vec{d}_f = 4\vec{i}$ و $\vec{d}_i = -2\vec{j}$

۳) $\vec{d}_f = -2\vec{j}$ و $\vec{d}_i = 4\vec{i}$

۴) $\vec{d}_f = -2\vec{i}$ و $\vec{d}_i = 4\vec{j}$

پاسخ ۲ نقطهٔ A در مکان $-2\,m$ محور y و نقطهٔ B در مکان $+4\,m$ محور x قرار دارد. پس داریم: $\vec{d}_i = \vec{d}_A = -2\vec{j}$ و $\vec{d}_f = \vec{d}_B = 4\vec{i}$

تست ؟ در یک ساعت دیواری طول عقربهٔ ساعت‌شمار 12 cm و طول عقربهٔ دقیقه‌شمار 15 cm است. اگر مطابق شکل زیر محور چرخش عقربه‌ها در مبدأ مختصات باشد، در ساعت ۹، بردار مکان نوک عقربهٔ ساعت‌شمار $(\vec{d}_h)$ و دقیقه‌شمار $(\vec{d}_m)$ در SI به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $\vec{d}_m = -0/12\vec{i}$ و $\vec{d}_h = 0/15\vec{j}$

۲) $\vec{d}_m = -0/15\vec{i}$ و $\vec{d}_h = 0/12\vec{j}$

۳) $\vec{d}_m = 0/12\vec{j}$ و $\vec{d}_h = -0/15\vec{i}$

۴) $\vec{d}_m = 0/15\vec{j}$ و $\vec{d}_h = -0/12\vec{i}$

پاسخ ۴ | مطابق شکل روبه‌رو در ساعت ۹ عقربهٔ ساعت‌شمار در خلاف جهت محور x و عقربهٔ دقیقه‌شمار در جهت مثبت محور y است، پس داریم:

$$\vec{d}_m = ۰/۱۵\vec{j} \text{ و } \vec{d}_h = -۰/۱۲\vec{i}$$

مقایسهٔ بردار مکان و بردار جابه‌جایی در حرکت راستاخط

در درس‌های قبل گفتیم که بردار جابه‌جایی برداری است که ابتدای آن مکان اولیهٔ جسم و انتهای آن مکان نهایی جسم است. به «مکان اولیهٔ متحرک» گاهی «مبدأ حرکت[1]» هم می‌گویند. مکان اولیه یا «مبدأ حرکت» را با $x_۰$ نشان می‌دهیم:

نقطه‌ای که متحرک در لحظهٔ $t_۰ = ۰$ آن‌جا بوده است = مبدأ حرکت = مکان اولیه = $x_۰$

نکته ممکن است متحرک حرکتش را از «مبدأ مکان» شروع نکند. یعنی لزوماً «مبدأ حرکت»، «مبدأ مکان» نیست.

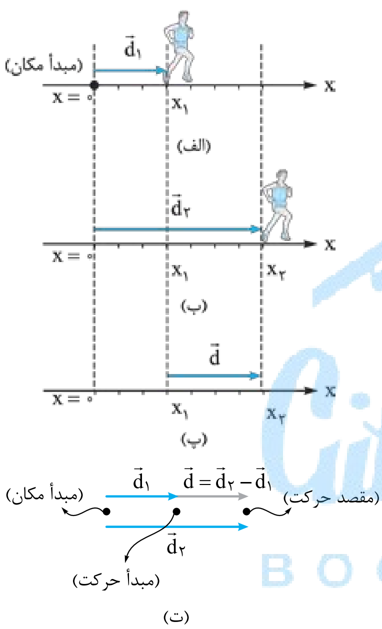
حواستون باشه اگر واژهٔ «مبدأ» به تنهایی بیاید، منظور «مبدأ مکان» است، نه مبدأ حرکت.

برای مقایسهٔ بردار مکان و جابه‌جایی به نمونهٔ زیر توجه کنید:

فرض کنید دونده‌ای که بر روی محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t_۱$ در مکان $x_۱$ (شکل الف) و در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $x_۲$ (شکل ب) قرار دارد. در این صورت بردار مکان این دونده در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ برحسب بردار یکهٔ $\vec{i}$ به این صورت است: $\vec{d}_۱ = x_۱\vec{i}\ ,\ \vec{d}_۲ = x_۲\vec{i}$

در شکل (پ) بردار جابه‌جایی همین دونده را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نشان داده‌ایم. اگر کمی به شکل‌ها دقت کنید ارتباط بین بردارهای مکان اولیه و نهایی $(\vec{d}_۲ , \vec{d}_۱)$ و بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ را کشف می‌کنید.

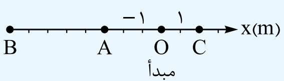
در شکل (ت) همهٔ بردارها را سرجایشان کنار هم کشیده‌ایم. همین‌طور که می‌بینید، **بردار جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی برابر با تفاضل دو بردار مکان نهایی و اولیهٔ آن بازهٔ زمانی** است:



$$\underbrace{\boxed{\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱}}_{\text{بردار جابه‌جایی} \quad \text{بردار مکان اولیه}} \Rightarrow \vec{d} = x_۲\vec{i} - x_۱\vec{i} = (x_۲ - x_۱)\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{d} = \Delta x\vec{i}}$$

بردار مکان نهایی

تست ۴ | مطابق شکل متحرکی بر روی محور x ابتدا از نقطهٔ A به B و سپس از B به C می‌رود. کدام گزینه دربارهٔ این حرکت نادرست است؟



۱) بردار جابه‌جایی کل این متحرک برابر با $(+۵\ m)\vec{i}$ است.

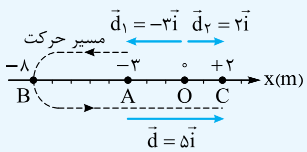
۲) بردار مکان اولیهٔ این متحرک $(-۳\ m)\vec{i}$ و بردار مکان نهایی آن $(+۲\ m)\vec{i}$ است.

۳) متحرک در طول مسیرش مسافت ۱۵ m را می‌پیماید.

۴) طول بزرگ‌ترین بردار جابه‌جایی در طی مسیر ۸ m است.

پاسخ ۴ | در شکل روبه‌رو بردارهای مکان اولیه $(\vec{d}_۱)$، مکان نهایی $(\vec{d}_۲)$ و بردار جابه‌جایی کل $(\vec{d})$ و مسیر حرکت را نشان داده‌ایم؛ که همگی درستی ۱، ۲ و ۳ را تأیید می‌کنند.

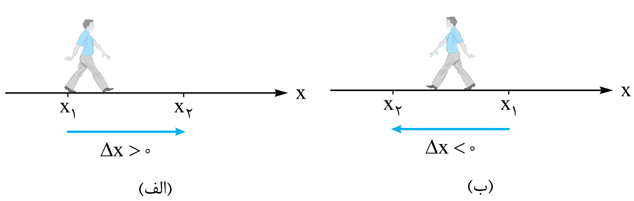
اما ۴ نادرست است زیرا بزرگ‌ترین جابه‌جایی در طول مسیر از B تا C است که طول آن برابر ۱۰ m می‌شود.



چند نکته

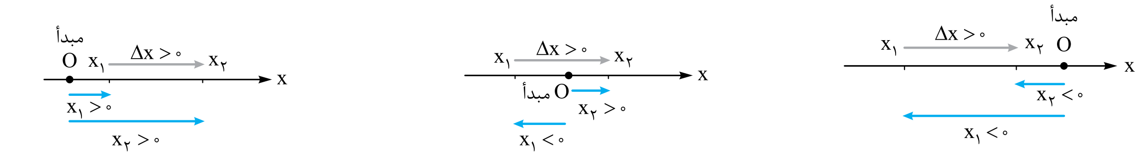
۱) بردار جابه‌جایی را در همهٔ حرکت‌ها (یک یا دو یا سه بعدی) می‌توانیم با حرف $\vec{d}$ نشان دهیم. اما در حرکت‌های یک‌بعدی در فرمول‌ها برای نشان‌دادن جابه‌جایی، از $\vec{d}$ (به عنوان نماد کلی جابه‌جایی) کم‌تر استفاده می‌کنیم و چون متحرک بیشتر روی محور x حرکت می‌کند، جابه‌جایی را با Δx نشان می‌دهیم.

۲) در همهٔ کمیت‌های برداری (مثل جابه‌جایی و سرعت متوسط) علامت مثبت یا منفی نشان‌دهندهٔ جهت کمیت است؛ مثلاً وقتی می‌گوییم $\Delta x = -۲\ m$ یعنی متحرک ۲ m در جهت منفی محور x جابه‌جا شده است.



[1] اصطلاح «مبدأ حرکت» در کتاب درسی نیامده اما گاهی در آزمون‌های آزمایشی از این اصطلاح استفاده می‌شود.

۳) بردارهای مکان اولیه و نهایی لزوماً هم‌جهت با بردار جابه‌جایی نیستند. مثلاً به جهت جابه‌جایی و بردارهای مکان اولیه و نهایی در شکل‌های زیر نگاه کنید. با آن‌که بردار جابه‌جایی در هر سه شکل در جهت مثبت است، ولی علامت بردارهای مکان (بسته به محل مبدأ) متفاوت است.

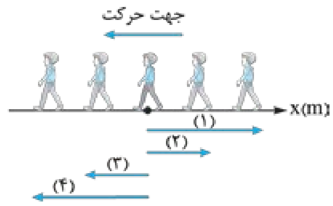


الف) در این شکل بردارهای مکان در جهت منفی ولی جابه‌جایی مثبت است.

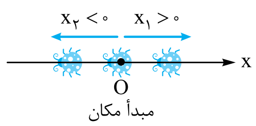
ب) در این شکل بردار مکان اولیه در جهت منفی و بردار مکان نهایی مثبت است. جابه‌جایی هم که مثل شکل‌های دیگر مثبت است.

پ) این‌جا هر دو بردار مثل جابه‌جایی مثبت‌اند.

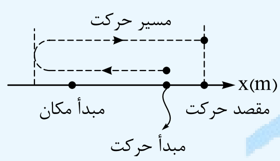
۴) بردار مکان متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ صفر می‌شود. پس می‌توانیم بگوییم، متحرک هرگاه به مبدأ نزدیک می‌شود، اندازهٔ بردار مکانش به سمت صفرشدن می‌رود. پس اندازهٔ بردار مکان با نزدیک‌شدن متحرک به مبدأ، کوچک و با دورشدن آن از مبدأ بزرگ می‌شود. مثلاً در شکل مقابل متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود. به بردارهای مکان این شخص توجه کنید.



۵) اگر متحرک در طی حرکتش از مبدأ مکان عبور کند، بلافاصله پس از عبور از مبدأ، بردار مکانش تغییر جهت می‌دهد. در شکل روبه‌رو قبل از عبور متحرک از مبدأ مکان، جهت بردار مکان مثبت و پس از عبور از مبدأ، جهت بردار مکان منفی است.



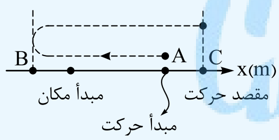
تست ؟ متحرکی مطابق شکل روبه‌رو بر روی محور x حرکت می‌کند. در طی مسیر بردار جابه‌جایی از لحظهٔ $t_0 = 0$ و بردار مکان متحرک به ترتیب از راست به چپ، چند بار تغییر جهت می‌دهند؟



۱) ۱ و ۲
۲) ۲ و ۲
۳) ۲ و ۱
۴) ۱ و ۱

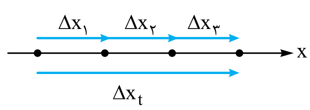
پاسخ ۱ **گام اول**: هر بار که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، بردار مکانش تغییر جهت می‌دهد. با توجه به شکل، این متحرک ۲ بار از مبدأ عبور کرده، پس بردار مکانش هم ۲ بار تغییر جهت داده است.

گام دوم: به شکل روبه‌رو نگاه کنید. این متحرک از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت کرده و در نقطهٔ B تغییر جهت می‌دهد و در برگشت از نقطهٔ A عبور می‌کند. تا قبل از عبور متحرک از نقطهٔ A، بردار جابه‌جایی (از لحظهٔ $t_0 = 0$) به سمت چپ و پس از عبور از نقطهٔ A به سمت راست خواهد بود. پس می‌توانیم بگوییم بردار جابه‌جایی (از لحظهٔ $t_0 = 0$) ۱ بار تغییر جهت داده است.



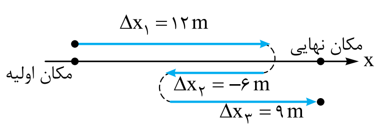
۶) اگر چند جابه‌جایی متوالی داشته باشیم، جابه‌جایی کل متحرک برابر جمع برداری جابه‌جایی‌ها خواهد بود. مثلاً اگر مانند شکل روبه‌رو یک متحرک سه جابه‌جایی متوالی به ترتیب Δx_1، Δx_2 و Δx_3 داشته باشد، جابه‌جایی کل برابر می‌شود با:

$$\boxed{\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}$$



حواستون باشه *ممکنه یک یا چند جابه‌جایی در جهت منفی باشند؛ در این صورت یادتون نره که علامت جابه‌جایی‌ها رو هم در رابطهٔ بالا قرار بدید. مثلاً فرض کنید یک متحرک سه جابه‌جایی متوالی $\Delta x_1 = 12\,m$، $\Delta x_2 = -6\,m$ و $\Delta x_3 = 9\,m$ رو داشته. پس جابه‌جایی کل این متحرک این‌جوری حساب می‌شه:*

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 12 + (-6) + 9 = 15\,m$$



۷) در ادامهٔ نکتهٔ قبل باید بگوییم که برای محاسبهٔ مسافت طی‌شدهٔ کل، کافی است که اندازهٔ جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم:

$$l_{کل} = l_1 + l_2 + l_3 = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|$$

تست ؟ متحرکی دو جابه‌جایی متوالی Δx_1 و Δx_2 را انجام می‌دهد. اگر جابه‌جایی کل این متحرک در SI، $-3\vec{i}$ و $\Delta x_2 = -2\Delta x_1$ باشد، بردار جابه‌جایی «۱» برحسب متر کدام است؟

۱) $-6\vec{i}$
۲) $6\vec{i}$
۳) $-3\vec{i}$
۴) $3\vec{i}$

پاسخ ۴ گفتیم در جابه‌جایی‌های متوالی، جابه‌جایی کل برابر جمع برداری تمام جابه‌جایی‌ها است. پس داریم:

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_1 + (-2\Delta x_1) = -\Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = -\Delta x_t = -(-3) = 3\,m \Rightarrow \vec{d}_1 = \Delta x_1 \vec{i} = (3m)\vec{i}$$

محاسبهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط در حرکت روی خط راست

هر جا که بتوانیم جابه‌جایی و مسافت متحرک را حساب کنیم؛ از سرعت متوسط و تندی متوسط آن هم می‌توانیم صحبت کنیم، برای حرکت بر روی محور x می‌توانیم رابطهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط را به صورت زیر بنویسیم:

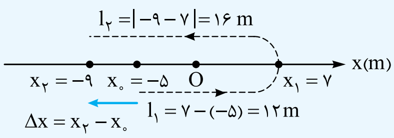
$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\quad,\quad s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$$

به چند تست زیر توجه کنید:

تست ۱| متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند در بازهٔ صفر تا t ثانیه مستقیماً از مکان $x_0=-5\,m$ به مکان $x_1=7\,m$ و در بازهٔ t ثانیه تا $8\,s$ مستقیماً از مکان $x_1=7\,m$ به مکان $x_2=-9\,m$ می‌رود. در بازهٔ صفر تا $8\,s$ تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه از اندازهٔ سرعت متوسطش بیشتر است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ ۴| آن‌طور که صورت مسئله می‌گوید، متحرک در لحظهٔ t ثانیه تغییر جهت داده است و در مدت $8\,s$ مسیر شکل روبه‌رو را طی کرده است.



با توجه به شکل داریم:

$$s_{av}=\frac{l_1+l_2}{\Delta t}=\frac{12+16}{8-0}=\frac{28}{8}=3/5\,m/s$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_0}{\Delta t}=\frac{-9-(-5)}{8-0}=-\frac{4}{8}=-0/5\,m/s\Rightarrow|v_{av}|=0/5\,m/s$$

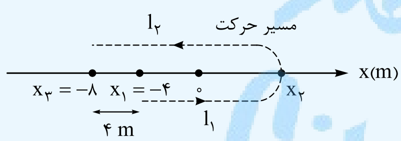
بنابراین تندی متوسط $3\,m/s$ از اندازهٔ سرعت متوسط بیشتر است:

$$s_{av}-|v_{av}|=3/5-0/5=3\,m/s$$

تست ۲| متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t_1=2\,s$ در حال حرکت در جهت محور x از مکان $\vec{x}_1=-4\vec{i}$ عبور می‌کند و در مکان $\vec{x}_2$ تغییر جهت داده و در لحظهٔ $t_3=4\,s$ در مکان $\vec{x}_3=-8\vec{i}$ قرار دارد. اگر تندی متوسط این متحرک در بازهٔ $t_1=2\,s$ تا $t_3=4\,s$، برابر $8\,m/s$ باشد، $\vec{x}_2$ کدام است؟ (همهٔ بردارهای مکان برحسب متر است.)

۱) $+2\vec{i}$ ۲) $+4\vec{i}$ ۳) $-2\vec{i}$ ۴) $-14\vec{i}$

پاسخ ۱| شکل روبه‌رو را با توجه به این‌که متحرک در لحظهٔ t_1 در جهت محور x در حال حرکت بوده رسم کردیم. در این شکل مسیر حرکت جسم معلوم است.



فرض کنید متحرک از x_1 تا x_2 مسافت l_1 و از x_2 تا x_3 مسافت l_2 را پیموده است. در این صورت داریم:

$$s_{av}=\frac{l_1+l_2}{t_3-t_1}\Rightarrow 8=\frac{l_1+l_2}{4-2}\Rightarrow l_1+l_2=16\,cm$$

همچنین در شکل می‌بینیم که فاصلهٔ x_1 تا x_3 برابر $4\,m$ است. پس $l_2=l_1+4$ است:

$$l_1+l_2=16\xrightarrow{l_2=l_1+4}l_1+l_1+4=16\Rightarrow 2l_1=12\Rightarrow l_1=6\,m$$

پس مکان x_2 به اندازهٔ $6\,m$ جلوتر از $x_1=-4\,m$ است:

$$\vec{x}_2=(-4+6)\vec{i}=2\vec{i}$$

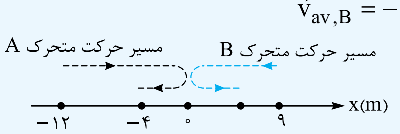
با تست زیر می‌خواهیم مفاهیم این درس‌نامه را تا به این‌جا جمع‌بندی کنیم:

تست ۳| جدول زیر وضعیت دو متحرک A و B را در مدت $5\,s$ نشان می‌دهد. اگر دو متحرک یک بار در مبدأ تغییر جهت بدهند و تندی متوسط آن‌ها در کل حرکت برابر باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر برحسب SI نادرست است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

	مکان اولیه	مکان نهایی	سرعت متوسط	تندی متوسط
متحرک A	$(-12\,m)\vec{i}$	$(-4\,m)\vec{i}$	$\vec{v}_{av,A}$	s_{av}
متحرک B	$(9\,m)\vec{i}$	$\vec{d}_{2,B}$	$\vec{v}_{av,B}$	s_{av}

۱) $\vec{v}_{av,A}=1/6\vec{i}$ ۲) $\vec{d}_{2,B}=7\vec{i}$ ۳) $s_{av}=3/2$ ۴) $\vec{v}_{av,B}=-0/2\vec{i}$

پاسخ ۴| در شکل روبه‌رو با توجه به اطلاعات تست، مسیر حرکت دو متحرک را نشان داده‌ایم:



سرعت متوسط متحرک A را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av,A}=\frac{\vec{d}_A}{\Delta t_A}=\frac{-4\vec{i}-(-12\vec{i})}{5}=\frac{8\vec{i}}{5}=(1/6\,m/s)\vec{i}$$

پس ۱ درست است.

حالا به سراغ تندی متوسط متحرک A می‌رویم متحرک A در مبدأ تغییر جهت داده است، پس از مکان $-12\vec{i}$ به مبدأ رفته و سپس تغییر جهت داده و به مکان $-4\vec{i}$ بازگشته است. با توجه به این موضوع مسافت طی‌شده برابر است با: $l_A=|\Delta x_{1,A}|+|\Delta x_{2,A}|=|0-(-12)|+|(-4)-0|=12+4=16\,m$

در نتیجه تندی متوسط برابر با $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{16}{5}=3/2\,m/s$ است و ۳ هم درست است.

چون تندی متوسط دو متحرک با هم برابر است، مسافت طی‌شده توسط دو متحرک هم برابر است. از آن‌جایی که هر دو متحرک فقط یک بار و در مبدأ تغییر جهت داده‌اند، متحرک B از $\vec{d}_{۱,B}=۹\vec{i}$ به مبدأ و پس از تغییر جهت در مبدأ به نقطهٔ $\vec{d}_{۲,B}$ رفته است. با توجه به این‌که مسافت طی‌شده در این حرکت $۱۶\,m$ است؛ داریم:

$$l_B=|\Delta x_{۱,B}|+|\Delta x_{۲,B}| \xrightarrow{l_A=l_B} ۱۶=|۰-۹|+|x_۲-۰| \Rightarrow ۱۶=۹+x_۲ \Rightarrow x_۲=۷\,m \Rightarrow \vec{d}_{۲,B}=۷\vec{i}$$

پس (۲) درست است. حالا به سراغ این‌که چرا (۴) نادرست است، می‌رویم:

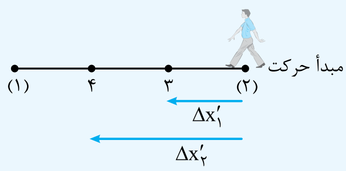
$$\vec{v}_{av,B}=\frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B}=\frac{۷\vec{i}-۹\vec{i}}{۵}=-\frac{۲\vec{i}}{۵}=(-۰/۴\,m/s)\vec{i}$$

و اما یک تست مفهومی دیگر که به کمی دقت و تمرکز نیاز دارد:

تست | **شخصی در حال پیاده‌روی بر روی محور x است. این شخص مطابق شکل زیر از مکان (۱) شروع به حرکت کرده و پس از رسیدن به مکان (۲) از همان مسیر برمی‌گردد. در مسیر بازگشت، اندازهٔ کدام‌یک از کمیت‌های زیر الزاماً در حال کم‌شدن است؟**

۱) تندی متوسط مسیر بازگشت
۲) تندی متوسط کل مسیر
۳) سرعت متوسط مسیر بازگشت
۴) سرعت متوسط کل مسیر

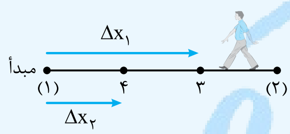
پاسخ (۴) | **گام اول:** تندی متوسط با فرمول $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$ تغییر می‌کند. چه در مسیر برگشت و چه در کل مسیر، مسافت (l) و بازهٔ زمانی حرکت (Δt) هر دو در حال افزایش‌اند. اما این‌که نسبت $\frac{l}{\Delta t}$ چطور تغییر می‌کند، بسته به شرایط متفاوت است. (پس تا این‌جا (۱) و (۲) نادرست‌اند.)



الف) $\Delta x'_۲>\Delta x'_۱$

گام دوم: اندازهٔ سرعت متوسط از فرمول $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حساب می‌شود؛ یعنی تغییر v_{av} به دو کمیت مقدار جابه‌جایی (Δx) و زمان حرکت (Δt) بستگی دارد. اگر مقدار سرعت متوسط را فقط برای مسیر بازگشت بخواهیم، مطابق شکل (الف) نقطهٔ (۲) را مبدأ حرکت در نظر می‌گیریم و با حرکت شخص به طرف نقطهٔ (۱) اندازهٔ جابه‌جایی Δx لحظه‌به‌لحظه زیاد می‌شود؛ پس:

در این حالت، Δx و Δt هر دو در حال زیادشدن است و این‌جا هم نمی‌توانیم بگوییم که نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ در حال زیادشدن است یا کم‌شدن ((۳) هم مرخصه.)



ب) $\Delta x'_۲<\Delta x'_۱$

گام سوم: به شکل (ب) نگاه کنید. اگر بخواهیم کل حرکت را بررسی کنیم، باید نقطهٔ (۱) را مبدأ فرض کنیم. در این صورت با گذشت زمان (افزایش Δt) و نزدیک‌شدن شخص به نقطهٔ (۱)، مقدار جابه‌جایی کل $(\Delta x_{کل})$ در حال کم‌شدن است؛ پس مقدار سرعت متوسط کل مسیر (یعنی $\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}$) در هنگام بازگشت شخص الزاماً در حال کم‌شدن است.

• سرعت متوسط در چند جابه‌جایی متوالی

گاهی در یک حرکت مستقیم، سرعت‌های متوسط متحرک را در چند جابه‌جایی متوالی می‌دهند و سرعت متوسط متحرک در جابه‌جایی کل را می‌خواهند. این‌جور تست‌ها دو حالت دارند، یا جابه‌جایی‌های متوالی را می‌دهند یا بازه‌های زمانی متوالی را:

الف) اگر سرعت‌های متوسط متحرکی در جابه‌جایی‌های متوالی $\Delta x_۱$، $\Delta x_۲$ و $\Delta x_۳$ به ترتیب $v_{av,۱}$، $v_{av,۲}$ و $v_{av,۳}$ باشد، داریم:

$$v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳} \xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{v_{av}}} v_{av,کل}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳}{\frac{\Delta x_۱}{v_{av,۱}}+\frac{\Delta x_۲}{v_{av,۲}}+\frac{\Delta x_۳}{v_{av,۳}}}$$

ب) اگر سرعت‌های متوسط متحرکی در بازه‌های زمانی متوالی $\Delta t_۱$، $\Delta t_۲$ و $\Delta t_۳$ به ترتیب $v_{av,۱}$، $v_{av,۲}$ و $v_{av,۳}$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳} \xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta x=v_{av}\Delta t} v_{av,کل}=\frac{v_{av,۱}\Delta t_۱+v_{av,۲}\Delta t_۲+v_{av,۳}\Delta t_۳}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳}$$

ما در واقع کمیتی که داده نشده (در حالت (الف)، Δt و در حالت (ب)، Δx) را جایگزین می‌کنیم و از رابطه حذف می‌کنیم.

تست | **جابه‌جایی کل متحرکی که بر روی محور x حرکت کرده است، Δx است. اگر این متحرک جابه‌جایی $\Delta x_۱=-\frac{\Delta x}{۵}$ را با سرعت متوسط $-۲۰\,m/s$ و بقیهٔ مسیرش را با سرعت متوسط $۳۰\,m/s$ پیموده باشد، سرعت متوسط آن در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۵
۲) ۲۵
۳) ۱۰
۴) ۲۰

پاسخ (۴) | سرعت متوسط در جابه‌جایی‌های متوالی $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ داده شده است. اول باید ببینیم، $\Delta x_۲$ چه کسری از Δx است:

$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲ \xrightarrow{\Delta x_۱=-\frac{\Delta x}{۵}} \Delta x=-\frac{\Delta x}{۵}+\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\Delta x+\frac{\Delta x}{۵}=\frac{۶\Delta x}{۵}$$

متحرک $\Delta x_۱$ را با سرعت $-۲۰\,m/s$ و $\Delta x_۲$ را با سرعت $۳۰\,m/s$ پیموده است. پس داریم:

$$v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{\Delta x}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x_۱}{v_{av,۱}}+\frac{\Delta x_۲}{v_{av,۲}}}=\frac{\Delta x}{\frac{-\frac{\Delta x}{۵}}{-۲۰}+\frac{\frac{۶\Delta x}{۵}}{۳۰}}=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{۱۰۰}+\frac{\Delta x}{۲۵}}=\frac{\Delta x}{\frac{۵\Delta x}{۱۰۰}}=۲۰\,m/s$$

تست متحرکی که روی محور x در حال حرکت است، مسیری را در مدت Δt می‌پیماید. اگر سرعت متوسط این متحرک در $\frac{\Delta t}{۴}$ از زمان حرکتش $۸\,m/s$ و در $\frac{\Delta t}{۲}$ از زمان حرکتش $-۱۲\,m/s$ و در ادامهٔ مسیر $۴\,m/s$ باشد، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ ۲ در این تست سرعت‌های متوسط در بازه‌های $\frac{\Delta t}{۴}$، $\frac{\Delta t}{۲}$ و ادامهٔ مسیر داده شده است. ابتدا بازهٔ زمانی آخر را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t_{\text{آخر}} = \Delta t - (\frac{\Delta t}{۴} + \frac{\Delta t}{۲}) = \Delta t - \frac{۳\Delta t}{۴} = \frac{\Delta t}{۴}$$

در رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}$ به جای $\Delta x_{\text{کل}}$ معادلش را قرار می‌دهیم:

$$v_{av,\text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{v_{av,۱}\Delta t_۱ + v_{av,۲}\Delta t_۲ + v_{av,۳}\Delta t_۳}{\Delta t} = \frac{۸\times\frac{\Delta t}{۴} + (-۱۲)\frac{\Delta t}{۲} + ۴\times\frac{\Delta t}{۴}}{\Delta t} = \frac{۲\Delta t + (-۶\Delta t) + \Delta t}{\Delta t} = \frac{(۲-۶+۱)\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\Rightarrow v_{av,\text{کل}} = -۳\,m/s \Rightarrow |v_{av,\text{کل}}| = ۳\,m/s$$

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت راست‌خط

ما باید بتوانیم مکان جسم را در هر لحظهٔ دلخواه مشخص کنیم. یکی از راه‌های تعیین مکان جسم در هر لحظه «**معادلهٔ مکان ـ زمان**» یا «**معادلهٔ $x-t$**» است. این معادله، مکان جسم را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد: $x = f(t)$

مثلاً $x = ۲t^۲ - ۴t - ۲$ می‌تواند معادلهٔ مکان ـ زمان یک حرکت راست‌خط برحسب یکاهای SI باشد. در این صورت متحرک در لحظه‌هایی مثل $t_\circ = \circ$، $t_۱ = ۱s$، $t_۲ = ۲s$ و $t_۳ = ۳s$ در مکان‌های $x_\circ$، $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ قرار دارد که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$t_\circ = \circ \Rightarrow x_\circ = ۲(\circ)^۲ - ۴(\circ) - ۲ = -۲\,m \qquad t_۲ = ۲s \Rightarrow x_۲ = ۲(۲)^۲ - ۴(۲) - ۲ = -۲\,m$$

$$t_۱ = ۱s \Rightarrow x_۱ = ۲(۱)^۲ - ۴(۱) - ۲ = -۴\,m \qquad t_۳ = ۳s \Rightarrow x_۳ = ۲(۳)^۲ - ۴(۳) - ۲ = ۴\,m$$

لحظه	$t_\circ = \circ$	$t_۱ = ۱s$	$t_۲ = ۲s$	$t_۳ = ۳s$
مکان	$x_\circ = -۲\,m$	$x_۱ = -۴\,m$	$x_۲ = -۲\,m$	$x_۳ = +۴\,m$

در معادله‌های مکان ـ زمان که به صورت $x = At^n + Bt^{n-1} + \cdots + Yt + Z$ است، عدد ثابت (یعنی Z) بیانگر مکان اولیه است؛ $x_\circ = Z$ *(چون اگه به جای t صفر بذاریم، فقط Z می‌مونه)*

مثلاً در نمونهٔ بالا، مکان اولیه برابر $x_\circ = -۲\,m$ است.

تست معادلهٔ مکان ـ زمان جسمی در SI به صورت $x = t^۲ - ۵t - ۴$ است. فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در مبدأ زمان و اندازهٔ جابه‌جایی آن در ثانیهٔ سوم به ترتیب چند متر است؟

۱) ۴ و صفر ۲) ۲ و ۴ ۳) ۲ و صفر ۴) ۴ و ۴

پاسخ ۱ اول این‌که مکان اولیهٔ متحرک $x_\circ = -۴\,m$ است پس فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در مبدأ زمان برابر $۴\,m$ است.

دوم این‌که ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۳s$. مکان جسم را در این دو لحظه حساب می‌کنیم:

$$t_۱ = ۲s \Rightarrow x_۱ = (۲)^۲ - ۵(۲) - ۴ = -۱\circ m,\ t_۲ = ۳s \Rightarrow x_۲ = (۳)^۲ - ۵(۳) - ۴ = -۱\circ m$$

در نتیجه جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = -۱\circ - (-۱\circ) = \circ$$

تکنیک اگر معادلهٔ مکان ـ زمان را بدهند و جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی را بخواهند، می‌توانید در محاسبات از مکان اولیه چشم پوشی کنید.

مثلاً برای محاسبهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم در این تست بدون در نظر گرفتن -۴ داریم: $\Delta x_{(۲,۳)} = [(۳)^۲ - ۵(۳)] - [(۲)^۲ - ۵(۲)] = \circ$

تست معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B که هم‌زمان حرکت می‌کنند در SI به صورت $x_A = t^۲ - ۴t + ۸$ و $x_B = t^۲ + ۳t - ۶$ است. در مبدأ زمان این دو متحرک در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند و در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند؟

۱) $۲\,m$، $\circ/۵\,s$ ۲) $۲\,m$، $۲\,s$ ۳) $۱۴\,m$، $\circ/۵\,s$ ۴) $۱۴\,m$، $۲\,s$

پاسخ ۴ **گام اول**: با توجه به نکتهٔ بالا، مکان اولیهٔ متحرک A برابر $x_{\circ A} = +۸\,m$ و مکان اولیهٔ متحرک B برابر $x_{\circ B} = -۶\,m$ است. پس فاصلهٔ آن‌ها از هم در لحظهٔ $t_\circ = \circ$ برابر می‌شود با:

$$|\Delta x_\circ| = |x_{\circ A} - x_{\circ B}| = ۸ - (-۶) = ۱۴\,m$$

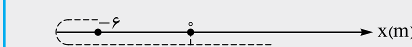
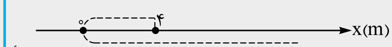
گام دوم: وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، xهایشان برابر می‌شود، پس داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow t^۲ - ۴t + ۸ = t^۲ + ۳t - ۶ \Rightarrow ۷t = ۱۴ \Rightarrow t = ۲s$$

• **چه‌وقت متحرک از مبدأ عبور می‌کند؟** • در لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ دو اتفاق می‌افتد:

۱) مکان متحرک صفر می‌شود (یعنی $x = \circ$). ۲) مکان (x) تغییر علامت می‌دهد.

برای تشخیص لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ در تست‌هایی که معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها درجهٔ ۲ است الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم (هم‌زمان سه نمونهٔ متفاوت را هم با این الگوریتم مرور می‌کنیم و حالت‌های مختلف را می‌بینیم.)

الگوریتم	$x = t^2 - t - 6$	$x = t^2 - 4t + 4$	$x = t^2 - 2t + 4$
۱) x را برابر صفر می‌گذاریم	$t^2 - t - 6 = 0$	$t^2 - 4t + 4 = 0$	$t^2 - 2t + 4 = 0$
۲) Δ را حساب می‌کنیم	$\Delta = (-1)^2 - (4 \times -6) = 25 > 0$	$\Delta = (-4)^2 - (4 \times 4) = 0$	$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 < 0$
۳) ریشه‌ها را حساب می‌کنیم	$t_1 = -2\,s$ و $t_2 = 3\,s$	ریشهٔ مضاعف $t = 2\,s$	ریشه ندارد
۴) جواب را تفسیر می‌کنیم.	زمان منفی قبول نیست، پس متحرک فقط در لحظهٔ $t_2 = 3\,s$ از مبدأ عبور کرده است.	ریشهٔ مضاعف مثبت یعنی متحرک یک بار در لحظهٔ $t = 2\,s$ به مبدأ رسیده و در آن‌جا تغییر جهت داده است.	متحرک هرگز به مبدأ نمی‌رسد.
مسیر حرکت بر روی محور x	 در $t_2 = 3\,s$ متحرک از مبدأ می‌گذرد.	 متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ در مبدأ تغییر جهت داده است.	 متحرک قبل از رسیدن به مبدأ تغییر جهت داده است.

تست ۹ | **معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI، $x = t^3 - 4t$ است. به‌جز مبدأ زمان $(t_0 = 0)$ در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، این متحرک در حال عبور از مبدأ مکان است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ ۲ | کافی است به جای x، صفر بگذاریم و معادله را حل کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow t^3 - 4t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2\,s \end{cases}$$

زمان منفی معنی ندارد. پس می‌ماند $t = 2\,s$.

نکته به طور کلی اگر در معادلهٔ مکان ـ زمان به جای x مکان معینی را قرار دهیم و سپس معادلهٔ حاصل را حل کنیم، tهای مثبت به دست آمده، لحظه‌های رسیدن یا عبور متحرک از آن مکان معین را نشان می‌دهند. (اگر t به دست آمده ریشهٔ مضاعف باشد، متحرک در آن t در آن مکان تغییر جهت می‌دهد و اگر t یا tهای به دست آمده ریشهٔ معمولی باشند، متحرک در آن tها از آن مکان عبور می‌کند.)

به مثال زیر توجه کنید:

تست ۹ | **معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - t - 2$ است. به ترتیب از راست به چپ در چه لحظه‌ای بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد و متحرک در چه لحظه‌ای پس از $t_0 = 0$ از مبدأ حرکت عبور می‌کند؟**

۱) $1\,s$، $1\,s$ ۲) $2\,s$، $2\,s$ ۳) $1\,s$، $2\,s$ ۴) $2\,s$، $1\,s$

پاسخ ۴ | **گام اول**: می‌دانید که بردار مکان در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، تغییر جهت می‌دهد. پس باید لحظه‌ای که متحرک از $x = 0$ می‌گذرد را پیدا کنیم:

$$x = t^2 - t - 2 \xrightarrow{x=0} 0 = t^2 - t - 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1\,s & \text{غ ق ق} \\ t_2 = 2\,s & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ تغییر جهت می‌دهد.

گام دوم: مبدأ حرکت همان مکان اولیهٔ متحرک یا مکان متحرک در لحظهٔ $t_0 = 0$ است. با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان در این تست، $x_0 = -2\,m$ است. پس مکان $-2\,m$ را در معادله به جای x می‌گذاریم و معادله را حل می‌کنیم:

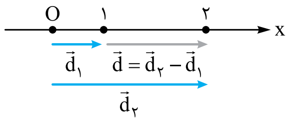
$$-2 = t^2 - t - 2 \Rightarrow t^2 - t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \\ t' = 1\,s \end{cases}$$

۳۶. گزینهٔ ۳ قاعدتاً باید گزینه‌ها را بررسی کرد:

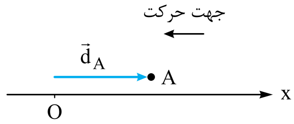
۱) نه لزوماً؛ اگر **تغییر جهت** داشته باشیم، مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی برابر نمی‌شود. ✗

۲) خیر؛ بردار مکان، **مبدأ مکان** (مختصات) را به مکان متحرک وصل می‌کند. ✗

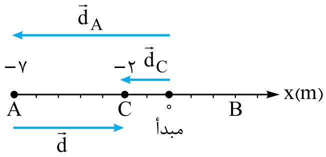
(در واقع برداری که مکان اولیهٔ جسم را به مکان نهایی آن وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی است.)



۳) دقیقاً جهت یادآوری شکل روبه‌رو را خوب نگاه کنید. $\vec{d}_1$ بردار مکان اولیه، $\vec{d}_2$ بردار مکان نهایی و $\vec{d}$ هم که بردار جابه‌جایی است. ✓



۴) نه همیشه، مثلاً در شکل روبه‌رو با این‌که بردار مکان متحرک A در جهت محور x است، متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند.



۳۷. گزینه ۳ در شکل روبه‌رو بردار مکان اولیه را با $\vec{d}_A$ نشان داده‌ایم که از مبدأ به مکان اولیه وصل شده است. با توجه به این‌که متحرک در انتهای حرکت در نقطهٔ C قرار دارد. بردار مکان نهایی را هم با $\vec{d}_C$ نشان داده‌ایم.

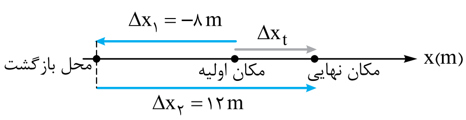
بردار جابه‌جایی هم برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند که آن را با $\vec{d}$ مشخص کرده‌ایم؛ با این حساب:

بردار مکان نهایی: $\vec{d}_C = -2\vec{i}$ ، بردار مکان اولیه: $\vec{d}_A = -7\vec{i}$

بردار جابه‌جایی: $\vec{d}_C - \vec{d}_A = -2\vec{i} - (-7\vec{i}) = 5\vec{i}$

۳۸. گزینه ۲ بردار جابه‌جایی کل حرکت، برابر با جمع برداری جابه‌جایی‌هایی است که متحرک انجام می‌دهد:

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 3\vec{i} + (-4\vec{i}) = -\vec{i}$$



(الف)

۳۹. گزینه ۱ **گام اول**: متحرک دو جابه‌جایی متوالی $\Delta x_1 = -8\ m$ و $\Delta x_2 = 12\ m$ را پشت سر گذاشته است (شکل الف) پس جابه‌جایی کل برابر است با:

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -8 + 12 = +4 \Rightarrow \vec{d} = \Delta x_t \vec{i} = +4\vec{i}$$

(تا این‌جا ۲ و ۳ پرَ!)

گام دوم: می‌دانید که مسافت طی‌شده برابر مجموع اندازهٔ جابه‌جایی‌ها است، پس داریم:

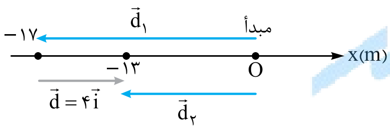
$$l_t = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 8 + 12 = 20\ m$$

(۴ هم حذف شد و فقط می‌ماند ۱ که درست است؛ بد نیست به قصد تمرین خواستهٔ دیگر تست را هم حساب کنیم.)

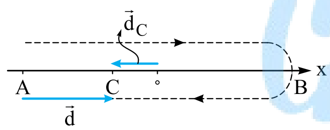
گام سوم: مکان اولیه و جابه‌جایی متحرک را داریم و مکان نهایی را می‌خواهیم:

$$\vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 \xrightarrow[\vec{d}_1 = -17\vec{i}]{\vec{d} = 4\vec{i}} \vec{d}_2 = \vec{d} + \vec{d}_1 = 4\vec{i} + (-17)\vec{i} = -13\vec{i}$$

این هم شکل بردارهای مکان و جابه‌جایی:



(ب)



۴۰. گزینه ۳ **گام اول**: ابتدا در یک شکل مناسب مسیر حرکت را بر روی محور x مشخص می‌کنیم.

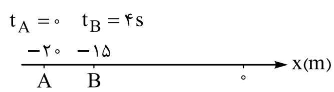
اگر متحرک از مکان منفی شروع به حرکت کند، مسیر حرکتش مانند شکل روبه‌رو خواهد بود.

گام دوم: مطابق شکل، $\vec{d}_C$ بردار مکان نهایی و $\vec{d}$ بردار جابه‌جایی جسم است.

از شکل واضح است که این دو بردار در **خلاف جهت هم‌اند.**

گام سوم: همان‌طور که می‌بینید متحرک ۲ بار از مبدأ مکان عبور کرده؛ پس یعنی جهت بردار مکان **۲ بار** تغییر می‌کند.

اگر فرض می‌کردیم متحرک ابتدا در قسمت مثبت محور x است، باز به همین جواب می‌رسیدیم. بررسی آن بر عهدهٔ خودتان!



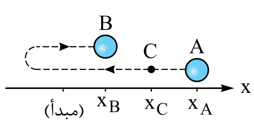
۴۱. گزینه ۳ به ترتیب گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) چون متحرک در بخش منفی محور x است؛ بردار مکان آن همواره در خلاف جهت محور x خواهد بود. ✓

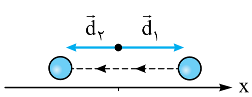
۲) چون متحرک در بخش منفی محور x در حال نزدیک‌شدن به مبدأ است، بردار جابه‌جایی آن حتماً در جهت محور x خواهد بود. ✓

۳) متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است؛ پس طول بردار مکان آن همواره در حال کاهش است. ✗

۴) چون حرکت روی خط راست است و تغییر جهت هم ندارد؛ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک با مسافت طی‌شدهٔ آن برابر خواهد بود. ✓



۴۲. گزینه ۱ مطابق شکل برای آن‌که متحرک از فاصلهٔ معینی از مبدأ (نقطهٔ A) شروع به حرکت کند و ۲ مرتبه هم از مبدأ مکان بگذرد، باید **حداقل ۱ بار** تغییر جهت بدهد. به همین ترتیب متحرک برای n بار عبور از مبدأ مکان باید حداقل $n-1$ بار تغییر جهت دهد. *خواستون باشه در این فاصله متحرک بدون اون‌که از مبدأ عبور کنه، می‌تونه هر چندبار که بخواد، تغییر جهت بده؛ یعنی مثلاً از مکان x_A تا x_C رو بارها بره و برگرده! پس متحرک حداکثر بی‌شمار بار می‌تونه تغییر جهت بده.*

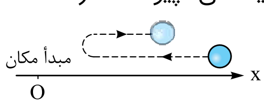


۴۳. گزینه ۴ مطابق شکل:

۱) می‌دانید که بردار مکان پس از عبور متحرک از مبدأ مکان تغییر جهت می‌دهد. در این‌جا بردار مکان متحرک ابتدا در **جهت محور x** $(\vec{d}_1)$ و پس از عبور متحرک از مبدأ، در **خلاف جهت محور x** $(\vec{d}_2)$ است.

۲) بردار مکان در مبدأ مکان صفر است، پس از ابتدای حرکت تا مبدأ مختصات، اندازهٔ بردار مکان **کوچک** می‌شود و پس از عبور از مبدأ مختصات تا انتهای حرکت، اندازهٔ آن **افزایش** می‌یابد.

تکنیک با توجه به این‌که بردار مکان در مبدأ مکان صفر است و این بردار پس از عبور از مبدأ تغییر جهت می‌دهد، گزینه‌های «پیوسته»دار غلط‌اند.

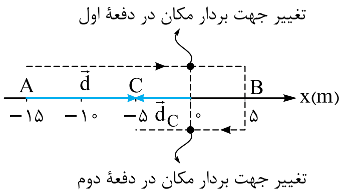


۴۴. گزینه ۲ با توجه به شکل روبه‌رو:

۱) متحرک در تمام لحظه‌ها در طرف مثبت محور x بوده، پس بردار مکان متحرک، پیوسته در جهت محور x است.

۲) متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور شده است. پس، اندازهٔ بردار مکان ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

۴۵. گزینهٔ ۲ عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند. به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:



الف) زمانی که متحرک از مبدأ عبور کند، جهت بردار مکان عوض می‌شود. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، متحرک ۲ بار از مبدأ عبور کرده است؛ بنابراین ۲ بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. (نادرست‌بودن عبارت (الف))

ب) متحرک در انتهای حرکت در نقطهٔ C قرار می‌گیرد؛ پس مطابق شکل روبه‌رو جهت بردار مکان نهایی در خلاف جهت محور x است ($\vec{d}_C = -5\vec{i}$) و از طرفی متحرک به مقدار $\vec{d} = 10\vec{i}$ جابه‌جا می‌شود. پس بردار جابه‌جایی در جهت محور x و در خلاف جهت بردار مکان نهایی است. (نادرست‌بودن عبارت (ب))

پ) متحرک از B تا C، ۱۰ m در خلاف جهت محور x حرکت کرده است پس اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\vec{d}_{BC} = -10\vec{i} \Rightarrow d_{BC} = 10\,m$$

(درست‌بودن عبارت (پ))

ت) مسافت پیموده‌شده برابر مجموع اندازهٔ جابه‌جایی‌ها از A تا B و B تا C است:

$$l = d_{AB} + d_{BC} = |5-(-15)| + |-5-5| = 20+10 = 30\,m$$

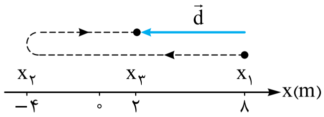
پس با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی برابر $d = 10\,m$ است، داریم:

$$\frac{l}{d} = \frac{3}{10} = 3$$

(درست‌بودن عبارت (ت))

۴۶. گزینهٔ ۳ محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی: مطابق شکل متحرک از مکان x_1 به مکان x_3 رفته است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است با:

$$d = |8-2| = 6\,m$$



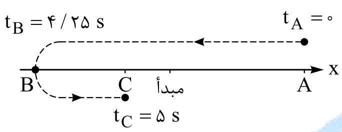
محاسبهٔ مسافت طی‌شده: مطابق شکل، برای آن‌که متحرک از x_1 به x_2 برود و سپس به x_3! حداقل مسافتی که باید طی کند؛ برابر است با:

$$l_{min} = |-4-8| + |2-(-4)| = 18\,m$$

حالا متحرک اگر دلش بخواهد، می‌تواند مسافت بیشتری هم در این فاصله طی کند؛ مثلاً می‌تواند ابتدا از مکان $x_1 = 8\,m$ به $x' = 10\,m$ و بعد به مکان $x_2 = -4\,m$ و در نهایت به $x_3 = 2\,m$ برود. بنابراین:

$$l \geq 18\,m$$

۴۷. گزینهٔ ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



لحظه (s)	صفر	۲/۲۵	۲/۵	۳/۲۵	۴/۲۵	۵
مکان (m)	۵	صفر	-۱	-۴	-۵	-۳

(۱) ۲/۵ ثانیهٔ دوم یعنی از $t = 2/5\,s$ تا $t = 5\,s$. با توجه به شکل بالا می‌بینیم که متحرک در $t = 4/25\,s$ تغییر جهت می‌دهد. از آن‌جا که این لحظه در بازهٔ زمانی ۲/۵ ثانیهٔ دوم است. ✓

یادآوری m ثانیهٔ nام یعنی بازهٔ زمانی‌ای که از لحظهٔ $(n-1)m$ ثانیه شروع می‌شود و تا لحظهٔ nm ثانیه ادامه دارد. این‌جا $m = 2/5$ و $n = 2$ است؛ پس:

$$t_1 = (2-1)(2/5\,s) = 2/5\,s \qquad t_2 = (2)(2/5\,s) = 5\,s$$

(۲) ۰/۵ ثانیهٔ پنجم یعنی بازهٔ $(2\,s, 2/5\,s)$. بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ عبور می‌کند. همان‌طور که در جدول بالا می‌بینید متحرک در $t = 2/25\,s$ از مبدأ عبور می‌کند که این لحظه در بازهٔ ۰/۵ ثانیهٔ پنجم (یعنی $(2\,s, 2/5\,s)$) قرار دارد. ✓

(۳) بردار جابه‌جایی در ۲/۵ ثانیهٔ اول برابر است با:

$$\vec{x}' = \vec{x}_{2/5} - \vec{x}_0 = (-1\vec{i}) - (5\vec{i}) = -6\vec{i}$$

بردار مکان در لحظهٔ $t = 2\,s$ را نمی‌دانیم ولی به کمک جهت و شکل بالا می‌فهمیم که بردار مکان در تمام لحظه‌های قبل از $t = 2/25\,s$ مثبت است. بنابراین بردار جابه‌جایی در ۲/۵ ثانیهٔ اول با بردار مکان در لحظهٔ $t = 2\,s$ هم‌جهت نیست. ✓

(۴) ۱/۵ ثانیهٔ آخر حرکت یعنی از $t = 3/5\,s$ تا $t = 5\,s$؛ متحرک در این بازهٔ زمانی از مکانی بین $-4\,m$ و $-5\,m$ حرکت کرده است و در نهایت به مکان $-3\,m$ می‌رود؛ پس جابه‌جایی‌اش مثبت است. ✗

۴۸. گزینهٔ ۱ سرعت متوسط برابر است با جابه‌جایی تقسیم بر مدت‌زمان جابه‌جایی؛ پس:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-16-8}{10-2} = \frac{-24}{8} = -3\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = -3\vec{i}$$

۴۹. گزینهٔ ۱ سرعت متوسط کل حرکت برابر است با جابه‌جایی کل تقسیم بر کل زمان حرکت، یعنی:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{AO} + \Delta x_{OB}}{\Delta t_{AO} + \Delta t_{OB}} = \frac{300+500}{30+20} = \frac{800}{50} = 16\,m/s$$

۵۰. گزینهٔ ۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) بازیکن (الف) از $x = -6\,m$ به $x = 8\,m$ رفته و در این نقطه تغییر جهت داده است و به $x = 4\,m$ بازگشته است؛ پس مسافت طی‌شده توسط این بازیکن به صورت روبه‌رو است:

$$l_{\text{الف}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |8-(-6)| + |4-8| = 14+4 = 18\,m$$

به همین ترتیب برای بازیکن (ب) داریم:

$$l_{\text{ب}} = |\Delta x'_1| + |\Delta x'_2| = |2-14| + |4-2| = 12+2 = 14\,m$$

$$\Rightarrow l_{\text{الف}} - l_{\text{ب}} = 18-14 = 4\,m$$

پس بازیکن (الف) ۴ m بیشتر از بازیکن (ب) دویده است. ✓

(۲) ابتدا جابه‌جایی‌های دو بازیکن را به دست می‌آوریم:

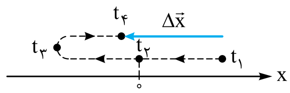
$$\Delta x_{\text{الف}} = 4-(-6) = 10\,m \Rightarrow |\Delta x_{\text{الف}}| = 10\,m$$

$$\Delta x_{\text{ب}} = 4-14 = -10\,m \Rightarrow |\Delta x_{\text{ب}}| = 10\,m$$

همان‌طور که می‌بینید، جابه‌جایی دو بازیکن در بازهٔ زمانی یکسان $(0, 5\,s)$، برابر است! پس سرعت متوسطشان هم باید برابر باشد. ✓

(۳) چون در بازهٔ $(0, 5\,s)$ مسافت‌ها با هم برابر نیستند؛ تندی متوسط دو بازیکن برابر نیست. ✗

(۴) بازیکن (ب) همواره در قسمت مثبت محور x است؛ پس جهت بردار مکان آن تغییر نکرده است. ✓



۵۱. گزینهٔ ۲ مطابق شکل، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر نقطهٔ t_1 را به نقطهٔ t_4 وصل کنیم، می‌بینیم که بردار جابه‌جایی ($\Delta\vec{x}$) در خلاف جهت محور x است. ✓

ب) در بازهٔ t_2 تا t_4 متحرک در طرف منفی محور x است. پس در تمام لحظه‌های این بازه (از جمله t_3) بردار مکان منفی است. در واقع در لحظهٔ t_3 جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند! نه جهت بردار مکان آن! ✗

پ) طبق رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$، بردار سرعت متوسط هم‌جهت با جابه‌جایی است؛ با توجه به این، چه در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، چه t_2 تا t_3، بردار سرعت متوسط در خلاف جهت محور x است؛ چرا که متحرک در خلاف محور x جابه‌جا شده است. ✗

ت) در بازهٔ t_3 تا t_4 چون متحرک در بخش منفی محور است! بردار مکان آن خلاف جهت محور x است. از طرفی چون متحرک در این بازه، در جهت مثبت محور جابه‌جا شده است بردار سرعت متوسط در جهت محور x است. ✓

۵۲. گزینهٔ ۳ کافی است اطلاعات مفید مسئله (یعنی اطلاعات ابتدا و انتهای حرکت) را در فرمول $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ جای‌گذاری کنیم:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_0}{t_2-t_0}=\frac{20-(-40)}{10-0}=\frac{60}{10}=6\,m/s$$

(همین‌طور که دیدید $t_1=6\,s$ و $x_1=100\,m$ اطلاعات بی‌مصرف و اضافی بودن.)

۵۳. گزینهٔ ۴ **گام اول:** ابتدا باید مسافت طی‌شده را حساب کنیم. مطابق گفتهٔ سؤال، متحرک فقط در لحظهٔ t_2 تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین:

$$l=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|=|-60-10|+|30-(-60)|=70+90=160\,m$$

گام دوم: حالا به سراغ رابطهٔ تندی متوسط می‌رویم تا مقدار آن معلوم شود:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{160}{\underbrace{8}_{t_3}-\underbrace{0}_{t_1}}=20\,m/s$$

۵۴. گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}_2-\vec{d}_1}{\Delta t}\Rightarrow 2\vec{i}=\frac{\vec{d}_2-(-4\vec{i})}{11-4}\Rightarrow 2\vec{i}=\frac{\vec{d}_2+4\vec{i}}{7}\Rightarrow 14\vec{i}=\vec{d}_2+4\vec{i}\Rightarrow \vec{d}_2=10\vec{i}$$

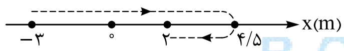
۵۵. گزینهٔ ۲ متحرک با اندازهٔ سرعت متوسط $4\,m/s$ در خلاف جهت محور y حرکت می‌کند، پس بردار سرعت متوسط متحرک در مدت $4\,s$ در SI به صورت $\vec{v}_{av}=-4\vec{j}$ می‌شود، پس براساس تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow -4\vec{j}=\frac{\vec{d}}{4}\Rightarrow \vec{d}=-16\vec{j}\Rightarrow \vec{y}_2-\vec{y}_1=-16\vec{j}\Rightarrow \vec{y}_2-(-8\vec{j})=-16\vec{j}\Rightarrow \vec{y}_2=-24\vec{j}$$

۵۶. گزینهٔ ۳ **گام اول:** سرعت متوسط دو متحرک با هم برابر است؛ پس با مساوی قرار دادن رابطهٔ سرعت‌ها به راحتی مکان نهایی متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av,B}=\vec{v}_{av,A}\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\cancel{\Delta t}}=\frac{\vec{d}_A}{\cancel{\Delta t}}\Rightarrow \vec{d}_{2,B}-\vec{d}_{1,B}=\vec{d}_{2,A}-\vec{d}_{1,A}\Rightarrow \vec{d}_{2,B}-(-3\vec{i})=-5\vec{i}-(-10\vec{i})\Rightarrow \vec{d}_{2,B}=(-5+10-3)\vec{i}=2\vec{i}$$

گام دوم: حالا باید مسافت طی‌شده توسط متحرک B را محاسبه کنیم. این متحرک روی خط راست ابتدا از مکان $-3\vec{i}$ به مکان $4/5\vec{i}$ می‌رود و سپس تغییر جهت می‌دهد و به مکان $2\vec{i}$ می‌رود. در شکل روبه‌رو مسیر حرکت متحرک B را نشان داده‌ایم، پس مسافت طی‌شده برابر است با:



$$l_B=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=|4/5-(-3)|+|2-(4/5)|=7/5+2/5=10\,m$$

گام سوم: با داشتن مسافت، تندی متوسط متحرک B حساب می‌شود:

$$s_{av,B}=\frac{l_B}{\Delta t}=\frac{10}{2/5}=4\,m/s$$

۵۷. گزینهٔ ۱ **گام اول:** ابتدا مکان اولیهٔ دو متحرک را تعیین می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av,A}=\frac{\vec{d}_A}{\Delta t}=\frac{\vec{y}_{2,A}-\vec{y}_{1,A}}{\Delta t}\Rightarrow -2\vec{j}=\frac{2\vec{j}-\vec{y}_{1,A}}{2}\Rightarrow -4\vec{j}=2\vec{j}-\vec{y}_{1,A}\Rightarrow y_{1,A}=6\vec{j}$$

$$\vec{v}_{av,B}=\frac{\vec{d}_B}{\Delta t}=\frac{\vec{y}_{2,B}-\vec{y}_{1,B}}{\Delta t}\Rightarrow 2\vec{j}=\frac{-2\vec{j}-\vec{y}_{1,B}}{2}\Rightarrow 4\vec{j}=-2\vec{j}-\vec{y}_{1,B}\Rightarrow 6\vec{j}=-\vec{y}_{1,B}\Rightarrow \vec{y}_{1,B}=-6\vec{j}$$

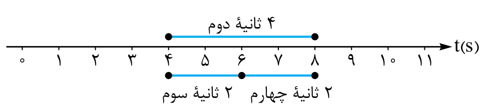
گام دوم: با این حساب، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=0$ برابر است با:

$$\Delta y=|\vec{y}_{1,A}-\vec{y}_{1,B}|=|6\vec{j}-(-6\vec{j})|=|12\vec{j}|=12\,m$$

۵۸. گزینهٔ ۲ **گام اول:** برای حل این تست کافی است معنی بازه‌های زمانی داده‌شده را بدانیم.

۴ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $4\,s$ تا $8\,s$ ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی $4\,s$ تا $6\,s$ ۲ ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $6\,s$ تا $8\,s$

پس با توجه به محور زمان زیر می‌توانیم بنویسیم:



$$\underbrace{\Delta t_{(4,8)}}_{\text{۴ ثانیهٔ دوم}}=\underbrace{\Delta t_{(4,6)}}_{\text{۲ ثانیهٔ سوم}}+\underbrace{\Delta t_{(6,8)}}_{\text{۲ ثانیهٔ چهارم}}\Rightarrow \underbrace{\Delta x_{(4,8)}}_{\text{جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ دوم}}=\underbrace{\Delta x_{(4,6)}}_{\text{جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم}}+\underbrace{\Delta x_{(6,8)}}_{\text{جابه‌جایی از ۲ ثانیهٔ چهارم}}$$

جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ دوم و جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ چهارم را داریم و جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم را می‌خواهیم: $18=\Delta x_{(4,6)}+12\Rightarrow \Delta x_{(4,6)}=18-12=6\,m$

گام دوم: فقط می‌ماند محاسبهٔ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ سوم:

$$v_{av(4,6)}=\frac{\Delta x_{(4,6)}}{\Delta t}=\frac{6}{2}=3\,m/s$$

۵۹. گزینهٔ ۴ **گام اول:** چون سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول را می‌دانیم، ابتدا مکان اولیهٔ متحرک (x_0) را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(0,5)}=\frac{x_2-x_0}{t-0}\Rightarrow 1=\frac{4-x_0}{5-0}\Rightarrow 5=4-x_0\Rightarrow x_0=-1\,m$$

گام دوم: از آن‌جا که متحرک فقط در لحظهٔ $t_۱$ تغییر جهت داده، می‌توان گفت متحرک ابتدا از $x_۰$ تا $x_۱$ رفته و سپس از $x_۱$ تا $x_۲$ برگشته؛ با این حساب مسافت طی‌شده در ۵ ثانیهٔ اول برابر است با:

$$l=|x_۱-x_۰|+|x_۲-x_۱|=|۱۰-(-۱)|+|۴-۱۰|=۱۱+۶=۱۷\,m$$

گام سوم: با داشتن مسافت طی‌شده، محاسبهٔ تندی متوسط کاری ندارد:

$$s_{av(۰,۵)}=\frac{۱۷}{۵}=۳/۴\,m/s$$

۶۰. گزینه ۴ **گام اول**: ابتدا با توجه به داشتن سرعت متوسط متحرک از نقطهٔ A تا B، مکان نقطهٔ B (x_B) را پیدا می‌کنیم:

$$v_{av,AB}=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}\Rightarrow -۲=\frac{x_B-(-۲)}{۵}\Rightarrow x_B+۲=-۱۰\Rightarrow x_B=-۱۲\,m$$

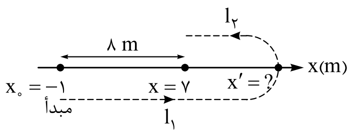
گام دوم: حالا یک بار دیگر رابطهٔ سرعت متوسط را برای نقطهٔ B تا C می‌نویسیم تا مکان نقطهٔ C (x_C) به دست آید:

$$v_{av,BC}=\frac{x_C-x_B}{t_C-t_B}\Rightarrow ۴=\frac{x_C-(-۱۲)}{۵}\Rightarrow x_C+۱۲=۲۰\Rightarrow x_C=۸\,m\Rightarrow \vec{x}_C=۸\vec{i}$$

۶۱. گزینه ۲ **گام اول**: ابتدا به کمک رابطهٔ سرعت متوسط، مکان نهایی جسم را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{x-(-۱)}{۴}\Rightarrow x=۸-۱=۷\,m$$

گام دوم: از آن‌جایی که متحرک یک بار تغییر جهت داده است، مسیر حرکت مانند شکل روبه‌رو است. متحرک از مکان $x_۰=-۱\,m$، مسافت $l_۱$ را می‌پیماید تا در نقطهٔ x' تغییر جهت دهد و مسافت $l_۲$ را طی می‌کند تا به مکان نهایی $(x=۷\,m)$ برسد. با این اطلاعات به سراغ رابطهٔ تندی متوسط می‌رویم:



$$s_{av}=\frac{l_{کل}}{\Delta t}=\frac{l_۱+l_۲}{\Delta t}\Rightarrow ۵=\frac{l_۱+l_۲}{۴}\Rightarrow l_۱+l_۲=۲۰\,m$$

گام سوم: با توجه به شکل $l_۱$ به اندازهٔ ۸ m بیشتر از $l_۲$ است. پس داریم:

$$l_۱+l_۲=۲۰\,m\xrightarrow{l_۱=l_۲+۸}(l_۲+۸)+l_۲=۲۰\Rightarrow ۲l_۲=۱۲\Rightarrow l_۲=۶\,m$$

پس x' به اندازهٔ ۶ m جلوتر از $x=۷\,m$ است:

$$x'=x+۶=۷+۶=۱۳\,m\Rightarrow \vec{x}'=(۱۳\,m)\vec{i}$$

در شکل مشخص است که بزرگ‌ترین بردار مکان این متحرک همین $\vec{x}'$ است.

۶۲. گزینه ۴ در این تست، برای محاسبهٔ سرعت متوسط کل از رابطهٔ $v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}$ کمک می‌گیریم. متحرک در دو بازهٔ زمانی متوالی $\frac{\Delta t}{۴}$ و $\frac{۳\Delta t}{۴}$ (یعنی $\Delta t-\frac{\Delta t}{۴}=\frac{۳\Delta t}{۴}$) حرکت کرده است. پس داریم:

$$v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_{کل}}\xrightarrow{\Delta x=v_{av}\Delta t}v_{av,کل}=\frac{v_{av,۱}\Delta t_۱+v_{av,۲}\Delta t_۲}{\Delta t_{کل}}=\frac{-۸\times\frac{\Delta t}{۴}+۱۲\times\frac{۳\Delta t}{۴}}{\Delta t}=\frac{۷\Delta t}{\Delta t}\Rightarrow v_{av,کل}=۷\vec{i}$$

۶۳. گزینه ۴ **گام اول**: این متحرک دو جابه‌جایی متوالی $\Delta x_۱=-\frac{\Delta x}{۴}$ و $\Delta x_۲$ را با سرعت‌های متوسط $-۱۵\,m/s$ و $۲۵\,m/s$ پیموده است. اول $\Delta x_۲$ را برحسب جابه‌جایی کل (Δx) به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲\Rightarrow \Delta x_۲=\Delta x-\Delta x_۱=\Delta x-(-\frac{\Delta x}{۴})=\frac{۵\Delta x}{۴}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم با رابطهٔ $v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}$ به جواب برسیم. از آن‌جا که $\Delta t_{کل}$ داده نشده است، معادل آن را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$v_{av,کل}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{\Delta x}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}\xrightarrow{\Delta t=\frac{\Delta x}{v_{av}}}v_{av,کل}=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x_۱}{v_{av,۱}}+\frac{\Delta x_۲}{v_{av,۲}}}=\frac{\Delta x}{\frac{-\frac{\Delta x}{۴}}{-۱۵}+\frac{\frac{۵\Delta x}{۴}}{۲۵}}=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{۶۰}+\frac{\Delta x}{۲۰}}=\frac{\Delta x}{\frac{۴\Delta x}{۶۰}}=\frac{۶۰}{۴}=۱۵\,m/s$$

۶۴. گزینه ۲ **گام اول**: ابتدا $\Delta x_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲\Rightarrow \Delta x_۲=\Delta x-\Delta x_۱=\Delta x-(-\frac{\Delta x}{۴})=\frac{۵\Delta x}{۴}$$

گام دوم: با توجه به این‌که متحرک فقط یک بار تغییر جهت داده است، پس متحرک دو مسافت متوالی $l_۱=|\Delta x_۱|$ و $l_۲=\Delta x_۲$ را پیموده است و داریم:

$$s_{av,کل}=\frac{l_۱+l_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{|-\frac{\Delta x}{۴}|+\frac{۵\Delta x}{۴}}{\frac{\Delta x_۱}{v_{av,۱}}+\frac{\Delta x_۲}{v_{av,۲}}}=\frac{\frac{۶\Delta x}{۴}}{\frac{-\frac{\Delta x}{۴}}{-۱۵}+\frac{\frac{۵\Delta x}{۴}}{۲۵}}=\frac{\frac{۳}{۲}\Delta x}{\frac{\Delta x}{۶۰}+\frac{\Delta x}{۲۰}}=\frac{\frac{۳}{۲}\Delta x}{\frac{۴\Delta x}{۶۰}}=\frac{۱۸۰}{۸}=۲۲/۵\,m/s$$

۶۵. گزینه ۲ برای به دست آوردن بردار مکان اولیه تنها کافی است $t=۰$ را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار دهیم:

$$x=۳\cos\pi t+۵t^۲-۷\xrightarrow{t=۰}x_۰=۳\cos\pi(۰)+۵(۰)-۷\Rightarrow x_۰=۳+۰-۷=-۴\,m\Rightarrow \vec{x}_۰=-۴\vec{i}\,(m)$$

۶۶. گزینه ۱ مبدأ مکان یعنی $x=۰$ و مبدأ زمان یعنی $t=۰$، برای حل این تست کافی است در معادلهٔ مکان ـ زمان یعنی $x(t)=t^۴-۲t+۲$، یک بار $t=۰$ و یک بار $t=۲\,s$ را قرار دهیم:

$$\begin{cases}t=۰\Rightarrow x_۰=(۰)^۴-۲(۰)+۲=۲\,m\\ t=۲\,s\Rightarrow x_۲=(۲)^۴-۲(۲)+۲=۱۶-۴+۲=۱۴\,m\end{cases}\Rightarrow \frac{x_۲}{x_۰}=\frac{d}{d_۰}=\frac{۱۴}{۲}=۷$$

۶۷. گزینه ۲ کافی است $t_۰=۰$ و $t_۱=۲\,s$ را در معادلهٔ حرکت قرار دهیم و $x_۰$ و $x_۱$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases}t_۰=۰\Rightarrow x_۰=۲(۰)^۳+۶(۰)-۲=-۲\,m\\ t_۱=۲\,s\Rightarrow x_۱=۲(۲)^۳+۶(۲)-۲=۲۶\,m\end{cases}\Rightarrow \Delta x=x_۱-x_۰=۲۶-(-۲)=۲۸\,m$$

تکنیک برای محاسبهٔ جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان را به صورت $\Delta x=۲t^۳+۶t$ بنویسیم و مقدار $t=۲\,s$ را در آن قرار دهیم:

$$\Delta x=۲(۲)^۳+۶(۲)=۱۶+۱۲=۲۸\,m$$

۶۸. گزینه ۴ مبدأ حرکت ($x_۰$) یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t=۰$؛ با توجه به این نکته، با جای‌گذاری $t=۰$ و $t=۳\,s$ در معادلهٔ مکان ـ زمان، فاصلهٔ متحرک از مبدأ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t=۰ \Rightarrow x_۰=(۰)^۳-(۰)-۴=-۴\,m \\ t=۳ \Rightarrow x_۳=(۳)^۳-۳-۴=۲۰\,m\end{cases} \Rightarrow x_۳-x_۰=۲۰-(-۴)=۲۴\,m$$

تکنیک این تست در واقع جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۳ s را می‌خواهد. کافی است معادله را به صورت $\Delta x=t^۳-t$ بنویسید و به جای t، ۳ s را قرار دهید تا به جواب برسید: $\Delta x=(۳)^۳-۳=۲۴\,m$

۶۹. گزینه ۳ **گام اول**: ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t_۱=۱\,s$ تا $t_۲=۲\,s$، پس ابتدا $t_۱=۱\,s$ را در معادلهٔ مکان ـ زمان یعنی $x=۲t^۲-۴$ قرار می‌دهیم و $x_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$x=۲t^۲-۴ \xrightarrow{t_۱=۱s} x_۱=۲(۱)^۲-۴=۲-۴=-۲\,m$$

گام دوم: حالا $t_۲=۲\,s$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$x=۲t^۲-۴ \xrightarrow{t_۲=۲s} x_۲=۲(۲)^۲-۴=۸-۴=۴\,m$$

گام سوم: جابه‌جایی (Δx) برابر با $x_۲-x_۱$ است؛ یعنی:

$$\Delta x=x_۲-x_۱=۴-(-۲)=۶\,m \Rightarrow \Delta\vec{x}=۶\vec{i}$$

۷۰. گزینه ۱ برای به دست آوردن جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $(۱\,s, ۲\,s)$ کافی است. مکان متحرک در $t_۲=۲\,s$ را منهای مکان متحرک در $t_۱=۱\,s$ کنیم:

$$y=۵\sin\frac{\pi t}{۲}+۳t-۴ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۱s \Rightarrow y_۱=۵\sin(\frac{\pi(۱)}{۲})+۳(۱)-۴=۴\,m \\ t_۲=۲s \Rightarrow y_۲=۵\sin(\frac{\pi(۲)}{۲})+۳(۲)-۴=۲\,m\end{cases} \Rightarrow \vec{d}=(y_۲-y_۱)\vec{j}=(۲-۴)\vec{j}=-۲\vec{j}$$

۷۱. گزینه ۲ **گام اول**: ۲ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t_۱=۲\,s$ تا $t_۲=۴\,s$، در این بازه جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$x=t^۳-۳t-۸ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۲s \Rightarrow x_۱=۲^۳-۳(۲)-۸=۸-۶-۸=-۶\,m \\ t_۲=۴s \Rightarrow x_۲=۴^۳-۳(۴)-۸=۶۴-۱۲-۸=۴۴\,m\end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_۲-x_۱=۴۴-(-۶)=۵۰\,m$$

گام دوم: حالا اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۵۰}{۲}=۲۵\,m/s$$

۷۲. گزینه ۳ در $x=\pm۳\,m$، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان ۳ m می‌شود؛ بنابراین:

$$\begin{cases} ۳=۴t-۷ \Rightarrow ۴t=۱۰ \Rightarrow t=۲/۵\,s \\ -۳=۴t-۷ \Rightarrow ۴t=۴ \Rightarrow t=۱\,s\end{cases}$$

۷۳. گزینه ۳ برای این‌که ببینیم در چه لحظه‌ای بردار مکان $-۷\vec{i}$ می‌شود؛ باید $x=-۷$ را در معادله قرار دهیم تا مقدار t مشخص شود:

$$-۷=۲t^۲-۳t-۱۶ \Rightarrow ۲t^۲-۳t-۹=۰ \Rightarrow \Delta=(-۳)^۲-۴(۲)(-۹) \Rightarrow \Delta=۹+۷۲=۸۱ \Rightarrow t_۱,t_۲=\frac{۳\pm۹}{۲(۲)} \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۳\,s \\ t_۲=-\frac{۳}{۲}\,s \ \times\end{cases}$$

دقت کنید که $t_۱=۳\,s$ می‌شود **ابتدای ثانیهٔ چهارم**! ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $(۳\,s, ۴\,s)$؛ امیدواریم اشتباه نکرده باشید و (۲) رو زده باشید!

یادآوری ثانیهٔ nام یعنی از $(n-۱)$ ثانیه تا n ثانیه.

تکنیک یک راه ساده‌تر برای حل این تست، جای‌گذاری گزینه‌ها در معادله است؛ یعنی: $t=۳\,s \Rightarrow x=۲(۳)^۲-۳(۳)-۱۶=-۷\,m$ ✓

۷۴. گزینه ۳ متحرک در لحظه‌هایی که x در معادلهٔ مکان ـ زمان صفر می‌شود (ریشه‌های معادلهٔ مکان ـ زمان) از مبدأ عبور می‌کند؛ پس:

$$x=۰ \Rightarrow ۰=(t-۲)(t+۳)(t+۴) \Rightarrow t=\begin{cases} -۴\,s & \text{(غ‌قق)} \\ -۳\,s & \text{(غ‌قق)} \\ ۲\,s & \text{(قق)}\end{cases}$$

زمان نمی‌تواند منفی باشد؛ پس فقط $t=۲\,s$ قابل‌قبول است.

۷۵. گزینه ۳ می‌خواهیم بدانیم در چه لحظه‌ای متحرک برای دومین بار از مبدأ عبور می‌کند؛ بنابراین باید بفهمیم کی $y=۰$ می‌شود:

$$y=۰ \Rightarrow ۰=-t^۲+۸t-۱۵ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۰=-(t-۳)(t-۵) \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۳\,s \\ t_۲=۵\,s & \text{دومین بار}\end{cases}$$

بنابراین متحرک بار اول در $t_۱=۳\,s$ و بار دوم در $t_۲=۵\,s$ از مبدأ عبور می‌کند.

۷۶. گزینه ۱ لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. پس باید در معادلهٔ مکان ـ زمان، x را مساوی صفر قرار دهیم تا این لحظات را پیدا کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow ۰=(t-۴)(t^۲-۶t+۵)=(t-۴)(t-۵)(t-۱) \Rightarrow \begin{cases} t=۱\,s\\ t=۴\,s \\ t=۵\,s\end{cases}$$

در این لحظه‌ها متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند و بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

۷۷. گزینه ۴ بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ عبور کند و در واقع از یک طرف آن به طرف دیگر برود. این حالت در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان رخ می‌دهد؛ پس باید ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $x=t^۲-۶t+۱۰$ را به دست آوریم. برای همین سراغ به دست آوردن دلتای معادله ($\Delta=b^۲-۴ac$) می‌رویم که ببینیم معادله ریشهٔ ساده دارد یا نه:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۶)^۲-۴(۱)(۱۰)=۳۶-۴۰=-۴$$

دلتا منفی است. همان‌طور که می‌دانید وقتی Δ منفی است، معادلهٔ درجهٔ دو، ریشه ندارد؛ پس بردار مکان متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

۷۸. (گزینه ۱) هر وقت متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند، $x=0$ می‌شود، پس x را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x_A = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1\,s & \text{(ریشه مضاعف: متحرک به مبدأ رسیده و در آن‌جا تغییر جهت داده ولی از آن عبور نکرده است.)} \\ x_B = 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3\,s & \text{(در این‌جا یک بار عبور کرده)} \\ t = -2\,s & \text{غ ق ق} \times \end{cases} \end{cases}$$

حواستون باشه در حل معادلهٔ مکان ـ زمان، به ازای $x=0$، فقط وقتی ریشه معمولی و $t>0$ باشد، متحرک از مبدأ عبور کرده است.

۷۹. (گزینه ۴) گفتیم که جهت بردار مکان فقط در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان تغییر جهت می‌دهد؛ پس برای حل این تست باید مثل تست قبل ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان را تعیین کنیم. چون معادله درجهٔ سه است از تجزیه کمک می‌گیریم:

$$x = t^3 - 4t^2 + 4t = t(t^2 - 4t + 4) = t(t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 & \text{(ریشهٔ ساده)} \\ 2\,s & \text{(ریشهٔ مضاعف)} \end{cases}$$

$t = 2\,s$ چون ریشهٔ مضاعف است؛ در آن تغییر علامت اتفاق نمی‌افتد؛ پس کاری به آن نداریم! (در واقع متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ به مبدأ می‌رسد ولی از آن عبور نمی‌کند.) می‌ماند $t=0$، در این لحظه متحرک در مبدأ قرار دارد، ولی چون قبل از آن زمان منفی است و عملاً بازهٔ مورد بررسی ما وجود ندارد، در این لحظه هم تغییر جهت بردار مکان نداریم. (با این‌که $t=0$ ریشهٔ ساده است.)

۸۰. (گزینه ۲) زمانی سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود که جابه‌جایی صفر باشد، $(\overbrace{v_{av}}^{\text{صفر}} = \frac{\overbrace{\Delta x}^{\text{صفر}}}{\Delta t})$؛ بنابراین باید مکان متحرک در لحظهٔ T برابر با مکان اولیهٔ آن باشد؛ یعنی:

$$x = x_0 \Rightarrow T^2 - 6T + \cancel{7} = (0)^2 - 6(0) + \cancel{7} \Rightarrow T(T-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \times \\ T = 6\,s \end{cases}$$

تکنیک برای محاسبهٔ جابه‌جایی از لحظهٔ صفر تا T، می‌توانید لحظهٔ T را در معادلهٔ $\Delta x = t^2 - 6t$ قرار دهید:

$$\Delta x = T^2 - 6T = 0 \Rightarrow T(T-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \times \\ T = 6\,s \end{cases}$$

۸۱. (گزینه ۲) **گام اول**: سرعت متوسط متحرک را برای ثانیهٔ دوم (یعنی از $t = 1\,s$ تا $t = 2\,s$) می‌نویسیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -3\vec{i} = \frac{[(2)^3 + 2A + B - (1)^3 - A - B]\vec{i}}{2-1} \Rightarrow -3 = 7 + A \Rightarrow A = -10$$

گام دوم: حالا به سراغ جای‌گذاری داده‌های متحرک در لحظهٔ $t = 3\,s$ می‌رویم تا مقدار B هم معلوم شود:

$$2\vec{i} = [(3)^3 - 10(3) + B]\vec{i} \Rightarrow 2 = -3 + B \Rightarrow B = 5$$

گام سوم: می‌ماند محاسبهٔ نسبت $\frac{A}{B}$:

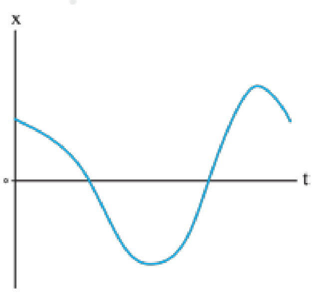
$$\frac{A}{B} = -\frac{10}{5} = -2$$

درس چهارم نمودار مکان ـ زمان در حرکت راست‌خط

یک روش برای مشخص‌کردن مکان متحرک در هر لحظه، رسم نمودار مکان ـ زمان آن است. (در واقع نمودار مکان ـ زمان، همان معادلهٔ مکان ـ زمان است ولی به صورت نمودار!)

محور قائم این نمودار، محور مکان (x) است (که هم قسمت منفی دارد و هم مثبت) و محور افقی این نمودار، محور زمان (t) است (که فقط قسمت مثبت دارد).

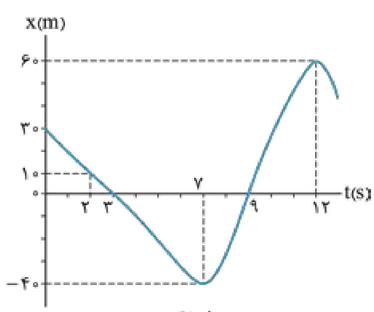
مثلاً شکل روبه‌رو، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند.



آن‌چه از نمودار مکان ـ زمان می‌توانیم بفهمیم

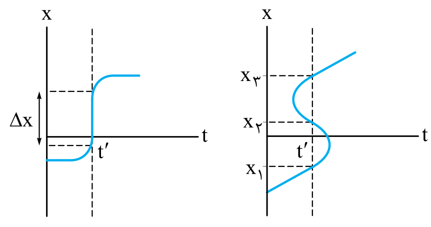
نمودار مکان ـ زمان همهٔ اطلاعات حرکت جسم را در خود دارد که ما به کمک نمودار روبه‌رو (نمودار (۱)) بعضی از آن‌ها را الان می‌گوییم:

۱. تعیین مکان متحرک در هر لحظه • هر نقطه از نمودار مکان ـ زمان نشان می‌دهد که متحرک در هر لحظه در کجای محور x است. مثلاً در نمودار (۱) متحرک در لحظهٔ $t_0 = 0$ در مکان $x_0 = 30\,m$ و در لحظه‌های $t = 3\,s$ و $t = 9\,s$ در مبدأ مکان $(x=0)$ است و در لحظهٔ $t = 2\,s$ در مکان $x = 10\,m$ و در لحظهٔ $t = 7\,s$ در مکان $x = -40\,m$ است.



نمودار (۱)

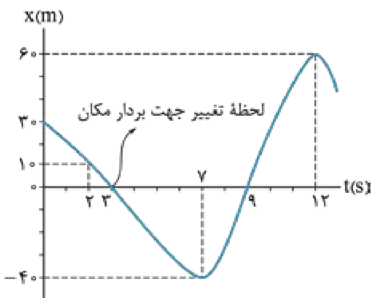
حواستون باشه متحرک نمی‌تواند در یک لحظه دو یا چند جا باشد. در واقع اگر از هر جای نمودار یک خط عمود بر محور t رسم کنیم، باید فقط از یک نقطه از نمودار عبور کند. مثلاً در شکل (الف) متحرک در لحظهٔ t' هم‌زمان در سه نقطهٔ x_1، x_2 و x_3 و در شکل (ب) متحرک در بی‌شمار نقطه در محدودهٔ Δx قرار دارد که چنین حالت‌هایی غیرممکن است.



(ب) (الف)

• ۲. تعیین لحظه‌های تغییر جهت بردار مکان

• در لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند، متحرک در حال عبور از مبدأ مکان است. می‌دانید که با عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. پس در لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. مثلاً در نمودار (۲) متحرک در لحظهٔ $t = 3\,s$ از طرف مثبت محور x به طرف منفی آن می‌رود و بردار مکان از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد. (حالا شما بگویید در این نمودار در چه لحظهٔ دیگری بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد؟)



نمودار (۲)

• ۳. محاسبهٔ جابه‌جایی

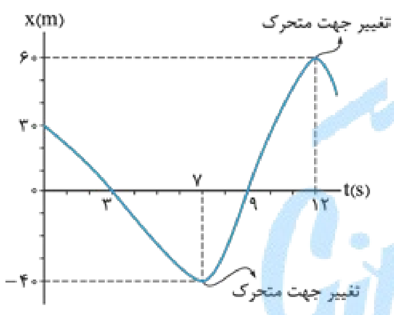
• برای هر بازهٔ زمانی دلخواه می‌توانیم جابه‌جایی را حساب کنیم.

مثلاً در نمودار (۲) متحرک در بازهٔ زمانی $(2\,s, 12\,s)$ از مکان $x_2 = 10\,m$ به مکان $x_{12} = 60\,m$ رفته است.

پس جابه‌جایی آن در این بازهٔ زمانی برابر است با: $\Delta x_{(2,12)} = x_{12} - x_2 = 60 - 10 = 50\,m$

• ۴. تعیین لحظه‌های تغییر جهت متحرک

• نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینهٔ) نمودار، نشان‌دهندهٔ لحظه‌های تغییر جهت متحرک است. مثلاً در نمودار (۳) متحرک در لحظهٔ $t = 7\,s$ در مکان $x_7 = -40\,m$ و در لحظهٔ $t = 12\,s$ در مکان $x_{12} = 60\,m$ تغییر جهت داده است.



نمودار (۳)

• ۵. تشخیص جهت حرکت

• هر جا که شیب نمودار، مثبت (نمودار صعودی) باشد، یعنی متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و هر جا شیب نمودار منفی (نمودار نزولی) باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. مثلاً در نمودار (۳) متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۷ s در جهت منفی و در بازهٔ زمانی ۷ s تا ۱۲ s در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

• ۶. محاسبهٔ مسافت در یک بازهٔ زمانی معین

• با توجه به مکان‌های تغییر جهت متحرک، می‌توانیم مسافت طی‌شده را برای هر بازهٔ زمانی دلخواه حساب کنیم. مثلاً در نمودار (۳) متحرک در بازهٔ زمانی $(0, 12\,s)$ ابتدا از مکان $x_0 = 30\,m$ در جهت منفی محور x به مکان $x_7 = -40\,m$ و سپس در جهت مثبت محور x از مکان $x_7 = -40\,m$ به مکان $x_{12} = +60\,m$ رفته است؛ یعنی $70\,m$ در جهت منفی و $100\,m$ در جهت مثبت پیموده است که جمعاً می‌شود $170\,m$:

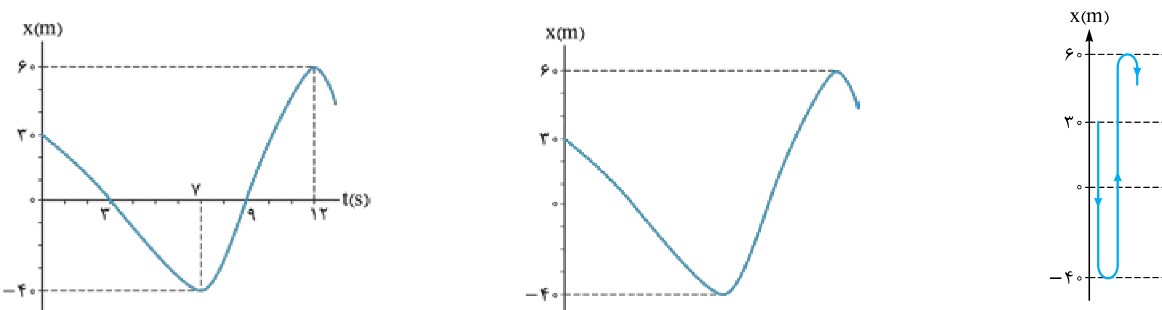
$$l = |x_7 - x_0| + |x_{12} - x_7| = |-40 - 30| + |60 - (-40)| \Rightarrow l = 70 + 100 = 170\,m$$

• ۷. رسم مسیر حرکت به کمک نمودار مکان-زمان

• برای رسم مسیر حرکت از روی نمودار مکان ـ زمان کافی است دو تا کار انجام دهیم.

اول: محور t را حذف می‌کنیم. (شکل ب)

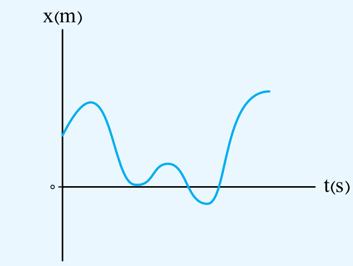
دوم: نمودار را از دو طرف می‌فشریم و با فلش مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم (شکل پ).

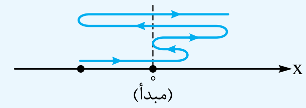


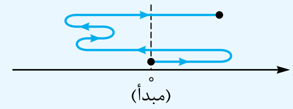
(الف) (ب) (پ)

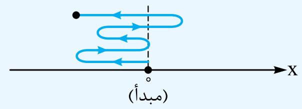
قبل از این‌که بقیهٔ نکته‌ها را ببینیم، در چند تست کاربرد همهٔ نکته‌های بالا را با هم مرور می‌کنیم:

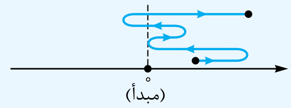
تست ؟ | نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. کدام گزینه مسیر حرکت این متحرک را بر روی محور x درست نشان می‌دهد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



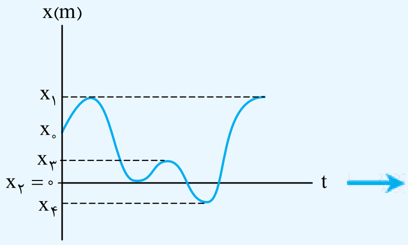
۱) 

۲) 

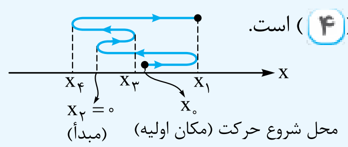
۳) 

۴) 

پاسخ ۴ | همین‌طور که در نمودار مکان ـ زمان می‌بینید، متحرک از مکان $x_\circ > \circ$ در جهت مثبت محور x شروع به حرکت کرده و برای اولین بار در x_1، دومین بار در $x_2 = \circ$، سومین بار در x_3 و چهارمین بار در x_4 تغییر جهت داده است. با توجه به مکان‌های تغییر جهت، مسیر حرکت متحرک بر روی محور x مطابق شکل ب (۴) است.

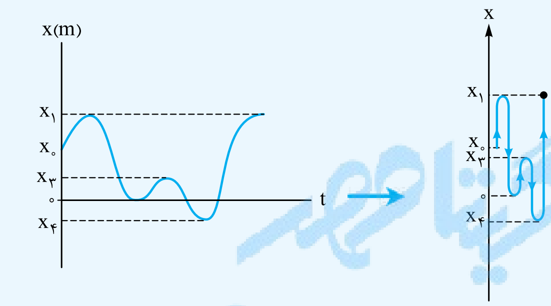


(الف)

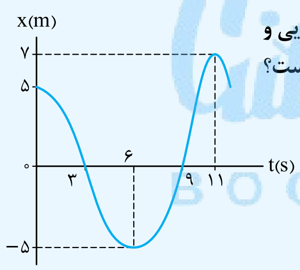


(ب)

تکنیک برای این‌که مسیر حرکت را از روی نمودار مکان ـ زمان تشخیص بدهیم، کافی است محور زمان را حذف کنیم و نمودار را از دو طرف فشرده کنیم! مثل شکل مقابل.



تست ؟ | شکل روبه‌رو، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. به ترتیب اندازهٔ جابه‌جایی و مسافتی که متحرک از لحظهٔ اولین تغییر جهت بردار مکانش تا لحظهٔ دومین تغییر جهت حرکتش می‌پیماید، چند متر است؟



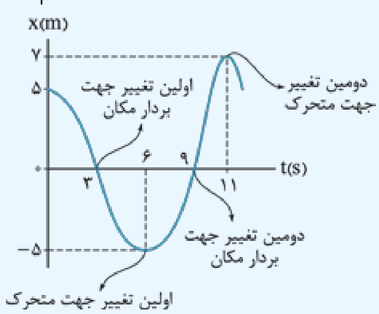
۱) ۵ و ۵

۲) ۷ و ۷

۳) ۵ و ۱۵

۴) ۷ و ۱۷

پاسخ ۴ | **گام اول**: گفتیم در لحظه‌ای که نمودار محور t را قطع می‌کند، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. پس مطابق شکل روبه‌رو در لحظه‌های ۳ s و ۹ s بردار مکان تغییر جهت داده است. هم‌چنین گفتیم در نقاط اکسترمم، متحرک تغییر جهت می‌دهد، پس در نمودار روبه‌رو در لحظه‌های ۶ s و ۱۱ s متحرک تغییر جهت داده است.



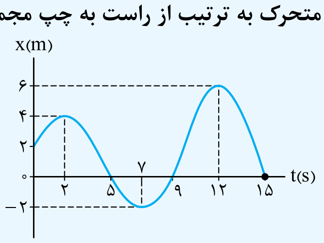
گام دوم: مطابق شکل اولین تغییر جهت بردار مکان در لحظهٔ $t_1 = ۳\,s$ و دومین تغییر جهت متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۱۱\,s$ اتفاق افتاده است. جابه‌جایی در بازهٔ $t_1 = ۳\,s$ تا $t_2 = ۱۱\,s$ برابر می‌شود با:

$$\Delta x_{(۳,۱۱)} = x_{۱۱} - x_۳ = ۷ - \circ = ۷\,m$$

برای محاسبهٔ مسافت باید حواسمان به تغییر جهتی که در لحظهٔ $t' = ۶\,s$ اتفاق افتاده باشد، یعنی باید مسافت ۳ s تا ۶ s را با مسافت ۶ s تا ۱۱ s جمع کنیم:

$$l_{(۳,۱۱)} = l_{(۳,۶)} + l_{(۶,۱۱)} = |\Delta x_{(۳,۶)}| + \Delta x_{(۶,۱۱)} = |-۵ - \circ| + ۷ - (-۵) = ۱۷\,m$$

تست ؟ | نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. این متحرک به ترتیب از راست به چپ مجموعاً چند ثانیه در جهت منفی محور x حرکت کرده است و چند ثانیه در طرف مثبت محور x بوده است؟



۱) ۸ و ۱۱

۲) ۴ و ۱۱

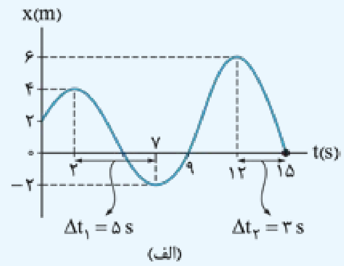
۳) ۸ و ۵

۴) ۴ و ۵

پاسخ ۱ | گام اول: دقت کنید این سؤال دو چیز مختلف را پرسیده؛ اول این‌که متحرک چند ثانیه در جهت منفی محور x حرکت کرده است؟ برای جواب‌دادن به این بخش سؤال، باید ببینیم در چه بازهٔ زمانی، شیب نمودار مکان ـ زمان منفی است (یعنی نمودار نزولی است).

همین‌طور که در شکل (الف) نشان داده‌ایم، در بازهٔ زمانی (۲ s, ۷ s) و همچنین (۱۲ s, ۱۵ s) شیب نمودار منفی و متحرک در جهت منفی محور x حرکت کرده است؛ پس داریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = (۷-۲)+(۱۵-۱۲) = ۵+۳ = ۸\,s$$



(الف)

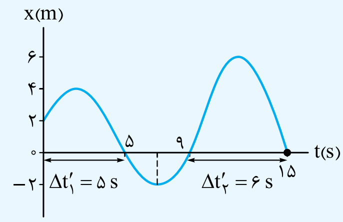
(۲) و (۴) غلط‌اند.)

گام دوم: قسمت دوم سؤال می‌پرسد که متحرک چند ثانیه در طرف مثبت محور x بوده است؟

باید دقت کنیم که این‌جا جهت حرکت متحرک را نخواسته بلکه جمع زمان‌هایی که نمودار بالای محور t است را خواسته است. در شکل (ب) می‌بینید که متحرک در دو بازهٔ زمانی $\Delta t'_1$ و $\Delta t'_2$ در طرف مثبت محور x حرکت می‌کند:

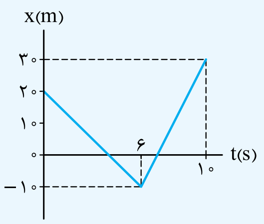
$$\Delta t'_1 + \Delta t'_2 = (۵-۰)+(۱۵-۹) = ۵+۶ = ۱۱\,s$$

(می‌تونستید بگید کل حرکت ۱۵ s است و متحرک ۴ s در طرف منفی محور x بوده، پس ۱۱ = ۴ − ۱۵ ثانیه در طرف مثبت حرکت کرده.)



(ب)

تست ؟ | **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. بازهٔ زمانی بین دو بار تغییر جهت بردار مکان چند ثانیه است؟**

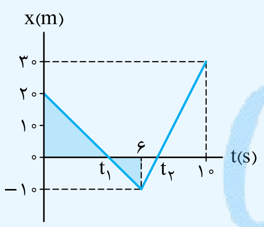


۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ ۲ | می‌دانید که با عبور متحرک از مبدأ مکان، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. به نمودار روبه‌رو نگاه کنید. نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 محور t را قطع کرده است، یعنی متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 از مبدأ مکان عبور کرده است؛ پس باید این لحظه‌ها را پیدا کنیم. یکی از روش‌های حل این سؤال، کمک گرفتن از تشابه مثلث‌ها است.

دو مثلث رنگی در شکل (الف) متشابه‌اند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۲۰}{t_1-۰} = \frac{|-۱۰|}{۶-t_1} \Rightarrow ۱۰t_1 = ۱۲۰-۲۰t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{۱۲۰}{۳۰} = ۴\,s$$



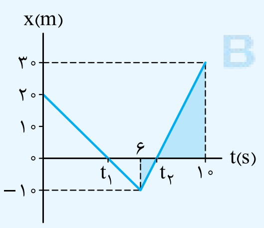
(الف)

با همین روش لحظهٔ t_2 را هم حساب می‌کنیم. در شکل (ب) نسبت تشابه دو مثلث رنگی را می‌نویسیم:

$$\frac{۳۰}{۱۰-t_2} = \frac{|-۱۰|}{t_2-۶} \Rightarrow ۳۰t_2-۱۸۰ = ۱۰۰-۱۰t_2 \Rightarrow ۴۰t_2 = ۲۸۰ \Rightarrow t_2 = ۷\,s$$

حالا که t_1 و t_2 را داریم، می‌توانیم بازهٔ زمانی بین دو عبور متوالی از مبدأ مکان را هم حساب کنیم:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = ۷-۴ = ۳\,s$$

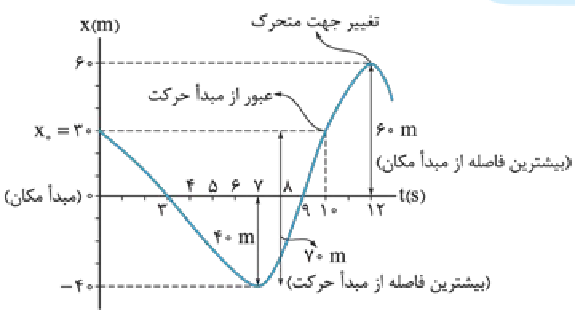


(ب)

۸. بیشترین فاصله از مبدأ مکان و بیشترین فاصله از مکان اولیه (مبدأ حرکت)

(الف) در لحظه‌ای که نمودار **بیشترین فاصله** را **از محور t** دارد، متحرک در **بیشترین فاصله از مبدأ مکان** قرار دارد. مثلاً در نمودار (۴)، در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ مکان است.

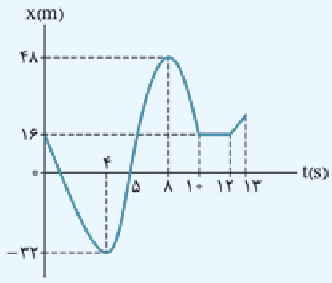
(ب) از مکان اولیه (x_0) خطی موازی محور t رسم کنید. فاصلهٔ هر نقطه از نمودار تا این خط نشان می‌دهد متحرک در هر لحظه **تا مکان اولیه (مبدأ حرکت)** چه‌قدر فاصله دارد. بنابراین در لحظه‌ای که نمودار بیشترین فاصله را از این خط دارد، متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه یا مبدأ حرکت است. مثلاً در نمودار (۴) متحرک در لحظهٔ $t = ۷\,s$ در فاصلهٔ ۷۰متری از این خط است.



نمودار (۴)

نکته محل تقاطع خطی که از مکان اولیه (x_0) موازی محور t رسم می‌کنیم با نمودار، لحظهٔ عبور دوبارهٔ متحرک از مبدأ حرکتش را نشان می‌دهد. مثلاً در نمودار بالا، در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ متحرک دوباره از مبدأ حرکت (مکان اولیه) گذشته است.

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. چندتا از عبارت‌های زیر دربارهٔ وضعیت حرکت این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۳s نادرست است؟



الف) در لحظهٔ $t = ۸\,s$ بیشترین فاصله از مبدأ حرکت را دارد.

ب) در لحظهٔ $t = ۴\,s$ بیشترین فاصله از مبدأ مکان را دارد.

پ) در بازهٔ زمانی $(۸\,s, ۱۲\,s)$ مسافت پیموده‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است.

ت) در طول مسیر، ۲s به طور کامل توقف کرده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

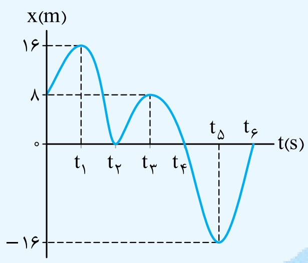
پاسخ ۲ الف) $x_0 = ۱۶\,m$ مکان اولیه یا همان مبدأ حرکت است، متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ در فاصلهٔ $۱۶ + ۳۲ = ۴۸\,m$ از مبدأ حرکت و در لحظهٔ $t = ۸\,s$ در فاصلهٔ $۴۸ - ۱۶ = ۳۲\,m$ از مبدأ حرکت است. پس متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ در بیشترین فاصله از x_0 است و عبارت (الف) نادرست است.

ب) نمودار در لحظهٔ $t = ۸\,s$ بیشترین فاصله را از محور t دارد؛ یعنی در این لحظه متحرک در دورترین فاصله از مبدأ مکان است. (پس عبارت (ب) نادرست است.)

پ) در بازهٔ زمانی ۸s تا ۱۲s متحرک تغییر جهت نداده است، پس در این بازهٔ زمانی اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت برابر است.

ت) در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۱۲s متحرک به طور کامل متوقف شده است. (البته دو بار هم در لحظه‌های $t = ۴\,s$ و $t = ۸\,s$ فقط برای یک لحظه متوقف شده و تغییر جهت داده است.)

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام بازهٔ زمانی، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک بیشینه است و در این بازه متحرک چند متر پیموده است؟



۱) (t_1, t_5) ـ ۴۸

۲) (t_1, t_5) ـ ۳۲

۳) $(0, t_6)$ ـ ۷۲

۴) $(0, t_6)$ ـ ۸

پاسخ ۱ **گام اول:** متحرک در لحظهٔ t_1 در بیشترین فاصله از مبدأ در طرف مثبت و در لحظهٔ t_5 در بیشترین فاصله از مبدأ در طرف منفی محور x است؛ پس بیشترین جابه‌جایی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5 اتفاق افتاده است.

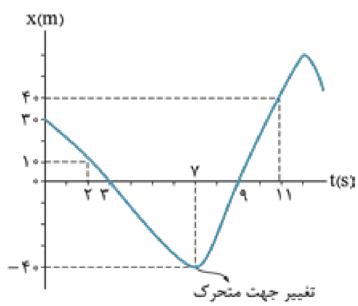
گام دوم: وقتی سؤال می‌پرسد «متحرک چند متر پیموده است؟» شما باید مسافت پیموده‌شده را حساب کنید. با توجه به نمودار، این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، ۱۶m در جهت منفی، در بازهٔ t_2 تا t_3، ۸m در جهت مثبت، در بازهٔ t_3 تا t_4، ۸m در جهت منفی و در بازهٔ t_4 تا t_5 هم ۱۶m در جهت منفی پیموده است؛ پس جمعاً می‌شود: $l = ۱۶ + ۸ + ۸ + ۱۶ = ۴۸\,m$

محاسبهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط در حرکت روی خط راست

با داشتن جابه‌جایی و مسافت برای هر بازهٔ زمانی دلخواه، می‌توانیم اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط را هم حساب کنیم. مثلاً برای بازهٔ زمانی $t_2 = ۲\,s$ تا $t_{11} = ۱۱\,s$ در نمودار (۵) داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۰ - ۱۰}{۱۱ - ۲} = \frac{۳۰}{۹} = \frac{۱۰}{۳}\,m/s$$

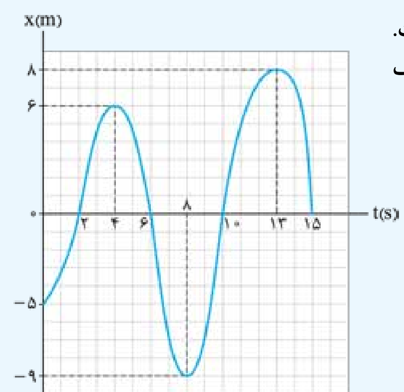
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l_{(۲,۷)} + l_{(۷,۱۱)}}{۱۱ - ۲} = \frac{|-۴۰ - ۱۰| + |۴۰ - (-۴۰)|}{۹} = \frac{۱۳۰}{۹}\,m/s$$



نمودار (۵)

حواستون باشه *اگه علامت جابه‌جایی و سرعت متوسط منفی بشه یعنی متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده.* مثلاً در نمودار (۵) در بازهٔ $t_2 = ۲\,s$ تا $t_7 = ۷\,s$ جابه‌جایی و سرعت متوسط به ترتیب، $\Delta x = -۴۰ - ۱۰ = -۵۰\,m$ و $v_{av} = \frac{-۵۰}{۷ - ۲} = -۱۰\,m/s$ است، یعنی این متحرک در مدت ۲s تا ۷s، ۵۰m در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است.

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک بیشینه می‌شود، به ترتیب از راست به چپ، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۳ ـ ۲/۷

۲) ۱ ـ ۲/۷

۳) ۰/۳ ـ ۳/۳

۴) ۱ ـ ۳/۳

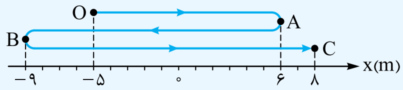
پاسخ ۴ **گام اول**: مکان اولیهٔ متحرک $x_0=-5\,m$ است و وقتی که متحرک در بیشترین فاصله از این نقطه قرار می‌گیرد، جابه‌جایی‌اش بیشینه می‌شود. از روی نمودار مشخص است که در لحظهٔ $t=13\,s$ متحرک در مکان $x_{13}=8\,m$ و در بیشترین فاصله از $x_0=-5\,m$ قرار دارد؛ پس باید اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازهٔ $(0,13\,s)$ حساب کنیم.

گام دوم: ابتدا اندازهٔ سرعت متوسط را *(که راحت‌تره)* حساب می‌کنیم:

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|x_{13}-x_0|}{13-0}=\frac{|8-(-5)|}{13}=1\,m/s$$

(پس قطعاً (۱) و (۳) نادرست‌اند.)

گام سوم: برای محاسبهٔ تندی متوسط اول باید مسافت را در بازهٔ $(0,13\,s)$ مشخص کنیم و برای این کار باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌هایی تغییر جهت داده است.



با توجه به نمودار، متحرک در بازهٔ $(0,4\,s)$ از مکان $x_0=-5\,m$ به مکان $x_4=6\,m$ و در بازهٔ $(4\,s,8\,s)$ از مکان $x_4=6\,m$ به مکان $x_8=-9\,m$ و در بازهٔ $(8\,s,13\,s)$ از مکان $x_8=-9\,m$ به مکان $x_{13}=8\,m$ رفته است *(در شکل مقابل این رفت و برگشت‌ها رو روی محور نشون دادیم)*؛ پس مسافت کل در بازهٔ زمانی $(0,13\,s)$ برابر می‌شود با:

$$l=|x_4-x_0|+|x_8-x_4|+|x_{13}-x_8|=|6-(-5)|+|-9-6|+|8-(-9)|=11+15+17=43\,m$$

حالا می‌توانیم تندی متوسط را هم محاسبه کنیم:

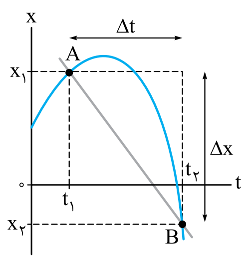
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{43}{13-0}=\frac{43}{13}\,m/s\simeq 3/3\,m/s$$

سرعت متوسط و مفهوم شیب خط در نمودار مکان ـ زمان

شکل زیر نمودار مکان ـ زمان یک متحرک است. می‌دانید که سرعت متوسط این متحرک در جابه‌جایی جسم از لحظهٔ t_1 تا t_2 برابر است با:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

یادآوری در یک نمودار، محور قائم، محور تابع و محور افقی محور متغیر است و شیب خط عبارت است از نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر.



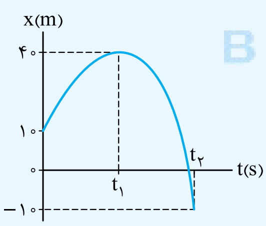
با توجه به این یادآوری در نمودار مکان ـ زمان، مکان (x) تابع و زمان (t) متغیر است. شیب خطی که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند (مثل خط AB در نمودار روبه‌رو) برابر می‌شود با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$؛ یعنی **شیب خطی که نمودار مکان ـ زمان را در دو نقطه قطع می‌کند، برابر سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است:**

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\text{شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B در نمودار مکان ـ زمان}$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\longrightarrow \boxed{v_{av(t_1,t_2)}=\text{شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B در نمودار مکان ـ زمان}}$$

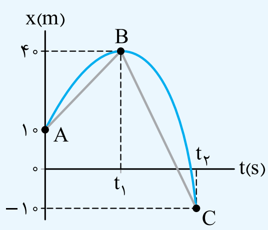
حواستون باشه *شیب می‌تونه مثبت یا منفی باشه که نشون می‌ده جهت جابه‌جایی متحرک مثبته یا منفی.*

تست **شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در t_1 ثانیهٔ اول برابر با اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 باشد، نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟**



۱) $\frac{8}{3}$
۲) $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ ۲ **گام اول**: متحرک در t_1 ثانیهٔ اول از مکان $x_0=10\,m$ به مکان $x_1=40\,m$ رفته است:



$$\Delta x_1=x_1-x_0=40-10=30\,m$$

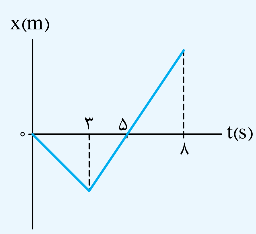
و در بازهٔ t_1 تا t_2 از مکان $x_1=40\,m$ به مکان $x_2=-10\,m$ جابه‌جا شده است:

$$\Delta x_2=x_2-x_1=-10-40=-50\,m$$

گام دوم: صورت سؤال می‌گوید اندازهٔ سرعت متوسط در t_1 ثانیهٔ اول برابر با اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 است (یعنی شیب خط AB برابر با قدرمطلق شیب خط BC است):

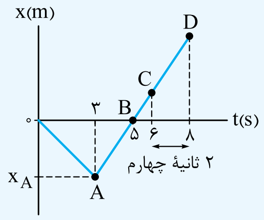
$$v_{av,AB}=|v_{av,BC}|\Rightarrow\frac{\Delta x_1}{t_1-0}=\frac{|\Delta x_2|}{t_2-t_1}\Rightarrow\frac{30}{t_1}=\frac{50}{t_2-t_1}\Rightarrow 3t_2-3t_1=5t_1\Rightarrow 3t_2=8t_1\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=\frac{3}{8}$$

تست **شکل روبه‌رو، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ اول $4\,m/s$ باشد، سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ چهارم چند متر بر ثانیه است؟**



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲

پاسخ ۲ | **گام اول**: با توجه به شکل روبه‌رو، ابتدا به کمک سرعت متوسط در ۳ ثانیهٔ اول مکان x_A را پیدا می‌کنیم:



$$v_{av(۰,۳)} = \frac{x_A - x_۰}{۳ - ۰} \Rightarrow -۴ = \frac{x_A - ۰}{۳} \Rightarrow x_A = -۱۲\,m$$

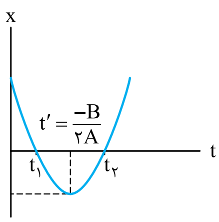
(از اون‌جایی که شیب نمودار در ۳ ثانیهٔ اول منفیه، سرعت متوسط در این بازه رو منفی گذاشتیم.)

گام دوم: ۲ ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $۶\,s$ تا $۸\,s$ که بر روی نمودار از نقطهٔ C تا D است؛ ما مکان‌های متحرک در لحظه‌های $۶\,s$ و $۸\,s$ را نداریم، اما در شکل مشخص است که پاره‌خط‌های CD و AB بر روی یک خط قرار دارند و شیب آن‌ها برابر است. پس اگر شیب پاره‌خط AB را حساب کنیم، شیب پاره‌خط CD را هم به دست آورده‌ایم:

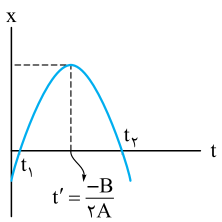
$$v_{av(۶,۸)} = \text{CD شیب پاره‌خط} = \text{AB شیب پاره‌خط} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۰ - (-۱۲)}{۵ - ۳} = ۶\,m/s$$

لحظهٔ تغییر جهت در معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دو و نمودار مکان ـ زمان سهمی

اگر در حرکت راست‌خط، معادلهٔ مکان ـ زمان از نوع درجهٔ دو باشد، با داشتن معادلهٔ مکان ـ زمان می‌توانیم بگوییم که متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد. برای این کار باید لحظه‌ای را که x در آن بیشینه یا کمینه است، محاسبه کنیم. در درس ریاضی یاد گرفته‌اید که اگر معادله از نوع درجهٔ دو (یعنی به صورت $x = At^۲ + Bt + C$) باشد، در لحظهٔ $t = \frac{-B}{۲A}$، مقدار x اکسترمم (بیشینه یا کمینه) است. با توجه به علامت A نمودار دارای بیشینه یا کمینه است. در شکل (الف) $A > ۰$ و در شکل (ب) $A < ۰$ است.



(الف)
$A > ۰$ و نمودار نقطهٔ کمینه دارد.



(ب)
$A < ۰$ و نمودار نقطهٔ بیشینه دارد.

(تعیین لحظهٔ تغییر جهت برای معادله‌های مکان ـ زمان درجهٔ سه یا بالاتر، خارج از محدودهٔ کتاب درسی است.)

چند نکته

(۱) اگر در معادلهٔ $x = At^۲ + Bt + C$، مکان (x) را برابر صفر بگذاریم، ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ حاصل، لحظه‌های عبور متحرک از مکان $x = ۰$ (مبدأ مکان) را نشان می‌دهد.

(۲) در حالتی که نمودار مکان ـ زمان یک سهمی است (مانند شکل‌های (الف) و (ب))، بین لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ و لحظهٔ تغییر جهت رابطهٔ زیر برقرار است:

$$t' = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$$

حواستون باشه *فقط لحظه‌های تغییر جهت مثبت قابل قبوله، یعنی* $t' = \frac{-B}{۲A} < ۰$ *قابل قبول نیست.*

تست | معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = ۴t^۲ + ۸t - ۲۱$ است. این متحرک در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳/۵ ۴) این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

پاسخ ۴ | گفتیم اگر معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دو باشد، متحرک در لحظهٔ $t = \frac{-B}{۲A}$ تغییر جهت می‌دهد، پس داریم: $t = \frac{-۸}{۲ \times ۴} = -۱\,s$

منفی‌شدن t یعنی این متحرک قبل از مبدأ زمان، تغییر جهت داده است که قابل‌قبول نیست؛ بنابراین متحرک پس از شروع حرکت (مبدأ زمان) تغییر جهت نمی‌دهد.

تست | معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^۲ - ۶t + ۵$ است. این متحرک در چه بازهٔ زمانی در جهت منفی محور x حرکت کرده است؟

۱) $(۱\,s, ۵\,s)$ ۲) $(۳\,s, ۵\,s)$ ۳) $(۰, ۳\,s)$ ۴) $(۵\,s, \infty)$

پاسخ ۳ | **گام اول**: لحظهٔ تغییر جهت متحرک (یا نقطهٔ اکسترمم تابع) را حساب می‌کنیم، چون معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دو است؛ پس داریم:

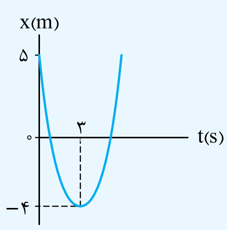
$$t = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۶)}{۲ \times ۱} = ۳\,s$$

گام دوم: چون ضریب $t^۲$ مثبت است، x در لحظهٔ $t = ۳\,s$ کمینه یا مینیمم است؛ پس، از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۳\,s$ متحرک در جهت منفی حرکت کرده است.

برای آن‌که خیالتان راحت شود، مکان متحرک را در چند لحظه قبل و بعد از $t = ۳\,s$ در جدول زیر آورده‌ایم و نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم کرده‌ایم:

t(s)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x(m)	۵	۰	−۳	−۴	−۳	۰	۵

حرکت در جهت منفی محور x — لحظهٔ تغییر جهت — حرکت در جهت مثبت محور x



تست ۱ | معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI، به صورت $x = t^{۲} - ۴t + ۳$ است. این متحرک چند ثانیه در قسمت منفی محور x در حرکت بوده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۲ | با یک سؤال ریاضی طرف هستیم.

گام اول: می‌خواهیم بدانیم چه مدت $x < ۰$ بوده است؛ یعنی:

$$t^{۲} - ۴t + ۳ < ۰$$

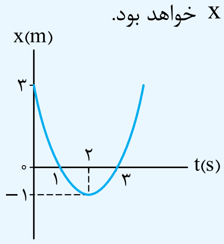
پس باید معادلهٔ $x = t^{۲} - ۴t + ۳$ را تعیین علامت کنیم و برای این کار اول باید ریشه‌های معادله را به ازای $x = ۰$ حساب کنیم.

$$x = ۰ \Rightarrow t^{۲} - ۴t + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۱\,s \\ t_{۲} = ۳\,s \end{cases}$$

یادآوری در معادله‌هایی که به شکل $y = ax^{۲} + bx + c$ هستند، اگر $a + b + c = ۰$ باشد، ریشه‌های معادله $x = ۱$ و $x = \dfrac{c}{a}$ خواهد بود.

گام دوم: می‌دانیم که علامت عبارت درجهٔ دو (مانند $x = At^{۲} + Bt + C$) بین دو ریشه، مخالف علامت A است؛ پس داریم:

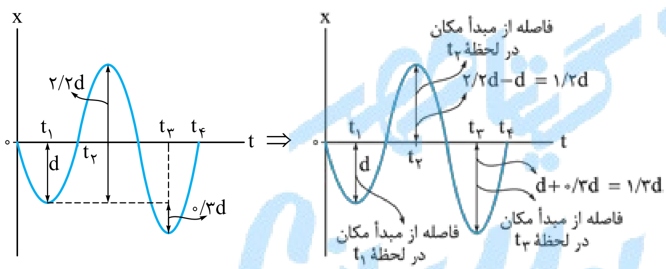
t	۰		۱		۳		$+\infty$
x		+	۰	−	۰	+	



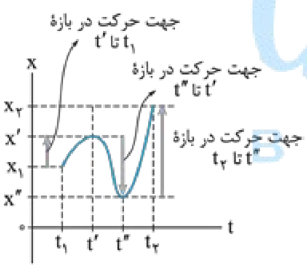
یعنی در بازهٔ $(۱\,s, ۳\,s)$ متحرک در مکان‌های منفی است، پس این اتفاق ۲ s طول می‌کشد.

بد نیست نمودار مکان ـ زمان این حرکت را هم ببینیم. در نمودار هم مشخص است که در بازهٔ ۱ s تا ۳ s نمودار زیر محور t است و در این بازه متحرک در قسمت منفی محور x حرکت می‌کند.

۸۲. گزینه ۳ با توجه به شکل می‌بینید که فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در لحظهٔ $t_{۱}$ برابر d، در لحظهٔ $t_{۲}$ برابر $۱/۲\,d$ و در لحظهٔ $t_{۳}$ برابر $۱/۳\,d$ است، پس این فاصله در $t_{۳}$ بیشترین مقدار است.

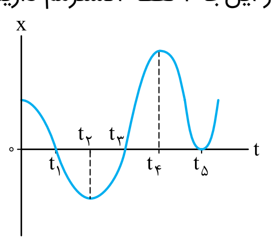


۸۳. گزینه ۳ به نمودار روبه‌رو توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید از $t_{۱}$ تا t'، متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت بوده است و از $x_{۱}$ به x' رفته است $(x_{۱} < x')$. بعد از آن از t' تا t'' متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و از x' به x'' می‌رود $(x' > x'')$؛ بنابراین در t' یک بار جهت حرکت عوض می‌شود. همچنین در ادامه یعنی در بازهٔ t'' تا $t_{۲}$ متحرک از x'' در جهت مثبت محور x به سمت $x_{۲}$ می‌رود. بنابراین در t'' نیز متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد. با توجه به آن‌چه گفتیم، متحرک از $t_{۱}$ تا $t_{۲}$، ۲ بار تغییر جهت می‌دهد.



تکنیک به تعداد نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینه) در نمودار مکان ـ زمان، متحرک تغییر جهت می‌دهد. در این‌جا ۲ نقطهٔ اکسترمم داریم؛ پس متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است.

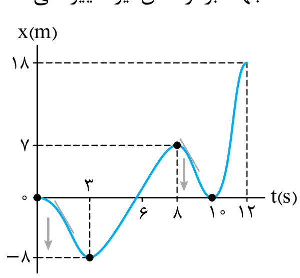
۸۴. گزینه ۲ بردار مکان در لحظه‌هایی تغییر جهت می‌دهد که نمودار مکان ـ زمان محور t را قطع کند و علامت x تغییر کند. با توجه به شکل روبه‌رو این اتفاق در دو لحظهٔ $t_{۱}$ و $t_{۳}$ رخ می‌دهد.



حواستون باشه درست است که مقدار x و بردار مکان در $t_{۵}$ صفر می‌شود، ولی چون علامت x قبل و بعد از این لحظه تغییر نمی‌کند، جهت بردار مکان نیز تغییر نمی‌کند.

۸۵. گزینه ۱ **گام اول:** مطابق شکل از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۳\,s$ و از لحظهٔ $t = ۸\,s$ تا $t = ۱۰\,s$ شیب نمودار منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده؛ پس مدت زمانی که متحرک در جهت منفی حرکت کرده، برابر است با:

$$\Delta t_{۱} = (۳ - ۰) + (۱۰ - ۸) = ۳ + ۲ = ۵\,s$$

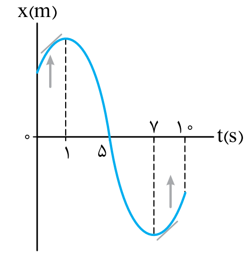


گام دوم: وقتی $x > ۰$ است، بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور x است، پس باید زمان‌هایی را که نمودار بالای محور t است، حساب کنیم. مطابق شکل از لحظهٔ $t = ۶\,s$ تا $t = ۱۲\,s$ نمودار بالای محور t است، یعنی:

$$\Delta t_{۲} = ۱۲ - ۶ = ۶\,s$$

گام سوم: این تست $\dfrac{\Delta t_{۱}}{\Delta t_{۲}}$ را خواسته که به راحتی به دست می‌آید:

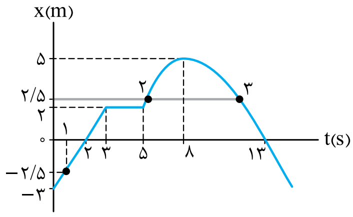
$$\frac{\Delta t_{۱}}{\Delta t_{۲}} = \frac{۵}{۶}$$



۸۶. گزینهٔ ۳ **گام اول:** مطابق شکل، در بازه‌های زمانی صفر تا ۱s و هم‌چنین ۷s تا ۱۰s نمودار صعودی بوده و متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده؛ پس Δt برابر است با: $\Delta t = (۱-۰)+(۱۰-۷) = ۱+۳ = ۴\,s$

گام دوم: همان‌طور که در نمودار مشخص است، در بازه‌های زمانی ۱s تا ۵s و هم‌چنین ۷s تا ۱۰s متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان است؛ پس $\Delta t'$ برابر است با: $\Delta t' = (۵-۱)+(۱۰-۷) = ۴+۳ = ۷\,s$

گام سوم: محاسبهٔ $\frac{\Delta t}{\Delta t'}$: $\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{۴}{۷}$



۸۷. گزینهٔ ۱ مطابق شکل، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

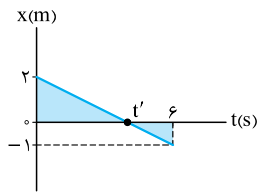
الف) متحرک در نقاط اکسترمم (کمینه یا بیشینه) تغییر جهت می‌دهد. در این شکل، فقط در لحظهٔ $t = ۸\,s$ این اتفاق افتاده!✗

ب) متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s و هم‌چنین ۸s تا ۱۳s در حال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان بوده که در مجموع می‌شود ۷ ثانیه!✗

پ) متحرک یک بار در بخش منفی محور و دو بار در بخش مثبت محور (در نقطه‌های ۱، ۲ و ۳) در فاصلهٔ ۲/۵ متری از مبدأ قرار دارد؛ پس متحرک ۳ بار در فاصلهٔ ۲/۵ متری مبدأ بوده است.✗

ت) در لحظه‌های $t = ۲\,s$ و $t = ۱۳\,s$ متحرک از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور می‌کند.✓

پس تنها یک عبارت درست داشتیم.



۸۸. گزینهٔ ۱ **گام اول:** مطابق شکل از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۶\,s$ شیب نمودار منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ یعنی ۶ ثانیه متحرک در جهت منفی حرکت کرده است. (۳ و ۴ نادرست‌اند.)

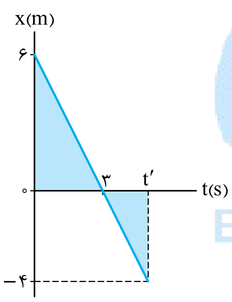
گام دوم: روش I حالا برای محاسبهٔ حرکت متحرک در بخش منفی، لازم است مقدار t' را پیدا کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، با استفاده از تشابه دو مثلث رنگی، می‌توانیم مقدار t' را به دست آوریم:

$$\frac{۶-t'}{t'-۰} = \frac{|-۱|}{۲} \Rightarrow ۱۲-۲t' = t' \Rightarrow ۳t' = ۱۲ \Rightarrow t' = ۴\,s$$

پس متحرک در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s، یعنی به مدت ۲s در مکان‌های منفی بوده است!

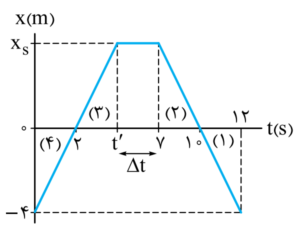
روش II با نوشتن شیب خط هم می‌توانید این سؤال را حل کنید. شیب خط در مدت صفر تا ۶s برابر شیب خط در مدت t' تا ۶s است. پس داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{x_{(۶)}-x_{۰}}{t_{۶}-t_{۰}} = \frac{x_{(۶)}-x_{t'}}{\Delta t_{(t',۶)}} \xrightarrow{x_{t'}=۰} \frac{-۱-۲}{۶-۰} = \frac{-۱-۰}{\Delta t_{(t',۶)}} \Rightarrow \Delta t_{(t',۶)} = ۲\,s$$



۸۹. گزینهٔ ۱ بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ پس در شکل روبه‌رو محل تقاطع نمودار مکان ـ زمان با محور زمان $t = ۳\,s$ است. ما لحظه‌ای را می‌خواهیم که بردار مکان $\vec{x} = -۴\vec{i}$ باشد. با توجه به شکل روبه‌رو و تشابه دو مثلث رنگ‌شده داریم:

$$\frac{۶}{|-۴|} = \frac{۳}{t'-۳} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{t'-۳} \Rightarrow t'-۳ = ۲ \Rightarrow t' = ۵\,s$$



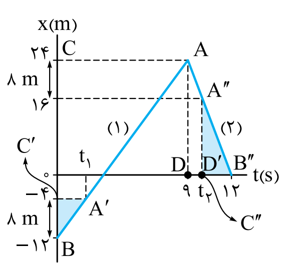
۹۰. گزینهٔ ۱ **گام اول:** به کمک تشابه مثلث به جواب می‌رسیم. برای این کار ابتدا از تشابه مثلث (۱) و (۲)، اندازهٔ x_s را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\overbrace{۱۲-۱۰}^{\cancel{۲}\ ۱}}{\underbrace{۱۰-۷}_{۳}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{|-۴|}}}{x_s} \Rightarrow x_S = ۶\,m$$

گام دوم: حالا از تشابه دو مثلث (۳) و (۴)، مقدار t' مشخص می‌شود:

$$\frac{t'-۲}{\underset{۱}{\cancel{۲}}-۰} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{\underset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{|-۴|}}} \Rightarrow t'-۲ = ۳ \Rightarrow t' = ۵\,s \Rightarrow \Delta t = ۷-۵ = ۲\,s$$

پس جسم به مدت ۲ ثانیه در فاصلهٔ ۶متری مبدأ ساکن است.



۹۱. گزینهٔ ۳ **گام اول:** مطابق شکل، دو مثلث ABC و $A'BC'$ در قسمت (۱) نمودار با هم متشابه هستند! بنابراین:

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{۸}{\underbrace{۲۴+۱۲}_{\underset{۴}{\cancel{۳۶}}}} = \frac{t_۱}{\underset{۱}{\cancel{۹}}} \Rightarrow t_۱ = ۲\,s$$

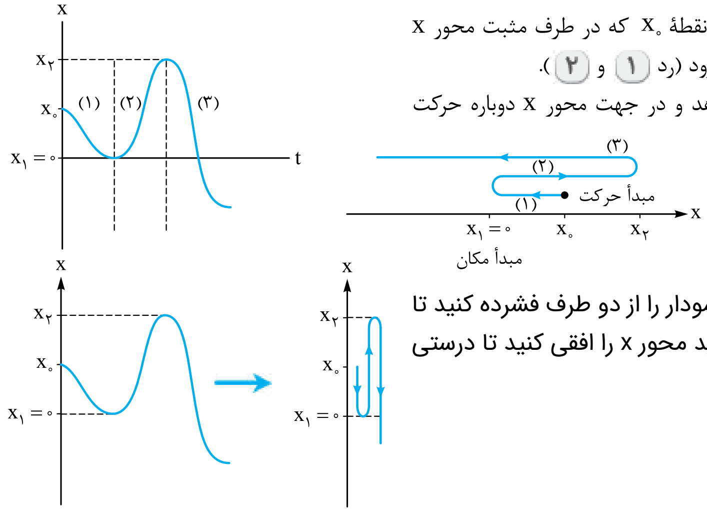
گام دوم: حالا به کمک تشابه دو مثلث ADB'' و $A''D'B''$ در قسمت (۲) نمودار، مقدار $t_۲$ را حساب می‌کنیم: (دقت کنید که فاصلهٔ ۸متری از بیشترین فاصلهٔ از مبدأ مکان می‌شود $x_۲ = ۲۴-۸ = ۱۶\,m$)

$$\frac{D'B''}{DB''} = \frac{A''D'}{AD} \Rightarrow \frac{۱۲-t_۲}{\underbrace{۱۲-۹}_{\underset{۱}{\cancel{۳}}}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۶}}}{\underset{\underset{۱}{\cancel{۳}}}{\cancel{۲۴}}} \Rightarrow ۱۲-t_۲ = ۲ \Rightarrow t_۲ = ۱۰\,s$$

۹۲. گزینه ۴ قسمت شمارهٔ (۱): با توجه به نمودار $x-t$ متحرک از نقطهٔ x_0 که در طرف مثبت محور x است، شروع به حرکت می‌کند و در خلاف جهت محور x به سمت مبدأ می‌رود (رد ۱ و ۲).

قسمت شمارهٔ (۲): متحرک به مبدأ می‌رسد و در آن‌جا تغییر جهت می‌دهد و در جهت محور x دوباره حرکت می‌کند. سپس در نقطهٔ x_2 دوباره تغییر جهت می‌دهد.

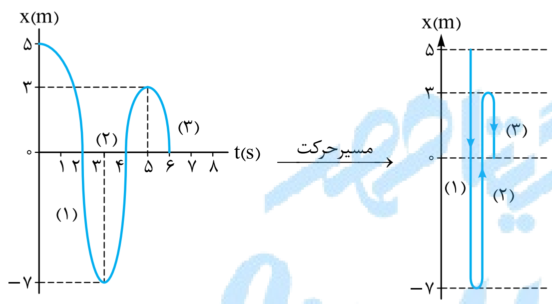
قسمت شمارهٔ (۳): متحرک پس از تغییر جهت در نقطهٔ x_2 در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و به مبدأ می‌رسد و پس از عبور از مبدأ وارد بخش منفی محور می‌شود و به حرکتش ادامه می‌دهد (رد ۳).



تکنیک از روی نمودار مکان ـ زمان محور زمان را حذف کنید، نمودار را از دو طرف فشرده کنید تا شکل مسیر حرکت را ببینید. (شکل روبه‌رو). البته در مرحلهٔ بعد باید محور x را افقی کنید تا درستی گزینهٔ (۴) مشخص شود.

۹۳. گزینه ۱ نمودار مکان ـ زمان باید یک تابع باشد، یعنی به ازای هر t فقط باید یک x یا y وجود داشته باشد *(البته اگه به ازای یک x یا y چند t باشه، اشکالی نداره)*. در عمل هم امکان ندارد یک جسم در یک لحظه در بیش از یک مکان حضور داشته باشد. در واقع هیچ خط عمود بر محور t نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. با این استدلال ۲، ۳ و ۴ نادرست‌اند.

۹۴. گزینه ۱ **گام اول**: جابه‌جایی که می‌شود اختلاف مکان نهایی از مکان اولیه (مکان نهایی را x_6 و مکان اولیه را x_0 می‌گیریم):



$$\Delta x = x_6 - x_0 = 0 - 5 = -5\,m \Rightarrow |\Delta x| = 5\,m$$

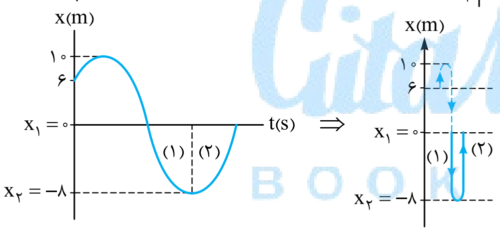
حواستون باشه هیچ‌گاه جابه‌جایی بزرگ‌تر از مسافت طی‌شده نمی‌شود، پس ۲ و ۴ از همان ابتدا رد بود!

گام دوم: با توجه به این‌که در نمودار، ۲ بار تغییر جهت داریم، مسافت طی‌شده برابر است با جمع جبری مسافت طی‌شده در قسمت (۱)، (۲) و (۳)، یعنی:

$$l = l_1 + l_2 + l_3 = |-7-5| + |3-(-7)| + |0-3| = 12 + 10 + 3 = 25\,m$$

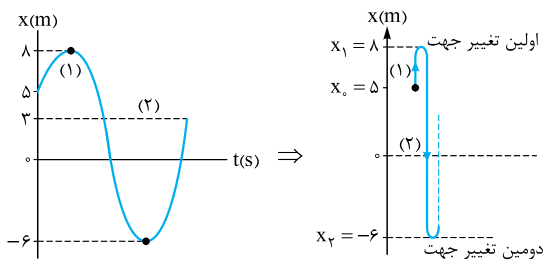
گام سوم: پس نسبت مسافت طی‌شده به اندازهٔ جابه‌جایی برابر است با: $\frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{25}{5} = 5$

۹۵. گزینه ۱ در بازهٔ زمانی که نمودار زیر محور t قرار دارد، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است. مطابق شکل در این بخش متحرک از $x_1 = 0$ تا $x_2 = -8\,m$ رفته و دوباره سر جایش برگشته است؛ بنابراین مسافت طی‌شده برابر است با:



$$l = l_1 + \underbrace{l_2}_{l_1} = 2l_1 = 2 \times 8 = 16\,m$$

۹۶. گزینه ۴ تغییر جهت متحرک زمانی رخ می‌دهد که در یک بازهٔ زمانی مقدار x بیشینه یا کمینه شود؛ پس با توجه به شکل، متحرک در $x_1 = 8\,m$ برای بار اول و در $x_2 = -6\,m$ برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد.



برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده باید مسافت طی‌شده قبل و بعد از اولین تغییر جهت را جداگانه حساب کنیم و سپس با هم جمع کنیم؛ یعنی: $l = l_1 + l_2 = |8-5| + |-6-8| = 3 + 14 = 17\,m$

برای محاسبهٔ بردار جابه‌جایی هم به ابتدا و انتهای حرکت فقط کار داریم؛ بنابراین:

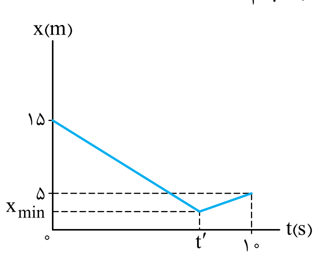
$$\Delta \vec{x} = (x_2 - x_0)\vec{i} = (-6-5)\vec{i} = -11\vec{i}$$

۹۷. گزینه ۲ مکان اولیه و نهایی دو متحرک یکسان است؛ بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی‌های دو متحرک برابر است. از طرفی چون دو متحرک بر روی خط راست و بدون تغییر جهت، حرکت کرده‌اند، مسافت طی‌شده توسط آن‌ها برابر اندازهٔ جابه‌جایی‌های آن‌ها است؛ یعنی:

$$\left.\begin{aligned} d_A &= l_A \\ d_B &= l_B \\ d_A &= d_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow l_A = l_B = d_A = d_B$$

حواستون باشه در این‌جا نمودارهای A و B شکل مسیر حرکت نیستند و حرکت روی خط راست (یعنی روی محور x) انجام شده است!

۹۸. گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل، کم‌ترین فاصله‌ای که متحرک از مبدأ مکان دارد را با x_{min} و زمان مربوط به آن را با t' نشان می‌دهیم. در این صورت متحرک از لحظهٔ $t = 0$ تا t' در جهت نزدیک‌شدن به مبدأ مکان و از لحظهٔ t' تا $10\,s$ در جهت دورشدن از مبدأ مکان بوده است؛ پس:

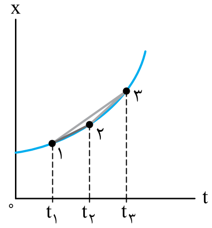


$$l = |x_{min} - 15| + |5 - x_{min}| = (15 - x_{min}) + (5 - x_{min}) \Rightarrow l = 20 - 2x_{min}$$

$$|\vec{d}| = |5 - 15| = 10\,m$$

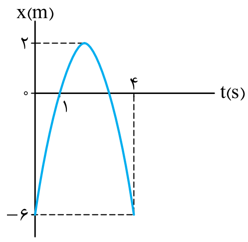
با توجه به صورت تست: $l = 1/6|\vec{d}| \Rightarrow 20 - 2x_{min} = 1/6 \times 10 \Rightarrow 2x_{min} = 4 \Rightarrow x_{min} = 2\,m$

۹۹. گزینهٔ ۳ همان‌طور که می‌دانید، شیب خط در نمودار مکان ـ زمان، سرعت متوسط را نشان می‌دهد. برای همین باید نقطه‌هایی را که سرعت متوسط در آن بازه‌ها خواسته شده است، به هم وصل کنیم. مطابق شکل شیب خطی که دو نقطهٔ (۲) و (۳) را به هم وصل می‌کند، بیشتر است؛ پس سرعت متوسط در بازهٔ t_2 تا t_3 بیشتر است.



۱۰۰. گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار روبه‌رو در $t_1=1\,s$، متحرک در $x_1=0$ و در $t_2=4\,s$ متحرک در $x_2=-6\,m$ قرار دارد؛ پس:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{-6-0}{4-1}=-2\,m/s$$

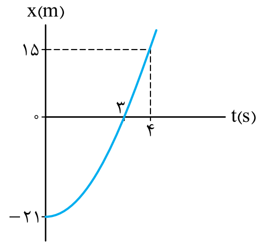


۱۰۱. گزینهٔ ۴ **گام اول**: حرکت متحرک تغییر جهت نداشته است؛ پس مسافت طی‌شده توسط آن و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است. با توجه به نمودار:

$$l=|\Delta x|=|x_2-x_1|=|15-(-21)|=36\,m$$

گام دوم: تندی متوسط هم که برابر $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$ است:

$$s_{av}=\frac{36}{4}=9\,m/s=(9\times 3/6)\,km/h=32/4\,km/h$$

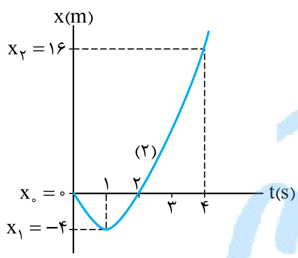


۱۰۲. گزینهٔ ۳ **گام اول**: برای محاسبهٔ تندی متوسط، ابتدا باید مسافت طی‌شده را حساب کنیم، مطابق شکل در $t=1\,s$، تغییر جهت (اکسترمم) داریم؛ بنابراین مسافت طی‌شده برابر است با:

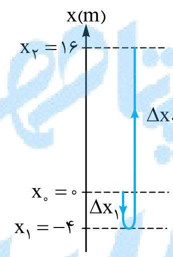
$$l=l_1+l_1=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=|-4-0|+|16-(-4)|=4+20=24\,m$$

گام دوم: با داشتن مسافت طی‌شده، محاسبهٔ تندی متوسط کاری ندارد:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{24}{4}=6\,m/s$$



⇒

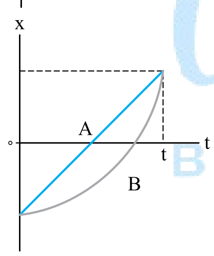


۱۰۳. گزینهٔ ۱ با توجه به شکل روبه‌رو، در مدت صفر تا t جابه‌جایی دو متحرک برابر است؛ بنابراین داریم:

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow\frac{\Delta x_A}{\Delta t}=\frac{\Delta x_B}{\Delta t}\Rightarrow v_{av,A}=v_{av,B}$$

از طرفی چون جهت حرکت دو متحرک تغییر نمی‌کند، تندی متوسط آن‌ها با سرعت متوسط آن‌ها برابر است و داریم:

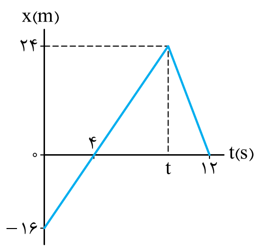
$$s_{av,A}=s_{av,B}=v_{av,A}=v_{av,B}$$



۱۰۴. گزینهٔ ۲ در بازهٔ زمانی $t=4\,s$ تا $t=12\,s$ نمودار $x-t$، بالای محور t است؛ پس در این بازه بردار مکان در جهت محور x است. مطابق شکل متحرک از لحظهٔ $t=4\,s$ تا لحظهٔ t، از مکان $x=0$ تا $x=24\,m$ رفته و از لحظهٔ t تا $t=12\,s$، مسیر را دوباره برگشته است؛ بنابراین تندی متوسط در بازهٔ زمانی «۴ s تا ۱۲ s» برابر است با:

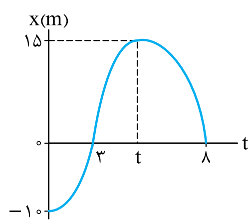
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{2\times \cancel{24}^{\,3}}{\underbrace{12-4}_{\cancel{8}\;1}}=6\,m/s$$

(به محاسبهٔ t هم نیازی نیست!)



۱۰۵. گزینهٔ ۳ مطابق شکل متحرک در لحظهٔ t تغییر جهت می‌دهد. طبق گفتهٔ سؤال اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ $t_0=0$ تا t، $5\,m/s$ است؛ بنابراین:

$$|v_{av(0,t)}|=\left|\frac{\Delta x_{(0,t)}}{\Delta t}\right|\Rightarrow 5=\frac{15-(-10)}{t-0}\Rightarrow t=\frac{25}{5}=5\,s$$



۱۰۶. گزینهٔ ۴ **گام اول**: مسافت طی‌شده برابر با مجموع جابه‌جایی‌های قبل و بعد از تغییر جهت است. اگر مکان اولیه را x_0 بگیریم، داریم:

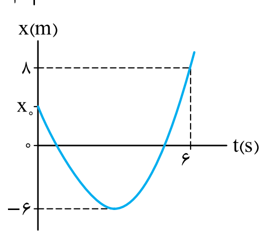
$$l=|-6-x_0|+|8-(-6)|$$

از آن‌جایی که x_0 مثبت است، قرینهٔ عبارت داخل قدرمطلق از آن خارج می‌شود:

$$l=x_0+6+14=x_0+20$$

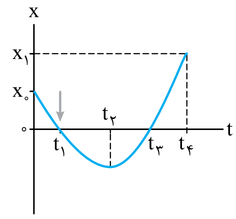
گام دوم: تندی متوسط متحرک در بازهٔ $(0,6\,s)$ برابر $4\,m/s$ است؛ پس:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow 4=\frac{x_0+20}{6}\Rightarrow 24=x_0+20\Rightarrow x_0=4\Rightarrow \vec d_0=(x_0)\vec i=4\vec i$$



۱۰۷. گزینه ۴ تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط در بازه‌های زمانی‌ای که متحرک تغییر جهت نداشته باشد، با هم برابر هستند. در بازه‌های «صفر تا t_1»، «t_1 تا t_2» و «t_1 تا t_3» متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و تندی متوسط در این بازه‌ها با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. اما در بازهٔ $(0, t_3)$ متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ در این بازه سرعت متوسط صفر است اما تندی متوسط صفر نیست.

توجه کنید که در بازهٔ «t_1 تا t_2» چون نمودار $x-t$ موازی محور زمان است، متحرک ایستاده است و سرعت متوسط و تندی متوسط در این بازهٔ زمانی صفر است.



۱۰۸. گزینه ۲ با توجه به نمودار به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱: **درست**؛ متحرک تنها در لحظهٔ t_2 (اکسترمم) تغییر جهت می‌دهد.

۲: **نادرست**؛ در لحظهٔ شروع حرکت، متحرک در خلاف جهت محور x شروع به حرکت کرده است.

۳: **درست**؛ در لحظه‌های t_1 و t_3 جهت بردار مکان تغییر می‌کند؛ یعنی ۲ بار.

۴: **درست**؛ چون متحرک در مجموع از x_0 تا x_1 $(x_1 > x_0)$ جابه‌جا شده؛ جابه‌جایی آن مقداری بزرگ‌تر از صفر $(\Delta x > 0)$ می‌شود؛ بنابراین $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$.

۱۰۹. گزینه ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

۱: سرعت متوسط برابر با جابه‌جایی تقسیم بر زمان است:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{۲ - ۰}{۸ - ۰} = \frac{۱}{۴}\, m/s = ۰/۲۵\, m/s \quad \checkmark$$

۲: با توجه به آن‌که در $t = ۲\,s$ تغییر جهت داریم، اندازهٔ مسافت طی‌شده را حساب می‌کنیم و با جابه‌جایی مقایسه می‌کنیم:

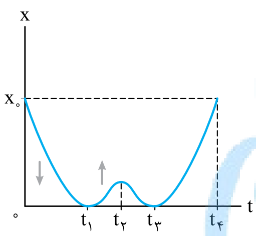
$$l = |\text{جابه‌جایی از صفر تا ۲ s}| + |\text{جابه‌جایی از ۲ تا ۸ s}| \Rightarrow l = |(-۴) - ۰| + |۲ - (-۴)| = ۴ + ۶ = ۱۰\, m$$

در بررسی ۱ دیدیم که اندازهٔ جابه‌جایی برابر $۲\,m$ است؛ پس مسافت طی‌شده $۸\,m$ از اندازهٔ جابه‌جایی بیشتر است. ✗

۳: با توجه به نمودار مشخص است که متحرک فقط یک بار و در $t = ۲\,s$ جهت حرکت خود را تغییر داده است. ✓

۴: همان‌طور که در بررسی ۲ دیدیم، مسافت طی‌شده برابر $۱۰\,m$ است؛ پس تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۸} = ۱/۲۵\, m/s \quad \checkmark$$



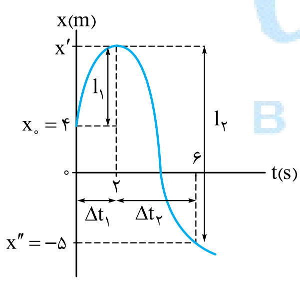
۱۱۰. گزینه ۲ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) نمودار در کل بازهٔ زمانی حرکت، بالای محور t قرار دارد؛ پس بردار مکان تغییر جهتی ندارد. ✗

ب) متحرک از صفر تا t_1 در خلاف جهت محور x و از t_1 تا t_2 در جهت محور x حرکت کرده است. ✗

پ) مکان ابتدا و انتهای حرکت یکی است؛ پس $\Delta x = ۰$ و در نتیجه سرعت متوسط صفر است. ✓

ت) چون در لحظهٔ t_3 تغییر جهت داریم، تندی متوسط در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 با اندازهٔ سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی برابر نیست. ✓



۱۱۱. گزینه ۲ طبق گفتهٔ سؤال، تندی متوسط متحرک در دو بازهٔ زمانی «صفر تا ۲ s» و «۲ s تا ۶ s» برابر است؛ پس مطابق شکل:

$$s_{av,1} = s_{av,2} \Rightarrow \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{l_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{|x' - ۴|}{۲ - ۰} = \frac{|x'' - x'|}{۶ - ۲} \Rightarrow \frac{|x' - ۴|}{۲} = \frac{|-۵ - x'|}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{x' - ۴}{۲} = \frac{x' + ۵}{۴} \Rightarrow ۲x' - ۸ = x' + ۵ \Rightarrow x' = ۱۳\, m$$

۱۱۲. گزینه ۳ **گام اول**: متحرک در t ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از لحظهٔ t تا 2t از مکان x_0 به x_1 رفته است. بنابراین سرعت متوسط آن در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{2t - t} = \frac{x_1 - x_0}{t}$$

گام دوم: متحرک از لحظهٔ صفر تا 2t از مکان x_0 به x_1 رفته است. سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا 2t به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v'_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{2t - ۰} = \frac{x_1 - x_0}{2t}$$

گام سوم: حالا نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

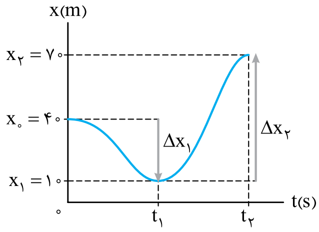
$$\frac{v'_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{x_1 - x_0}{2t}}{\frac{x_1 - x_0}{t}} = \frac{۱}{۲}$$

تکنیک با کمی دقت در نمودار می‌بینیم که جابه‌جایی متحرک در t ثانیهٔ دوم برابر جابه‌جایی آن در 2t ثانیهٔ اول است، پس داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x = \Delta x'} \frac{v'_{av}}{v_{av}} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{t}{2t} = \frac{۱}{۲}$$

۱۱۳. گزینه ۲ **گام اول**: مطابق شکل در t_1 ثانیهٔ اول (یعنی از صفر تا t_1) جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط منفی است و متحرک با سرعت متوسط $-۱۰\, m/s$ از $x_0 = ۴۰\, m$ به $x_1 = ۱۰\, m$ رفته است. بنابراین برای محاسبهٔ t_1 داریم:

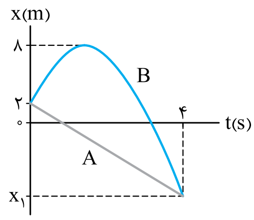
$$v_{av,1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow -۱۰ = \frac{۱۰ - ۴۰}{t_1 - ۰} \Rightarrow -۱۰ = \frac{-۳۰}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳\, s$$



گام دوم: مطابق گفتهٔ سؤال، تندی متوسط در t_2 ثانیهٔ اول (یعنی از صفر تا t_2) $15\ m/s$ است؛ برای همین باید ابتدا مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی را حساب کنیم. همان‌طور که در مثال می‌بینید، متحرک ابتدا از $x_0=40\ m$ تا $x_1=10\ m$ رفته و سپس تغییر جهت داده و تا $x_2=70\ m$ حرکت کرده است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده، باید اندازهٔ جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم تا در نهایت به کمک رابطهٔ تندی متوسط، t_2 معلوم شود:

$$l=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=|10-40|+|70-10|=30+60=90\ m$$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t_2}\Rightarrow 15=\frac{90}{t_2-0}\Rightarrow t_2=\frac{90}{15}=6\ s$$



۱۱۴. گزینهٔ ۲ **گام اول:** به کمک نمودار روبه‌رو و سرعت متوسط متحرک A، مکان نهایی هر دو متحرک را تعیین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}|v_{av}|=3/5\ m/s\\ \text{جهت حرکت A در خلاف جهت محور x است.}\end{array}\right\}\Rightarrow v_{av}=-3/5\ m/s\quad (I)$$

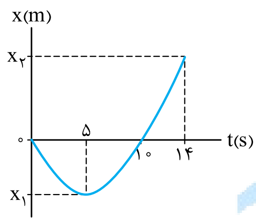
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{(I)}-3/5=\frac{x_1-2}{4-0}\Rightarrow \overbrace{(-3/5)\times 4}^{-14}=x_1-2\Rightarrow x_1=-12\ m$$

گام دوم: مسافت طی‌شده توسط متحرک B برابر است با جمع جابه‌جایی متحرک قبل و بعد از تغییر جهت؛ یعنی:

$$l=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=|8-2|+|-12-8|=6+20=26\ m$$

گام سوم: حالا که مسافت طی‌شده توسط متحرک B را می‌دانیم، تندی متوسط متحرک B در بازهٔ $(0,4\ s)$ به راحتی به دست می‌آید:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{26}{4}=6/5\ m/s$$

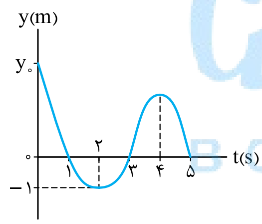


۱۱۵. گزینهٔ ۳ **گام اول:** همان‌طور که از شکل نمودار مشخص است، متحرک در لحظه‌های $t_1=0$ و $t_2=10\ s$ در مبدأ مکان قرار دارد؛ طبق گفتهٔ سؤال، تندی متوسط متحرک در این بازه $1/4\ m/s$ است؛ در این بازه، متحرک از مبدأ تا مکان x_1 رفته و دوباره به مبدأ مکان برگشته است؛ یعنی در این مدت مسافت $2|x_1|$ را پیموده است. بنابراین:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow 1/4=\frac{2|x_1|}{10-0}\Rightarrow 14=2|x_1|\Rightarrow |x_1|=7\ m\Rightarrow x_1=-7\ m$$

گام دوم: در بازهٔ زمانی $(5\ s,14\ s)$ متحرک از مکان $x_1=-7\ m$ تا x_2 جابه‌جا شده است. با توجه به اندازهٔ سرعت متوسط در این بازه، می‌توانیم بردار مکان x_2 را حساب کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{x_2-(-7)}{\underbrace{14-5}_{9}}\Rightarrow 18=x_2-(-7)\Rightarrow x_2=11\ m\Rightarrow \vec{x}_2=11\vec{i}$$



۱۱۶. گزینهٔ ۱ **گام اول:** با توجه به شکل روبه‌رو، متحرک در $t=2\ s$ تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین سرعت متوسط از $t=0$ تا $t=2\ s$ برابر است با:

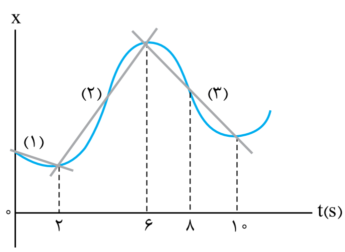
$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow -4\vec{j}=\frac{(-1-y_0)\vec{j}}{2}\Rightarrow -4=\frac{(-1-y_0)}{2}\Rightarrow -8=-1-y_0\Rightarrow -7=-y_0\Rightarrow y_0=7\ m$$

گام دوم: همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، متحرک دومین بار در $t=3\ s$ از مبدأ عبور می‌کند. مسافت طی‌شده از مبدأ زمان $(t=0)$ تا این لحظه برابر با مجموع اندازهٔ جابه‌جایی در بازه‌های $(0,2\ s)$ و $(2\ s,3\ s)$ است:

$$l=|\Delta y_1|+|\Delta y_2|=|-1-7|+|0-(-1)|=8+1=9\ m$$

گام سوم: حالا به کمک رابطهٔ $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$ تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{9}{3}=3\ m/s$$



۱۱۷. گزینهٔ ۳ طراح از ما تندی متوسط را می‌خواهد؛ یعنی نسبت مسافت طی‌شده به زمان! برای این کار ابتدا با توجه به نمودار، اندازهٔ شیب خط در بازه‌هایی که تغییر جهت نداریم را با هم مقایسه می‌کنیم:

اندازهٔ شیب خط (۱) > اندازهٔ شیب خط (۳) > اندازهٔ شیب خط (۲)

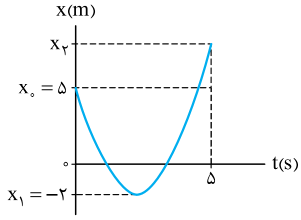
$$\Rightarrow \boxed{s_{av(2,6)}>s_{av(6,10)}>s_{av(0,2)}}$$

حالا به سراغ بررسی گزینه‌ها می‌رویم:

واضح است که ۱ کم‌ترین تندی متوسط را دارد؛ پس این گزینه را کنار می‌گذاریم؛ با توجه به مقایسهٔ تندی‌های بالا، حتماً تندی متوسط در بازهٔ $6\ s$ تا $10\ s$ از تندی متوسط در بازهٔ $2\ s$ تا $10\ s$ کم‌تر است؛ چرا که $s_{av(6,10)}<\frac{s_{av(2,6)}+s_{av(6,10)}}{2}$ است؛ پس ۴ هم حذف می‌شود! می‌ماند ۲ و ۳؛ اگر خوب به شکل نگاه کنید، متوجه می‌شوید که شیب خط در بازهٔ زمانی $6\ s$ تا $8\ s$ بیشتر از بازهٔ 0 تا $2\ s$ است؛ پس می‌توان گفت $s_{av(0,6)}<s_{av(2,8)}$ است؛ چرا که در یک بازهٔ زمانی یکسان ($6\ s$)، متحرک در بازهٔ $2\ s$ تا $8\ s$ مسافت بیشتری از بازهٔ زمانی 0 تا $6\ s$ طی کرده است؛ به طریق مشابه، شیب خط در بازهٔ زمانی $8\ s$ تا $10\ s$ هم بیشتر از بازهٔ زمانی 0 تا $2\ s$ است؛ بنابراین می‌توان گفت $s_{av(0,6)}<s_{av(2,10)}$ است؛ با این حساب ۳ پاسخ این تست خواهد بود.

توجه به هر حال این روش حل، چشمی و غیراصولی است و اگر طراح تست، صفحه را شطرنجی می‌کرد یا بر روی نمودار اطلاعات عددی می‌نوشت، مسلماً تست بهتری می‌شد!

از روش عددگذاری هم می‌توانستید این تست را حل کنید، که آن هم چشمی و غیردقیق است؛ اما برای رسیدن به گزینهٔ درست جواب می‌دهد!

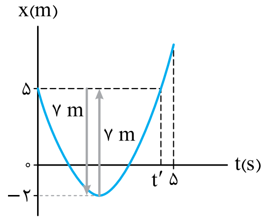


۱۱۸. گزینه ۲ **گام اول:** مطابق شکل، متحرک در بازهٔ زمانی $(۰,۵\,s)$ از $x_۰=۵\,m$ شروع به حرکت کرده و تا $x_۱=-۲\,m$ رفته؛ سپس تغییر جهت داده و تا مکان $x_۲$ حرکت کرده است. با توجه به این موضوع، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شدهٔ آن در این بازهٔ زمانی برابر است با:

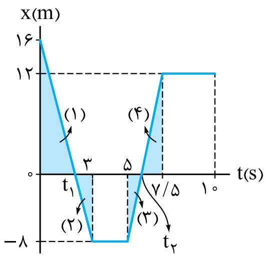
$$\begin{cases} d=x_۲-x_۰=x_۲-۵ \\ l=|-۲-۵|+|x_۲-(-۲)|=۷+x_۲+۲=x_۲+۹ \end{cases}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط را حساب کنیم و بفهمیم تندی متوسط متحرک در این ۵ ثانیه چند متر بر ثانیه بیشتر از اندازهٔ سرعت متوسط آن است:

$$\begin{cases} s_{av}=\dfrac{l}{\Delta t}=\dfrac{x_۲+۹}{۵} \\ v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x_۲-۵}{۵} \end{cases} \Rightarrow s_{av}-|v_{av}|=\frac{x_۲+۹}{۵}-\frac{(x_۲-۵)}{۵}=\frac{\cancel{x_۲}+۹-\cancel{x_۲}+۵}{۵}=\frac{۱۴}{۵}=۲/۸\,m/s$$



تکنیک شکل روبه‌رو را ببینید! تا لحظهٔ t' جابه‌جایی صفر و مسافت طی‌شده $۱۴\,m$ است. از t' تا $۵\,s$ اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت برابر است. پس می‌توانیم بگوییم اختلاف مسافت کل و اندازهٔ جابه‌جایی کل همان $l-|\Delta x|=۱۴\,m$ است و داریم: $s_{av}-|v_{av}|=\dfrac{l-|\Delta x|}{\Delta t}=\dfrac{۱۴}{۵}=۲/۸\,m/s$



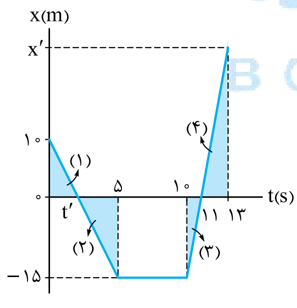
۱۱۹. گزینه ۳ **گام اول:** مطابق شکل، بردار مکان متحرک در بازهٔ زمانی $(t_۱,t_۲)$ در خلاف جهت محور x بوده (زیر محور t)؛ پس باید مقدار $t_۱$ و $t_۲$ را حساب کنیم. برای این کار از تشابه دو مثلث (۱) و (۲) و همین‌طور تشابه دو مثلث (۳) و (۴) استفاده می‌کنیم:

$$\text{مثلث‌های (۱) و (۲) متشابه‌اند} \Rightarrow \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۶}}}{\cancel{|-۸|}}=\frac{t_۱}{۳-t_۱} \Rightarrow t_۱=۶-۲t_۱ \Rightarrow ۳t_۱=۶ \Rightarrow t_۱=۲\,s$$

$$\text{مثلث‌های (۳) و (۴) متشابه‌اند} \Rightarrow \frac{\overset{۲}{\cancel{|-۸|}}}{\underset{۳}{\cancel{۱۲}}}=\frac{t_۲-۵}{۷/۵-t_۲} \Rightarrow ۳t_۲-۱۵=۱۵-۲t_۲ \Rightarrow ۵t_۲=۳۰ \Rightarrow t_۲=۶\,s$$

گام دوم: حالا وقت محاسبهٔ مسافت طی‌شده و تندی متوسط در این بازه است؛ مطابق نمودار، در این بازهٔ زمانی متحرک از $x=۰$ تا $x=-۸\,m$ رفته، چند ثانیه توقف داشته و سپس دوباره به مکان $x=۰$ برگشته است؛ بنابراین:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{\overbrace{۲\times۸}^{۱۶}}{\underbrace{۶-۲}_{۴}}=۴\,m/s$$



۱۲۰. گزینه ۲ **گام اول:** مطابق شکل متحرک در لحظهٔ t' برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد و در لحظهٔ $t=۱۳\,s$ در مکان x' قرار دارد. برای محاسبهٔ تندی متوسط در این بازهٔ زمانی، باید مقدار t' و x' را بدانیم. بنابراین از تشابه دو مثلث هاشورخوردهٔ (۱) و (۲) و همین‌طور تشابه دو مثلث هاشورخوردهٔ (۳) و (۴) استفاده می‌کنیم تا t' و x' معلوم شود.

$$\text{مثلث‌های (۱) و (۲) متشابه‌اند} \Rightarrow \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۰}}}{\underset{۳}{\cancel{|-۱۵|}}}=\frac{t'}{۵-t'} \Rightarrow ۳t'=۱۰-۲t' \Rightarrow ۵t'=۱۰ \Rightarrow t'=۲\,s$$

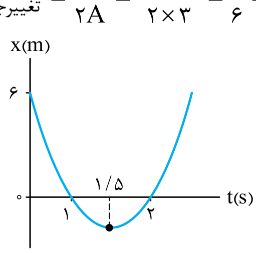
$$\text{مثلث‌های (۳) و (۴) متشابه‌اند} \Rightarrow \frac{|-۱۵|}{|x'|}=\frac{\overbrace{۱۱-۱۰}^{۱}}{\underbrace{۱۳-۱۱}_{۲}} \Rightarrow x'=۳۰\,m$$

گام دوم: حالا به سراغ محاسبهٔ تندی متوسط می‌رویم. مطابق شکل نمودار، متحرک در لحظهٔ $t'=۲\,s$ از مبدأ مکان $(x=۰)$ عبور کرده و در خلاف جهت محور x تا $x=-۱۵\,m$ رفته! سپس برای $۵\,s$ توقف داشته و تغییر جهت داده و در جهت مثبت محور x دوباره شروع به حرکت کرده و تا $x'=۳۰\,m$ پیش رفته است؛ بنابراین:

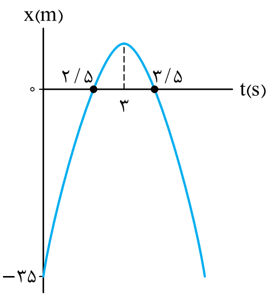
$$l=|-۱۵-۰|+|۳۰-(-۱۵)|=۱۵+۴۵=۶۰\,m \Rightarrow s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۶۰}{۱۳-۲}=\frac{۶۰}{۱۱}\,m/s$$

۱۲۱. گزینه ۲ در درس‌نامه توضیح دادیم که اگر معادلهٔ مکان ـ زمان از نوع درجهٔ دو (یعنی به صورت $x=At^۲+Bt+C$) باشد، در لحظهٔ $t=\dfrac{-B}{۲A}$، مقدار x بیشینه یا کمینه است و در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد. یعنی:

$$t_{\text{تغییرجهت}}=\frac{-B}{۲A}=\frac{-(-۹)}{۲\times۳}=\frac{۹}{۶}=۱/۵\,s$$



بد نیست بدانید چون ضریب $t^۲$ مثبت است، x در لحظهٔ $t=۱/۵\,s$ کمینه یا مینیمم است. یعنی متحرک قبل از $t=۱/۵\,s$ در جهت منفی محور x و بعد از آن در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. نمودار مکان ـ زمان این حرکت را هم ببینیم:



۱۲۲. گزینه ۲ **گام اول:** لحظهٔ تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم. چون معادلهٔ مکان ـ زمان از نوع درجهٔ دو است، داریم:

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-24}{2(-4)} = 3\,s$$

گام دوم: چون ضریب t^2 منفی است، x در لحظهٔ $t = 3\,s$ بیشینه است. پس از لحظهٔ $t = 0$ تا $t = 3\,s$، x در حال زیادشدن است؛ یعنی متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و پس از $t = 3\,s$ جهت حرکت متحرک عوض می‌شود.

خوب است نمودار مکان ـ زمان این متحرک را هم ببینید (شکل روبه‌رو).

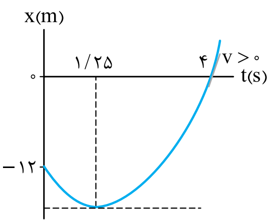
همین‌طور که می‌بینید از صفر تا $3\,s$ متحرک در جهت محور x حرکت کرده است.

۱۲۳. گزینه ۱ عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، $x = 0$ شده و بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؛ حالا باید دید در این معادله در چه لحظاتی $x = 0$ صفر می‌شود:

$$x = \underbrace{2}_{A}t^2 \underbrace{-5}_{B}t \underbrace{-12}_{C} = 0 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 25 - 4(2)(-12) = 121 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{5 \pm 11}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4\,s \checkmark \\ t_2 = \frac{-3}{2}\,s \times \end{cases}$$

چون زمان منفی نداریم، متحرک فقط در لحظهٔ $t = 4\,s$ از مبدأ مکان عبور کرده است؛ پس بردار مکان فقط یک بار تغییر جهت می‌دهد. ✗



حواستون باشه *تغییر جهت دادن بردار مکان رو با تغییر جهت خود متحرک قاطی نکنید!*

ب) برای دانستن جهت حرکت باید دید متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد: $t_{\text{تغییرجهت}} = \frac{-B}{2A} = \frac{5}{2 \times 2} = 1/25\,s$

چون در بازهٔ زمانی $(0, 4\,s)$ متحرک یک بار تغییر جهت داشته، نمی‌تواند صرفاً در جهت منفی محور x حرکت کرده باشد. ✗ *(یه نگاهی به نمودار مکان ـ زمان هم بیندازید تا جهت حرکت متحرک رو بهتر ببینید.)*

پ) در این لحظه مکان متحرک صفر می‌شود؛ نه سرعتش! همین‌طور که در نمودار $x - t$ می‌بینید، شیب خط (سرعت) در لحظهٔ $t = 4\,s$ مثبت است. $(v > 0)$ ✗

ت) از لحظهٔ $t_1 = 1/25\,s$ تا $t = 4\,s$ متحرک در قسمت منفی محور x (بردار مکان در خلاف جهت محور x) و از $t = 4\,s$ تا $t_2 = 7\,s$ متحرک در قسمت مثبت محور x (بردار مکان در جهت مثبت محور x) حرکت می‌کند بنابراین در بازهٔ زمانی $(1/25\,s, 7\,s)$ بردار مکان متحرک ابتدا در جهت منفی محور x و سپس در جهت مثبت محور x است. ✗

۱۲۴. گزینه ۲ **گام اول:** باید تشخیص بدهیم چند ثانیه علامت x مثبت $(x > 0)$ بوده است؛ یعنی: $-3t^2 + 15t - 18 > 0$

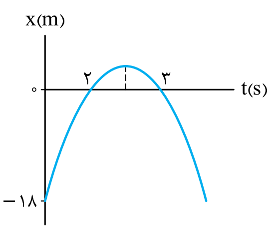
پس ریشه‌های معادلهٔ $x = -3t^2 + 15t - 18$ را به ازای $x = 0$ پیدا می‌کنیم:

$$-3t^2 + 15t - 18 = 0 \xrightarrow{\div(-3)} t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2\,s \\ t_2 = 3\,s \end{cases}$$

گام دوم: حالا وقت تعیین علامت معادله است. در ریاضی خواندید که علامت عبارت درجهٔ دو (مثل $x = At^2 + Bt + C$) بین دو ریشه، مخالف علامت A است؛ پس داریم:

t(s)	۰	۲	۳	+∞
x	−	+	−	

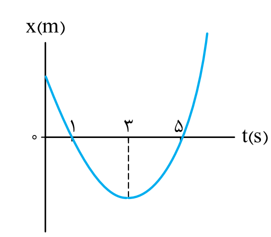
یعنی در بازهٔ $(2\,s, 3\,s)$ متحرک در مکان‌های مثبت است. پس در کل، متحرک $1\,s$ در طرف مثبت محور x است. *(این تست رو با رسم نمودار مکان ـ زمان هم می‌تونید جواب بدید.)*



تکنیک **ضریب t^2 در این معادله منفی است؛ پس مطابق شکل نمودار این معادله، سهمی رو به پایین است. همین‌طور که می‌بینید، فقط بین ریشه‌های معادله یعنی بین $t = 2\,s$ و $t = 3\,s$، مکان مثبت $(x > 0)$ است.**

۱۲۵. گزینه ۳ **گام اول:** ابتدا لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ را پیدا می‌کنیم:

$$x = t^2 - 6t + 5 \Rightarrow x = (t-1)(t-5) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1\,s \\ t_2 = 5\,s \end{cases}$$



گام دوم: پس متحرک در لحظه‌های $1\,s$ و $5\,s$ از مبدأ عبور کرده است. متحرک در لحظهٔ وسطِ بازهٔ t_1 تا t_2 (یعنی $\frac{t_1 + t_2}{2}$) تغییر جهت داده است. *(البته لحظهٔ تغییر جهت رو با رابطهٔ* $t' = \frac{-B}{2A}$ *هم می‌تونید حساب کنید.)*

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3\,s$$

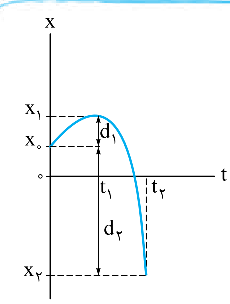
گام سوم: حالا می‌توانیم نمودار مکان ـ زمان این متحرک را رسم کنیم. چون ضریب t^2 مثبت است، نمودار باید به شکل روبه‌رو باشد. مطابق شکل در بازه‌های زمانی «صفر تا $1\,s$» و «$3\,s$ تا $5\,s$» متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ بوده است! پس از بین گزینه‌ها متحرک در ثانیهٔ پنجم (یعنی بازهٔ $4\,s$ تا $5\,s$) در حال نزدیک‌شدن به مبدأ است.

۱۲۶. گزینه ۲ وقتی معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دو است، برای محاسبهٔ بیشترین فاصلهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش باید مکان در دو لحظه را به دست آوریم؛ این لحظات، لحظهٔ تغییر جهت و لحظهٔ پایان بازه (این‌جا $t = 4\,s$) است. اول به سراغ تعیین لحظهٔ تغییر جهت می‌رویم:

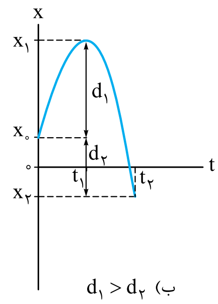
$$t = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-6)}{2(1)} = 3\,s$$

اگر موضوع برایتان مبهم است، نکتهٔ زیر را بخوانید:

نکته می‌دانید که وقتی معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دو است، نمودار آن یک سهمی مانند شکل‌های الف و ب است. واضح است که در یک بازهٔ زمانی معین (مثل صفر تا t_2) متحرک یا در لحظهٔ تغییر جهت (t_1) یا در لحظهٔ پایان بازه (t_2) در بیشترین فاصله از x_0 است. در شکل (الف) می‌بینید که در لحظهٔ پایان بازه (t_2)، متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه‌اش است. اما در شکل (ب) در لحظهٔ تغییر جهت (t_1) متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه‌اش است. (ما نمودارها رو برای حالتی که ضریب t^2 منفی است رسم کردیم. اگر ضریب t^2 مثبت باشد هم به همین نتایج می‌رسید.)



الف) $d_1 < d_2$



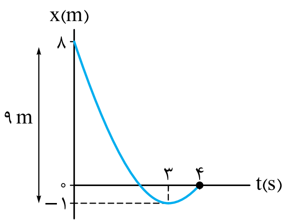
ب) $d_1 > d_2$

حالا مقدارهای ۰، ۳ s و ۴ s را در معادلهٔ $x = t^۲ - ۶t + ۸$ قرار می‌دهیم و مکان متحرک را در این لحظه‌ها به دست می‌آوریم:

$t_0 = ۰ \Rightarrow x_0 = (۰)^۲ - ۶(۰) + ۸ = ۸\ m$ (مکان اولیهٔ متحرک)

$t_1 = ۳\ s \Rightarrow x_1 = (۳)^۲ - ۶(۳) + ۸ = -۱\ m$ (مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت)

$t_2 = ۴\ s \Rightarrow x_2 = (۴)^۲ - ۶(۴) + ۸ = ۰$ (مکان متحرک در انتهای بازه)

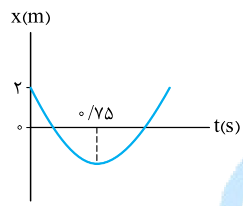


همان‌طور که می‌بینید در بازهٔ زمانی $(۰, ۴\ s)$ متحرک در لحظهٔ تغییر جهت بیشترین فاصله را از مکان اولیه‌اش دارد که این فاصله برابر است با: $|x_1 - x_0| = |-۱ - ۸| = |-۹| = ۹\ m$

بد نیست، این موضوع را در نمودار مکان ـ زمان این حرکت (شکل روبه‌رو) هم ببینیم:

۱۲۷. گزینهٔ «۲» در بازهٔ زمانی‌ای که تغییر جهت داشته باشیم؛ مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی با هم برابر نیست. پس لحظهٔ تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$t = -\frac{B}{۲A} = \frac{-(-۹)}{۲ \times ۶} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵\ s$$



این لحظه در بازهٔ $(۰/۵\ s, ۱\ s)$ است؛ بنابراین در بازهٔ ذکرشده در «۲» مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی با هم برابر نیستند.

برای درک بهتر نمودار مکان ـ زمان این حرکت را هم ببینید:

همین‌طور که می‌بینید در بازه‌ای که $t = ۰/۷۵\ s$ در آن قرار می‌گیرد، مسافت با اندازهٔ جابه‌جایی برابر نیستند.

۱۲۸. گزینهٔ «۴» **گام اول**: برای این‌که بفهمیم متحرک در بازهٔ صفر تا ۵ s تغییر جهت داده است یا نه، ابتدا لحظهٔ تغییر جهت را حساب می‌کنیم:

$$t_{\text{تغییرجهت}} = -\frac{B}{۲A} = -\frac{۱۲}{۲(-۲)} = ۳\ s$$

گام دوم: با توجه به لحظهٔ تغییر جهت، برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده باید جابه‌جایی قبل از تغییر جهت و بعد از تغییر جهت را حساب کنیم و با هم جمع کنیم:

$t_0 = ۰ \Rightarrow x_0 = -۴۰\ m$

$t_1 = ۳\ s \Rightarrow x_1 = \underbrace{-۲(۳)^۲}_{-۱۸} + \underbrace{۱۲(۳)}_{۳۶} - ۴۰ = -۲۲\ m$

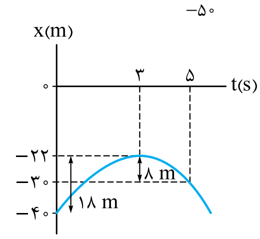
$t_2 = ۵\ s \Rightarrow x_2 = \underbrace{-۲(۵)^۲}_{-۵۰} + \underbrace{۱۲(۵)}_{۶۰} - ۴۰ = -۳۰\ m$

$\Rightarrow |\Delta x_1| = x_1 - x_0 = -۲۲ - (-۴۰) = ۱۸\ m$

$\Rightarrow |\Delta x_2| = |x_2 - x_1| = |-۳۰ - (-۲۲)| = ۸\ m$

$\Rightarrow l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = ۱۸ + ۸ = ۲۶\ m$

بد نیست مسافتی که این متحرک در بازهٔ صفر تا ۵ s می‌پیماید را در نمودار مکان ـ زمانش هم ببینید (شکل روبه‌رو):

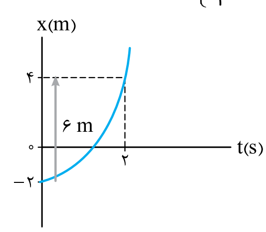


تکنیک در محاسبهٔ جابه‌جایی در یک معادله، برای سادگی در محاسبات، می‌توانید x_0 را کنار بگذارید. مثلاً در همین تست:

$$x = -۲t^۲ + ۱۲t \cancel{-۴۰} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = ۰ \Rightarrow x_0 = ۰ \\ t_1 = ۳\ s \Rightarrow x_1 = -۲(۳)^۲ + ۱۲(۳) = ۱۸\ m \\ t_2 = ۵\ s \Rightarrow x_2 = -۲(۵)^۲ + ۱۲(۵) = ۱۰\ m \end{cases} \Rightarrow l = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| = |۱۸ - ۰| + |۱۰ - ۱۸| = ۱۸ + ۸ = ۲۶\ m$$

۱۲۹. گزینهٔ «۱» **گام اول**: اول باید ببینیم متحرک در ۲ ثانیهٔ اول تغییر جهت داده است یا نه. برای همین باید لحظهٔ تغییر جهت را تعیین کنیم:

$$t = -\frac{B}{۲A} = \frac{-۱}{۲(۱)} = -\frac{۱}{۲} \quad \text{(غ.ق.ق)}$$



گام دوم: با توجه به منفی شدن t، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه در ۲ ثانیهٔ اول حرکت، مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است:

$l = |\Delta x| = |x_2 - x_0| = |(۴ + ۲ - ۲) - (۰ + ۰ - ۲)| = ۶\ m$

اگر می‌خواهید شهود بیشتری نسبت به مسئله داشته باشید، نمودار مکان ـ زمان متحرک در ۲ ثانیهٔ اول را ببینید.

۱۳۰. (گزینهٔ ۱) چون معادله از نوع درجهٔ دو است، متحرک در لحظهٔ $t'=\frac{-B}{2A}$ تغییر جهت می‌دهد؛ یعنی: $t'=\frac{-4}{2\times 2}=-1\,s$

منفی‌شدن t' نشانهٔ این است که متحرک تغییر جهت نداده است؛ پس مسافت طی‌شده (l) برابر اندازهٔ جابه‌جایی ($|\Delta x|$) است؛ به زبان ریاضی:

$\frac{l}{|\Delta x|}=1 \Rightarrow l=|\Delta x| \Rightarrow$ متحرک تغییر جهت نداده است.

۱۳۱. (گزینهٔ ۳) **گام اول:** می‌دانید که بردار مکان متحرک در لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، تغییر جهت می‌دهد. این لحظه‌ها ریشه‌های ساده (و نه ریشهٔ مضاعف) معادلهٔ مکان ـ زمان است؛ به کمک تجزیه داریم:

$$x=2t^2-16t+24=2(t-2)(t-6) \xrightarrow{x=0} 0=2(t-2)(t-6) \Rightarrow \begin{cases} t_1=2\,s \\ t_2=6\,s \end{cases}$$

گام دوم: برای به دست آوردن مقدار مسافت طی‌شده به لحظهٔ تغییر جهت نیاز داریم:

$$t=\frac{-B}{2A}=\frac{-(-16)}{2(2)}=4\,s$$

تکنیک با داشتن لحظه‌های عبور از مبدأ می‌توانیم لحظهٔ تغییر جهت را این‌طور هم حساب کنیم:

$$t'=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{2+6}{2}=4\,s$$

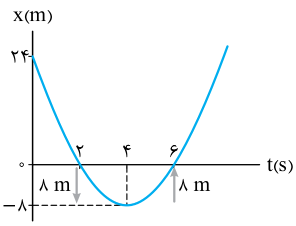
گام سوم: اگر جابه‌جایی از $t_1=2\,s$ تا $t'=4\,s$ را Δx_1 و جابه‌جایی از $t=4\,s$ تا $t=6\,s$ را Δx_2 بگیریم، مسافت طی‌شده مجموع این دو مقدار است؛ یعنی:

$$l=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=|(x_4-x_2)|+|(x_6-x_4)|$$

$$=|(2(4)^2-16(4)+24)-(2(2)^2-16(2)+24)|+|(2(6)^2-16(6)+24)-(2(4)^2-16(4)+24)|$$

$$=|(-8)-(0)|+|0-(-8)|=16\,m$$

برای درک بهتر، نمودار مکان ـ زمان این متحرک را می‌توانید ببینید:



تکنیک با توجه به تقارن سهمی، اندازهٔ جابه‌جایی t ثانیهٔ قبل و t ثانیهٔ بعد از لحظهٔ تغییر جهت (t') یکسان است. از سوی دیگر در لحظه‌های t_1 و t_2 متحرک از مبدأ عبور کرده است و $x_1=x_2=0$ است. پس داریم:

$$l=|\Delta x_1|+|\Delta x_2| \xrightarrow{|\Delta x_1|=|\Delta x_2|} l=2|\Delta x_1|=2|x'-x_1| \xrightarrow{x_1=0} l=2|x'|=2\times|2(4)^2-16(4)+24|=2\times|-8|=16\,m$$

اگر از نوشتن $x_0=24\,m$ در محاسبات صرف نظر می‌کردیم، سریع‌تر به جواب می‌رسیدیم!

۱۳۲. (گزینهٔ ۳) **گام اول:** ابتدا باید ببینیم که متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه:

$$t=-\frac{B}{2A}=\frac{-(-4)}{2(4)}=\frac{1}{2}\,s$$

پس متحرک در $t=\frac{1}{2}\,s$ تغییر جهت می‌دهد.

گام دوم: مسافت طی‌شده برابر با اندازهٔ جابه‌جایی در بازهٔ $(0,\frac{1}{2}\,s)$ به اضافهٔ اندازهٔ جابه‌جایی در بازهٔ $(\frac{1}{2}\,s,2\,s)$ است:

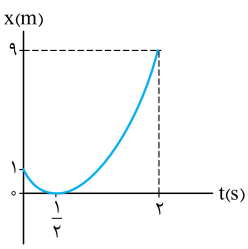
$$l=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=|(x_{\frac{1}{2}}-x_0)|+|(x_2-x_{\frac{1}{2}})|=|(4(\tfrac{1}{2})^2-4(\tfrac{1}{2})+1)-(4(0)^2-4(0)+1)|+|(4(2)^2-4(2)+1)-(4(\tfrac{1}{2})^2-4(\tfrac{1}{2})+1)|$$

$$=|(0)-(1)|+|(9)-(0)|=1+9=10\,m$$

گام سوم: تندی متوسط برابر $\frac{l}{\Delta t}$ است:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10}{2}=5\,m/s$$

اگر دوست دارید سؤال را بهتر درک کنید، نمودار مکان ـ زمان متحرک در این بازه را ببینید:



درس پنجم: تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

گفتیم لحظه، بازهٔ زمانی خیلی‌خیلی‌خیلی کوچک است؛ **تندی لحظه‌ای** هم یعنی تندی متحرک در یک بازهٔ زمانی خیلی‌خیلی‌خیلی کوچک! در واقع تندی لحظه‌ای، تندی متحرک در یک لحظه است. **سرعت لحظه‌ای** هم به همین صورت تعریف می‌شود؛ به سرعت متحرک در یک لحظه از زمان، سرعت لحظه‌ای می‌گوییم.

حواستون باشه *هر جا واژهٔ سرعت یا تندی (بدون صفت متوسط یا لحظه‌ای) بیاد، منظور سرعت یا تندی لحظه‌ایه، توی فرمول‌ها هم اگه v یا s (بدون اندیس) بیاد، منظور سرعت یا تندی لحظه‌ایه.*

پرسش | تفاوت سرعت (لحظه‌ای) و تندی (لحظه‌ای) چیست؟

پاسخ | **سرعت (لحظه‌ای)** یک **بردار** است، پس هم **جهت** دارد و هم **مقدار**، مثلاً وقتی می‌گوییم $\vec{v}=-۴\vec{i}$، یعنی اندازهٔ سرعت متحرک $۴\ m/s$ و حرکت آن در جهت منفی x است. اما در حرکت‌های راست‌خط برای راحتی خودمان اغلب پیکانهٔ بردار و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را نمی‌گذاریم و مثلاً می‌نویسیم: $v=-۴\ m/s$ که منظورمان همان بردار $\vec{v}=-۴\vec{i}$ یا $\vec{v}=-۴\vec{j}$ است.

تندی (لحظه‌ای) یک کمیت **نرده‌ای** است و جهت ندارد. در واقع تندی (لحظه‌ای) همان اندازهٔ سرعت (لحظه‌ای) است. بنابراین با تندی نمی‌توانیم جهت حرکت را مشخص کنیم، (زیرا علامت منفی برای تندی معنی ندارد)؛ مثلاً وقتی می‌گوییم $s=|v|=۴\ m/s$ یعنی اندازهٔ سرعت (یا همان تندی) $۴\ m/s$ است ولی جهت حرکت مشخص نیست.

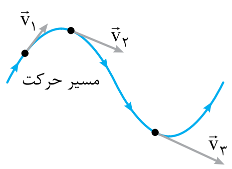
نکته در بحث تندی متوسط و سرعت متوسط گفتیم تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ سرعت متوسط است: $s_{av}\geq|v_{av}|$
اما تندی لحظه‌ای همواره برابر اندازهٔ سرعت (لحظه‌ای) است: $s=|v|$ یا $s_{\text{لحظه‌ای}}=|v_{\text{لحظه‌ای}}|$

- **تندی‌سنج** • احتمالاً برای شما هم تندی‌سنج خودروها جذاب است. عقربهٔ تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نمایش می‌دهد.

(مثلاً در لحظه‌ای که تصویر روبه‌رو گرفته شده تندی خودرو $۲۹۸\ km/h$ بوده است.)
اما وقتی می‌خواهیم سرعت خودرو را بگوییم، علاوه بر تندی باید جهت آن را هم مشخص کنیم. مثلاً بگوییم سرعت خودرو $۲۹۸\ km/h$ به سمت شمال غربی است.

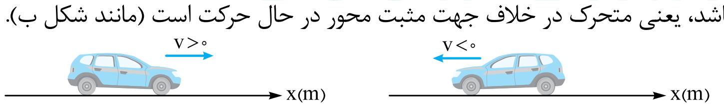
کمی عمیق‌تر وقتی می‌گوییم تندی لحظه‌ای یک خودرو $۲۹۸\ km/h$ است، یعنی اگر این خودرو به مدت $۱h$ با همین تندی حرکت کند، مسافت $۲۹۸\ km$ را می‌پیماید. هم‌چنین وقتی سرعت لحظه‌ای خودرو $۲۹۸\ km/h$ به سمت شمال غربی است، یعنی اگر این خودرو به مدت $۱h$ در همهٔ لحظه‌ها با این سرعت حرکت کند، جابه‌جایی‌اش $۲۹۸\ km$ به سمت شمال غرب خواهد بود.

- **جهت بردار سرعت لحظه‌ای** • بردار سرعت (لحظه‌ای) همواره در جهت حرکت بوده و بر مسیر حرکت مماس است. مثلاً شکل مقابل مسیر حرکت یک متحرک است که در چند نقطه از مسیر، بردار سرعت (لحظه‌ای) آن را رسم کرده‌ایم.



نکته طول بردار سرعت بیانگر اندازهٔ آن (یعنی تندی) است. در شکل بالا طول بردار سرعت در طی مسیر افزایش یافته؛ یعنی اندازهٔ سرعت یا تندی در حال افزایش است.

- **علامت سرعت** • در حرکت‌هایی که روی محور x یا y انجام می‌شود، علامت سرعت بیانگر جهت حرکت است. اگر $v>۰$ باشد، یعنی متحرک در حال حرکت در جهت مثبت محور است (مانند شکل الف) و اگر $v<۰$ باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت مثبت محور در حال حرکت است (مانند شکل ب).



(الف) (ب)

حواستون باشه *منفی یا مثبت بودن سرعت هیچ ربطی به کم یا زیاد بودن تندی نداره. مثلاً اگه سرعت متحرکی از $v_۱=-۲۰\ m/s$ به $v_۲=۸\ m/s$ برسد یعنی تندی اون $۱۲\ m/s$ کم شده.*

کمی عمیق‌تر

- **تفاوت تغییرات سرعت و تغییرات تندی** • اگر سرعت اولیه $(v_۱)$ و سرعت نهایی $(v_۲)$ یک متحرک را داشته باشیم، تغییرات تندی و تغییرات سرعت به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

تغییرات سرعت: $\Delta v=v_۲-v_۱$ تغییرات تندی: $\Delta s=|v_۲|-|v_۱|$

این دو رابطه به ما می‌گویند که در محاسبهٔ تغییرات تندی با جهت (یا علامت) $v_۱$ و $v_۲$ کاری نداریم. اما وقتی می‌خواهیم تغییرات سرعت را حساب کنیم باید در حساب و کتابمان علامت سرعت اولیه و نهایی را در نظر بگیریم.

مثلاً اگر $v_۱=۲۰\ m/s$ و $v_۲=-۸\ m/s$ باشد، تغییرات تندی و تغییرات سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta s=|v_۲|-|v_۱|=|-۸|-|۲۰|=-۱۲\ m/s$$
$$\Delta v=v_۲-v_۱=-۸-۲۰=-۲۸\ m/s$$

حواستون باشه علامت منفی در تغییرات تندی $(-۱۲\ m/s)$ نشانهٔ کاهش تندی است؛ اما علامت منفی در تغییرات سرعت $(-۲۸\ m/s)$ نشانهٔ منفی‌بودن جهت بردار تغییرات سرعت است.

نکته هر وقت علامت‌های سرعت اولیه و نهایی یکسان باشد، اندازهٔ تغییرات سرعت برابر تغییرات تندی است. ولی اگر سرعت اولیه و سرعت نهایی هم‌علامت نباشند، اندازهٔ تغییرات سرعت با تغییرات تندی برابر نیست.

تست **خودرویی روی محور x حرکت می‌کند و عقربهٔ تندی‌سنج آن در لحظهٔ t_1، $۳۶\ km/h$ را نشان می‌دهد. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 بردار تغییرات سرعت این خودرو $(-۵۴\ km/h)\vec{i}$ باشد، با در نظر گرفتن حالت‌های ممکن، کدام گزینه دربارهٔ حرکت این خودرو در بازهٔ t_1 تا t_2 نمی‌تواند درست باشد؟**

۱) تندی $۵۴\ km/h$ افزایش یافته است.
۲) تندی خودرو $۱۸\ km/h$ کاهش یافته است.
۳) حرکت خودرو در لحظهٔ t_2 الزاماً در جهت منفی است.
۴) سرعت خودرو $۵۴\ km/h$ کاهش یافته است.

پاسخ ۴ **گام اول**: این خودرو در لحظهٔ t_1 یا در جهت یا در خلاف جهت محور x در حال حرکت است. پس ممکن است سرعت اولیهٔ آن $v_1 = +۳۶\ km/h$ یا $v_1 = -۳۶\ km/h$ باشد. با توجه به این دو حالت ممکن داریم:

حالت اول: $\Delta v = v_2 - v_1 \xrightarrow[\Delta v=-۵۴\ km/h]{v_1=+۳۶\ km/h} -۵۴ = v_2 - ۳۶ \Rightarrow v_2 = -۵۴ + ۳۶ = -۱۸\ km/h$

حالت دوم: $\Delta v = v_2 - v_1 \xrightarrow[\Delta v=-۵۴\ km/h]{v_1=-۳۶\ km/h} -۵۴ = v_2 - (-۳۶) \Rightarrow v_2 = -۵۴ - ۳۶ = -۹۰\ km/h$

تا این‌جا معلوم شد که در هر دو حالت بردار سرعت نهایی $(\vec{v}_2)$ منفی است. پس حرکت خودرو در لحظهٔ t_2 الزاماً در جهت منفی است و ۳ درست است.

گام دوم: حالا که حالت‌های ممکن v_2 را داریم، تغییرات تندی را در دو حالت حساب می‌کنیم:

حالت اول: $\Delta s = |v_2| - |v_1| = |-۱۸| - ۳۶ = -۱۸\ km/h$

یعنی تندی خودرو $۱۸\ km/h$ کاهش یافته است. پس ۲ هم می‌تواند درست باشد.

حالت دوم: $\Delta s = |v_2| - |v_1| = |-۹۰| - |-۳۶| = +۵۴\ km/h$

یعنی تندی خودرو $۵۴\ km/h$ زیاد شده است. پس ۱ هم می‌تواند اتفاق بیفتد.

اما چرا باید ۴ را انتخاب کنیم؟ چون همان‌طور که گفتیم، علامت منفی در $\Delta\vec{v} = (-۵۴\ km/h)\vec{i}$ جهت بردار تغییرات سرعت را نشان می‌دهد و نه کم‌شدن آن را.

مفهوم تندشونده، کُندشونده یا یکنواخت

این سه اصطلاح دربارهٔ کم یا زیاد شدن یا تغییرنکردن **تندی (اندازهٔ سرعت)** هستند.

حرکت تندشونده: اگر در طی حرکت، تندی (اندازهٔ سرعت) در حال **زیادشدن** باشد، نوع حرکت **تندشونده** است. مثلاً اگر سرعت متحرکی به تدریج از $-۲\ m/s$ به $-۱۰\ m/s$ برسد، نوع حرکتش تندشونده است. (یادآوری می‌کنیم که علامت منفی سرعت، نشانهٔ جهت حرکت است و ربطی به تندی ندارد.)

حرکت کندشونده: اگر در طی حرکت، تندی (اندازهٔ سرعت) در حال **کم‌شدن** باشد، نوع حرکت **کُندشونده** است. مثلاً اگر سرعت متحرکی به تدریج از $-۱۰\ m/s$ به $-۲\ m/s$ برسد، نوع حرکتش کندشونده است.

حرکت یکنواخت: اگر در طول مسیر، تندی (اندازهٔ سرعت) تغییر نکند، حرکت یکنواخت است.

چند نکته ۱ همهٔ حرکت‌ها چه بر مسیر **مستقیم** و چه بر مسیر **غیرمستقیم**، یا تندشونده یا کندشونده یا یکنواخت‌اند. مثلاً حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکتی است که مسیرش بر روی محیط یک دایره و تندی‌اش ثابت است.

۲ اگر متحرکی از حال سکون شروع به حرکت کند، حتماً در ابتدا حرکتش تندشونده است.

۳ اگر متحرکی در طول مسیرش متوقف شود، حتماً باید تندی‌اش کم شود تا بایستد، پس نوع حرکتش کُندشونده است.

۴ اگر علامت سرعت اولیه و سرعت نهایی متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند یکسان نباشد (مثلاً $v_1 = -۲\ m/s$ و $v_2 = ۱۰\ m/s$)، می‌فهمیم که حداقل یک بار سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت داده است. یعنی حداقل یک بار متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده است. در این صورت لحظاتی قبل از تغییر جهت حرکت کُندشونده و لحظاتی پس از تغییر جهت حرکت تندشونده است.

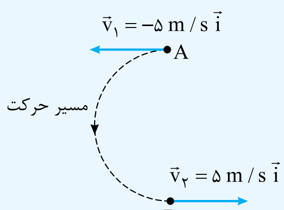
تست **سرعت اولیهٔ جسمی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، $v_1 = -۵\ m/s$ و سرعت نهایی آن $v_2 = ۵\ m/s$ است. چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟**

الف) نوع حرکت جسم در تمام طول مسیر ممکن است یکنواخت باشد.
ب) متحرک حداقل یک بار تغییر جهت داده است.
پ) حداکثر تندی متحرک در طول مسیر $۵\ m/s$ است.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ ۲ با توجه به این‌که حرکت در مسیر مستقیم است و علامت سرعت اولیه و نهایی متحرک یکسان نیست، نتیجه می‌گیریم این متحرک حداقل یک بار توقف کرده و تغییر جهت داده است. یعنی عبارت (ب) درست است. اما عبارت (الف) نمی‌تواند درست باشد، چون برای تغییر جهت باید حرکت ابتدا کُندشونده و سپس تندشونده باشد.

نادرستی عبارت (پ): ما دربارهٔ این حرکت اطلاعاتی جز سرعت اولیه و سرعت نهایی و مستقیم‌بودن مسیر حرکت نداریم. بنابراین در طول مسیر تندی متحرک هر مقداری (بیشتر یا کم‌تر از $۵\ m/s$) می‌تواند باشد.



حواستون باشه در این تست اگر مستقیم‌بودن مسیر حرکت گفته نمی‌شد، جملهٔ (الف) هم درست می‌شد. مثلاً اگر حرکت دایره‌ای یکنواخت باشد، پس از نیم دور چرخش علامت بردار سرعت عوض می‌شود. در شکل روبه‌رو متحرک تمام طول نیم‌دایرهٔ AB را با تندی $۵\ m/s$ می‌پیماید (پس حرکتش یکنواخت است) و سرعت اولیه و نهایی‌اش به ترتیب $-۵\ m/s$ و $+۵\ m/s$ است.

معادلهٔ سرعت ـ زمان

یکی از راه‌های نشان‌دادن سرعت یک جسم در هر لحظه، نوشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان (یا $v-t$) است. در این معادله اگر به جای t، لحظهٔ مورد نظرمان را بگذاریم، می‌توانیم سرعت متحرک در آن لحظه را حساب کنیم. مثلاً $v = 3t^2 - 18$ (در SI) یک معادلهٔ سرعت ـ زمان است که با قراردادن لحظهٔ دلخواه در آن می‌توانیم سرعت در آن لحظه را حساب کنیم. حالا شما بگویید طبق این معادله سرعت اولیه و سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ چند متر بر ثانیه است؟

چند نکته

۱) به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان نمی‌توانیم مکان اولیهٔ جسم را مشخص کنیم.

۲) به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان می‌توانیم تشخیص دهیم که یک متحرک چه زمانی تغییر جهت می‌دهد. برای آن‌که متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، تغییر جهت بدهد، باید دو اتفاق بیافتد:

الف) سرعتش صفر شود (متوقف شود).

ب) علامت سرعتش تغییر کند.

۳) با قراردادن یک لحظه در معادلهٔ سرعت ـ زمان، علامت سرعتی که به دست می‌آید، منفی یا مثبت است. همان‌طور که گفتیم این علامت نشان‌دهندهٔ جهت حرکت متحرک در آن لحظه است.

تست | معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t^2 - 81$ است. این متحرک در چه لحظه‌ای و چگونه تغییر جهت می‌دهد؟

۱) این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

۲) در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ از جهت منفی محور به جهت مثبت تغییر جهت می‌دهد.

۳) در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ از جهت مثبت محور به جهت منفی تغییر جهت می‌دهد.

۴) در لحظه‌های $t = 4/5\,s$ و $t = 9\,s$ دو بار تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ ۲ | اول ببینیم سرعت این متحرک در چه لحظه یا لحظه‌هایی صفر می‌شود:

$$v = 0 \Rightarrow 4t^2 - 81 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow t = \pm\frac{9}{2}\,s = \pm 4/5\,s$$

($-4/5\,s$ که قبل از مبدأ زمان است و قابل قبول نیست.)

حالا باید ببینیم که آیا در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ علامت سرعت تغییر کرده است یا نه. برای این کار دو لحظهٔ $t_1 = 4\,s$ و $t_2 = 5\,s$ (یکی قبل از $4/5\,s$ و یکی بعد از آن) را در معادلهٔ سرعت امتحان می‌کنیم. اگر علامت سرعتشان مختلف بود، یعنی متحرک در لحظهٔ $4/5\,s$ تغییر جهت داده است.

$$\begin{cases} v_1 = 4(4)^2 - 81 = -17\,m/s \\ v_2 = 4(5)^2 - 81 = +19\,m/s \end{cases} \Rightarrow$$ متحرک در لحظهٔ $t = 4/5\,s$ از جهت منفی محور به جهت مثبت تغییر جهت داده است.

این هم جدول تغییرات سرعت:

$t\,(s)$	0		$4/5$ (لحظهٔ تغییر جهت)	
$v\,(m/s)$	-81	$(-)$	0	$(+)$

۴) اگر مسافت پیموده‌شده توسط یک متحرک را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از ما بخواهند، باید حواسمان را جمع کنیم که آیا متحرک در آن بازهٔ زمانی تغییر جهت داده است یا نه. برای محاسبهٔ مسافت پیموده‌شده به کمک معادله‌های مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان باید دستورالعمل زیر را اجرا کنید:

۱) معادلهٔ سرعت را برابر صفر قرار بدهید و ریشه‌های آن را حساب کنید. (ریشه‌های سادهٔ معادله، لحظه‌های تغییر جهت هستند.)

۲) ببینید ریشه‌های به دست آمده، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 هستند یا نه. اگر باشند یعنی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 تغییر جهت داده است.

۳) به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان جابه‌جایی‌های متحرک از لحظهٔ t_1 تا لحظهٔ تغییر جهت و از لحظهٔ تغییر جهت تا لحظهٔ t_2 را حساب کنید.

۴) مسافت طی‌شده برابر جمع اندازهٔ جابه‌جایی‌ها (قدرمطلق جابه‌جایی‌ها) است.

تست زیر را ببینید تا قشنگ موضوع برایتان جا بیفتد.

تست | معادلهٔ مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = 2t^2 - 20t + 5$ و $v = 4t - 20$ است. این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکتش، چه مسافتی را برحسب متر می‌پیماید؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۲- ۳) ۶۸- ۴) ۶۸

پاسخ ۴ | باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌ای سرعتش صفر شده و تغییر جهت داده است، پس v را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v = 0 \Rightarrow 4t - 20 = 0 \Rightarrow t = 5\,s$$

تعیین علامت هم می‌کنیم تا مطمئن بشویم متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$ تغییر جهت داده:

$t\,(s)$	0		5 (لحظهٔ تغییر جهت)	
$v\,(m/s)$	-20	$(-)$	0	$(+)$

پس این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول، ۵ s در خلاف جهت محور x و ۳ s در جهت محور x حرکت کرده است، یعنی باید جابه‌جایی‌های صفر تا ۵ s و ۵ s تا ۸ s را جداجدا حساب کنیم:

$$\Delta x_۱ = x_۵ - x_۰ = [۲(۵)^۲ - ۲۰(۵) + ۵] - [۲(۰)^۲ - ۲۰(۰) + ۵] = -۵۰\ m$$

$$\Delta x_۲ = x_۸ - x_۵ = [۲(۸)^۲ - ۲۰(۸) + ۵] - [۲(۵)^۲ - ۲۰(۵) + ۵] = +۱۸\ m$$

یعنی این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش، ۵۰ m در خلاف جهت محور x و در ۳ ثانیهٔ بعد از آن ۱۸ m در جهت مثبت محور حرکت کرده است. حالا می‌توانیم مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را در ۸ ثانیهٔ اول حساب کنیم:

$$l_{(۰,۸)} = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۵۰ + ۱۸ = ۶۸\ m$$

۵ همان‌طور که کمی قبل‌تر گفتیم، در حرکت بر مسیر مستقیم، متحرک در لحظهٔ تغییر جهت می‌ایستد؛ پس لحظه‌های قبل از تغییر جهت، حرکت کندشونده و لحظه‌های بعد از تغییر جهت حرکت تندشونده است.[۱]

تست ؟ | معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی در SI به صورت $v = ۳t - ۱۲$ است. در کدام بازهٔ زمانی حرکت متحرک کُندشونده است و در این مدت متحرک در چه جهتی حرکت می‌کند؟

۱) ۰ تا $t = ۴\ s$، در جهت منفی
۲) ۰ تا $t = ۴\ s$، در جهت مثبت
۳) از لحظهٔ $t = ۴\ s$ به بعد، در جهت منفی
۴) از لحظهٔ $t = ۴\ s$ به بعد، در جهت مثبت

پاسخ ۱ | لحظه‌ای را که متحرک تغییر جهت می‌دهد، حساب می‌کنیم و بعد معادلهٔ $v = ۳t - ۱۲$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$v = ۰ \Rightarrow ۳t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۲}{۳} = ۴\ s$$

		لحظهٔ تغییر جهت	
t (s)	۰	۴	
v (m/s)	−۱۲ (−)		(+)

برای آن‌که متحرک بتواند تغییر جهت بدهد، باید لحظه‌ای متوقف شود؛ بنابراین قبل از این لحظه حرکتش کُند می‌شود تا بایستد. در این‌جا هم قبل از لحظهٔ $t = ۴\ s$ حرکت کُندشونده است. (۳ و ۴ نادرست‌اند.) در جدول تعیین علامت هم می‌بینید که قبل از لحظهٔ $t = ۴\ s$ علامت سرعت منفی است؛ پس متحرک در بازهٔ $(۰, ۴\ s)$ در جهت منفی محور حرکت می‌کند، یعنی ۱ را علامت می‌زنیم.

۱۳۳. گزینه ۲ عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

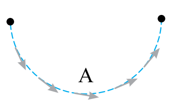
الف) **نادرست**؛ در تندی‌سنج خودروها، تندی خودرو در هر لحظه را مشاهده می‌کنیم و نه سرعت آن را (چرا که سرعت کمیتی برداری است و به جز تندی باید جهت حرکت را هم با آن مشخص کرد.)

ب) **درست**؛ بردار سرعت لحظه‌ای همواره بر مسیر حرکت مماس است.

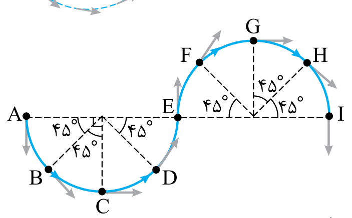
پ) **درست**؛ متحرک بر مسیر مستقیم حرکت بکند یا نکند، اندازهٔ سرعت لحظه‌ای همیشه همان تندی لحظه‌ای است.

ت) **نادرست**؛ اگر متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در طی مسیرش تغییر جهت بدهد، مسافتی که می‌پیماید از جابه‌جایی‌اش بیشتر شده؛ در نتیجه تندی متوسطش از اندازهٔ سرعت متوسطش بیشتر خواهد شد. (البته اگر تغییر جهت ندهد تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط برابر می‌شوند.)

پس ۲ را انتخاب می‌کنیم.



۱۳۴. گزینه ۳ مطابق شکل مسیر حرکت متحرک A، یک مسیر منحنی (غیر خط راست) است؛ به خاطر همین جهت بردار مماس بر حرکت، یعنی بردار سرعت آن دائماً در حال تغییر است.



۱۳۵. گزینه ۴ در شکل روبه‌رو بردارهای سرعت را در نقطه‌های مورد نظر کشیده‌ایم. با توجه به شکل، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ در نقطه‌های C و G بردارهای سرعت در جهت → است و با هم برابر است. ✓

۲ در نقطه‌های B و H بردارهای سرعت در جهت ↘ بوده و با هم برابر است. ✓

۳ در نقطه‌های D و F بردارهای سرعت در جهت ↗ قرار دارند و با هم برابرند. ✓

۴ در نقطهٔ E بردار سرعت در جهت ↑ و در نقطهٔ I در جهت ↓ است. پس در این دو نقطه بردارهای سرعت برابر نیستند. ✗

۱۳۶. گزینه ۴ یک تست کنکور قدیمی اما خوب و مفهومی! بیایید گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی کنیم:

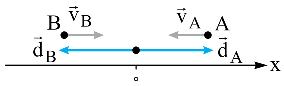
۱ و ۲ : تندی متوسط یعنی مسافت کل تقسیم بر زمان کل که ربطی به جزئیات حرکت ندارد. در واقع تندی متوسط هیچ اطلاعاتی در مورد نحوهٔ حرکت و توقف‌کردن یا توقف‌نکردن نمی‌دهد. شاید اتومبیل برای مدتی در بین مسیر توقف کرده باشد یا حتی به عقب برگشته باشد، یا با تندی بیش از ۶۰ km/h و کم‌تر از آن حرکت کرده باشد. ✗

۳ برای آن‌که فاصلهٔ دو شهر را بدانیم باید زمان حرکت را هم داشته باشیم. به عنوان مثال نقض اگر مسافت بین دو شهر ۱۲۰ km باشد و مدت‌زمان حرکت ۲ h باشد، باز هم تندی متوسط برابر $۶۰\ km/h = \frac{۱۲۰\ km}{۲\ h} = s_{av}$ می‌شود. ✗

۱- تشخیص این‌که از چه مدت قبل از لحظهٔ تغییر جهت حرکت کُندشونده و تا چه مدت بعد از آن حرکت تندشونده است، از محدودهٔ کتاب درسی و کنکور سراسری خارج است، اما در حد کتاب درسی و معادلهٔ مکان ـ زمانِ درجهٔ دو، در تمام لحظه‌های قبل از تغییر جهت، حرکت کندشونده و در تمام لحظه‌های پس از آن حرکت تندشونده است.

۴) تندی متحرک حداقل یک بار باید $۶۰\ km/h$ باشد. فرض کنید این‌گونه نباشد؛ پس یا همواره تندی آن بیشتر از $۶۰\ km/h$ بوده است یا کم‌تر از $۶۰\ km/h$. اگر همواره تندی لحظه‌ای بیشتر از $۶۰\ km/h$ باشد، حتماً متحرک مسیر حرکت را با تندی متوسط بیشتر از $۶۰\ km/h$ طی می‌کند و اگر تندی لحظه‌ای همواره کم‌تر از $۶۰\ km/h$ باشد، حتماً متحرک مسیر حرکت را با تندی متوسط کم‌تر از $۶۰\ km/h$ طی می‌کند. ✓

۱۳۷. گزینه ۴ مطابق شکل، چه متحرک از بخش مثبت محور (نقطهٔ A)، چه بخش منفی محور (نقطهٔ B) به مبدأ مکان نزدیک شود! بردارهای مکان و جهت حرکت در خلاف جهت هم هستند. این را هم می‌دانیم که بردار سرعت همواره در جهت حرکت است. بنابراین در این‌جا بردارهای مکان و سرعت الزاماً در خلاف جهت‌هم‌اند.



نکته هرگاه متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ باشد، بردارهای مکان در خلاف جهت حرکت (و سرعت) و هرگاه متحرک در حال دورشدن از مبدأ باشد، بردارهای مکان در جهت حرکت (و سرعت) خواهد بود.

۱۳۸. گزینه ۴ **گام اول**: تندی خودرو در بازهٔ $t_۱$ و $t_۲$، $۹\ km/h$ کم شده است، پس داریم:

$$\Delta s=-۹ \xrightarrow[|v_۲|=۳۶\ km/h]{\Delta s=|v_۲|-|v_۱|} -۹=۳۶-|v_۱| \Rightarrow |v_۱|=۳۶+۹=۴۵\ km/h \Rightarrow v_۱=\pm ۴۵\ km/h$$

گام دوم: بردار تغییرات سرعت را یک بار با $v_۱=+۴۵\ km/h$ و یک بار با $v_۱=-۴۵\ km/h$ حساب می‌کنیم:

حالت اول: $\Delta v=v_۲-v_۱=-۳۶-۴۵=-۸۱\ km/h \Rightarrow \Delta\vec{v}=(-۸۱\ km/h)\vec{i}$

حالت دوم: $\Delta v=v_۲-v_۱=-۳۶-(-۴۵)=۹\ km/h \Rightarrow \Delta\vec{v}=(۹\ km/h)\vec{i}$

۱۳۹. گزینه ۳ **گام اول**: سه ثانیهٔ دوم یعنی از $t=۳\ s$ تا $t=۶\ s$؛ بنابراین:

$$v_۳=-(۳)^۳+۴(۳)^۲+۵=-۲۷+۳۶+۵=۱۴\ m/s$$

$$v_۶=-(۶)^۳+۴(۶)^۲+۵=-۲۱۶+۱۴۴+۵=-۶۷\ m/s$$

گام دوم: اختلاف تندی‌ها (اندازهٔ سرعت‌ها) را می‌خواهیم:

$$|v_۶|-|v_۳|=|-۶۷|-|۱۴|=۶۷-۱۴=۵۳\ m/s$$

۱۴۰. گزینه ۲ در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، دو اتفاق برای سرعت می‌افتد:

۱) سرعت صفر می‌شود. ۲) سرعت تغییر علامت می‌دهد.

اول ببینیم سرعت متحرک در چه لحظه‌ای صفر می‌شود:

$$v=۰ \Rightarrow ۵t-۲=۰ \Rightarrow t=\frac{۲}{۵}s=۰/۴\ s$$

چون معادلهٔ سرعت ـ زمان از نوع درجه‌اول است! واضح است که قبل و بعد از لحظهٔ صفرشدن، علامتش تغییر می‌کند؛ با این حال، برای آن‌که خیالتان راحت باشد، یک لحظه قبل از $t=۰/۴\ s$ (مثل همان $t=۰$) و یک لحظه بعد (مثل $t=۱\ s$) را در معادله قرار می‌دهیم.

$$t=۰ \Rightarrow v_۰=-۲\ m/s$$

$$t=۱\ s \Rightarrow v_۱=۵(۱)-۲=۳\ m/s$$

خب همان‌طور که در جدول تعیین علامت می‌بینید، متحرک در لحظهٔ $t=۰/۴\ s$ از حرکت در جهت منفی محور x به حرکت در جهت مثبت محور x تغییر جهت می‌دهد.

۱۴۱. گزینه ۳ در هر یک از گزینه‌ها سرعت اولیه ($v_۰$) و لحظهٔ تغییر جهت (با همان لحظهٔ صفرشدن سرعت) را بررسی می‌کنیم.

۱) $v_۰=-۵\ m/s$ است؛ پس ابتدا متحرک در جهت منفی محور x در حال حرکت است و در لحظهٔ $t=\frac{۵}{۲}s$ تغییر جهت می‌دهد: ✗

$$v=۰ \Rightarrow ۲t-۵=۰ \Rightarrow t=\frac{۵}{۲}s$$

۲) $v_۰=۴/۵\ m/s$ است. یعنی ابتدا متحرک در جهت مثبت محور x در حال حرکت است، اما لحظهٔ تغییر جهت منفی می‌شود یعنی این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد: ✗

$$v=۰ \Rightarrow ۳t+۴/۵=۰ \Rightarrow t=\frac{-۴/۵}{۳}=-۱/۵\ s\ (\text{غ‌ق‌ق})$$

۳) $v_۰=۳/۵\ m/s$ است. یعنی متحرک در ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. اگر معادلهٔ سرعت ـ زمان را برابر صفر قرار دهیم می‌بینیم که در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۲}s$ تغییر جهت می‌دهد: ✓

$$v=۰ \Rightarrow -۷t+۳/۵=۰ \Rightarrow t=\frac{-۳/۵}{-۷}=\frac{۱}{۲}s$$

۴) $v_۰=-۱۲/۵\ m/s$ است. یعنی متحرک در ابتدا در حال حرکت در جهت منفی محور x است. با صفر قراردادن معادلهٔ سرعت ـ زمان می‌فهمیم که این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد چون t منفی می‌شود: ✗

$$v=۰ \Rightarrow -۵t-۱۲/۵=۰ \Rightarrow t=\frac{۱۲/۵}{-۵}=-۲/۵\ s\ (\text{غ‌ق‌ق})$$

۱۴۲. گزینه ۲ گفتیم که هر وقت متحرک تغییر جهت بدهد برای یک لحظه سرعتش صفر می‌شود و علامت سرعتش تغییر می‌کند. پس لحظه‌های تغییر علامت سرعت، یعنی ریشه‌های معادلهٔ سرعت به ازای $v=۰$ را حساب می‌کنیم:

$$t^۲-۴t+۳=(t-۱)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۱\ s \\ t_۲=۳\ s \end{cases}$$

جدول تغییرات سرعت را می‌کشیم تا مطمئن شویم علامت سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱=۱\ s$ و $t_۲=۳\ s$ تغییر کرده است:

t (s)	۰		۱		۳		$+\infty$
v (m/s)	۳	+	۰	−	۰	+	

لحظه‌های تغییر جهت سرعت

حواستان باشد اگر ریشه‌های معادلهٔ سرعت ـ زمان مضاعف بود، دیگر تغییر جهت نداشتیم!

۱۴۳. گزینه ۴ متحرک در ریشه‌هایی از معادلهٔ سرعت ـ زمان تغییر جهت می‌دهد که قبل و بعد از آن‌ها علامت سرعت عوض شود؛ پس برای حل این سؤال باید معادلهٔ سرعت ـ زمان را تعیین علامت کنیم:

$$v=t^۳-۴t^۲+۴t=t(t^۲-۴t+۴)=t(t-۲)^۲$$

t (s)	۰		۲		$+\infty$
v	۰	+	۰	+	

همان‌طور که می‌بینید در $t=۲\ s$ با این‌که سرعت صفر می‌شود اما بعد و قبل از آن سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؛ چرا که ریشهٔ آن مضاعف است. حواستان باشد که قبل از $t=۰$ مورد بررسی قرار نمی‌گیرد چون نباید زمان را منفی در نظر بگیریم.

۱۴۴. **گزینه ۱** همیشه قبل از این‌که سرعت متحرک صفر شود، حرکت متحرک کُندشونده و بعد از آن حرکتش تندشونده است. پس باید لحظهٔ صفرشدن سرعت را حساب کنیم:

$$v = ۰ \Rightarrow -۲t + ۷ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۷}{۲} = ۳/۵\,s$$

بازهٔ زمانی $۱/۵\,s$ تا $۲/۵\,s$ قبل از $t = ۳/۵\,s$ است، بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است.

(۳ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t_1 = ۳\,s$ تا $t_2 = ۶\,s$ و ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ $t_1 = ۳\,s$ تا $t_2 = ۴\,s$).

۱۴۵. **گزینه ۱** وقتی تندی برابر $۲\,m/s$ است، سرعت می‌تواند $۲\,m/s$ و یا $-۲\,m/s$ باشد. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} v = ۲\,m/s \Rightarrow ۲ = ۴t - ۵ \Rightarrow ۷ = ۴t \Rightarrow t = \frac{۷}{۴}\,s = ۱/۷۵\,s \\ v = -۲\,m/s \Rightarrow -۲ = ۴t - ۵ \Rightarrow ۳ = ۴t \Rightarrow t = \frac{۳}{۴}\,s = ۰/۷۵\,s \end{cases}$$

در گزینه‌ها $t = ۰/۷۵\,s$ به چشم می‌خورد.

۱۴۶. **گزینه ۱** **گام اول:** در این‌جا معادلهٔ سرعت خطی است، پس فقط در صورتی تندی در دو لحظه مانند $۲\,s$ و $۵\,s$ برابر می‌شود که متحرک تغییر جهت داده باشد. در این صورت جهت سرعت در لحظهٔ $۲\,s$ در خلاف جهت سرعت در لحظهٔ $۵\,s$ است. بنابراین فرض می‌کنیم در $t = ۲\,s$، سرعت $۳\,m/s$ و در $t = ۵\,s$، سرعت $-۳\,m/s$ باشد. در این صورت با قراردادن مقدارها در معادلهٔ $v = At + B$ داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} t = ۲\,s \Rightarrow ۳ = A(۲) + B \Rightarrow ۳ = ۲A + B & (I) \\ t = ۵\,s \Rightarrow -۳ = A(۵) + B \Rightarrow -۳ = ۵A + B & (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{(I)-(II)} ۶ = -۳A \Rightarrow A = -۲ \Rightarrow B = ۷ \Rightarrow v = -۲t + ۷$$

گام دوم: اندازهٔ سرعت در $t = ۷\,s$ را می‌خواهیم:

$$v = -۲(۷) + ۷ = -۱۴ + ۷ = -۷ \Rightarrow |v| = |-۷| = ۷\,m/s$$

(اگر $v_2 = -۳\,m/s$ و $v_5 = ۳\,m/s$ در نظر می‌گرفتید باز به همین جواب می‌رسیدید.)

حواستون باشه چون اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t = ۷\,s$ را خواسته و اندازهٔ سرعت هم همواره مقداری مثبت است، از همان ابتدا (۲) و (۴) رد بودند.)

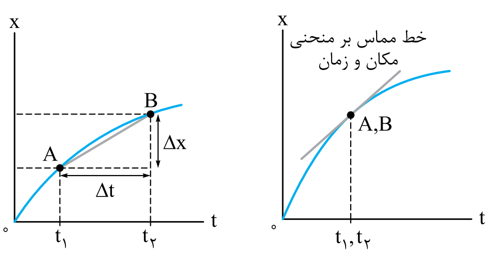
۱۴۷. **گزینه ۴** در دو حالت تندی‌ها با هم برابر می‌شوند. حالت اول این است که سرعت‌ها با هم مساوی باشند. حالت دوم هم این است که سرعت‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند:

حالت اول: $v_1 = v_2 \Rightarrow ۲t - ۳ = -t - ۶ \Rightarrow ۲t + t = ۳ - ۶ \Rightarrow ۳t = -۳ \Rightarrow t = -۱\,s$ (غ‌ق‌ق)

حالت دوم: $v_1 = -v_2 \Rightarrow ۲t - ۳ = -(-t - ۶) \Rightarrow ۲t - ۳ = t + ۶ \Rightarrow t = ۶ + ۳ \Rightarrow t = ۹\,s$

پس در لحظهٔ $t = ۹\,s$ تندی دو متحرک برابر می‌شود.

درس ششم نمایش سرعت لحظه‌ای در نمودار مکان ـ زمان



(الف) (ب)

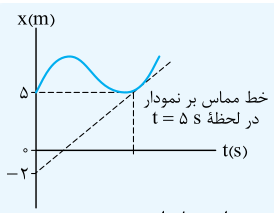
در بحث نمودار مکان ـ زمان دیدید که شیب خطی که دو نقطه از منحنی x ـ t را قطع می‌کند، برابر با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی متناظر با آن دو نقطه است. مثلاً در شکل (الف)، شیب خط AB برابر با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است؛ یعنی:

$$\text{شیب خط } AB = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

حالا اگر Δt را کوچک کنیم (یعنی t_1 و t_2 را به هم نزدیک کنیم)، نقطه‌های B و A هم به یکدیگر نزدیک می‌شوند. وقتی که t_1 و t_2 کاملاً به هم مماس شوند، Δt به لحظه تبدیل می‌شود و نقطه‌های A و B به هم می‌رسند. در این حالت امتداد AB خطی مماس بر منحنی مکان ـ زمان بوده و شیب این خط برابر با سرعت لحظه‌ای است.

سرعت لحظه‌ای = شیب خط مماس بر منحنی x ـ t

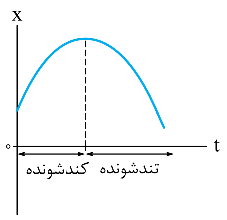
تست ۹ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت این متحرک در لحظهٔ $t = ۵\,s$ چند متر بر ثانیه است؟

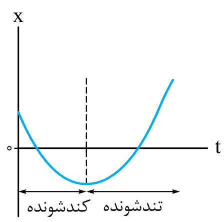


۱) ۱
۲) ۱/۴
۳) $\frac{۵}{۷}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ ۲ در نمودار مکان ـ زمان، شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظهٔ معین برابر سرعت متحرک در آن لحظه است. پس این‌جا داریم:

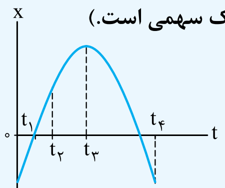
$$v_5 = (\text{شیب خط مماس در لحظهٔ } t = ۵\,s) = \frac{۵ - (-۲)}{۵ - ۰} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴\,m/s$$





می‌دانید که در یک نمودار (مانند سهمی) شیب نقطهٔ بیشینه یا کمینه صفر است و اگر از دو طرف، به این نقطه نزدیک شویم، اندازهٔ شیب کم می‌شود. پس در نمودار مکان ـ زمان اگر در حال نزدیک‌شدن به نقطهٔ اکسترمم (بیشینه یا کمینه) باشیم، اندازهٔ شیب و در نتیجه تندی کاهش می‌یابد و حرکت کُندشونده است و اگر در حال دورشدن از نقطهٔ اکسترمم باشیم، اندازهٔ شیب و در نتیجه تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است؛ به زبان ساده‌تر سمت چپ نقطهٔ اکسترمم، حرکت کُندشونده و سمت راست آن حرکت تندشونده است.[۱]

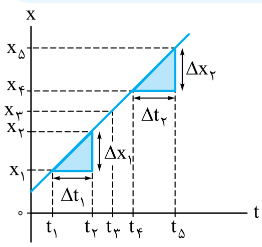
تست ؟ **در نمودار مکان ـ زمان شکل روبه‌رو، در کدام لحظه اندازهٔ سرعت متحرک بیشتر است؟ (نمودار شکل روبه‌رو یک سهمی است.)**



۱) $t_۱$
۲) $t_۲$
۳) $t_۳$
۴) $t_۴$

پاسخ ۴ گفتیم شیب نمودار مکان ـ زمان و در نتیجه در یک نمودار (مانند سهمی) شیب نقطهٔ بیشینه یا کمینه صفر است و هر چه از دو طرف، از این نقطه دور می‌شویم، شیب زیاد می‌شود؛ پس در لحظهٔ $t_۴$ اندازهٔ سرعت متحرک بیشتر از لحظه‌های دیگر است: $|v_۴| > v_۱ > v_۲ > (v_۳ = ۰)$

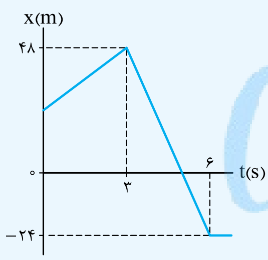
در واقع در این نمودار، حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۳$ کُندشونده و در بازهٔ زمانی $t_۳$ تا $t_۴$ تندشونده است.



اگر نمودار مکان ـ زمان متحرکی یک خط راست باشد (مثل شکل روبه‌رو)، شیب نمودار در هر لحظهٔ دلخواه (مثلاً لحظهٔ $t_۱$ یا $t_۳$) و در هر بازهٔ زمانی دلخواه (مثلاً بازهٔ $\Delta t_۱$ یا $\Delta t_۲$) یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم در این حالت سرعت در هر لحظه برابر با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است:

$$\text{شیب نمودار در هر لحظه مانند } t_۳ = \frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} \Rightarrow \boxed{v_{\text{لحظه‌ای}} = v_{av}}$$

تست ؟ **نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت این متحرک در لحظه‌ای که از مبدأ مکان عبور می کند، در SI کدام است؟**



۱) $-۱۲\vec{i}$
۲) $-۲۴\vec{i}$
۳) $۱۲\vec{i}$
۴) $۲۴\vec{i}$

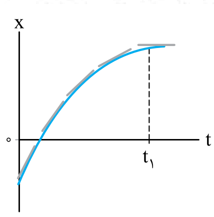
پاسخ ۲ لحظهٔ عبور از مبدأ در بازهٔ زمانی ۳ s تا ۶ s قرار دارد و چون نمودار از ۳ s تا ۶ s یک خط راست است، پس سرعت متوسط در این بازه برابر با سرعت در هر لحظه از این بازه است. بنابراین داریم (سرعت متحرک در مبدأ مکان را با v' نشان داده‌ایم):

$$v' = v_{av(۳,۶)} = \frac{x_۶ - x_۳}{۶ - ۳} = \frac{-۲۴ - ۴۸}{۶ - ۳} = -۲۴ \text{ m/s}$$

این متحرک بر روی محور x حرکت می‌کند، پس داریم:

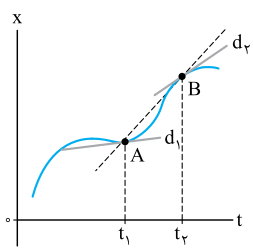
$$\vec{v}' = -۲۴\vec{i}$$

۱۴۸. گزینه ۱ مطابق شکل شیب خط مماس بر نمودار با گذشت زمان در حال کاهش است؛ بنابراین تندی یا اندازهٔ سرعت هم در بازهٔ زمانی $(۰, t_۱)$ کاهش می‌یابد.

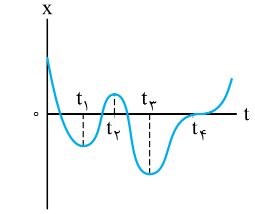


۱۴۹. گزینه ۴ **گام اول:** مطابق شکل شیب خط $d_۲$ بیشتر از خط $d_۱$ است؛ بنابراین $v_۱ < v_۲$ باید باشد.

گام دوم: شیب خط‌چین گذرنده از مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ (AB)، سرعت متوسط متحرک را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودار می‌بینید، شیب این خط از $d_۱$ و $d_۲$ بیشتر است؛ بنابراین: $v_۱ < v_۲ < v_{av}$

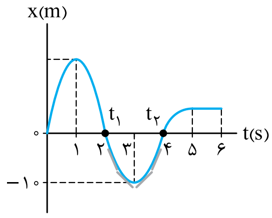


۱- در نمودارهای غیر از سهمی این‌که از چه مدت قبل از نقطهٔ اکسترمم حرکت کندشونده و چه مدت پس از آن حرکت تندشونده است، از محدودهٔ کتاب درسی و کنکور سراسری خارج است. اما اگر نمودار سهمی باشد، در تمام لحظه‌های قبل از اکسترمم حرکت کُندشونده و در تمام لحظه‌های پس از آن حرکت تندشونده است.



۱۵۰. گزینه ۲ **گام اول:** در لحظاتی که شیب خط مماس بر نمودار x - t صفر می‌شود (یعنی خط مماس بر منحنی موازی محور t می‌شود)، تندی صفر می‌شود. مطابق شکل در لحظه‌های $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$ و $t_۴$ این اتفاق رخ داده است.

گام دوم: حالا اگر این نقاط اکسترمم (کمینه یا بیشینه) هم باشند، در آن تغییر جهت داریم؛ پس غیر لحظهٔ $t_۴$، در سه لحظهٔ دیگر $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ تغییر جهت هم داریم. با این حساب، تندی متحرک ۴ بار صفر شده و متحرک ۳ بار هم تغییر جهت داده است.



۱۵۱. گزینه ۲ مطابق شکل، نمودار در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲\,s$ تا $t_۲ = ۴\,s$، زیر محور t است، پس در این بازه جهت بردار مکان در خلاف جهت محور x است؛ با توجه به اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار، تندی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

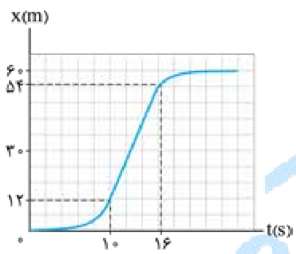
حواستون باشه شیب منفی صرفاً علامت سرعت را نشان می‌دهد؛ نه اندازهٔ آن را!!

تکنیک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ نمودار کمینه است و شیب صفر است. پس در لحظهٔ $t = ۳\,s$ سرعت صفر است. یعنی قبل از آن حرکت کندشونده و بعد از آن حرکت تندشونده است.

۱۵۲. گزینه ۳ برای محاسبهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$، باید شیب خط مماس در این لحظه را حساب کنیم:

$$v_۴ = \text{شیب خط مماس} = \frac{۶-۰}{۴-۱} = ۲\,m/s \Rightarrow \vec{v}_۴ = ۲\vec{i}$$

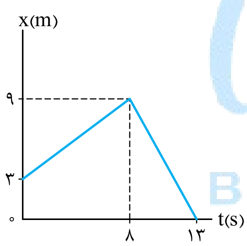
تکنیک شیب خطچین مماس بر منحنی در لحظهٔ $t = ۴\,s$ مثبت است، پس بی‌محاسبه ۲ و ۴ مرخص‌اند.



۱۵۳. گزینه ۳ در نمودار مکان ـ زمان شیب خط مماس بر نمودار برابر سرعت است و هر چه شیب بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در نمودار این سؤال بیشترین شیب مربوط به ناحیه‌ای است که متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت انجام داده است؛ یعنی از $t_۱ = ۱۰\,s$ تا $t_۲ = ۱۶\,s$.

مطابق شکل متحرک در لحظهٔ $۱۰\,s$ در مکان $x_۱ = ۱۲\,m$ و در لحظهٔ $۱۶\,s$ در مکان $x_۲ = ۵۴\,m$ قرار دارد. (توجه کنید که هر یک از اضلاع خانه‌ها در راستای قائم معادل $۶\,m$ و در راستای افقی معادل $۲\,s$ است.)

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۵۴-۱۲}{۱۶-۱۰} = \frac{۴۲}{۶} = ۷\,m/s$$



۱۵۴. گزینه ۴ **گام اول:** لحظهٔ $t = ۵\,s$ در بازهٔ زمانی ۰ تا $۸\,s$ قرار دارد. در این بازه چون نمودار یک خط راست است؛ تندی هر لحظه از این بازه برابر با اندازهٔ سرعت متوسط در این بازه است؛ بنابراین:

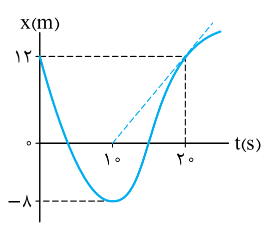
$$s_۵ = |v_{av(۰,۸)}| = \frac{x_۸ - x_۰}{۸-۰} = \frac{۹-۳}{۸} = \frac{۳}{۴}\,m/s$$

گام دوم: به طریق مشابه، لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ در بازهٔ زمانی $۸\,s$ تا $۱۳\,s$ قرار دارد. در این بازه هم، نمودار یک خط راست است! بنابراین تندی هر لحظه از این بازه با اندازهٔ سرعت متوسط در این بازه برابر است:

$$s_{۱۰} = |v_{av(۸,۱۳)}| = \frac{|x_{۱۳} - x_۸|}{۱۳-۸} = \frac{|۰-۹|}{۵} = \frac{۹}{۵}\,m/s$$

گام سوم: حالا می‌ماند نسبت $\frac{s_۵}{s_{۱۰}}$:

$$\frac{s_۵}{s_{۱۰}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۹}{۵}} = \frac{\cancel{۳}^{۱}}{۴} \times \frac{۵}{\cancel{۹}_{۳}} = \frac{۵}{۱۲}$$



۱۵۵. گزینه ۱ **گام اول:** تندی متحرک در $t = ۲۰\,s$ برابر با قدرمطلق شیب مماس بر نمودار در این نقطه است؛ پس با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:

$$\text{شیب مماس} = \frac{۱۲-۰}{۲۰-۱۰} = ۱/۲ \Rightarrow |v_{۲۰}| = ۱/۲\,m/s$$

گام دوم: برای محاسبهٔ تندی متوسط در ۲۰ ثانیهٔ اول باید جابه‌جایی قبل و بعد از تغییر جهت را جمع کنیم و بر زمان تقسیم کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{|\Delta x_۱| + |\Delta x_۲|}{\Delta t} = \frac{|-۸-۱۲| + |۱۲-(-۸)|}{۲۰-۰} = \frac{|-۲۰|+|۲۰|}{۲۰} = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲\,m/s$$

گام سوم: حالا اختلاف تندی لحظه‌ای و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$|v_{۲۰}| - s_{av} = ۱/۲ - ۲ = -۰/۸\,m/s$$

بنابراین تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰\,s$ به اندازهٔ $۰/۸\,m/s$ از تندی متوسط در ۲۰ ثانیهٔ اول کم‌تر است.

۱۵۶. گزینه ۳ **گام اول:** تندی در لحظهٔ $t = ۱\,s$ برابر با اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است:

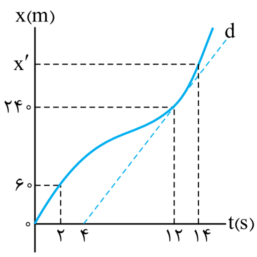
$$\text{شیب مماس} = |v_۱| = \left|\frac{۱۵-۲۰}{۱-۰}\right| = \left|\frac{-۵}{۱}\right| = ۵\,m/s$$

گام دوم: با توجه به نمودار، مسافت طی‌شده را تعیین می‌کنیم:

$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = |۱۷-۱۵| + |-۱۱-۱۷| = ۲ + ۲۸ = ۳۰\,m$$

گام سوم: طبق فرض سؤال، تندی متوسط در بازهٔ صفر تا t' برابر با تندی در لحظهٔ $t = ۱\,s$ است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow ۵ = \frac{۳۰}{t'-۰} \Rightarrow t' = \frac{۳۰}{۵} = ۶\,s$$



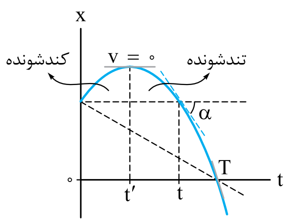
۱۵۷. گزینه «۱» **گام اول:** با توجه به برابری تندی لحظهٔ $t = 12\,s$ با تندی متوسط در بازهٔ $t_1 = 2\,s$ تا $t_2 = 14\,s$، مکان متحرک در $t = 14\,s$ (x') را حساب می‌کنیم؛ برای این کار از شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = 12\,s\,(d)$ استفاده می‌کنیم:

$$s_{12} = s_{av(2,14)} \Rightarrow \overset{30}{\frac{240}{\underbrace{12-4}_{8}}} = \frac{x'-60}{\underbrace{14-2}_{12}}$$

$$\Rightarrow 360 = x'-60 \Rightarrow x' = 420\,m$$

گام دوم: حالا نسبت سرعت متوسط ۲ ثانیهٔ اول $(v_{av(0,2)})$ به سرعت متوسط ۲ ثانیهٔ هفتم $(v_{av(12,14)})$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av(0,2)}}{v_{av(12,14)}} = \frac{\frac{60-0}{2}}{\frac{420-240}{2}} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$



۱۵۸. گزینه «۳» با توجه به شکل، به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) در نمودار مکان ـ زمان قبل از رسیدن متحرک به نقطهٔ اکسترمم (t') حرکت کُندشونده و بعد از آن تندشونده است. ✗

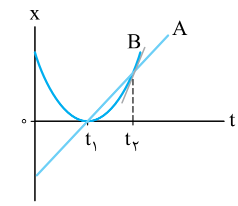
ب) در لحظهٔ t، شیب خط مماس منفی است؛ پس بردار سرعت در خلاف جهت محور x است، از طرفی چون نمودار بالای محور t است، بردار مکان در جهت محور x است؛ بنابراین در این لحظه بردار سرعت و بردار مکان در خلاف جهت یکدیگر هستند. ✓

پ) هم شیب خط در بازهٔ صفر تا $T\,(0,T)$ و هم شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان (T) منفی است؛ پس سرعت متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان با سرعت متوسط آن در بازهٔ صفر تا T هم‌جهت است. ✓

حواستون باشه حرکت متحرک روی یک خط راست (محور x) است؛ پس جهت سرعت یا در جهت محور x است! یا خلاف جهت آن! امیدواریم نمودار x ـ t را با مسیر حرکت اشتباه نگرفته باشید!

ت) شیب خط مماس بر نمودار از لحظهٔ ۰ تا t'، مثبت و بعد از آن منفی است! بنابراین سرعت متحرک از لحظهٔ ۰ تا t' (نه t) در جهت محور x و بعد از آن در خلاف جهت محور x است. ✗

پس در مجموع ۲ عبارت درست بود.



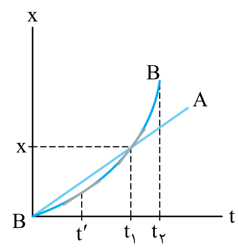
۱۵۹. گزینه «۲» با توجه به شکل روبه‌رو، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) نمودار متحرک A یک خط راست است! پس شیب و سرعت آن ثابت است. ✓

۲) نمودار متحرک B همواره بالای محور t است؛ پس بردار مکان آن همواره در جهت محور x است. ✗

۳) در بازهٔ زمانی $(0,t_1)$ متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ در این بازه نمودار متحرک A زیر محور t است! پس در این مدت بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است. ✓

۴) دو متحرک یک بار در لحظهٔ t_1 و بار دوم در لحظهٔ t_2 به هم می‌رسند. اگر به خط مماس بر نمودار B در لحظهٔ t_2 (لحظه‌ای که دو متحرک برای بار دوم به هم می‌رسند) نگاه کنید، می‌بینید که از نمودار A که یک خط راست است، شیب بیشتری دارد؛ پس از آن‌جا که سرعت متحرک A ثابت است، سرعت متحرک B در این لحظه از سرعت متحرک A در مبدأ زمان بیشتر است. ✓



۱۶۰. گزینه «۳» با توجه به شکل، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

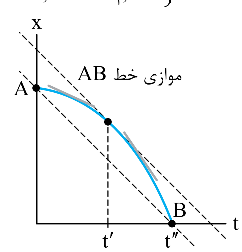
۱) دو متحرک در لحظهٔ t_1 به هم می‌رسند که در این نقطه شیب نمودار مکان ـ زمان متحرک B بیشتر است؛ بنابراین سرعت B بیشتر است. ✗

۲) چون در بازهٔ $(0,t_1)$ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است، سرعت متوسط آن‌ها با هم برابر است. به بیان ریاضی: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x-0}{t_1-0} = \frac{x}{t_1}$ ✗

۳) در لحظهٔ t' مماس بر نمودار متحرک B با نمودار A موازی می‌شود و شیب این دو نمودار برابر می‌شود. از آن‌جا که شیب نمودار x ـ t همان سرعت لحظه‌ای است، در این لحظه سرعت دو متحرک برابر می‌شود. ✓

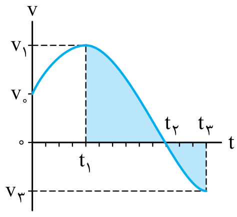
۴) چون متحرک B در بازهٔ t_1 تا t_2 تغییر جهت ندارد، تندی متوسط B از t_1 تا t_2 برابر اندازهٔ سرعت متوسط B در این بازه است. با توجه به نمودار در این بازه جابه‌جایی متحرک B از جابه‌جایی متحرک A بیشتر است و در نتیجه سرعت متوسطش در این بازه، از سرعت متوسط A بیشتر است. از طرفی نمودار مکان ـ زمان متحرک A یک خط راست است و سرعت متوسط آن در هر بازهٔ زمانی با سرعت لحظه‌ای در هر لحظه برابر است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} s_{av,B} = |v_{av,B}| \\ v_{av,B} > v_{av,A} \\ v_{av,A} = v_{t_1,A} \end{array}\right\} \Rightarrow s_{av,B} > v_{t_1,A} \text{ ✗}$$



۱۶۱. گزینه «۳» سرعت در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر نمودار x ـ t در همان لحظه است. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار از صفر تا t'' در حال افزایش است. از طرفی اندازهٔ شیب خط واصل بین دو نقطهٔ A و B بیانگر اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ $(0,t'')$ است. بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار قبل از لحظهٔ t' کم‌تر از اندازهٔ شیب خط AB و بعد از آن بیشتر از اندازهٔ شیب خط AB است. پس می‌فهمیم که سرعت لحظه‌ای **ابتدا کم‌تر** از سرعت متوسط بوده است، در لحظهٔ t' با آن مساوی شده و پس از t' سرعت لحظه‌ای **بیشتر** از سرعت متوسط می‌شود.

درس هفتم نمودار سرعت ـ زمان



نمودار (۱)

می‌توانیم سرعت یک متحرک را که بر مسیر خط راست حرکت می‌کند، در هر لحظه با نمودار سرعت ـ زمان نشان دهیم. مثلاً شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند و سرعت متحرک در لحظه‌های $t_0 = 0$ ، t_1 ، t_2 و t_3 به ترتیب برابر $v_0, v_1, v_2 = 0$ و v_3 است.

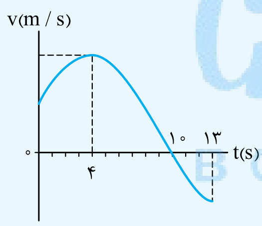
آن‌چه از نمودار سرعت ـ زمان می‌توانیم بفهمیم

• **۱. جهت حرکت متحرک در هر لحظه از زمان** • علامت سرعت بالای محور t، مثبت و پایین محور t، منفی است، یعنی در لحظه‌هایی که نمودار بالای محور t است، متحرک در جهت مثبت محور و در لحظه‌هایی که نمودار پایین محور t است، متحرک در جهت منفی محور حرکت کرده است. مثلاً در نمودار (۱) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 متحرک در جهت مثبت محور و در بازهٔ زمانی t_2 به بعد متحرک در جهت منفی محور حرکت کرده است.

• **۲. لحظه‌های تغییر جهت متحرک** • در لحظه‌هایی که نمودار سرعت ـ زمان محور t را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت داده است. مثلاً در نمودار (۱) متحرک در لحظهٔ t_2 تغییر جهت داده است.

• **۳. تندشونده، کندشونده و یکنواخت‌بودن حرکت** • هر وقت نمودار سرعت ـ زمان به **محور t نزدیک** شود، حرکت **کندشونده** است (زیرا تندی در حال کم‌شدن است.) و هر وقت نمودار در حال دورشدن از محور t باشد، حرکت **تندشونده** است. (چون تندی در حال افزایش است.) مثلاً در نمودار (۱) در بازه‌های صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 نمودار در حال **دورشدن از محور t** است، پس حرکت در این بازه‌های زمانی **تندشونده** است ولی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 نمودار در حال **نزدیک‌شدن به محور t** است و حرکت در این بازهٔ زمانی **کندشونده** است.

حواستون باشه | *در بازهٔ زمانی که نمودار سرعت ـ زمان موازی محور t باشه، تندی متحرک ثابت می‌مونه و حرکت یکنواخته.*



تست | **شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. این متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد و در مدتی که در جهت محور x حرکت می‌کند، نوع حرکتش کدام است؟**

۱) $t = 4\,s$ ، همواره کندشونده

۲) $t = 4\,s$ ، ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

۳) $t = 10\,s$ ، همواره کندشونده

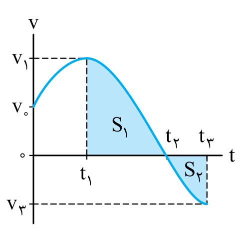
۴) $t = 10\,s$ ، ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

پاسخ | ۴ ۱) نمودار سرعت ـ زمان در لحظهٔ $t = 10\,s$ محور t را قطع کرده است. ⟵ متحرک در لحظهٔ $t = 10\,s$ تغییر جهت می‌دهد.

۲) نمودار در بازهٔ زمانی ۰ تا $10\,s$ بالای محور t است. ⟵ سرعت متحرک در بازهٔ $(0, 10\,s)$ مثبت است و در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

۳) نمودار در بازهٔ ۰ تا $4\,s$ از محور t دور شده و در بازهٔ $4\,s$ تا $10\,s$ به محور t نزدیک شده است، پس حرکتش در بازهٔ ۰ تا $10\,s$ ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.

• **۴. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده** •



نمودار (۲)

الف) محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی: شاید مهم‌ترین نکتهٔ نمودارهای سرعت ـ زمان این باشد که **مساحت محصور بین نمودار و محور t** برابر **مقدار جابه‌جایی** جسم است. مثلاً در نمودار (۲) مساحت S_1 برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 و مساحت S_2 برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 است.

ب) تشخیص جهت جابه‌جایی و محاسبهٔ مسافت پیموده‌شده: اگر مساحت محصور بین نمودار و محور t، بالای محور t باشد (مانند S_1) جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور و اگر این مساحت زیر محور t باشد (مانند S_2)، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی محور است. بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازه‌های t_1 تا t_2 و هم‌چنین t_2 تا t_3 برابر می‌شود با:

$$\Delta x_{1,2} = S_1 \qquad \Delta x_{2,3} = -S_2$$

اما می‌دانید که مسافت ربطی به جهت حرکت ندارد پس مسافت طی‌شده در بازه‌های t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 برابر است با:

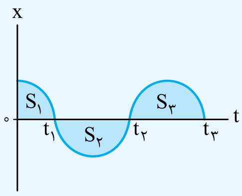
$$l_{1,2} = S_1$$
$$l_{2,3} = S_2$$

پ) محاسبهٔ جابه‌جایی کل و مسافت پیموده‌شده: جابه‌جایی کل برابر مجموع جابه‌جایی‌ها و مسافت کل برابر مجموع مسافت‌ها است. اما برای محاسبهٔ جابه‌جایی کل و مسافت کل پیموده‌شده باید حواسمان به علامت‌ها باشد. مثلاً در نمودار (۲) جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 برابر است با:

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی در بازهٔ } t_1 \text{ تا } t_3: \Delta x_{1,3} = \Delta x_{1,2} + \Delta x_{2,3} = S_1 + (-S_2) = S_1 - S_2 \\ \text{مسافت در بازهٔ } t_1 \text{ تا } t_3: l_{1,3} = l_{1,2} + l_{2,3} = S_1 + S_2 \end{cases}$$

نکته پس از محاسبهٔ جابه‌جایی (Δx) و مسافت پیموده شده (l) در یک بازهٔ معین، می‌توانیم به کمک رابطه‌های $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$، سرعت متوسط و تندی متوسط در آن بازهٔ زمانی را هم حساب کنیم.

تست شکل زیر نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر روی یک خط راست حرکت می‌کند. اگر $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ مساحت محصور بین نمودار و محور t بوده و $S_۲=S_۳=۲S_۱$ باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۳$ تندی متوسط چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط است؟



۱) ۵
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

پاسخ ۱ **گام اول**: برای محاسبهٔ سرعت متوسط باید جابه‌جایی کلی را حساب کنیم. حواسمان باشد که $S_۱$ و $S_۳$ بالای محور t و $S_۲$ زیر محور t است. پس داریم:

$$\Delta x_{(۰,t_۳)}=\Delta x_{(۰,t_۱)}+\Delta x_{(t_۱,t_۲)}+\Delta x_{(t_۲,t_۳)}\xrightarrow{\Delta x_{(۰,t_۱)}=S_۱,\Delta x_{(t_۱,t_۲)}=-S_۲,\Delta x_{(t_۲,t_۳)}=S_۳}\Delta x_{(۰,t_۳)}=S_۱-S_۲+S_۳\xrightarrow{S_۲=S_۳}\Delta x_{(۰,t_۳)}=S_۱$$

(همین‌جوری هم با نگاه به نمودار می‌تونیم بگیم چون $S_۲$ و $S_۳$ با هم برابرند و یکی بالا و یکی پایین محور tاند، جابه‌جایی دوتایی‌شون با هم صفر می‌شه و فقط $S_۱$ می‌مونه.)

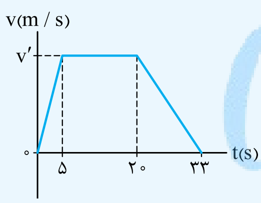
گام دوم: برای محاسبهٔ مسافت کل باید مساحت‌ها رو با هم جمع کنیم:

$$l_{(۰,t_۳)}=l_{(۰,t_۱)}+l_{(t_۱,t_۲)}+l_{(t_۲,t_۳)}=S_۱+S_۲+S_۳\xrightarrow{S_۲=S_۳=۲S_۱}l_{(۰,t_۳)}=S_۱+۲S_۱+۲S_۱=۵S_۱$$

گام سوم: حالا نسبت تندی متوسط به اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۳$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{s_{av(۰,t_۳)}}{v_{av(۰,t_۳)}}=\frac{\frac{l_{(۰,t_۳)}}{\cancel{t_۳-۰}}}{\frac{\Delta x_{(۰,t_۳)}}{\cancel{t_۳-۰}}}=\frac{۵S_۱}{S_۱}=۵$$

تست نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر اندازهٔ سرعت متوسط آن در مدت ۳۳ s برابر ۸ m/s باشد، بیشترین مقدار سرعت آن در طول مسیر چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۸
۲) ۱۱
۳) ۱۵
۴) ۲۲

پاسخ ۲ **گام اول**: از فرمول $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، جابه‌جایی جسم را در مدت ۳۳ s حساب می‌کنیم:

$$۸=\frac{\Delta x}{۳۳}\Rightarrow \Delta x=۳۳\times۸\ m$$

یعنی مساحت زیر نمودار برابر این مقدار است.

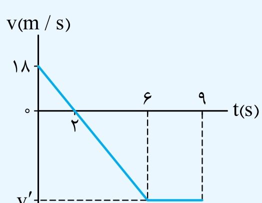
گام دوم: نمودار به شکل یک ذوزنقه است، پس داریم:

$$S=\frac{\text{قاعدهٔ بزرگ + قاعدهٔ کوچک}}{۲}\times\text{ارتفاع}\Rightarrow ۳۳\times۸=\frac{(۲۰-۵)+۳۳}{۲}\times v'\Rightarrow v'=\frac{۲\times۸\times۳۳}{۴۸}=۱۱\ m/s$$

v' بیشترین سرعت در طول مسیر است.

گاهی برای محاسبهٔ مسافت، باید از تکنیک‌های ریاضی مثل تشابه دو مثلث کمک بگیریم. تست زیر رو ببینید:

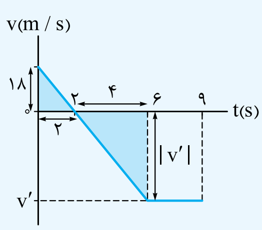
تست نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در بازهٔ (۰,۹ s) به ترتیب از راست به چپ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲۲، −۱۸
۲) ۱۸، −۱۸
۳) ۲۲، −۲۲
۴) ۱۸، −۲۲

پاسخ ۱ **گام اول**: در شکل (الف) به کمک تشابه دو مثلث (رنگ‌شده)، v' را حساب می‌کنیم:

$$\frac{|v'|}{۱۸}=\frac{۴}{۲}\Rightarrow |v'|=۳۶\Rightarrow v'=-۳۶\ m/s$$



(الف)

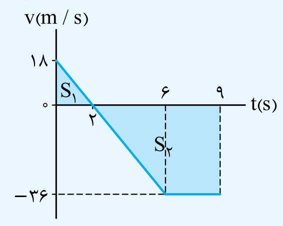
گام دوم: مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را در شکل (ب) حساب می‌کنیم:

$$S_۲ = \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(۹-۶)+(۹-۲)}{۲}\times ۳۶ = ۱۸۰ \qquad S_۱ = \text{مساحت مثلث} = \frac{۱۸\times ۲}{۲} = ۱۸$$

گام سوم: اول جابه‌جایی و سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_{کل} = S_۱ - S_۲ = ۱۸ - ۱۸۰ = -۱۶۲\ m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t} = \frac{-۱۶۲}{۹-۰} = -۱۸\ m/s$$



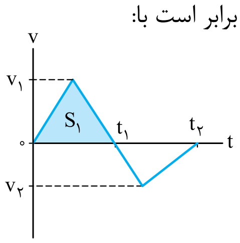
(ب)

گام چهارم: حالا مسافت و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l_{کل}}{\Delta t} = \frac{۱۹۸}{۹-۰} = ۲۲\ m/s \qquad l_{کل} = S_۱ + S_۲ = ۱۸ + ۱۸۰ = ۱۹۸\ m$$

• **حالت خاص برای محاسبهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط** • اگر بخشی از نمودار که یک طرف محور t قرار دارد، به شکل مثلث باشد، سرعت متوسط در آن بازه برابر نصف سرعت بیشینه‌اش است. مثلاً در شکل زیر در بازهٔ صفر تا $t_۱$ یا $t_۱$ تا $t_۲$ سرعت متوسط برابر است با:

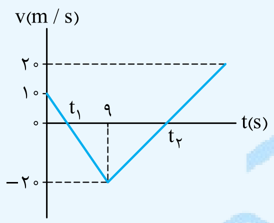
$$v_{av(۰,t_۱)} = \frac{v_۱}{۲} \quad , \quad v_{av(t_۱,t_۲)} = \frac{v_۲}{۲}$$



اثبات:

$$v_{av(۰,t_۱)} = \frac{S_۱}{t_۱ - ۰} = \frac{\frac{v_۱\times t_۱}{۲}}{t_۱} = \frac{v_۱}{۲}$$

تست ۹ | در شکل روبه‌رو سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ چند متر بر ثانیه است؟



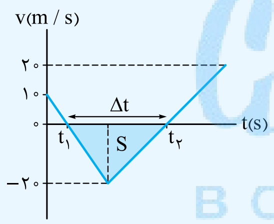
۱) $\frac{-۱۰}{۳}$

۲) -۱۰

۳) $-۱۲/۵$

۴) باید لحظهٔ $t_۲$ معلوم باشد.

پاسخ ۲ | **گام اول**: با توجه به مساحت زیر نمودار در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ جابه‌جایی متحرک در این بازه را حساب می‌کنیم:



$$S = \frac{۲۰\times \Delta t}{۲} = ۱۰\Delta t \xrightarrow{\text{مساحت زیر محور t است.}} \Delta x = -۱۰\Delta t$$

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ سرعت متوسط در بازهٔ Δt:

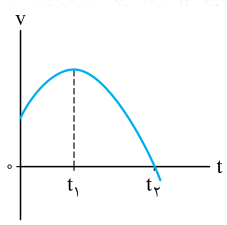
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۱۰\Delta t}{\Delta t} = -۱۰\ m/s$$

تکنیک نمودار در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به شکل مثلث و تماماً زیر محور t است. پس داریم:

$$v_{av} = \frac{-۲۰}{۲} = -۱۰\ m/s$$

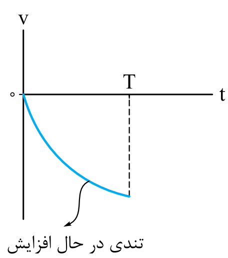
نمودار سرعت ـ زمان حرف‌های دیگه‌ای هم برای گفتن داره که توی مفهوم شتاب می‌گیم.

۱۶۲. گزینه ۳ | ۱) هنگامی که نمودار محور t را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ همان‌طور که در شکل پیداست، این اتفاق در لحظهٔ $t_۲$ می‌افتد.



۲) در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار سرعت ـ زمان بالای محور t بوده و علامت سرعت مثبت است! پس در این بازه، متحرک در جهت محور x حرکت کرده است.

۱۶۳. گزینه ۴ | مطابق شکل، نمودار زیر محور t قرار دارد و علامت سرعت منفی است و از طرف دیگر در حال دورشدن از محور t است، پس اندازهٔ سرعت ($|v|$) هم در حال افزایش است؛ بنابراین متحرک الزاماً در **جهت** منفی محور x حرکت کرده و تندی آن در حال **افزایش** است.

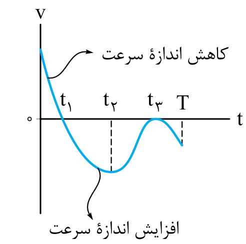


حواستون باشه | *نمودار سرعت ـ زمان رو با نمودار مکان ـ زمان قاطی نکنید.* زیر محور t بودن نمودار $v-t$ یعنی متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور x است. اما زیر محور t بودن نمودار $x-t$ یعنی متحرک در قسمت منفی محور x در حال حرکت است.

۱۶۴. گزینه ۱ | حرکت متحرکی همواره تندشونده است که نمودار سرعت ـ زمان آن در حال دورشدن از محور t باشد، یعنی اندازهٔ سرعت لحظه‌ای آن همواره در حال افزایش باشد. این ویژگی فقط در نمودار (۱) دیده می‌شود.

۱۶۵. گزینه ۱ از $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار سرعت ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور t است و اندازهٔ سرعت کم می‌شود؛ پس حرکت کندشونده است. در این بازه نمودار بالای محور t بوده و سرعت مثبت است؛ پس متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

حواستون باشه نمودار $v-t$ را با نمودار $x-t$ اشتباه نگیرید. این‌جا در بازه‌های ۰ تا $t_۱$ و $t_۲$ تا $t_۳$ حرکت تندشونده و در بازه‌های $t_۱$ تا $t_۲$ و $t_۳$ تا $t_۴$ حرکت کندشونده است.



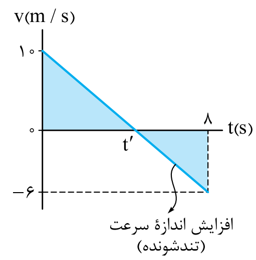
۱۶۶. گزینه ۳ با توجه به شکل، به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم.

الف) نمودار سرعت ـ زمان در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ به محور t نزدیک و در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ از محور t دور شده است. پس در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$، حرکت ابتدا کندشونده $(۰, t_۱)$ و سپس تندشونده $(t_۱, t_۲)$ است. ✗

ب) در لحظهٔ $t_۱$ چون علامت سرعت تغییر کرده، جهت حرکت تغییر می‌کند! اما در لحظهٔ $t_۳$ چون علامت سرعت تغییری نکرده، جهت حرکت تغییر نمی‌کند. ✗

پ) در مبدأ زمان نمودار سرعت ـ زمان از بالای محور t شروع شده، پس علامت سرعت مثبت است! پس سرعت متحرک در جهت محور x است. ✗

ت) در تمام بازهٔ $t_۲$ تا T نمودار زیر محور t است و علامت سرعت منفی است؛ پس جهت حرکت متحرک تغییر نکرده است. به خاطر همین، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده متحرک یکسان خواهد بود. ✓



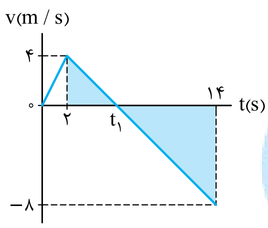
۱۶۷. گزینه ۴ ۱) مطابق شکل، جهت سرعت متحرک در لحظهٔ t' تغییر می‌کند. تغییر جهت سرعت متحرک به معنای تغییر جهت حرکت است؛ پس باید مقدار t' را حساب کنیم. مطابق شکل دو مثلث رنگی با هم متشابه‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{t'}{۸-t'}=\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}}}{\underset{۳}{|\cancel{-۶}|}} \Rightarrow ۳t'=۴۰-۵t' \Rightarrow ۸t'=۴۰ \Rightarrow t'=۵\,s$$

لحظهٔ $t'=۵\,s$ می‌شود **ابتدای ثانیهٔ ششم**! (ثانیهٔ ششم یعنی از $t=۵\,s$ تا $t=۶\,s$!)

حواستون باشه ثانیهٔ پنجم یعنی از $t=۴\,s$ تا $t=۵\,s$! پس ابتدای ثانیهٔ پنجم می‌شود $t=۴\,s$!

۲) در بازهٔ زمانی $t'=۵\,s$ تا $t=۸\,s$، نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t بوده و اندازهٔ سرعت در حال افزایش است. پس در این بازه حرکت تندشونده است. **ثانیهٔ ششم** در این بازه قرار دارد.

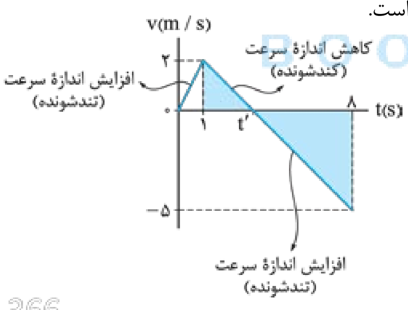


۱۶۸. گزینه ۳ **گام اول**: متحرک زمانی در سوی مخالف محور x حرکت می‌کند که سرعت آن منفی باشد؛ پس در شکل روبه‌رو از $t=t_۱$ تا $t=۱۴\,s$، متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. برای به دست آوردن $t_۱$ از تشابه دو مثلث رنگی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{t_۱-۲}{۱۴-t_۱}=\frac{۴}{|-۸|} \Rightarrow \frac{t_۱-۲}{۱۴-t_۱}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲t_۱-۴=۱۴-t_۱ \Rightarrow ۳t_۱=۱۸ \Rightarrow t_۱=۶\,s$$

گام دوم: کار تمام نشده است. مدت‌زمانی را که متحرک در سوی منفی محور x حرکت می‌کند، می‌خواهیم:

$$\Delta t=۱۴-۶=۸\,s$$



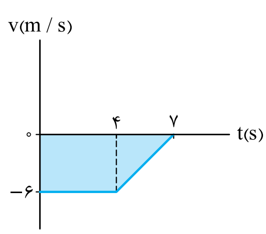
۱۶۹. گزینه ۲ می‌دانیم که وقتی نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t است، نوع حرکت تندشونده است.

این‌جا، در بازهٔ زمانی صفر تا ۱s و t' تا ۸s نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t است. پس برای حل این تست کافی است بازهٔ $\Delta t_۲=(۸-t')$ را تعیین کنیم. برای محاسبهٔ t' از تشابه دو مثلث (رنگ‌شده) کمک می‌گیریم:

$$\frac{۲}{|-۵|}=\frac{t'-۱}{۸-t'} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{t'-۱}{۸-t'} \Rightarrow ۱۶-۲t'=۵t'-۵ \Rightarrow ۲۱=۷t' \Rightarrow t'=\frac{۲۱}{۷}=۳\,s$$

$$\Delta t_۲=۸-t'=۸-۳=۵\,s$$

بنابراین حرکت متحرک ۱s (در بازهٔ صفر تا ۱s) و ۵s (در بازهٔ ۳s تا ۸s) تندشونده بوده است. یعنی مجموعاً $۵+۱=۶\,s$ حرکتش تندشونده بوده است.

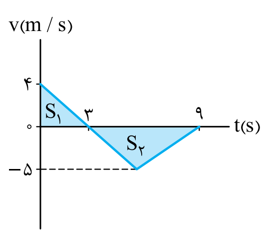


۱۷۰. گزینه ۴ چون علامت سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی همواره منفی است؛ یعنی تغییر جهتی نداشته است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده یکسان است. (تا همین‌جا ۲ و ۳ رد شدند!)

حالا برای محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی، مساحت زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

$$\ell=|\Delta x|=S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۴+۷}{۲}\times ۶=۳۳\,m$$

$$\xrightarrow{v<۰}\Delta x<۰ \Rightarrow \Delta\vec{x}=(-۳۳\vec{i})m$$



۱۷۱. گزینه ۴ **گام اول**: ابتدا مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$S_۱=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

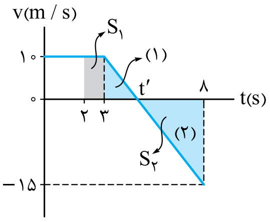
$$S_۲=\frac{(۹-۳)\times ۵}{۲}=۱۵$$

گام دوم: مسافت طی‌شده کاری به علامت سرعت ندارد؛ برای همین برابر $S_۱+S_۲$ است:

$$\ell=S_۱+S_۲=۶+۱۵=۲۱\,m$$

گام سوم: حالا چون $S_۱$ بالای محور t $(v>۰)$ و $S_۲$ پایین محور t $(v<۰)$ است، جابه‌جایی برابر $S_۱-S_۲$ می‌شود؛ یعنی:

$$\Delta x=S_۱-S_۲=۶-۱۵=-۹\,m \Rightarrow \Delta\vec{x}=(-۹\vec{i})\,m$$



۱۷۲. گزینه ۲ **گام اول:** ابتدا به کمک تشابه دو مثلث (۱) و (۲)، t' را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۸-t'}{t'-۳}=\frac{|\cancelto{۳}{-۱۵}|}{\cancelto{۲}{۱۰}} \Rightarrow ۱۶-۲t'=۳t'-۹ \Rightarrow ۵t'=۲۵ \Rightarrow t'=۵\,s$$

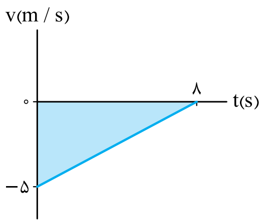
گام دوم: حالا مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را در بازهٔ زمانی $(۲\,s , ۸\,s)$ به دست می‌آوریم:

$$S_۱=\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{(۵-۲)+(۳-۲)}{۲}\times ۱۰=۲۰ \qquad S_۲=\text{مساحت مثلث}=\frac{(۸-۵)\times ۱۵}{۲}=۲۲/۵$$

گام سوم: $S_۱$ بالای محور t و $S_۲$ پایین محور t قرار دارد؛ بنابراین جابه‌جایی متحرک برابر است با:

$$\Delta x=S_۱-S_۲=۲۰-۲۲/۵=-۲/۵ \Rightarrow \Delta\vec{x}=(-۲/۵\vec{i})\,m$$

حواستون باشه اگر جابه‌جایی را در بازهٔ زمانی $(۰, ۸\,s)$ حساب می‌کردید، به ۴ می‌رسیدید! پس همیشه سؤال را با دقت بخوانید!



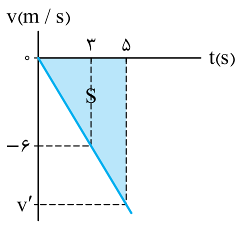
۱۷۳. گزینه ۴ بردار مکان در مبدأ زمان را داریم و بردار مکان در لحظهٔ $t=۸\,s$ را می‌خواهیم. پس لازم است بردار جابه‌جایی را در بازهٔ $(۰ , ۸\,s)$ به دست آوریم.

برای این کار از مساحت زیر نمودار استفاده می‌کنیم. در این‌جا چون نمودار سرعت ـ زمان زیر محور t است، علامت سرعت و در نتیجه جابه‌جایی منفی است:

$$\Delta x=-S=-\frac{(۵\times ۸)}{۲}=-۲۰\,m \Rightarrow \Delta\vec{x}=(-۲۰\vec{i})\,m$$

عجله نکنید! بردار مکان در لحظهٔ $t=۸\,s$ را می‌خواهیم:

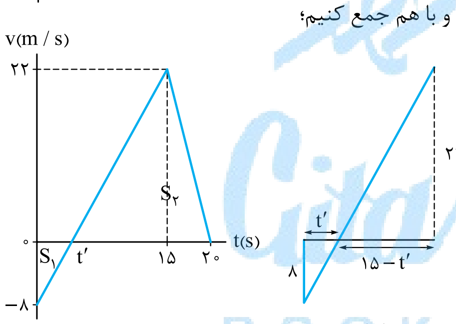
$$\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}_۰ \Rightarrow \vec{x}=\vec{x}_۰+\Delta\vec{x}=-۵\vec{i}-۲۰\vec{i}=(-۲۵\vec{i})\,m$$



۱۷۴. گزینه ۳ در نمودار روبه‌رو، مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول برابر با مساحت زیر نمودار در این بازهٔ زمانی (S) است. پس ابتدا باید به کمک تشابه اندازهٔ v' را پیدا کنیم و بعد مساحت S را محاسبه کنیم:

$$\frac{|v'|}{۶}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow |v'|=۱۰\,m/s$$

$$\ell_{(۰,۵)}=S=\frac{۵\times ۱۰}{۲}=۲۵\,m$$



(الف) (ب)

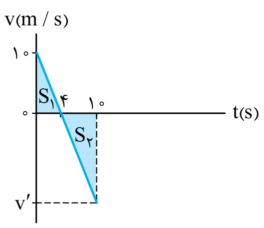
۱۷۵. گزینه ۴ **گام اول:** برای محاسبهٔ مسافت، باید مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را در شکل (الف) حساب کرده و با هم جمع کنیم؛ پس در قدم اول باید لحظهٔ t' را پیدا کنیم. با توجه به تشابه دو مثلث در شکل (ب) داریم:

$$\frac{۱۵-t'}{t'}=\frac{\cancelto{۱۱}{۲۲}}{|\cancelto{۴}{-۸}|} \Rightarrow ۱۱t'=۶۰-۴t' \Rightarrow t'=\frac{۶۰}{۱۵}=۴\,s$$

گام دوم: حالا به راحتی می‌توانیم مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را به دست آوریم:

$$S_۱=\frac{۸\times t'}{۲}=\frac{۸\times ۴}{۲}=۱۶ \quad , \quad S_۲=\frac{۲۲\times(۲۰-t')}{۲}=\frac{۲۲\times(۲۰-۴)}{۲}=۱۷۶$$

$$\ell=S_۱+S_۲=۱۶+۱۷۶=۱۹۲\,m$$



۱۷۶. گزینه ۲ **گام اول:** ابتدا به کمک تشابه دو مثلث رنگی، مقدار v' را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱۰}{|v'|}=\frac{\cancelto{۲}{۴}}{\underbrace{(۱۰-۴)}_{\cancelto{۳}{۶}}} \Rightarrow ۲|v'|=۳۰ \Rightarrow |v'|=۱۵ \Rightarrow v'=-۱۵\,m/s$$

گام دوم: حالا مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$S_۱=\frac{۴\times ۱۰}{۲}=۲۰ \qquad S_۲=\frac{(۱۰-۴)\times ۱۵}{۲}=۴۵$$

تکنیک برای محاسبهٔ مساحت مثلث $S_۲$ می‌توانید از نسبت مساحت مثلث‌های متشابه هم استفاده کنید. (بازهٔ صفر تا ۴ s را $\Delta t_۱$ و بازهٔ ۴ s تا ۱۰ s را $\Delta t_۲$ نامیده‌ایم.

$$\frac{S_۲}{S_۱}=\left(\frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_۲}{\frac{۴\times ۱۰}{۲}}=\left(\frac{۱۰-۴}{۴-۰}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_۲}{۲۰}=\frac{۹}{۴} \Rightarrow S_۲=۴۵$$

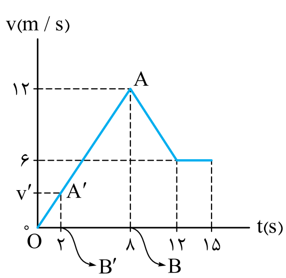
گام سوم: $S_۱$ بالای محور t و $S_۲$ پایین محور t قرار دارد. پس جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x=S_۱-S_۲=۲۰-۴۵=-۲۵\,m$$

گام چهارم: با توجه به مکان اولیهٔ متحرک و داشتن جابه‌جایی در ۱۰ ثانیهٔ اول، مکان متحرک در لحظهٔ $t=۱۰\,s$ دست می‌آید.

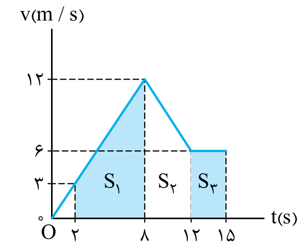
$$x_{۱۰}=x_۰+\Delta x=۲-۲۵=-۲۳\,m$$

یعنی در لحظهٔ $t=۱۰\,s$ متحرک در ۲۳متری قسمت منفی محور x (سمت چپ مبدأ) قرار دارد.



۱۷۷. گزینه ۱ **گام اول:** ابتدا باید اندازهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱=۲\,s$ را به دست آوریم. برای این کار مطابق شکل از تشابه دو مثلث OAB و OA'B' کمک می‌گیریم:

$$\frac{v'}{۱۲}=\frac{\cancelto{۱}{۲}}{\cancelto{۴}{۸}} \Rightarrow ۴v'=۱۲ \Rightarrow v'=۳\,m/s$$

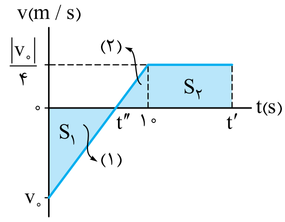


گام دوم: حالا با استفاده از مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۲\,s$ تا $t_۲=۱۵\,s$ را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{(۲,۱۵)} = S_۱+S_۲+S_۳ = \frac{\overbrace{(۳+۱۲)}^{۱۵}}{۲}\times(۸-۲)+\frac{\overbrace{(۶+۱۲)}^{۱۸}}{۲}\times\overbrace{(۱۲-۸)}^{۴}+۶\times\overbrace{(۱۵-۱۲)}^{۳} = ۴۵+۳۶+۱۸=۹۹\,m$$

گام سوم: با داشتن جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $(۲\,s,۱۵\,s)$، مکان متحرک در لحظهٔ $t=۱۵\,s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_{(۲,۱۵)} = x_۲-x_۱ \Rightarrow ۹۹\vec i = \vec x_۲-(-۶\vec i) \Rightarrow \vec x_۲ = ۹۳\vec i$$

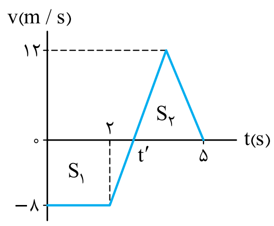


۱۷۸. گزینه ۲ **گام اول**: چون $x_\circ=\circ$ است، برای آن‌که دوباره $x=\circ$ شود، باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که جابه‌جایی از $t=\circ$ تا آن لحظه صفر شود. این لحظه را t' می‌نامیم. برای این‌که t' را به دست آوریم، اول باید لحظه‌ای را که سرعت صفر می‌شود (یعنی t'') تعیین کنیم. برای این کار از تشابه مثلث‌های (۱) و (۲) کمک می‌گیریم:

$$\frac{|v_\circ|}{\frac{|v_\circ|}{۴}} = \frac{t''}{۱۰-t''} \Rightarrow ۴=\frac{t''}{۱۰-t''} \Rightarrow ۴۰-۴t''=t'' \Rightarrow ۵t''=۴۰ \Rightarrow t''=۸\,s$$

گام دوم: حالا که t'' را محاسبه کردیم به سراغ t' می‌رویم. جابه‌جایی از صفر تا t' صفر است، یعنی:

$$-S_۱+S_۲=\circ \Rightarrow S_۱=S_۲ \Rightarrow \frac{|v_\circ|\times ۸}{\cancel{۲}} = \frac{(t'-۱۰)+(t'-۸)}{\cancel{۲}}\times\frac{|v_\circ|}{۴} \Rightarrow ۴\times۸=۲t'-۱۸ \Rightarrow ۲t'=۵۰ \Rightarrow t'=۲۵\,s$$



۱۷۹. گزینه ۴ **گام اول**: جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول صفر است، پس براساس نمودار سرعت ـ زمان شکل روبه‌رو داریم:

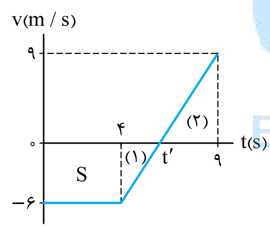
$$S_۲-S_۱=\circ \Rightarrow S_۲=S_۱ \Rightarrow \frac{\overset{۳}{\cancel{۱۲}}\times(۵-t')}{\underset{۱}{\cancel{۲}}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۸}}\times(۲+t')}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}$$

$$\Rightarrow ۳\times(۵-t')=۲\times(۲+t')$$

$$\Rightarrow ۱۵-۳t'=۴+۲t' \Rightarrow ۱۱=۵t' \Rightarrow t'=\frac{۱۱}{۵}=۲/۲\,s$$

گام دوم: مسافت برابر مجموع مساحت‌ها بدون در نظر گرفتن علامت آن‌ها است:

$$l=S_۱+S_۲ \xrightarrow{S_۱=S_۲} l=۲S_۲=۲\left(\frac{(۵-t')\times۱۲}{۲}\right) \xrightarrow{t'=۲/۲\,s} l=(\underbrace{۵-۲/۲}_{۲/۸})\times۱۲=۳۳/۶\,m$$



۱۸۰. گزینه ۳ **گام اول**: هنگامی که نمودار سرعت ـ زمان محور t را قطع می‌کند (t')، علامت سرعت تغییر کرده و متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ پس ابتدا به کمک تشابه مثلث‌های (۱) و (۲)، t' را حساب می‌کنیم:

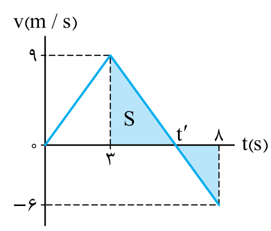
$$\frac{۹-t'}{t'-۴} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}}{\underset{۲}{|\cancel{-۶}|}} \Rightarrow ۱۸-۲t'=۳t'-۱۲ \Rightarrow ۵t'=۳۰ \Rightarrow t'=۶\,s$$

گام دوم: حالا به کمک مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی متحرک از ابتدای حرکت $(t=\circ)$ تا لحظهٔ تغییر جهت $(t'=۶\,s)$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=-S=-\frac{(۴+۶)}{۲}\times۶=-۳۰\,m$$

گام سوم: جابه‌جایی و مکان نهایی را داریم و مکان اولیهٔ جسم را می‌خواهیم:

$$\Delta x=x-x_\circ \Rightarrow -۳۰=۱۰-x_\circ \Rightarrow x_\circ=۱۰+۳۰=۴۰\,m \Rightarrow \vec x_\circ=(۴۰\vec i)\,m$$



۱۸۱. گزینه ۲ **گام اول**: می‌خواهیم بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ را حساب کنیم. با توجه به این‌که متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل از لحظهٔ $t=\circ$ تا t' متحرک در حال دورشدن از مبدأ (افزایش Δx) و بعد از آن با تغییر علامت سرعت و تغییر جهت، متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ است؛ با این حساب دورترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ t' اتفاق می‌افتد، پس باید مکان جسم در لحظهٔ t' را پیدا کنیم؛ اولین کار، محاسبهٔ t' به کمک تشابه است.

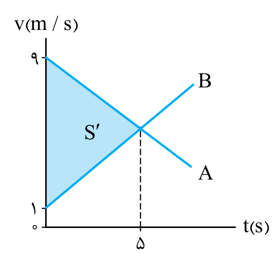
$$\frac{۸-t'}{t'-۳} = \frac{\overset{۲}{|\cancel{-۶}|}}{\underset{۳}{\cancel{۹}}} \Rightarrow ۲۴-۳t'=۲t'-۶ \Rightarrow ۵t'=۳۰ \Rightarrow t'=۶\,s$$

گام دوم: حالا که مقدار t' را می‌دانیم، مساحت زیر نمودار در بازهٔ زمانی $(\circ,t')$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=S=\frac{۹\times۶}{۲}=۲۷\,m$$

گام سوم: در ابتدا متحرک در $x=\circ$ بوده است؛ پس بیشترین فاصلهٔ آن از مبدأ ۲۷ m است؛ به زبان ریاضی:

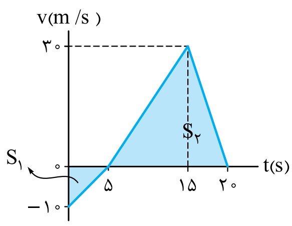
$$x_{max}=x_\circ+\Delta x=\circ+۲۷=۲۷\,m$$



۱۸۲. گزینه ۲ با توجه به شکل، سرعت دو متحرک در $t=۵\,s$ با هم برابر می‌شود. حالا ما می‌خواهیم بفهمیم که در این لحظه دو متحرک چند متر از هم فاصله دارند. این را می‌دانیم که جابه‌جایی هر متحرک از مساحت زیر نمودار به دست می‌آید؛ بنابراین اختلاف مساحت این دو متحرک، فاصلهٔ این دو متحرک را از هم نشان می‌دهد. مطابق شکل اگر مساحت زیر نمودار A، S_A و مساحت زیرنمودار B، S_B باشد، S' اختلاف جابه‌جایی دو متحرک از هم را نشان می‌دهد؛ پس:

$$\Delta x_A-\Delta x_B=S_A-S_B=S'=\frac{(۹-۱)\times۵}{۲}=۲۰\,m \xrightarrow{x_{\circ A}=x_{\circ B}} x_A-x_B=۲۰\,m$$

۱۸۳. گزینه ۳ **گام اول**: جابه‌جایی را به کمک مساحت زیر نمودار $v-t$ در شکل روبه‌رو به دست می‌آوریم.

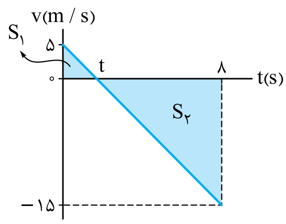


$$\Delta x = -\overbrace{S_۱}^{\text{زیر محور t}} + \underbrace{S_۲}_{\text{بالای محور t}} = -\frac{۱۰\times ۵}{۲} + \frac{۳۰\times(۲۰-۵)}{۲} \Rightarrow \Delta x = -۲۵+۲۲۵ = ۲۰۰\,m$$

گام دوم: جابه‌جایی را که داریم، زمان هم داریم؛ پس برای به دست آوردن سرعت متوسط چیزی کم نداریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰\,m/s$$

۱۸۴. گزینه ۱ **گام اول**: برای این‌که بتوانیم تندی متوسط را تعیین کنیم، اول باید مسافت طی‌شده را به دست آوریم. در نمودار $v-t$ مسافت طی‌شده برابر با مجموع مساحت‌های زیر نمودار است. با توجه به این موضوع در شکل روبه‌رو مسافت برابر $S_۱+S_۲$ می‌شود. اما برای تعیین $S_۱$ و $S_۲$ به t احتیاج داریم. برای به دست آوردن t، از تشابه مثلث‌ها کمک می‌گیریم:



$$\frac{۵}{t} = \frac{۱۵}{۸-t} \Rightarrow ۵(۸-t) = ۱۵t \Rightarrow ۴۰-۵t = ۱۵t \Rightarrow ۴۰ = ۵t+۱۵t \Rightarrow ۴۰ = ۲۰t \Rightarrow t = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲\,s$$

گام دوم: حالا که $t = ۲\,s$ شد، به راحتی می‌توانیم مسافت طی‌شده را تعیین کنیم:

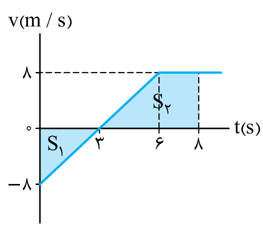
$$l = S_۱+S_۲ = \frac{۵\times ۲}{۲} + \frac{۱۵\times ۶}{۲} = ۵+۱۵\times ۳ = ۵۰\,m$$

گام سوم: با تقسیم‌کردن مسافت بر زمان طی مسافت، تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۵۰}{۸} = ۶/۲۵\,m/s$$

راستی! ۴ فیلی پرته! چون تندی هرگز منفی نمی‌شه.

۱۸۵. گزینه ۲ **گام اول**: با توجه به شکل روبه‌رو، سطح محصور بین نمودار v ـ t و محور t در بازهٔ زمانی صفر تا $۸\,s$ را به دست می‌آوریم. جابه‌جایی و مسافت طی‌شده برابر است با:



$$\Delta x = -S_۱+S_۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۸ + \frac{(۵+۲)\times ۸}{۲} \Rightarrow \Delta x = -۱۲+۲۸ = ۱۶\,m$$

$$l = S_۱+S_۲ = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۸ + \frac{(۵+۲)\times ۸}{۲} \Rightarrow l = ۱۲+۲۸ = ۴۰\,m$$

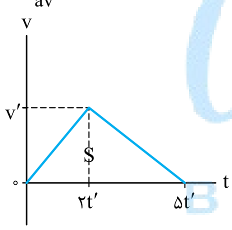
گام دوم: حالا با داشتن Δx و l می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط را محاسبه کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۶}{۸} = ۲\,m/s \quad , \quad s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۴۰}{۸} = ۵\,m/s$$

گام سوم: اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط در این $۸\,s$ به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$s_{av} - v_{av} = ۵-۲ = ۳\,m/s$$

۱۸۶. گزینه ۴ **گام اول**: جابه‌جایی را که همان مساحت زیر نمودار است به دست می‌آوریم:

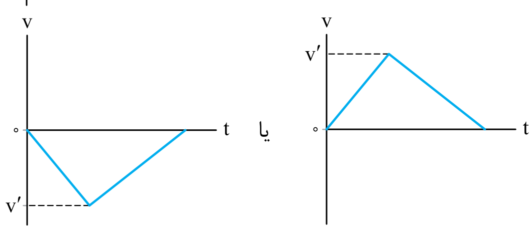


$$d = s = \frac{v'\times(۵t')}{۲} = \frac{۵}{۲}v't'$$

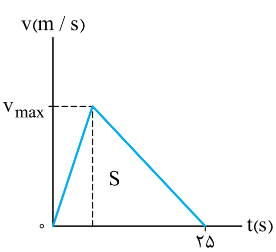
گام دوم: جابه‌جایی را تقسیم بر مدت‌زمان جابه‌جایی می‌کنیم و سرعت متوسط را تعیین می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{\frac{۵}{۲}v't'}{۵t'} = \frac{۱}{۲}v'$$

تکنیک در نمودارهای سرعت ـ زمانی مانند شکل‌های روبه‌رو که نمودار به شکل مثلث تماماً بالای محور t یا تماماً پایین محور t است، سرعت متوسط همواره برابر $\frac{v'}{۲}$ و تندی متوسط برابر $\frac{|v'|}{۲}$ است.



۱۸۷. گزینه ۱ **گام اول**: می‌دانید که جابه‌جایی متحرک برابر سطح زیر نمودار v ـ t است. پس برای نمودار روبه‌رو داریم:



$$\Delta x = S = \frac{v_{max}\times ۲۵}{۲} = \frac{۲۵}{۲}v_{max}$$

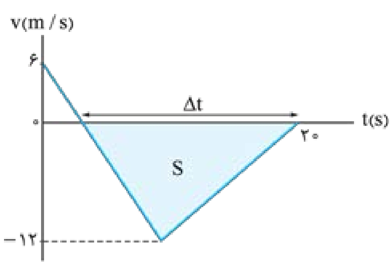
گام دوم: طبق فرمول سرعت متوسط $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۱۰ = \frac{\frac{۲۵}{۲}v_{max}}{(۲۵-۰)} \Rightarrow v_{max} = ۲۰\,m/s$$

تکنیک در نمودارهای این شکلی (مثلثی) همیشه سرعت متوسط برابر نصف سرعت بیشینه است. یعنی:

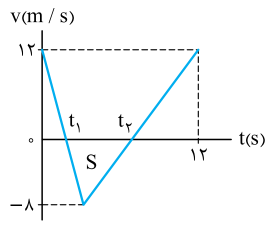
$$v_{max} = ۲v_{av} = ۲\times ۱۰ = ۲۰\,m/s$$

۱۸۸. گزینه ۲ جاهایی که $v<۰$ است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ بنابراین مطابق شکل، تندی متوسط در بازه‌ای که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده، برابر است با:



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S}{\Delta t} = \frac{\frac{۱۲\times\Delta t}{۲}}{\Delta t} = ۶\,m/s$$

تکنیک در بازهٔ زمانی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند (Δt) نمودار مثلثی و تماماً پایین محور t قرار دارد، بنابراین در این بازه تندی متوسط برابر نصف تندی بیشینه است یعنی $s_{av} = \frac{|-۱۲|}{۲} = ۶\,m/s$.



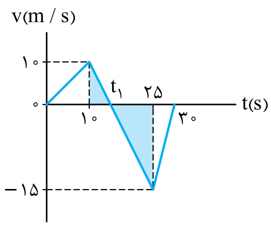
۱۸۹. (گزینه ۳) **گام اول**: مطابق شکل، متحرک در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ که علامت سرعتش تغییر می‌کند! تغییر جهت می‌دهد.
برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط، ابتدا باید جابه‌جایی بین این دو لحظه را به کمک مساحت زیر نمودار به دست آوریم:

$$|\Delta x| = S = \frac{(t_۲ - t_۱)\times ۸}{۲} = ۴(t_۲ - t_۱)$$

گام دوم: حالا با تقسیم این مقدار بر بازهٔ زمانی $(t_۱, t_۲)$، اندازهٔ سرعت متوسط حساب می‌شود:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{۴(t_۲ - t_۱)}{t_۲ - t_۱} = ۴\,m/s$$

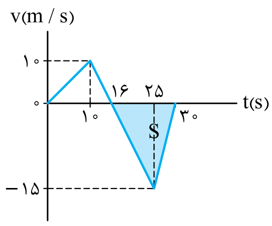
تکنیک گفتیم که در نمودارهای مثلثی، سرعت متوسط در آن بازه، نصف سرعت بیشینه است! در این‌جا هم در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار به صورت مثلث و تمام آن زیر محور t است، پس داریم: $|v_{av(t_۱, t_۲)}| = \frac{|v_{max}|}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴\,m/s$



۱۹۰. (گزینه ۱) **گام اول**: وقتی سرعت منفی است، متحرک در سوی منفی محور در حال حرکت است. پس با توجه به شکل روبه‌رو از $t = t_۱$ تا $t = ۳۰\,s$ متحرک به سمت منفی محور x در حال حرکت است. مقدار $t_۱$ را به کمک تشابه به دست می‌آوریم. دو مثلث رنگی متشابه هستند. پس:

$$\frac{۲۵ - t_۱}{t_۱ - ۱۰} = \frac{|\cancel{-۱۵}^{\,۳}|}{\cancel{۱۰}_{\,۲}} \Rightarrow ۵۰ - ۲t_۱ = ۳t_۱ - ۳۰$$

$$\Rightarrow ۵۰ + ۳۰ = ۳t_۱ + ۲t_۱ \Rightarrow ۸۰ = ۵t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۸۰}{۵} = ۱۶\,s$$



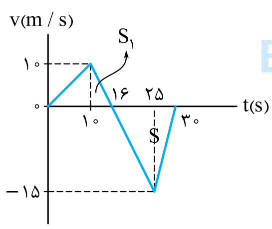
حالا سرعت متوسط از $t_۱ = ۱۶\,s$ تا $t = ۳۰\,s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار به جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی نیاز داریم که برابر با مساحت قسمت رنگی در شکل روبه‌رو است:

$$\Delta x = -S = -\frac{(۳۰ - ۱۶)\times ۱۵}{۲} = -۱۰۵\,m$$

بنابراین بزرگی سرعت متوسط در مدتی که متحرک در سوی مخالف محور x حرکت می‌کند، برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{۱۰۵}{۳۰ - ۱۶} = -۷/۵\,m/s \Rightarrow |v_{av}| = ۷/۵\,m/s$$

تکنیک در مدتی که متحرک در سوی منفی محور x جابه‌جا می‌شود، نمودار سرعت ـ زمان به شکل مثلث و تماماً زیر محور t قرار دارد. پس سرعت متوسط در این بازه برابر $\frac{v'}{۲}$ است. پس: $v_{av} = \frac{-۱۵}{۲} = -۷/۵\,m/s$



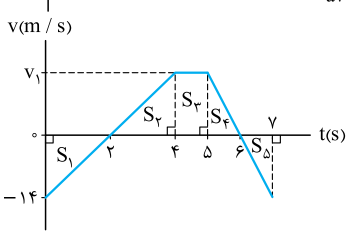
گام دوم: برای محاسبهٔ تندی متوسط در بازهٔ زمانی $(۱۰\,s, ۳۰\,s)$ به مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی احتیاج داریم که به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$l = s_۱ + s = \frac{(۱۶ - ۱۰)\times ۱۰}{۲} + \frac{(۳۰ - ۱۶)\times ۱۵}{۲} = ۳۰ + ۱۰۵ = ۱۳۵\,m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $(۱۰\,s, ۳۰\,s)$ برابر است:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۳۵}{۳۰ - ۱۰} = \frac{۱۳۵}{۲۰} \Rightarrow s_{av} = ۶/۷۵\,m/s$$

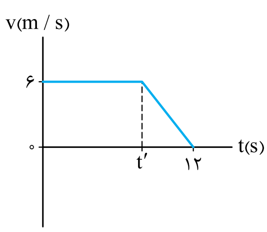
گام سوم: با داشتن v_{av} و s_{av} مقدار خواسته‌شده در تست را به دست می‌آوریم: $v_{av} - s_{av} = ۷/۵ - ۶/۷۵ = ۰/۷۵\,m/s$



۱۹۱. (گزینه ۱) **گام اول**: دو مثلث با مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ براساس قاعدهٔ دو زاویه و ضلع بین با هم برابر هستند؛ بنابراین $v_۱ = ۱۴\,m/s$ است.

گام دوم: حالا برای تعیین سرعت متوسط باید جابه‌جایی را با توجه به مساحت‌ها به دست آوریم. $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ را به راحتی می‌توانیم به دست آوریم. تنها $S_۵$ می‌ماند. همان‌طور که در نمودار روبه‌رو می‌بینید، با توجه به قاعدهٔ دو زاویه و ضلع بین، دو مثلث با مساحت $S_۴$ و $S_۵$ با هم برابر هستند؛ پس $S_۴ = S_۵$ است؛ بنابراین، سرعت متوسط به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta x = \underbrace{-S_۱ + S_۲}_{۰} + S_۳ + \underbrace{S_۴ - S_۵}_{۰} \Rightarrow \Delta x = S_۳ = ۱۴\times ۱ = ۱۴\,m \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۴}{۷} = ۲\,m/s$$

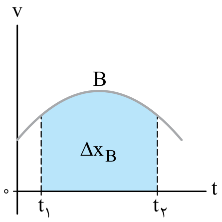


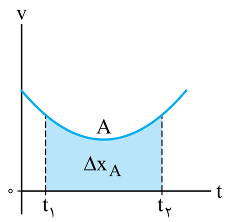
۱۹۲. (گزینه ۱) **گام اول**: مطابق شکل از لحظهٔ t' تا $t = ۱۲\,s$ نمودار سرعت ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور t است؛ پس در این بازه حرکت کندشونده است. برای محاسبهٔ جابه‌جایی در این بازه، t' را باید به دست آوریم؛ برای این کار از مساحت زیر نمودار و رابطهٔ تندی متوسط کمک می‌گیریم:

$$s_{av(۰,۱۲)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{۱۲ - ۰} \Rightarrow ۵ = \frac{\frac{(۱۲ + t')\times \cancel{۶}^{\,۱}}{\cancel{۲}_{\,۱}}}{\cancel{۱۲}_{\,۲}} \Rightarrow ۲۰ = ۱۲ + t' \Rightarrow t' = ۸\,s$$

گام دوم: حالا به کمک مساحت مثلث در بازهٔ $t' = ۸\,s$ تا $t = ۱۲\,s$، اندازهٔ جابه‌جایی مورد نظر را حساب می‌کنیم:

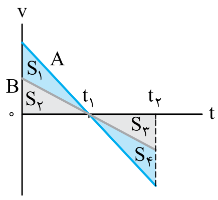
$$\Delta x = \text{مساحت مثلث} = \frac{(۱۲ - ۸)\times ۶}{۲} = ۱۲\,m \Rightarrow \Delta\vec{x} = (۱۲\vec{i})\,m$$





۱۹۳. گزینه «۴» بزرگی سرعت متوسط را برای هر دو متحرک در بازهٔ t_1 تا t_2 می‌خواهیم؛ یعنی Δt برای هر دو متحرک یکسان است. پس با توجه به رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، هر متحرکی که جابه‌جایی‌اش بیشتر باشد، بزرگی سرعت متوسطاش هم بیشتر خواهد بود. برای این کار باید ببینیم مساحت زیر نمودار کدام متحرک بیشتر است. در شکل‌های روبه‌رو مشخص است که مساحت زیر نمودار متحرک B و در نتیجه جابه‌جایی متحرک B بیشتر است:

$$\Delta x_B > \Delta x_A \Rightarrow \frac{\Delta x_B}{\Delta t} > \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \Rightarrow v_{av,B} > v_{av,A}$$



۱۹۴. گزینه «۱» تندی متوسط برابر با مسافت تقسیم بر زمان طی مسافت و مسافت برابر با مجموع مساحت‌های زیر نمودار v - t است؛ پس به زبان ریاضی:

$$\left.\begin{array}{l} l_A = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ l_B = S_2 + S_3 \end{array}\right\} \Rightarrow l_A > l_B \xrightarrow{\Delta t_A = \Delta t_B} \frac{l_A}{\Delta t} > \frac{l_B}{\Delta t} \Rightarrow s_{av,A} > s_{av,B}$$

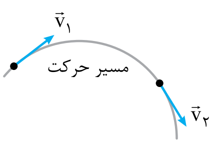
درس هشتم شتاب

مفهوم شتاب

شتاب با دو کمیت مهم فیزیکی نسبت فامیلی نزدیک دارد. یکی از این کمیت‌ها **تغییرات سرعت** است.[1] به طوری که اگر **بردار سرعت** متحرک به هر نحوی **تغییر** کند، حرکت جسم **شتابدار**است؛ در واقع هر وقت تغییر سرعت هست، شتاب هم هست. سرعت مثل همهٔ کمیت‌های برداری به دو صورت تغییر می‌کند:

(الف) **تغییر اندازهٔ سرعت**: وقتی اندازهٔ سرعت (تندی) تغییر می‌کند، حرکت جسم یا کندشونده است یا تندشونده. در این صورت حتماً حرکت شتابدار است.

(ب) **تغییر جهت سرعت**: می‌دانید که بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است؛ پس با تغییر راستا و جهت حرکت، راستا و جهت بردار سرعت هم تغییر می‌کند؛ یعنی در حرکت‌هایی که بر مسیر خط راست نیست، حتماً سرعت تغییر جهت می‌دهد و به همین دلیل حتماً شتاب داریم (حتی اگر اندازهٔ سرعت تغییر نکند). در شکل روبه‌رو بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هم‌اندازه‌اند (مثلاً مقدار هر دو $10\,m/s$ است) ولی جهت آن‌ها متفاوت است و برای همین می‌گوییم سرعت تغییر کرده و حرکت شتابدار است.



تست ؟ **حرکت سقوط یک سنگ رهاشده از بالای یک ساختمان (در شرایط خلأ) به دلیل تغییر .... سرعت و حرکت یک ماهواره به دور زمین به دلیل تغییر .... سرعت، شتابدار است.**

۱) اندازه، جهت ۲) اندازه، اندازه ۳) جهت، اندازه ۴) جهت، جهت

پاسخ ۱ وقتی سنگی را در شرایط خلأ از بالای یک بلندی رها می‌کنیم، به صورت تندشونده به سمت زمین سقوط می‌کند. در این حرکت دائماً **اندازهٔ** سرعت افزایش می‌یابد و به همین دلیل حرکت شتابدار است.

حرکت ماهواره به دور زمین، حرکت دایره‌ای یکنواخت است. یعنی اندازهٔ سرعت ثابت است اما **جهت آن** دائماً تغییر می‌کند. به همین علت حرکت ماهواره به دور زمین (با آن‌که یکنواخت است) شتابدار است.

حواستون باشه **سرعت** با **تغییر سرعت** فرق می‌کند. جهت بردار سرعت لزوماً هم‌جهت با شتاب و تغییرات سرعت نیست. مثلاً در حرکت راست‌خط کُندشونده، جهت بردارهای شتاب و تغییرات سرعت در خلاف جهت حرکت (یعنی خلاف جهت بردار سرعت) است.

شتاب متوسط

اگر بردار سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 برابر $\vec{v}_1$ و بردار سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 برابر $\vec{v}_2$ باشد، شتاب متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

در SI یکای تغییرات سرعت، متر بر ثانیه (m/s) و یکای زمان، ثانیه (s) است، پس یکای شتاب در SI متر بر مربع ثانیه (m/s^2) است:

$$\text{یکای شتاب} = \frac{\text{یکای تغییرات سرعت}}{\text{یکای تغییرات زمان}} = \frac{m/s}{s} = m/s^2$$

۱- اون یکی، فامیل شتاب رو یه کم جلوتر معرفی می‌کنیم.

نکته شتاب کمیتی برداری است؛ زیرا از ضرب یک کمیت نرده‌ای $(\frac{۱}{\Delta t})$ در یک کمیت برداری $(\Delta\vec{v})$ به دست می‌آید. در ضمن چون $\frac{۱}{\Delta t}$ همواره مثبت است، پس بردار شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$ همواره هم‌سو با بردار تغییرات سرعت $(\Delta\vec{v})$ است.

تست ۱ | بردار سرعت متحرکی در لحظه‌های $t_۱ = ۲\,s$ و $t_۲ = ۵\,s$ در SI به صورت $\vec{v}_۱ = -۶\vec{i}$ و $\vec{v}_۲ = ۳\vec{i}$ است. اندازهٔ شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ ۲s تا ۵s چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ ۲ | از فرمول $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$، بردار $\vec{a}_{av}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{(۳\vec{i}) - (-۶\vec{i})}{۵ - ۲} = \frac{۹\vec{i}}{۳} = ۳\vec{i} \Rightarrow a_{av} = ۳\,m/s^۲$$

تست ۲ | معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{v} = (t^۲ - ۲۵)\vec{i}$ است. شتاب متوسط این متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکتش برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $-۱۰\vec{i}$ ۲) $-۲۰\vec{i}$ ۳) $۱۰\vec{i}$ ۴) $۲۰\vec{i}$

پاسخ ۳ | **گام اول:** ۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۴\,s$ تا $t_۲ = ۶\,s$، پس باید سرعت متحرک در این لحظه‌ها را حساب کنیم:

$$\begin{cases} \vec{v}_۱ = (۴^۲ - ۲۵)\vec{i} = -۹\vec{i} \\ \vec{v}_۲ = (۶^۲ - ۲۵)\vec{i} = ۱۱\vec{i} \end{cases}$$

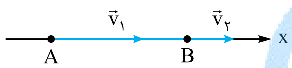
گام دوم: حالا می‌توانیم بردار شتاب متوسط را هم داشته باشیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۱\vec{i} - (-۹\vec{i})}{۶ - ۴} = \frac{۲۰\vec{i}}{۲} = ۱۰\vec{i}$$

رسم و محاسبهٔ بردار تغییرات سرعت

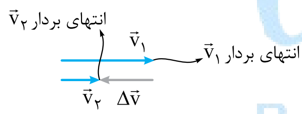
برای محاسبهٔ بردار شتاب باید بتوانیم بردار تغییرات سرعت را محاسبه کنیم. سرعت (v) و تغییرات سرعت (Δv) با آن‌که هم‌جنس هستند (یعنی واحد یکسان دارند) ولی دو کمیت متفاوت‌اند. در واقع تغییرات سرعت تفاضل دو بردار سرعت است. که برای خودش یک بردار مستقل است.

با توجه به کتاب درسی باید بتوانید در دو حالت بردار تغییرات سرعت را رسم کنید و حساب کنید.



(الف)

الف) بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ در یک راستا باشند: در حرکت بر مسیر خط راست بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ همواره در یک راستا هستند. در شکل (الف) بردارهای سرعت یک متحرک را که بر روی محور x حرکت می‌کند، در دو مکان A و B کشیده‌ایم. برای رسم بردار تغییرات سرعت از A تا B این دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم (شکل (ب)).



(ب)

سپس بردار تغییرات سرعت $(\Delta\vec{v})$ را از انتهای بردار $\vec{v}_۱$ به انتهای بردار $\vec{v}_۲$ می‌کشیم.

در این حالت بردار $\Delta\vec{v}$ هم‌راستا با بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ است. حواستون باشه گفتیم هم‌راستا است، یعنی $\Delta\vec{v}$ لزوماً هم‌جهت با $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ نیست. (مانند شکل (ب))

در این حالت بردار $\Delta\vec{v}$ از رابطه‌های مقابل محاسبه می‌شود:

$$\Delta v = v_۲ - v_۱ \quad \text{یا} \quad \Delta\vec{v} = (\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱)\vec{i}$$

در این رابطه با توجه به جهت حرکت، باید حواسمان به علامت $v_۱$ و $v_۲$ باشد. تست زیر را ببینید:

تست ۳ | معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -۳t + ۶$ است. بردار تغییر سرعت این متحرک در بازهٔ $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۳\,s$ در SI کدام است و هم‌جهت با کدام بردار سرعت است؟ ($\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ به ترتیب بردارهای سرعت در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ هستند.)

۱) $\vec{v}_۱, ۶\vec{i}$ ۲) $\vec{v}_۱, -۶\vec{i}$ ۳) $\vec{v}_۲, ۶\vec{i}$ ۴) $\vec{v}_۲, -۶\vec{i}$

پاسخ ۴ | **گام اول:** $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$v_۱ = -۳(۱) + ۶ = ۳ \Rightarrow \vec{v}_۱ = ۳\vec{i}\,(m/s)$$
$$v_۲ = -۳(۳) + ۶ = -۳ \Rightarrow \vec{v}_۲ = -۳\vec{i}\,(m/s)$$

گام دوم: $\Delta\vec{v}$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta v = v_۲ - v_۱ = (-۳) - (۳) = -۶ \Rightarrow \Delta\vec{v} = -۶\vec{i}\,(m/s)$$

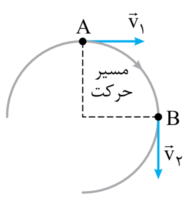
همین‌طور که می‌بینید، $\Delta\vec{v}$ هم‌سو با $\vec{v}_۲$ و در خلاف جهت $\vec{v}_۱$ است.

کمی عمیق‌تر

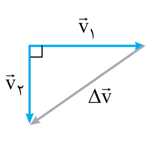
ب) بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ بر هم عمود باشند: در این حالت جهت بردار سرعت ۹۰° تغییر کرده است و بنابراین مسیر این حرکت نمی‌تواند خط راست باشد مثل شکل (الف) که بردارهای سرعت متحرک در نقطه‌های A و B (یعنی $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$) بر هم عمودند. در این حالت بردار تغییرات سرعت مانند شکل (ب) از انتهای $\vec{v}_۱$ به انتهای $\vec{v}_۲$ رسم می‌شود. بنابراین همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، اندازهٔ Δv برابر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه است که از رابطهٔ فیثاغورس محاسبه می‌شود:

$$\Delta v = \sqrt{v_۱^۲ + v_۲^۲}$$

در این حالت بردار $\Delta\vec{v}$ نه در جهت $\vec{v}_۱$ است و نه در جهت $\vec{v}_۲$.

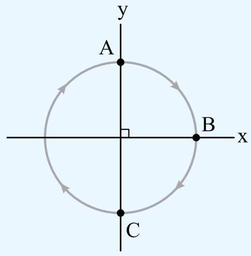


(الف)



(ب)

تست ۲ | متحرکی با تندی ثابت $۱۰\,m/s$ بر روی مسیر دایره‌ای (شکل زیر) در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند. اگر متحرک در لحظه‌های $t_1=۰$، $t_2=۴\,s$ و $t_3=۸\,s$ به ترتیب در حال عبور از نقطه‌های A، B و C باشد، بردار شتاب متوسط متحرک در بازه‌های زمانی $(۰,۴\,s)$ و $(۰,۸\,s)$ به ترتیب چند متر بر مربع ثانیه است؟



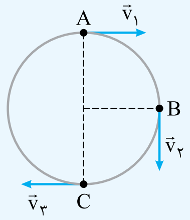
۱) $\vec a_{av(۰,۸)}=-۲/۵\vec i\ ,\ \vec a_{av(۰,۴)}=-۲/۵\vec i-۲/۵\vec j$

۲) $\vec a_{av(۰,۸)}=۰\ ,\ \vec a_{av(۰,۴)}=-۲/۵\vec i-۲/۵\vec j$

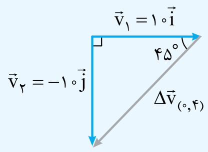
۳) $\vec a_{av(۰,۸)}=۲/۵\vec i\ ,\ \vec a_{av(۰,۴)}=۵\vec i+۵\vec j$

۴) $\vec a_{av(۰,۸)}=۰\ ,\ \vec a_{av(۰,۴)}=۵\vec i+۵\vec j$

پاسخ ۱ | در شکل (الف)، بردارهای $\vec v_1$، $\vec v_2$ و $\vec v_3$ را رسم کرده‌ایم.



(الف)



(ب)

الف) محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $(۰,۴\,s)$: بردارهای $\vec v_1$ و $\vec v_2$ برهم عمودند و بردار تغییر سرعت در بازهٔ ۰ تا $۴\,s$ $(\Delta\vec v_{(۰,۴)})$ مطابق شکل (ب) است.

بردار تغییرات سرعت در این بازه برابر می‌شود با: $\Delta\vec v_{(۰,۴)}=\vec v_2-\vec v_1=(-۱۰\vec j)-(۱۰\vec i)=-۱۰\vec i-۱۰\vec j$

(اندازهٔ $\Delta v_{(۰,۴)}$ برابر می‌شود با: $\sqrt{۱۰^2+۱۰^2}=۱۰\sqrt{۲}\,m/s$)

حالا بردار شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا $۴\,s$ را می‌توانیم حساب کنیم:

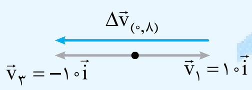
$$\vec a_{av(۰,۴)}=\frac{\Delta\vec v_{(۰,۴)}}{\Delta t}=\frac{-۱۰\vec i-۱۰\vec j}{۴-۰}=-۲/۵\vec i-۲/۵\vec j$$

(اندازهٔ بردار شتاب در بازهٔ ۰ تا $۴\,s$ برابر می‌شود با: $\sqrt{۲/۵^2+۲/۵^2}=۲/۵\sqrt{۲}\,m/s^2$)

ب) محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $(۰,۸\,s)$:

در شکل (پ) بردارهای $\vec v_1$ و $\vec v_3$ را هم‌مبدأ کرده‌ایم، پس بردار تغییرات سرعت در بازهٔ $(۰,۸\,s)$ به این صورت است:

$$\Delta\vec v_{(۰,۸)}=\vec v_3-\vec v_1=(-۱۰\vec i)-(۱۰\vec i)=-۲۰\vec i$$

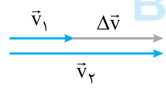
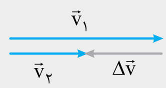
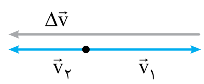
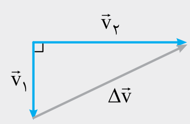


(پ)

بردار شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا $۸\,s$:

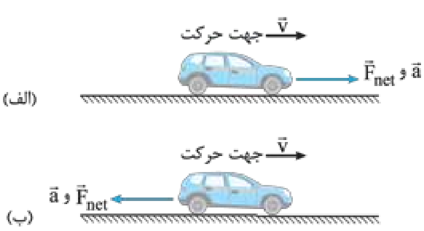
$$\vec a_{av(۰,۸)}=\frac{\Delta\vec v_{(۰,۸)}}{\Delta t}=\frac{-۲۰\vec i}{۸-۰}=-۲/۵\vec i$$

در جدول زیر بردار تغییرات سرعت را در حالت‌های مختلف نشان داده‌ایم. فراموش نکنید که جهت بردار شتاب متوسط $(\vec a_{av})$ در جهت بردار $\Delta\vec v$ است. در همهٔ حالت‌ها، بردار $\Delta\vec v$ از انتهای بردار $\vec v_1$ به انتهای بردار $\vec v_2$ کشیده می‌شود.

وضعیت بردارهای سرعت اولیه و سرعت نهایی	وضعیت بردار تغییرات سرعت	شکل
$\vec v_1$ و $\vec v_2$ هم‌جهت و $\lvert\vec v_2\rvert>\lvert\vec v_1\rvert$	$\Delta\vec v$ هم‌سو با $\vec v_1$ و $\vec v_2$	
$\vec v_1$ و $\vec v_2$ هم‌جهت و $\lvert\vec v_2\rvert<\lvert\vec v_1\rvert$	$\Delta\vec v$ در خلاف جهت $\vec v_1$ و $\vec v_2$	
$\vec v_1$ و $\vec v_2$ در خلاف جهت هم	$\Delta\vec v$ در جهت $\vec v_2$ و در خلاف جهت $\vec v_1$	
$\vec v_1$ و $\vec v_2$ عمود بر هم (کمی عمیق‌تر)	$\Delta\vec v$ بر روی وتر مثلث قائم‌الزاویه و به سمت پیکان $\vec v_2$	

کمی عمیق‌تر اول همین درس‌نامه گفتیم شتاب با دو کمیت فیزیکی مهم نسبت فامیلی نزدیک دارد که یکی از آن‌ها (تغییرات سرعت) را معرفی کردیم. حالا می‌خواهیم کمیت دیگر (یعنی نیروی خالص) را معرفی کنیم.

فرض کنید شما در حال رانندگی با یک خودرو در یک مسیر مستقیم هستید. اگر بخواهید خودرو سریع‌تر برود (یعنی اندازهٔ سرعتش زیاد شود) چه کار می‌کنید؟ دقیقاً! پایتان را روی پدال گاز، بیشتر فشار می‌دهید. با این کار در جهت سرعت، به اتومبیل **نیرو** وارد می‌کنید. اما اگر بخواهید اندازهٔ سرعت خودرو کم شود چه کار می‌کنید؟ این بار پایتان را روی پدال ترمز فشار می‌دهید. در واقع شما با این کار در خلاف جهت سرعت به اتومبیل **نیرو** وارد می‌کنید.



(الف) (ب)

یعنی اگر بخواهید سرعت جسمی زیاد شود، باید مانند شکل (الف) در جهت حرکت به آن نیرو وارد کنید (هُل بدهید) و اگر بخواهید سرعت جسم کم شود، باید مانند شکل (ب) در خلاف جهت حرکت به آن نیرو وارد کنید.

حالا اگر بخواهید مسیر حرکت خودرو را تغییر بدهید، مثلاً دور یک میدان بچرخید فرمان خودرو را می‌چرخانید. با این کار نیرویی عمود بر مسیر حرکت به خودرو وارد می‌کنید. این نیرو بدون این‌که اندازهٔ سرعت را تغییر بدهد، جهت آن را عوض می‌کند.

خلاصه این‌که هر وقت بر جسم نیروی خالص وارد شود، بردار سرعت به یکی از شکل‌های زیر تغییر می‌کند و در نتیجه شتاب ایجاد می‌شود. یعنی هر جا **نیروی خالص** هست، **شتاب** و **تغییرات سرعت** هم هست.

اگر نیروی خالص در جهت حرکت (بردار سرعت) باشد ← اندازهٔ سرعت زیاد می‌شود. (حرکت تندشونده)

اگر نیروی خالص در خلاف جهت حرکت (بردار سرعت) باشد ← اندازهٔ سرعت کم می‌شود. (حرکت کندشونده)

اگر نیروی خالص عمود بر مسیر حرکت (بردار سرعت) باشد ← بردار سرعت تغییر جهت می‌دهد اما حرکت یکنواخت است.

نکته بردار سرعت $(\vec v)$ همیشه در جهت حرکت و بردار شتاب $(\vec a)$ همیشه در جهت بردار نیروی خالص $(\vec F_{net})$ است.

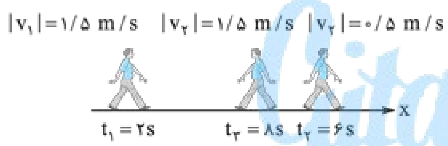
۱۹۵. گزینه ۳ برای محاسبهٔ اندازهٔ شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ کمک می‌گیریم. در این رابطه فقط اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک در ابتدا و انتهای حرکت مهم است؛ بنابراین داریم: (تبدیل واحد سرعت هم یادتان نرود!)

$$v=90\,km/h=90\div 3.6\,m/s=25\,m/s \Rightarrow a_{av}=\frac{v-v_0}{t-0}=\frac{25-0}{5-0}=5\,m/s^2$$

۱۹۶. گزینه ۳ بردار شتاب متوسط برابر با نسبت تغییرات سرعت به تغییرات زمان است:

$$\vec a_{av}=\frac{\Delta \vec v}{\Delta t}=\frac{\vec v_2-\vec v_1}{t_2-t_1}=\frac{(-16\vec j)-(4\vec j)}{4-0}=\frac{-20\vec j}{4}=(-5\,m/s^2)\vec j$$

۱۹۷. گزینه ۴ **گام اول:** به کمک شکل زیر بردار سرعت شخص را در هر لحظه، با توجه به اندازهٔ سرعت و جهت حرکتش تعیین می‌کنیم:



$t_1=2\,s$: جهت حرکت مثبت، $|v_1|=1.5\,m/s \Rightarrow \vec v_1=(1.5\,m/s)\vec i$

$t_2=6\,s$: جهت حرکت مثبت، $|v_2|=0.5\,m/s \Rightarrow \vec v_2=(0.5\,m/s)\vec i$

$t_3=8\,s$: جهت حرکت منفی، $|v_3|=1.5\,m/s \Rightarrow \vec v_3=(-1.5\,m/s)\vec i$

گام دوم: شتاب متوسط را در دو بازهٔ $(2\,s, 8\,s)$ و $(6\,s, 8\,s)$ به دست می‌آوریم:

$$\vec v_{av(2,8)}=\frac{\vec v_3-\vec v_1}{t_3-t_1}=\frac{-1.5\vec i-1.5\vec i}{8-2}=\frac{-3\vec i}{6}=-\frac{1}{2}\vec i=-0.5\vec i\ (m/s^2)$$

$$\vec v_{av(6,8)}=\frac{\vec v_3-\vec v_2}{t_3-t_2}=\frac{-1.5\vec i-0.5\vec i}{8-6}=\frac{-2\vec i}{2}=-\vec i\ (m/s^2)$$

۱۹۸. گزینه ۴ **گام اول:** ۲ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $(2\,s, 4\,s)$. برای این‌که شتاب متوسط در این بازه را به دست آوریم باید سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای این بازه را تعیین کنیم. معادلهٔ سرعت ـ زمان برابر $v=2t^2-4t-2$ است؛ پس داریم:

$$t_1=2\,s \Rightarrow v_1=2(2)^2-4(2)-2=-2\,m/s\ ,\ t_2=4\,s \Rightarrow v_2=2(4)^2-4(4)-2=14\,m/s$$

گام دوم: با توجه به این‌که شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید، داریم:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{14-(-2)}{4-2}=\frac{16}{2}=8\,m/s^2$$

۱۹۹. گزینه ۱ شتاب متوسط از رابطهٔ $\vec a_{av}=\frac{\Delta \vec v}{\Delta t}$ به دست می‌آید. در $t=0.2\,s$ تندی متحرک $8\,m/s$ و متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است؛ بنابراین $\vec v_2=(-8\,m/s)\vec i$ است؛ با این حساب:

$$\vec a_{av}=\frac{\vec v_2-\vec v_1}{\Delta t} \Rightarrow 24\vec i=\frac{-8\vec i-\vec v_1}{0.2-0} \Rightarrow 4.8\vec i=-8\vec i-\vec v_1 \Rightarrow \vec v_1=-8\vec i-4.8\vec i=-12.8\vec i$$

۲۰۰. گزینه ۲ **گام اول:** به کمک رابطهٔ شتاب متوسط، بردار تغییر سرعت در بازهٔ t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 را به دست می‌آوریم:

$$\vec a_{av(5,10)}=\frac{\vec v_2-\vec v_1}{t_2-t_1} \Rightarrow -4\vec i=\frac{\vec v_2-\vec v_1}{\underbrace{10-5}_{5}} \Rightarrow \vec v_2-\vec v_1=-20\vec i\quad (1)$$

$$\vec a_{av(10,12)}=\frac{\vec v_3-\vec v_2}{t_3-t_2} \Rightarrow 2\vec i=\frac{\vec v_3-\vec v_2}{\underbrace{12-10}_{2}} \Rightarrow \vec v_3-\vec v_2=4\vec i\quad (2)$$

گام دوم: حالا از جمع رابطهٔ (۱) و (۲)، اندازهٔ بردار تغییر سرعت در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ و بردار شتاب متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} \vec{v}_۳-\vec{v}_۱=-۱۶\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_{av(۵,۱۲)}=\frac{-۱۶\vec{i}}{۱۲-۵}=\frac{-۱۶}{۷}\vec{i}\ (m/s^۲)$$

۲۰۱. گزینه «۳» **گام اول:** به کمک رابطهٔ شتاب متوسط، بردار تغییر سرعت در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ و $t_۱$ تا $t_۳$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av(۰,۱۰)}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow -۲\vec{i}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{۱۰-۰} \Rightarrow \vec{v}_۲-\vec{v}_۱=-۲۰\vec{i}\quad (۱)$$

$$\vec{a}_{av(۰,۱۵)}=\frac{\vec{v}_۳-\vec{v}_۱}{t_۳-t_۱} \Rightarrow \frac{۲}{۳}\vec{i}=\frac{\vec{v}_۳-\vec{v}_۱}{۱۵-۰} \Rightarrow \vec{v}_۳-\vec{v}_۱=۱۰\vec{i}\quad (۲)$$

گام دوم: حالا با کم‌کردن رابطهٔ (۱) از (۲)، بردار تغییر سرعت در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ و بردار شتاب متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} (\vec{v}_۳-\vec{v}_۱)-(\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)=\vec{v}_۳-\vec{v}_۲=۱۰\vec{i}-(-۲۰\vec{i})=۳۰\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av(۱۰,۱۵)}=\frac{\vec{v}_۳-\vec{v}_۲}{t_۳-t_۲}=\frac{۳۰\vec{i}}{\underbrace{۱۵-۱۰}_{۵}}=۶\vec{i}$$

۲۰۲. گزینه «۴» شتاب متحرک وقتی صفر است که $\Delta v=۰$ باشد؛ یعنی $v=v_۰$؛ از معادله واضح است که $v_۰=۶\ m/s$ است؛ پس سرعت متحرک در لحظهٔ t' هم $۶\ m/s$ است؛ یعنی: $v'=v_۰=(۶\ m/s)\ \vec{i}$

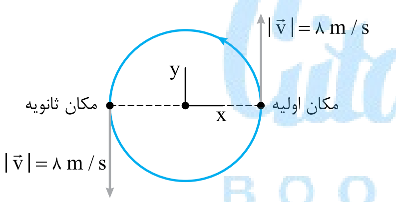
۲۰۳. گزینه «۴» **گام اول:** وقتی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند علامت سرعت مثبت باشد؛ یعنی $v>۰$:

$$v=۳۲-۲t^۲>۰ \Rightarrow ۲(۱۶-t^۲)>۰ \Rightarrow t^۲<۱۶ \Rightarrow -۴<t<۴ \xrightarrow{\text{زمان منفی نداریم}} ۰<t<۴$$

گام دوم: حالا که بازهٔ زمانی را پیدا کردیم، شتاب متوسط را در این بازه حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av(۰,۴)}=\frac{\Delta\vec{v}_{(۰,۴)}}{\Delta t_{(۰,۴)}}=\frac{[\overbrace{۳۲-۲(۴)^۲-۳۲}^{-۳۲}]\vec{i}}{۴-۰}=-۸\vec{i}$$

۲۰۴. گزینه «۲» **گام اول:** قبل از هر چیز، یک شکل می‌کشیم، *ببینیم سؤال چی گفته!* متحرک نصف دایره را طی کرده است؛ پس حرکتش به صورت مقابل است: $\vec{v}_۱=۸\vec{j}\ ,\ \vec{v}_۲=-۸\vec{j}$



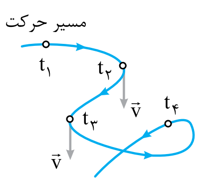
گام دوم: حالا تغییرات سرعت را مشخص می‌کنیم:

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱=-۸\vec{j}-۸\vec{j}=-۱۶\vec{j}$$

گام سوم: در نهایت اندازهٔ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۴}=۴\ m/s^۲$$

۲۰۵. گزینه «۱» گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. (۱) در بعضی از بازه‌های زمانی‌ای که بردار سرعت در ابتدا و انتهای آن بازه برابر است، شتاب متوسط صفر می‌شود. ✓



مثلاً در بازهٔ $(t_۲,t_۳)$ شتاب متوسط صفر است.

البته در بازه‌های زمانی دیگر شتاب صفر نیست مثل بازه‌های زمانی $(t_۱,t_۳)$.

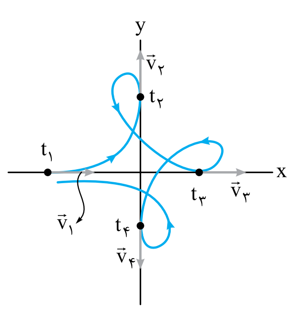
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) اگر شتاب ثابت باشد، شتاب متوسط همواره ثابت است، در حالی که در (۱) دیدیم در بعضی از بازه‌های زمانی شتاب صفر می‌شود و در بازه‌های زمانی دیگر شتاب صفر نیست. ✗

(۳) نه! به طور مثال فرض کنید $\Delta t=t_۲-t_۱$ با $\Delta t'=t_۳-t_۲$ یکسان باشد، شتاب متوسط متحرک در بازهٔ $(t_۲,t_۳)$ صفر است اما شتاب متوسط در بازهٔ $(t_۱,t_۲)$ صفر نیست. ✗

(۴) همان‌طور که در شکل می‌بینید، بردار سرعت همواره در حال تغییر جهت است؛ پس شتاب حرکت صفر نیست. ✗

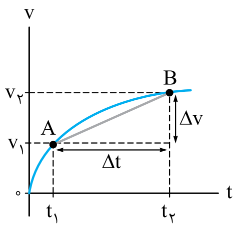
۲۰۶. گزینه «۱» چون تندی حرکت ثابت است، اندازهٔ سرعت در تمام لحظات ثابت است و بردارهای سرعت به صورت شکل روبه‌رو می‌شوند.



از آن‌جا که شتاب متوسط در هر بازه برابر با $\frac{\vec{v}_{\text{نهایی}}-\vec{v}_{\text{اولیه}}}{\Delta t}$ است، تنها در بازه‌هایی، شتاب متوسط صفر است که $\vec{v}_{\text{نهایی}}=\vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازهٔ زمانی اشاره‌شده در (۱) یعنی $(t_۱,t_۳)$ می‌افتد.

درس نهم
شتاب در نمودارهای سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان

بررسی شتاب متوسط در نمودار سرعت ـ زمان

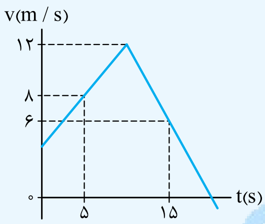


شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در این شکل دو نقطهٔ A و B واقع بر نمودار سرعت ـ زمان را با یک خط به هم وصل کرده‌ایم. شیب این خط برابر می‌شود با:

$$\text{شیب خط AB} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}} \boxed{\text{شیب خط AB} = a_{av\,(t_۱\,,\,t_۲)}}$$

بنابراین شیب خط AB برابر با شتاب متوسط در بازهٔ $(t_۱\,,t_۲)$ است، پس می‌توانیم بگوییم: «شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان بیانگر شتاب متوسط در بازهٔ زمانی محدود بین آن دو نقطه است.»

تست نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی ۵ s تا ۱۵ s شتاب متوسط این متحرک چند متر بر مربع ثانیه است و جهت حرکت متحرک در این بازهٔ زمانی کدام است؟



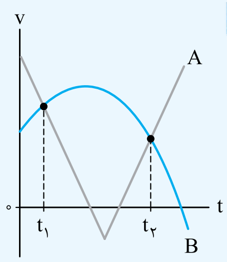
۱) $-۰/۸$، در جهت منفی
۲) $-۰/۲$، در جهت منفی
۳) $-۰/۸$، در جهت مثبت
۴) $-۰/۲$، در جهت مثبت

پاسخ ۴ **گام اول**: شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار در بازهٔ ۵ s تا ۱۵ s برابر با شتاب متوسط در این بازه است:

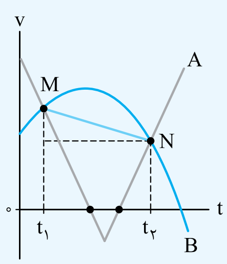
$$a_{av\,(۵,۱۵)} = \frac{۶-۸}{۱۵-۵} = \frac{-۲}{۱۰} = -۰/۲\ m/s^۲$$

گام دوم: در بازهٔ ۵ s تا ۱۵ s نمودار سرعت ـ زمان بالای محور t قرار دارد، پس در همهٔ لحظه‌های این بازهٔ زمانی، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

تست نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر بزرگی شتاب متوسط آن‌ها از لحظهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ به ترتیب $a_{av,A}$ و $a_{av,B}$ باشد، کدام گزینه دربارهٔ این دو متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ درست است؟



۱) $a_{av,A} < a_{av,B}$ و هر دو متحرک، یک بار تغییر جهت داده‌اند.
۲) $a_{av,A} = a_{av,B}$ و متحرک A، دو بار تغییر جهت داده است.
۳) $a_{av,A} < a_{av,B}$ و متحرک A، دو بار تغییر جهت داده است.
۴) $a_{av,A} = a_{av,B}$ و هر دو متحرک یک بار تغییر جهت داده‌اند.



پاسخ ۲ **گام اول**: در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ دو نمودار در دو نقطهٔ M و N یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس شیب خط واصل بین این دو نقطه (خط MN) برابر شتاب متوسط هر دو متحرک در این بازهٔ زمانی است:

$$\text{شیب خط MN} = a_{av,A} = a_{av,B}$$

گام دوم: در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار متحرک A در دو نقطه محور t را قطع کرده، یعنی دو بار علامت سرعت این متحرک تغییر کرده و این متحرک، دو بار تغییر جهت داده است، اما متحرک B در این بازهٔ زمانی تغییر جهتی نداشته است. چون در $(t_۱\,,t_۲)$ نمودارش محور t را قطع نکرده است.

شتاب لحظه‌ای

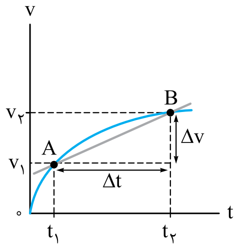
به شتاب متحرک در هر لحظه از زمان، شتاب لحظه‌ای می‌گوییم. بردار شتاب لحظه‌ای را با $\vec{a}$ و مقدار آن را با a نشان می‌دهیم. هر جا واژهٔ «شتاب» به تنهایی بیاید، منظور شتاب لحظه‌ای است.

- بردار $\vec{a}$ همیشه هم‌علامت با بردار نیروی خالص وارد بر جسم $(\vec{F}_{net})$ است. در واقع جهت شتاب، همواره هم‌سو با جهت نیروی خالص است.

نمایش شتاب لحظه‌ای در نمودار سرعت ـ زمان

دیدید که شیب خطی که دو نقطه از منحنی $v - t$ را به هم وصل می‌کند، برابر با شتاب متوسط در بازهٔ زمانی متناظر با آن دو نقطه است. مثلاً در شکل (الف)، شیب خط AB برابر با شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ است؛ به این صورت:

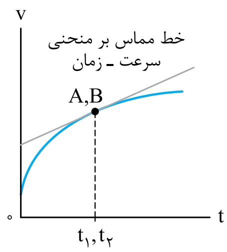
$$\text{شیب خط } AB = a_{av(t_۱,t_۲)} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



(الف)

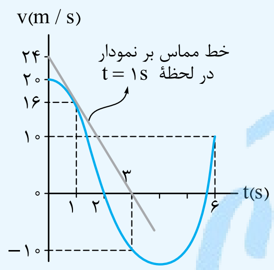
حالا $t_۱$ و $t_۲$ را به هم نزدیک می‌کنیم تا Δt کوچک و نقطه‌های A و B به هم نزدیک شوند و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا $t_۱$ و $t_۲$ در کنار هم قرار گیرند و Δt یک لحظه شود. حالا اگر مانند شکل (ب)، AB را امتداد دهیم، خطی مماس بر منحنی سرعت ـ زمان خواهد شد. شیب این خط برابر با شتاب لحظه‌ای است.

شتاب لحظه‌ای = شیب خط مماس بر منحنی v ـ t



(ب)

تست ۹ | متحرکی بر روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل زیر است. نسبت شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، به شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۱s$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$

۲) $-\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $-\frac{۵}{۶}$

پاسخ ۴ | **گام اول**: باید شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار در لحظهٔ ۳ s و ۶ s را حساب کنیم.

$$a_{av(۳,۶)} = \frac{v_۶ - v_۳}{۶ - ۳} = \frac{۱۰ - (-۱۰)}{۳} = \frac{۲۰}{۳}\, m/s^۲$$

گام دوم: حالا باید شیب خط مماس در لحظهٔ $t = ۱s$ را به دست بیاوریم. خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۱s$ از مختصات (۰,۲۴) و (۳,۰) گذشته است.

پس داریم:

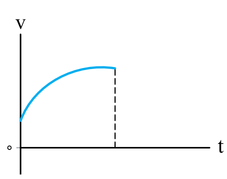
$$a_۱ = \frac{۰ - ۲۴}{۳ - ۰} = -۸\, m/s^۲$$

گام سوم: نسبت $a_{av(۳,۶)}$ به $a_۱$ را می‌خواهیم:

$$\frac{a_{av(۳,۶)}}{a_۱} = \frac{\frac{۲۰}{۳}}{-۸} = -\frac{۵}{۶}$$

چند نکته

۱) واضح است که هر چه شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان بیشتر باشد، اندازهٔ شتاب بیشتر است. *(مثلاً تو شکل روبه‌رو، هر چی زمان می‌گذره، شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان و در نتیجه اندازهٔ شتاب کم می‌شه.)*



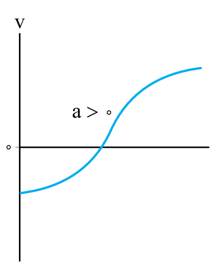
۲) با توجه به این‌که شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب لحظه‌ای است، علامت و جهت شتاب سه حالت می‌تواند داشته باشد:

الف) اگر نمودار سرعت ـ زمان **صعودی** باشد، علامت و جهت شتاب، **مثبت** است. (شکل (الف))

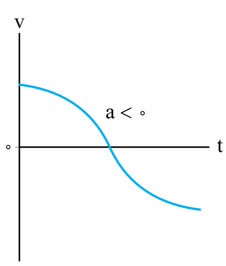
ب) اگر نمودار سرعت ـ زمان **نزولی** باشد، علامت و جهت شتاب، **منفی** است. (شکل (ب))

پ) اگر نمودار سرعت ـ زمان **افقی** باشد (شیب آن صفر باشد)، شتاب **صفر** است. (شکل (پ))

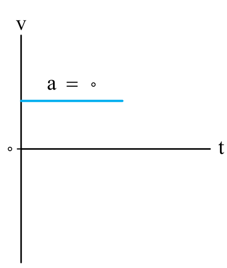
منفی یا مثبت بودن شتاب بیانگر جهت نیروی خالص وارد بر جسم هم است.



(الف)

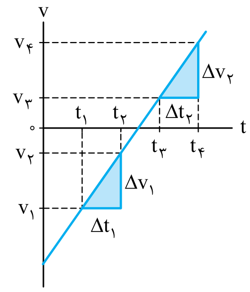


(ب)



(پ)

حواستون باشه با علامت شتاب نمی‌تونیم جهت حرکت رو مشخص کنیم (جهت حرکت رو فقط با علامت سرعت یا جابه‌جایی تعیین می‌کنیم).

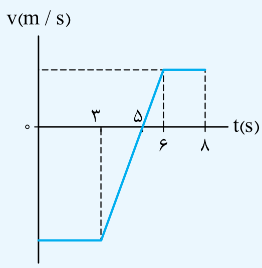


۳) اگر نمودار سرعت ـ زمان متحرکی یک خط راست باشد (مثل شکل روبه‌رو)، شیب نمودار چه در بازهٔ زمانی دلخواه Δt و چه در لحظهٔ دلخواه، ثابت و یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم در این صورت شتاب در هر لحظه برابر با شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است:

$$\boxed{a_{\text{لحظه‌ای}} = a_{av}} \Rightarrow a_{\text{لحظه‌ای}} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow$$ شیب نمودار در هر بازهٔ زمانی مانند Δt_1 یا Δt_2 = شیب نمودار در هر لحظه مانند t_1 یا t_2

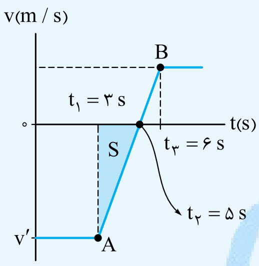
حالا یه تستی رو ببینید که چندتا نکتهٔ قبل رو با هم داشته باشه:

تست ؟ شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر شتاب متحرک در لحظهٔ $t = ۵/۵\,s$ برابر $۸\,m/s^2$ باشد، در بازهٔ زمانی که حرکت کُندشونده است، بردار سرعت متوسط متحرک برحسب متر بر ثانیه کدام است؟



۱) $۸\vec{i}$
۲) $-۸\vec{i}$
۳) $۱۶\vec{i}$
۴) $-۱۶\vec{i}$

پاسخ ۲ **گام اول**: با توجه به نمودار روبه‌رو از لحظهٔ $t_1 = ۳\,s$ تا $t_2 = ۶\,s$ نمودار یک خط راست است (خط AB)؛ پس شتاب متحرک در هر لحظهٔ دلخواه در بازهٔ زمانی ۳s تا ۶s برابر با شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه در این محدودهٔ زمانی است؛ پس می‌توانیم بگوییم شتاب متوسط در بازهٔ $t_1 = ۳\,s$ تا $t_2 = ۵\,s$ هم برابر شتاب در لحظهٔ $t = ۵/۵\,s$ است.



$$a_{۵/۵} = a_{av(۳,۵)} = \frac{۰ - v'}{t_2 - t_1} \Rightarrow ۸ = \frac{۰ - v'}{۵ - ۳} \Rightarrow v' = -۱۶\,m/s$$

گام دوم: در بازهٔ $t_1 = ۳\,s$ تا $t_2 = ۵\,s$ نمودار سرعت ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور t است؛ پس در این بازهٔ زمانی حرکت کندشونده است. ما باید سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی را حساب کنیم.

اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۵s برابر با مساحت مثلث S (در شکل بالا) است:

$$S = \frac{(t_2 - t_1) \times |v'|}{۲} = \frac{(۵-۳) \times ۱۶}{۲} = ۱۶ \xrightarrow{\text{چون نمودار در این مدت زیر محور t است، جابه‌جایی منفی است.}} \Delta x_{(۳,۵)} = -۱۶\,m$$

گام سوم: حالا می‌توانیم سرعت متوسط را هم حساب کنیم.

$$v_{av(۳,۵)} = \frac{\Delta x_{(۳,۵)}}{\Delta t} = \frac{-۱۶}{۵-۳} = -۸\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{av(۳,۵)} = -۸\vec{i}$$

تکنیک چون نمودار سرعت زمان در بازهٔ ۳s تا ۵s با محور t تشکیل یک مثلث را می‌دهد، می‌توانیم از تکنیک مثلث، سرعت متوسط را حساب کنیم:

$$v_{av} = \frac{v'}{۲} = \frac{-۱۶}{۲} = -۸\,m/s$$

تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت با علامت شتاب و سرعت

این‌جا می‌خواهیم تندشونده و کُندشونده بودن حرکت را با توجه به نیروی خالص وارد بر جسم بگوییم تا درک عمیق‌تری از این موضوع پیدا کنید. اگر بدانیم جهت شتاب همان جهت نیروی خالص وارد بر جسم و جهت سرعت همان جهت حرکت است، به کمک جهت نیروی خالص و جهت حرکت به راحتی می‌توانیم تندشونده یا کندشونده بودن حرکت را تشخیص دهیم:

الف) اگر شتاب و سرعت **هم‌علامت** باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم در جهت حرکت جسم است؛ بنابراین نوع حرکت تندشونده است *(مثل حالتی که پا روی پدال گاز می‌ذاریم تا ماشین تندتر بره)* این موضوع را می‌توانیم با زبان ریاضی هم بنویسیم:

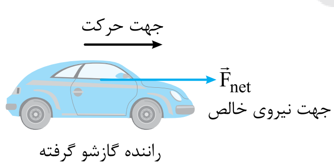
حرکت تندشونده $\Rightarrow$ **نیروی خالص در جهت حرکت** $\Rightarrow$ $av > ۰$

ب) اگر علامت شتاب و سرعت **مخالف هم** باشند (یکی مثبت و دیگری منفی) یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم در خلاف جهت حرکت بوده و نوع حرکت **کندشونده** است. *(مثل وقتی که پا روی پدال ترمز می‌ذاریم تا ماشین کُندتر بره.)* در این صورت داریم:

حرکت کندشونده $\Rightarrow$ **نیروی خالص در خلاف جهت حرکت** $\Rightarrow$ $av < ۰$

۱) حرکت این اتومبیل تندشونده است، زیرا:

نیروی خالص در جهت حرکت است.
$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$
شتاب در جهت سرعت است.

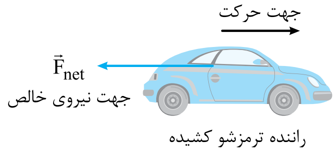


۲) حرکت این اتومبیل کندشونده است، زیرا:

نیروی خالص در خلاف جهت حرکت است.

$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$

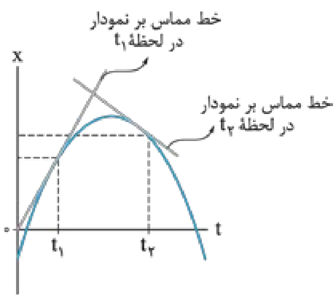
شتاب در خلاف جهت سرعت است.



شتاب در نمودار مکان ـ زمان

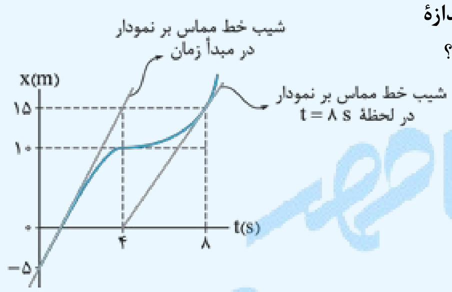
الف. شتاب متوسط در نمودار مکان ـ زمان

برای محاسبهٔ شتاب متوسط دو کمیت لازم داریم: یکی Δv و دیگری Δt. در نمودار مکان ـ زمان، v در هر لحظه برابر شیب خط مماس در آن لحظه است. پس اگر شیب خط‌های مماس بر نمودار مکان ـ زمان در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ را داشته باشیم، به راحتی می‌توانیم شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را حساب کنیم. مثلاً برای شکل روبه‌رو داریم:



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ } t_۲ - \text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ } t_۱}{t_۲ - t_۱}$$

تست ؟ شکل روبه‌رو، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اندازهٔ شتاب متوسط این متحرک در ۴ ثانیهٔ دوم چند برابر اندازهٔ شتاب متوسط آن در ۴ ثانیهٔ اول است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ ۴ **گام اول**: برای محاسبهٔ شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول باید سرعت در لحظه‌های $t_۰ = ۰$ و $t_۱ = ۴\,s$ را بدانیم. شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در این لحظه‌ها را می‌نویسیم. بعد شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول را به دست می‌آوریم.

$v_۱ = $ شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ $۴\,s = ۰$

$v_۰ = $ شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در مبدأ زمان $= \frac{۱۵-(-۵)}{۴-۰} = ۵\,m/s$

$$a_{av(۰,۴)} = \frac{v_۱ - v_۰}{t_۱ - t_۰} = \frac{۰-۵}{۴-۰} = \frac{-۵}{۴}\,m/s^۲$$

گام دوم: به همین ترتیب که شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول را حساب کردیم، شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ دوم (یعنی بازهٔ ۴ s تا ۸ s) را هم حساب می‌کنیم:

$v_۲ = $ شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ $۸\,s = \frac{۱۵-۰}{۸-۴} = \frac{۱۵}{۴}\,m/s$

$v_۱ = $ شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ $۴\,s = ۰$

$$a_{av(۴,۸)} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\frac{۱۵}{۴} - ۰}{۸-۴} = \frac{\frac{۱۵}{۴}}{۴} = \frac{۱۵}{۱۶}\,m/s^۲$$

گام سوم: نسبت اندازهٔ شتاب در ۴ ثانیهٔ دوم به ۴ ثانیهٔ اول را می‌خواهیم:

$$\frac{|a_{av(۴,۸)}|}{|a_{av(۰,۴)}|} = \frac{\frac{۱۵}{۱۶}}{|\frac{-۵}{۴}|} = \frac{۳}{۴}$$

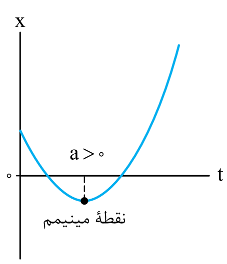
ب. علامت شتاب لحظه‌ای در نمودار مکان ـ زمان

به کمک نمودار مکان ـ زمان به راحتی می‌توانیم، علامت یا جهت شتاب حرکت را تشخیص بدهیم.

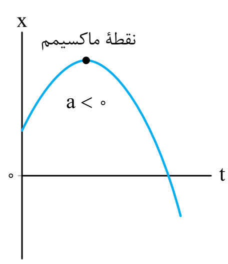
اگر نمودار مکان ـ زمان مانند شکل (الف)، نقطهٔ مینیمم (کمینه) داشته باشد، علامت شتاب حرکت مثبت است. در این حالت گودی (تقعر) نمودار رو به بالا است.

اگر نمودار مکان ـ زمان مانند شکل (ب)، نقطهٔ ماکسیمم (بیشینه) داشته باشد، علامت شتاب منفی است. در این حالت گودی (تقعر) نمودار رو به پایین است.[۱]

یادآوری جهت نیروی خالص همیشه در جهت شتاب است. پس در شکل (الف) نیروی خالص در جهت مثبت و در شکل (ب) نیروی خالص در جهت منفی است.



(الف)



(ب)

۱- نمودارهایی که جهت گودی آن تغییر می‌کند، مانند معادلات درجه ۳ و بیشتر، از حد کتاب درسی و کنکور سراسری فراتر است.

تشخیص تندشونده و کندشونده بودن حرکت در نمودار مکان ـ زمان

در نمودارهای مکان ـ زمان زیر به چیزهایی که می‌گوییم، دقت کنید:

الف) به طرف چپ نقطهٔ اکسترمم نگاه کنید:

در هر دو نمودار هر چه از سمت چپ به نقطهٔ اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) نزدیک می‌شویم، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار **کم** می‌شود. یعنی از **سمت چپ** با نزدیک‌شدن به نقطهٔ اکسترمم تندی **کاهش** می‌یابد و حرکت **کندشونده** است.

این‌طوری هم می‌شود گفت که در طرف چپ نقطهٔ اکسترمم، علامت سرعت و شتاب مخالف هم است. پس داریم:

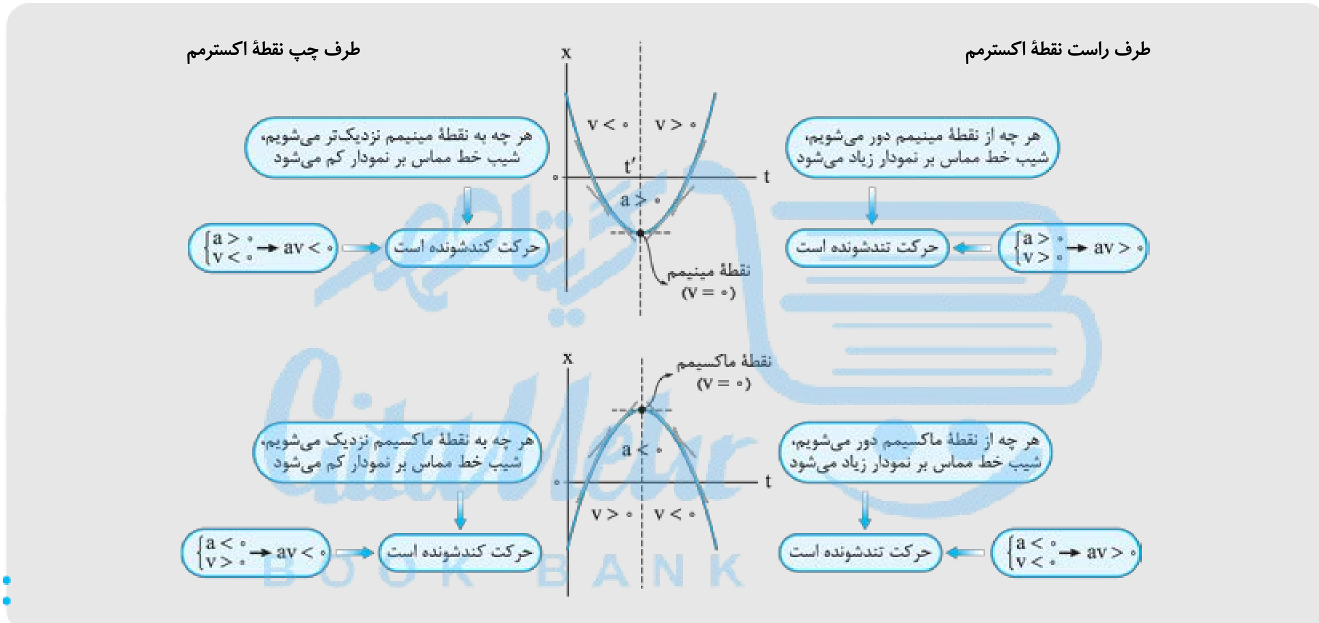
حرکت کندشونده $\Leftarrow av < 0$

ب) حالا به طرف راست نقطهٔ اکسترمم نگاه کنید:

در هر دو نمودار هر چه در طرف راست نقطهٔ اکسترمم از آن دور می‌شویم، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار **زیاد** می‌شود. یعنی با دورشدن از نقطهٔ اکسترمم از **سمت راست**، تندی **زیاد** می‌شود و حرکت **تندشونده** است.

به این صورت هم می‌توانید بگویید که در طرف راست نقطهٔ اکسترمم، سرعت و شتاب هم‌علامت‌اند. یعنی:

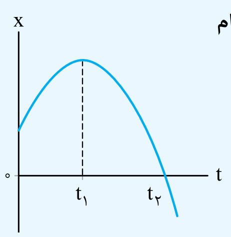
حرکت تندشونده $\Leftarrow av > 0$



خلاصه این‌که:

در نمودار مکان ـ زمان همواره **قبل از نقطهٔ کمینه یا بیشینه** حرکت **کندشونده** است و **بعد از نقطهٔ کمینه یا بیشینه**، حرکت **تندشونده** است.[1]

تست ۲ | نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، یک سهمی مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه دربارهٔ حرکت این متحرک نادرست است؟



۱) جهت نیروی خالص وارد بر جسم در تمام لحظه‌ها در خلاف جهت محور x است.

۲) حرکت متحرک از لحظهٔ t_2 به بعد تندشونده است.

۳) علامت تغییرات سرعت در هر بازهٔ زمانی دلخواه منفی است.

۴) بردار شتاب حرکت در لحظهٔ t_1 از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد.

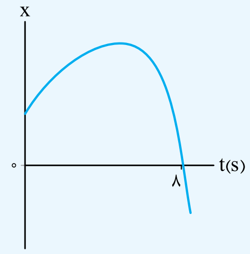
پاسخ ۴ | همین‌طور که می‌بینید نمودار نقطهٔ بیشینه دارد و جهت گودی‌اش به سمت پایین است؛ پس جهت شتاب و نیروی خالص وارد بر جسم در تمام لحظه‌ها در خلاف جهت محور x (در جهت منفی) است. یعنی عبارت (۱) درست است و عبارت (۴) که می‌گوید بردار شتاب در لحظهٔ t_1 تغییر علامت می‌دهد، نادرست است.

عبارت (۳) هم درست است، چون تغییرات سرعت همیشه هم‌جهت با شتاب متوسط است و در این‌جا با توجه به منفی‌بودن علامت شتاب در تمام لحظه‌ها، شتاب متوسط و در نتیجه تغییرات سرعت، در هر بازهٔ زمانی دلخواه هم منفی است.

و اما عبارت (۲) گفتیم نوع حرکت قبل از نقطهٔ اکسترمم کُندشونده و بعد از آن تندشونده است، پس در بازهٔ صفر تا t_1 حرکت کُندشونده و از t_1 به بعد حرکت تندشونده است.

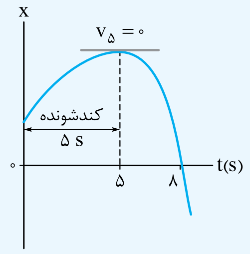
۱- این‌که از چه مدت قبل از نقطهٔ اکسترمم حرکت کُندشونده و تا چه مدت بعد از اکسترمم حرکت تندشونده است، از محدودهٔ کتاب درسی و کنکور سراسری خارج است.

تست ۴ شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. تندی این متحرک در لحظه‌ای که بردار مکان متحرک صفر می‌شود، $14\,m/s$ است. اگر به مدت $5\,s$، حرکت کُندشونده با شتاب متوسط $-2\,m/s^2$ باشد، شتاب متوسط آن در ۸ ثانیهٔ اول حرکت برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}\vec{i}$
۲) $-\frac{1}{2}\vec{i}$
۳) $3\vec{i}$
۴) $-3\vec{i}$

پاسخ ۴ **گام اول**: حرکت متحرک از مبدأ زمان تا نقطهٔ بیشینه، کُندشونده است. پس با توجه به این‌که حرکت کندشونده $5\,s$ طول می‌کشد، نمودار در $t = 5\,s$ بیشینه و سرعت در این لحظه صفر است (شکل روبه‌رو). با داشتن شتاب متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ اول، می‌توانیم سرعت اولیه را حساب کنیم:



$$a_{av(0,5)} = \frac{v_5 - v_0}{t_5 - t_0} \Rightarrow -2 = \frac{0 - v_0}{5 - 0} \Rightarrow v_0 = 10\,m/s$$

گام دوم: بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = 8\,s$ صفر می‌شود و طبق صورت تست در این لحظه تندی $14\,m/s$ است.

$$|v_8| = 14 \xrightarrow{\text{در لحظهٔ } t=8\,s \text{ شیب نمودار منفی است.}} v_8 = -14\,m/s$$

گام سوم: حالا می‌توانیم شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول را حساب کنیم:

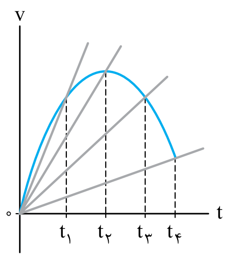
$$a_{av(0,8)} = \frac{v_8 - v_0}{t_8 - t_0} = \frac{-14 - 10}{8 - 0} = \frac{-24}{8} \Rightarrow \vec{a}_{av(0,8)} = (-3\,m/s^2)\vec{i}$$

هر چیزی را که دربارهٔ تندشونده یا کندشونده بودن حرکت متحرک باید بدانید در جدول زیر آورده‌ایم:

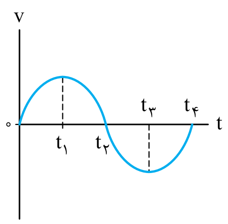
نوع حرکت	علامت شتاب و سرعت	جهت نیرو و حرکت	وضعیت در نمودار سرعت ـ زمان	وضعیت در نمودار مکان ـ زمان
تندشونده	$av > 0$ شتاب در جهت حرکت یا شتاب در جهت سرعت	$Fv > 0$ نیرو در جهت حرکت یا نیرو در جهت سرعت	نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t	نمودار مکان ـ زمان در حال دورشدن از نقطهٔ اکسترمم (طرف راست اکسترمم)
کُندشونده	$av < 0$ شتاب در خلاف جهت حرکت یا شتاب در خلاف جهت سرعت	$Fv > 0$ نیرو در خلاف جهت حرکت یا نیرو در خلاف جهت سرعت	نمودار سرعت ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور t	نمودار مکان ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به نقطهٔ اکسترمم (طرف چپ اکسترمم)

۲۰۷. گزینه ۱ در درس‌نامه گفتیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان بیانگر شتاب متوسط در بازهٔ زمانی محدود بین آن دو نقطه است؛ بنابراین هر چه شیب خط عبوری از دو نقطه بیشتر باشد، شتاب متوسط در آن بازهٔ زمانی هم بزرگ‌تر است.

مطابق شکل در بازهٔ زمانی $(0, t_1)$ شیب خط واصل بین دو نقطه بیشتر از حالت‌های دیگر است؛ بنابراین در بازهٔ زمانی $(0, t_1)$ شتاب متوسط متحرک بزرگ‌تر است.



۲۰۸. گزینه ۲ هر جا که نمودار سرعت ـ زمان نزولی باشد، علامت و جهت شتاب متوسط منفی خواهد بود. در نمودار سرعت ـ زمان روبه‌رو، نمودار در بازهٔ (t_1, t_3) نزولی است؛ پس در همین بازه شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



۲۰۹. گزینه ۴ ابتدا اندازهٔ شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $(4\,s, 8\,s)$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(4,8)} = \frac{v_8 - v_4}{8 - 4} = \frac{12 - 0}{4} = 3\,m/s^2$$

حالا گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

۱) $a_{av(2,8)} = \frac{v_{(8)} - v_{(2)}}{t_8 - t_2} = \frac{12 - (-6)}{8 - 2} = \frac{18}{6} = 3\,m/s^2$ ✓

۲) $a_{av(2,4)} = \frac{v_{(4)} - v_{(2)}}{t_4 - t_2} = \frac{0 - (-6)}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3\,m/s^2$ ✓

(۳) $a_{av(۰,۳)} = \frac{v_۳ - v_۰}{t_۳ - t_۰} = \frac{-۲-(۷)}{۳} = \frac{-۹}{۳} = -۳\, m/s^۲ \Rightarrow |a_{(۰,۳)}| = ۳\, m/s^۲$ ✓

(۴) $a_{av(۰,۸)} = \frac{v_۸ - v_۰}{t_۸ - t_۰} = \frac{۱۲-۷}{۸-۰} = \frac{۵}{۸}\, m/s^۲$ ✗

۲۱۰. گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ $|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$، بزرگی شتاب در هر گزینه را مقایسه و بررسی می‌کنیم:

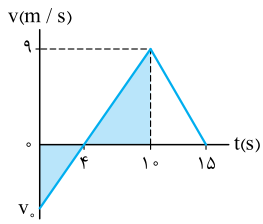
(۱) $(\frac{T}{۴}$ تا $\frac{T}{۲}): |a_{av}| = \frac{|-v_m - ۰|}{\frac{T}{۲}-\frac{T}{۴}} = ۴\frac{v_m}{T}$ ، $(\frac{T}{۲}$ تا $\frac{۳T}{۴}): |a_{av}| = \frac{|۰-(-v_m)|}{\frac{۳T}{۴}-\frac{T}{۲}} = ۴\frac{v_m}{T}$ ✓

(۲) $(\frac{T}{۴}$ تا $\frac{۳T}{۴}): |a_{av}| = \frac{۰-۰}{\frac{۳T}{۴}-\frac{T}{۴}} = ۰$ ، $(۰$ تا $T): |a_{av}| = \frac{v_m - v_m}{T-۰} = ۰$ ✓

(۳) $(۰$ تا $\frac{T}{۲}): |a_{av}| = \frac{|-v_m - v_m|}{\frac{T}{۲}-۰} = ۴\frac{v_m}{T}$ ، $(\frac{T}{۲}$ تا $T): |a_{av}| = \frac{v_m-(-v_m)}{T-\frac{T}{۲}} = ۴\frac{v_m}{T}$ ✓

(۴) $(۰$ تا $\frac{T}{۲})$: (در (۳) حساب کردیم.) $|a_{av}| = ۴\frac{v_m}{T}$ ، $(\frac{T}{۴}$ تا $\frac{۳T}{۴})$: (در (۲) حساب کردیم.) $|a_{av}| = ۰$ ✗

۲۱۱. گزینه ۱ **گام اول:** به کمک تشابه مثلث‌ها، مقدار سرعت اولیه را به دست می‌آوریم. دو مثلث رنگی با هم متشابه‌اند؛ پس داریم:

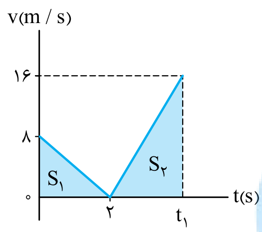


$$\frac{|v_۰|}{۹} = \frac{۴}{۱۰-۴} \Rightarrow \frac{|v_۰|}{۹} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |v_۰| = ۶\, m/s \xrightarrow{(\text{زیر محور t است } v_۰)} v_۰ = -۶\, m/s$$

گام دوم: شتاب متوسط را با استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌کنیم:

$$a_{av(۰,۱۵)} = \frac{۰-(-۶)}{۱۵-۰} = \frac{۶}{۱۵} = ۰/۴\, m/s^۲$$

۲۱۲. گزینه ۲ **گام اول:** با توجه به نمودار روبه‌رو تغییرات سرعت برابر با $\Delta v = ۱۶ - ۸ = ۸\, m/s$ است. از طرفی تغییرات زمان برابر $\Delta t = t_۱ - ۰ = t_۱$ است؛ پس:



$$a_{av(۰,t_۱)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{۸}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۸}{۲} = ۴\, s$$

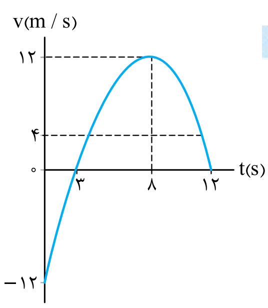
گام دوم: حالا جابه‌جایی را به دست می‌آوریم. همان‌طور که می‌دانید اندازهٔ جابه‌جایی برابر با مساحت زیر نمودار v ـ t است. پس:

$$\Delta x = S_۱ + S_۲ = \frac{۸\times۲}{۲} + \frac{۱۶\times(t_۱-۲)}{۲} \xrightarrow{t_۱=۴\,s} \Delta x = ۸ + \frac{۱۶\times(۴-۲)}{۲} = ۸+۱۶ = ۲۴\, m$$

گام سوم: به کمک $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ پروندهٔ این تست را می‌بندیم:

$$v_{av} = \frac{۲۴}{۴-۰} = \frac{۲۴}{۴} = ۶\, m/s$$

۲۱۳. گزینه ۱ **گام اول:** در بازهٔ صفر تا ۳ s نمودار سرعت ـ زمان زیر محور t است و در این مدت علامت سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. اندازهٔ شتاب متوسط در این بازه برابر است با:



$$a_{av(۰,۳)} = \frac{v_۳ - v_۰}{\Delta t_{(۰,۳)}} = \frac{۰-(-۱۲)}{۳-۰} = ۴\, m/s^۲$$

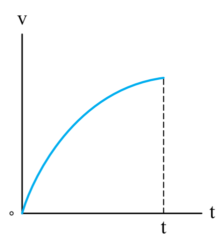
گام دوم: در بازهٔ ۳ s تا ۸ s نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t است و پس در این مدت تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده است. اندازهٔ شتاب متوسط در این بازه را هم حساب می‌کنیم:

$$a_{av(۳,۸)} = \frac{v_۸ - v_۳}{\Delta t_{(۳,۸)}} = \frac{۱۲-۰}{۸-۳} = \frac{۱۲}{۵}\, m/s^۲$$

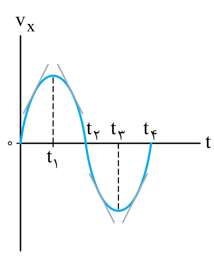
گام سوم: حالا نسبت اندازه‌های دو شتاب را به دست می‌آوریم:

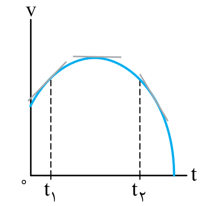
$$\frac{a_{av(۰,۳)}}{a_{av(۳,۸)}} = \frac{۴}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{۲۰}{۱۲} = \frac{۵}{۳}$$

۲۱۴. گزینه ۴ اگر به نمودار روبه‌رو دقت کنید، می‌بینید که در هر لحظه نمودار سرعت ـ زمان در حال دورشدن از محور t است، پس اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و در نتیجه حرکت تندشونده است. از طرفی چون نمودار سرعت ـ زمان یک خط راست نیست (منحنی است) و شیب نمودار در هر لحظه تغییر می‌کند، شتاب متغیر است.

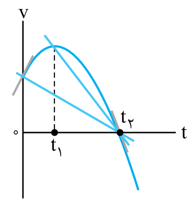


۲۱۵. گزینه ۱ باید به دنبال ناحیه‌ای بگردیم که شیب نمودار v ـ t مثبت باشد. این ناحیه با توجه به شکل روبه‌رو از صفر تا $t_۱$ و از $t_۳$ تا $t_۴$ است. در گزینه‌ها، بازهٔ زمانی $t_۳$ تا $t_۴$ را می‌بینیم.





۲۱۶. گزینه ۴ می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار $v - t$، شتاب را نشان می‌دهد. مطابق شکل، مقدار شیب نمودار ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌شود. بنابراین اندازهٔ شتاب ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



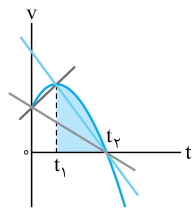
۲۱۷. گزینه ۴ با توجه به نمودار، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) در بازهٔ صفر تا $t_۱$، اندازهٔ سرعت (تندی) در حال افزایش است؛ نه کاهش! ✗

۲) اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار $v - t$، بزرگی شتاب را نشان می‌دهد؛ از آن‌جا که نمودار بخشی از یک سهمی است، اندازهٔ شیب خط در لحظهٔ $t_۲$ بیشتر از لحظهٔ صفر است؛ پس بزرگی شتاب در لحظهٔ $t_۲$ بیشتر از لحظهٔ صفر است. ✗

۳) در بازهٔ صفر تا $t_۱$، سرعت در حال افزایش $(\Delta v > ۰)$ و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، سرعت در حال کاهش $(\Delta v < ۰)$ است؛ بنابراین طبق رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، از صفر تا $t_۱$ شتاب در جهت محور x و از $t_۱$ تا $t_۲$ شتاب در خلاف جهت محور x است. ✗

۴) اندازهٔ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$، بیشتر از اندازهٔ شیب خط گذرنده از $t = ۰$ و $t_۲$ است؛ بنابراین بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بیشتر از بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۲$ است. ✓



۲۱۸. گزینه ۱ با توجه به نمودار، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) در لحظهٔ $t_۱$، علامت شتاب از مثبت به منفی تغییر می‌کند، اما علامت سرعت همچنان مثبت است. ✗

ب) در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار بالای محور t است (v مثبت است)، بنابراین متحرک در جهت محور x حرکت کرده است. ✓

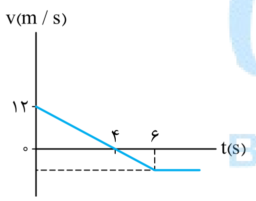
پ) در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$، تندی در حال افزایش است؛ نه کاهش! ✗

ت) بردار شتاب **متوسط** در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ (شیب خط گذرنده از $t = ۰$ و $t_۲$) خلاف جهت محور x است، ولی بردار شتاب از صفر تا $t_۱$ در جهت محور x و از $t_۱$ تا $t_۲$ در خلاف جهت محور x است! ✗

بنابراین فقط عبارت (ب) درست است.

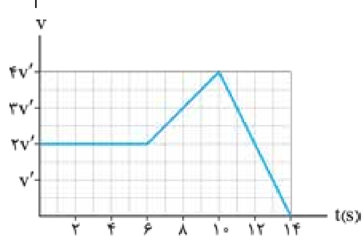
۲۱۹. گزینه ۱ شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر شتاب لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر است؛ پس اگر نسبت شتاب در $t = ۱۰\,s$ به شتاب در $t = ۲\,s$ را می‌خواهیم، باید شیب مماس‌های وارد بر نمودار $v - t$ در این نقاط را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} t = ۲\,s \Rightarrow \text{شیب مماس بر نمودار} = \frac{۱۶-۱۰}{۲-۰} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow a_{(۲)} = ۳\,m/s^۲ \\ t = ۱۰\,s \Rightarrow \text{شیب مماس بر نمودار} = \frac{۱۰-(-۱۰)}{۱۰} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲ \Rightarrow a_{(۱۰)} = ۲\,m/s^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_{(۱۰)}}{a_{(۲)}} = \frac{۲}{۳}$$



۲۲۰. گزینه ۲ چون نمودار سرعت ـ زمان در بازهٔ زمانی $(۰, ۶\,s)$ یک خط راست است، شتاب در این بازهٔ زمانی ثابت است. پس برای محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $(۳\,s, ۶\,s)$ می‌توانیم شتاب متوسط در هر بازهٔ دلخواهی از $(۰, ۶\,s)$ را حساب کنیم؛ یعنی:

$$|a_{av(۳,۶)}| = |a_{av(۰,۴)}| = \frac{|۰-۱۲|}{۴} = ۳\,m/s^۲$$

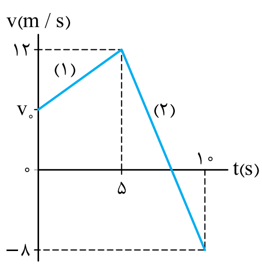


۲۲۱. گزینه ۱ ابتدا با توجه به خانه‌های شطرنجی اندازهٔ زمان و سرعت (پارامتری) را برای هر خانه مشخص می‌کنیم. حالا از آن‌جا که نمودار در چند بخش به صورت خطی است، شتاب لحظه‌ای در هر بخش برابر شتاب متوسط در آن بازه است؛ مثلاً اندازهٔ شتاب در لحظهٔ $t = ۸\,s$ برابر شتاب متوسط در بازهٔ $(۶\,s, ۱۰\,s)$ است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a_۸ = a_{av(۶,۱۰)} = \frac{۴v'-۲v'}{۱۰-۶} = \frac{v'}{۲} \\ a_{۱۲} = a_{av(۱۰,۱۴)} = \frac{|۰-۴v'|}{۱۴-۱۰} = v' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_۸}{a_{۱۲}} = \frac{\frac{v'}{۲}}{v'} = \frac{۱}{۲}$$

۲۲۲. گزینه ۲ چون نمودار سرعت ـ زمان متحرک B در بازهٔ صفر تا $t_۲$ خط راست است، شتاب متحرک B در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ ثابت است. با توجه به این موضوع شتاب متوسط متحرک B در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ همان شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۲$ است و داریم:

$$۲ = \frac{|a_{av,A}|}{|a_{av,B}|} = \frac{\left|\frac{\Delta v_A}{\Delta t_A}\right|}{\left|\frac{\Delta v_B}{\Delta t_B}\right|} = \frac{\left|\frac{۰-۳v}{t_۱-۰}\right|}{\left|\frac{۰-(-۲v)}{t_۲-۰}\right|} \Rightarrow ۲ = \frac{\frac{۳v}{t_۱}}{\frac{۲v}{t_۲}} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{t_۲}{t_۱}$$



$\vec{v}_۰ = (۲\,m/s)\vec{j}$

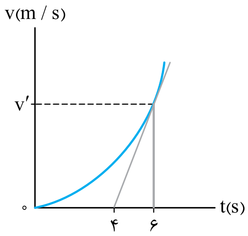
۲۲۳. گزینه ۱ **گام اول:** در بازهٔ (۵ s تا ۱۰ s) نمودار سرعت ـ زمان خط راست است؛ پس شتاب در این بازه ثابت است و شتاب هر لحظه (مثل $t = ۸\,s$) برابر با شتاب متوسط $(a_{av,۲})$ در این بازه است. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

$$a_۸ = a_{av,۲} \Rightarrow a_۸ = \frac{\Delta v_۲}{\Delta t_۲} = \frac{-۸-۱۲}{۱۰-۵} = \frac{-۲۰}{۵} = -۴\,m/s^۲$$

گام دوم: اندازهٔ شتاب در ۲ ثانیهٔ دوم یعنی در بازهٔ (۲ s تا ۴ s) نصف $|a_۸|$ است؛ از طرفی چون شیب نمودار $v - t$ در بازهٔ صفر تا ۵ s ثابت و مثبت است. شتاب متوسط در این بازه ثابت و مثبت است و داریم:

$$a_{av,۱} = \frac{۱}{۲}|a_۸| \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱}{۲}(۴) \Rightarrow \frac{۱۲-v_۰}{۵-۰} = ۲ \Rightarrow ۱۲ - v_۰ = ۱۰ \Rightarrow v_۰ = ۲\,m/s$$

گام سوم: متحرک روی محور y حرکت می‌کند و سرعت اولیه‌اش مثبت است؛ پس:



۲۲۴. گزینه ۳ مطابق شکل فرض می‌کنیم اندازهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۶\,s$، v' باشد. با توجه به این‌که شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۶\,s$ را هم می‌توان به دست آورد؛ بنابراین:

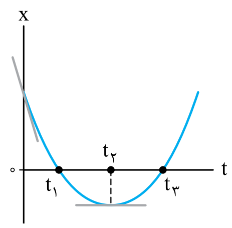
$$\left.\begin{aligned} a_۶ &= \frac{v'}{۶-۴} = \frac{v'}{۲} \\ a_{av(۰,۶)} &= \frac{v'}{۶-۰} = \frac{v'}{۶} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_۶}{a_{av(۰,۶)}} = \frac{\frac{v'}{۲}}{\frac{v'}{۶}} = ۳$$

۲۲۵. گزینه ۴ در نمودار x ـ t سرعت لحظه‌ای برابر با شیب خط مماس بر نمودار است. در $t = ۰$ و $t = ۵\,s$ سرعت صفر است، چون در این دو لحظه خط مماس بر نمودار افقی است؛ پس شتاب متوسط در این بازهٔ زمان هم صفر می‌شود؛ به زبان ریاضی:

$$\begin{cases} v_{(۰)} = ۰ \\ v_{(۵)} = ۰ \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{(۵)} - v_{(۰)}}{۵} = \frac{۰}{۵} = ۰$$

۲۲۶. گزینه ۱ این نمودار یک سهمی با نقطهٔ کمینه (گودی رو به بالا) است. پس شتاب این حرکت در تمام لحظه‌ها مثبت و غیرصفر است. از جمله در لحظهٔ $t_۲$ (نادرستی عبارت ۱) و در لحظهٔ $t_۱$ (درستی عبارت ۴).

حواستون باشه در لحظهٔ $t_۲$ شیب نمودار مکان ـ زمان صفر است، در نتیجه سرعت در این لحظه صفر است، نه شتاب.

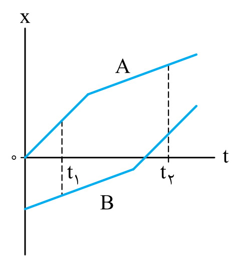


بررسی گزینه‌های دیگر:

۲ حرکت قبل از نقطهٔ اکسترمم کُندشونده و پس از آن تندشونده است. پس در بازهٔ صفر تا $t_۲$ حرکت کندشونده است. ✓

۳ در شکل روبه‌رو خط مماس در لحظه‌های صفر و $t_۲$ را نشان داده‌ایم. شیب این خطها نشان می‌دهد علامت سرعت در لحظهٔ صفر منفی و سرعت در لحظهٔ $t_۲$ نیز صفر است، پس داریم:

$$\begin{cases} v_۰ < ۰ \\ v_۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow v_۲ - v_۰ > ۰ \Rightarrow a_{av(۰,۲)} > ۰ \ ✓$$

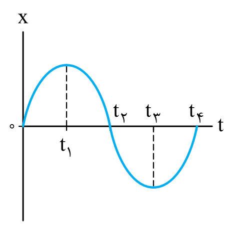


۲۲۷. گزینه ۳ **بررسی شتاب متوسط متحرک A:** شیب نمودار x ـ t بیانگر سرعت است؛ بنابراین سرعت متحرک A در $t_۱$ بیشتر از سرعتش در $t_۲$ است و داریم:

$$v_{۲,A} < v_{۱,A} \Rightarrow v_{۲,A} - v_{۱,A} < ۰ \xrightarrow{\Delta t > ۰} \frac{v_{۲,A} - v_{۱,A}}{\Delta t} < ۰ \Rightarrow \frac{\Delta v_A}{\Delta t} < ۰ \Rightarrow a_{av,A} < ۰$$

بررسی شتاب متوسط متحرک B: برای متحرک B سرعت در $t_۲$ بیشتر از سرعت در $t_۱$ است و داریم:

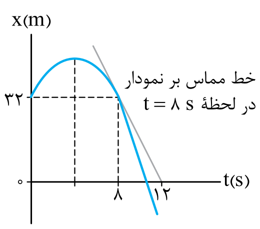
$$v_{۲,B} > v_{۱,B} \Rightarrow v_{۲,B} - v_{۱,B} > ۰ \xrightarrow{\Delta t > ۰} \frac{v_{۲,B} - v_{۱,B}}{\Delta t} > ۰ \Rightarrow \frac{\Delta v_B}{\Delta t} > ۰ \Rightarrow a_{av,B} > ۰$$



۲۲۸. گزینه ۱ **برداشت ۱:** گفتیم در نمودار مکان ـ زمان، در بازه‌ای که مینیمم داریم ( ) علامت شتاب مثبت و در بازه‌ای که ماکسیمم داریم ( ) شتاب منفی است؛ بنابراین شتاب در بازهٔ صفر تا $t_۲$ در خلاف جهت محور x است.

برداشت ۲: هر جا متحرک در جهت محور x حرکت کند، علامت سرعت هم مثبت می‌شود؛ با این حساب در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ و $t_۳$ تا $t_۴$ سرعت در جهت محور x است.

نتیجه در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ شتاب متوسط در خلاف جهت محور x و سرعت متوسط در جهت محور x است.

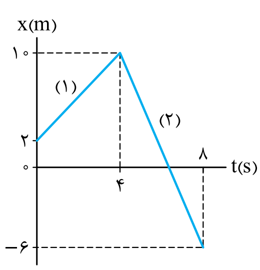


۲۲۹. گزینه ۲ **گام اول:** با توجه به تقارنی که در سهمی نسبت به نقطهٔ اکسترمم آن وجود دارد در شکل روبه‌رو نقطهٔ بیشینه در $t = ۴\,s$ قرار دارد و در نتیجه سرعت متحرک در $t = ۴\,s$ صفر است. همچنین سرعتش در $t = ۸\,s$ به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$v_۸ = \text{شیب مماس بر نمودار} = \frac{۰-(۳۲)}{۱۲-۸} = \frac{-۳۲}{۴} = -۸\,m/s$$

گام دوم: پس شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av(۴,۸)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۸ - v_۴}{\Delta t} = \frac{-۸-۰}{۸-۴} = \frac{-۸}{۴} = -۲\,m/s^۲ \Rightarrow |a_{av}| = ۲\,m/s^۲$$



۲۳۰. گزینه ۱ **گام اول:** ۳ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از $t = ۳\,s$ تا $t = ۶\,s$ برای این‌که در این بازه شتاب متوسط را به دست آوریم، باید سرعت لحظه‌ای در $t = ۳\,s$ و $t = ۶\,s$ را حساب کنیم.

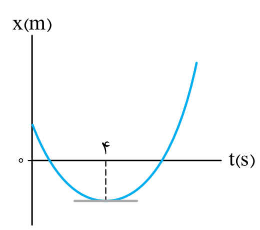
چون در بازهٔ $(۰, ۴\,s)$ و $(۴\,s, ۸\,s)$ نمودار x ـ t خط راست است، در این بازه‌ها سرعت ثابت است و داریم:

$$v_۳ = v_{av,۱} = \frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۱۰-۲}{۴-۰} = \frac{۸}{۴} = ۲\,m/s \qquad v_۶ = v_{av,۲} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} = \frac{-۶-۱۰}{۸-۴} = \frac{-۱۶}{۴} = -۴\,m/s$$

گام دوم: حالا می‌توانیم شتاب متوسط را حساب کنیم:

$$a_{av(۳,۶)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۶ - v_۳}{\Delta t} = \frac{-۴-۲}{۶-۳} = \frac{-۶}{۳} = -۲\,m/s^۲$$

بنابراین، بردار شتاب متوسط به صورت $\vec{a}_{av} = (-۲\,m/s^۲)\vec{i}$ خواهد بود.



۲۳۱. گزینه ۴ در نمودار مکان ـ زمان، حرکت قبل از نقطهٔ اکسترمم کُندشونده است. پس این‌جا که در بازهٔ صفر تا $۴\,s$ حرکت کُندشونده است، نقطهٔ کمینه در لحظهٔ $t = ۴\,s$ قرار دارد. از طرف دیگر می‌دانید که در نمودار مکان ـ زمان در نقطهٔ اکسترمم شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه سرعت متحرک صفر است. پس داریم:

$$a_{av(۰,۴)} = \frac{v_۴ - v_۰}{\Delta t_{(۰,۴)}} \xrightarrow[a_{av(۰,۴)} = ۵\,m/s^۲]{v_۴ = ۰} ۵ = \frac{۰ - v_۰}{۴-۰} \Rightarrow v_۰ = -۲۰\,m/s \Rightarrow \vec{v}_۰ = (-۲۰\,m/s)\vec{i}$$

درس دهم معادله و نمودار شتاب ـ زمان در حرکت راست خط

معادلهٔ شتاب ـ زمان

شتاب متحرکی را که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند می‌توانیم با معادلهٔ شتاب ـ زمان نشان بدهیم. در سطح کتاب درسی از معادلهٔ شتاب ـ زمان می‌توانیم چیزهایی مثل اندازهٔ شتاب در هر لحظه و یا لحظهٔ تغییر جهت بردار شتاب را حساب کنیم. تست زیر را ببینید:

تست ۹ | معادلهٔ شتاب ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به صورت $a = 2t - 4$ است. در چه لحظه‌ای جهت شتاب متحرک تغییر می‌کند؟

۱) ۵ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ ۳ | می‌خواهیم لحظهٔ تغییر علامت شتاب را پیدا کنیم. برای این کار باید معادلهٔ $a = 2t - 4$ را تعیین علامت کنیم:

$$a = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2\,s$$

لحظهٔ تغییر علامت شتاب

$t\,(s)$	0		2	
$a\,(m/s^2)$	-4	$(-)$	0	$(+)$

با توجه به جدول تعیین علامت در لحظهٔ $t = 2\,s$، بردار شتاب، از منفی به مثبت تغییر جهت می‌دهند.

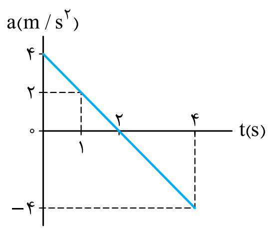
یادآوری هر اتفاقی برای شتاب می‌افتد، برای نیروی خالص وارد بر جسم هم می‌افتد. مثلاً در تست بالا، در لحظه‌ای که شتاب تغییر علامت می‌دهد و جهتش تغییر می‌کند، نیروی خالص وارد بر جسم هم جهتش تغییر می‌کند.

نمودار شتاب ـ زمان

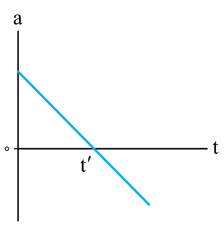
برای هر حرکتی بر مسیر مستقیم می‌توانیم نمودار شتاب ـ زمان رسم کنیم. این نمودار هم مثل معادلهٔ شتاب ـ زمان، وضعیت شتاب متحرک در هر لحظه را نشان می‌دهد.

آن‌چه از نمودار شتاب ـ زمان می‌توانیم بفهمیم

۱. تشخیص شتاب متحرک در هر لحظه • هر نقطه از نمودار شتاب ـ زمان نشان می‌دهد که شتاب متحرک در هر لحظه چه‌قدر است. هم‌چنین علامت و جهت شتاب بالای محور t مثبت و پایین محور t منفی است. مثلاً در نمودار شتاب ـ زمان روبه‌رو، شتاب متحرک در لحظهٔ $t_1 = 1\,s$ برابر $2\,m/s^2$ و در لحظهٔ $t_2 = 4\,s$ برابر $-4\,m/s^2$ است.



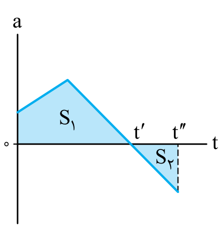
۲. لحظهٔ تغییر جهت بردار شتاب • لحظه‌ای که نمودار شتاب ـ زمان محور t را قطع می‌کند، شتاب برای لحظه‌ای صفر می‌شود و علامت (جهت) شتاب تغییر می‌کند. مثلاً در شکل روبه‌رو علامت و جهت شتاب در لحظهٔ t' از مثبت به منفی تغییر می‌کند. (لحظهٔ t'، لحظهٔ تغییر جهت نیروی خالص وارد بر جسم هم هست.)



۳. محاسبهٔ تغییرات سرعت • مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور t برابر اندازهٔ تغییرات سرعت (Δv) است. (تأکید می‌کنیم تغییرات سرعت، نه خود سرعت!) مثلاً در شکل روبه‌رو مساحت S_1 برابر تغییرات سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t' است.

اگر نمودار شتاب ـ زمان بالای محور t باشد، علامت تغییرات سرعت (Δv) مثبت و اگر نمودار شتاب ـ زمان پایین محور t باشد، علامت تغییرات سرعت منفی است. مثلاً در شکل روبه‌رو تغییرات سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا t' مثبت و در بازهٔ t' تا t'' منفی است:

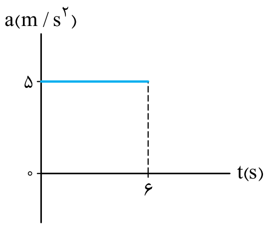
$$\Delta v_1 = S_1 \,,\, \Delta v_2 = -S_2$$



۴. محاسبهٔ شتاب متوسط با داشتن تغییرات سرعت در یک بازهٔ زمانی می‌توانیم شتاب متوسط را هم در آن بازه محاسبه کنیم؛ مثلاً در شکل بالا شتاب متوسط در بازهای زمانی «صفر تا t'» و «t' تا t''»، و هم‌چنین «صفر تا t''» به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_{av(0,t')} = \frac{\Delta v_1}{t'-0} = \frac{S_1}{t'} \qquad a_{av(t',t'')} = \frac{\Delta v_2}{t''-t'} = \frac{-S_2}{t''-t'} \qquad a_{av(0,t'')} = \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{t''-0} = \frac{S_1 + (-S_2)}{t''}$$

۵. سرعت متحرک در هر لحظه و تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت هرگز نمی‌توانیم فقط با یک نمودار شتاب ـ زمانِ خالی سرعت متحرک در هر لحظه را پیدا کنیم یا تندشونده و کندشونده بودن حرکت را تشخیص بدهیم. ولی اگر در صورت مسئله سرعت در یک لحظه (مثل سرعت اولیه) را بدهند، می‌توانیم چیزهای دیگری را هم بفهمیم.



مثلاً فرض کنید در شکل روبه‌رو سرعت اولیه $v_0 = -10\ m/s$ است.

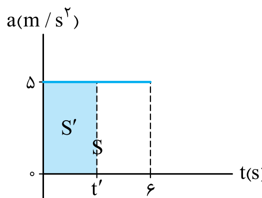
۳تا از مهم‌ترین سؤال‌هایی که می‌شود پرسید، این‌ها هستند:

الف) سرعت متحرک در یک لحظهٔ خاص مثلاً $t = 6\ s$ چند متر بر ثانیه است؟

ب) **در چه لحظه‌ای سرعت متحرک صفر می‌شود** و متحرک تغییر جهت می‌دهد؟ *(این سؤال از همشون مهم‌تره)*

پ) در کدام بازهٔ زمانی حرکت کُندشونده و در کدام بازهٔ زمانی حرکت تندشونده است؟

حالا به این سؤال‌ها یکی‌یکی پاسخ می‌دهیم:



الف) اول با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار در بازهٔ صفر تا ۶ s تغییرات سرعت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v_{(0,6)} = S = 5 \times 6 = 30\ m/s$$

با داشتن سرعت اولیه، سرعت در لحظهٔ $t = 6\ s$ را حساب می‌کنیم:

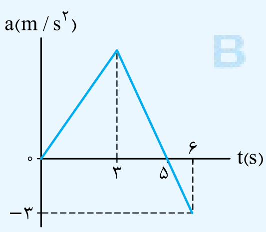
$$\Delta v_{(0,6)} = v_6 - v_0 \xrightarrow{v_0 = -10\ m/s} 30 = v_6 - (-10) \Rightarrow v_6 = 20\ m/s$$

ب) حالا می‌رسیم به مهم‌ترین سؤال؛ «در چه لحظه‌ای سرعت صفر می‌شود؟» فرض کنید در لحظهٔ t' سرعت صفر شده است. پس با داشتن سرعت ابتدا و انتهای بازهٔ صفر تا t' می‌توانیم، لحظهٔ t' را هم حساب کنیم:

$$S' = \Delta v_{(0,t')} \xrightarrow{S' = 5t'} 5t' = v' - v_0 \xrightarrow{v'=0,\ v_0=-10\ m/s} 5t' = 0 - (-10) \Rightarrow t' = \frac{10}{5} = 2\ s$$

یعنی در لحظهٔ $t' = 2\ s$ سرعت متحرک صفر می‌شود و جهت حرکت متحرک از منفی به مثبت تغییر می‌کند.

پ) تندی متحرک در لحظه‌های صفر، $t' = 2\ s$ و $t = 6\ s$ به ترتیب $10\ m/s$، صفر و $20\ m/s$ است، پس از صفر تا ۲ s حرکت کندشونده و از ۲ s تا ۶ s حرکت تندشونده است.



تست ۲ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در مبدأ زمان سرعت متحرک $-4\ m/s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در بازهٔ صفر تا $t = 6\ s$ و لحظهٔ تغییر جهت متحرک در این بازهٔ زمانی برحسب یکاهای SI به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

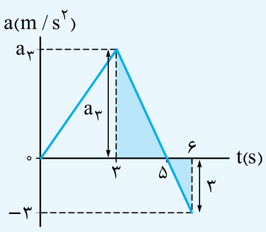
۱) ۲/۲۵، ۲

۲) ۲/۲۵، ۴

۳) ۱/۲۵، ۲

۴) ۱/۲۵، ۴

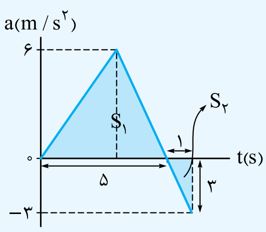
پاسخ ۱ محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا ۶ s:



(الف)

گام اول: در شکل (الف) به لطف تشابه دو مثلث رنگی، a_3 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{5-3}{6-5} = \frac{a_3}{3} \Rightarrow a_3 = 6\ m/s^2$$



(ب)

گام دوم: برای محاسبهٔ شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را داشته باشیم؛ پس می‌رویم سراغ محاسبهٔ مساحت‌های S_1 و S_2 در شکل (ب):

$$\begin{cases} S_1 = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \\ S_2 = \frac{1 \times 3}{2} = 1/5 \end{cases} \Rightarrow \Delta v = S_1 - S_2 = 15 - 1/5 = 13/5\ m/s$$

به کمک رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط در بازهٔ $(0, 6\ s)$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{13/5}{6-0} = 2/25\ m/s^2$$

گام سوم: رسیدیم به قسمت سخت مسئله، می‌خواهیم لحظهٔ تغییر جهت متحرک را پیدا کنیم. برای حل این قسمت باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که متحرک سرعتش صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. سرعت اولیهٔ متحرک $-۴\ m/s$ است؛ پس برای این‌که سرعتش صفر شود باید تغییرات سرعتش $+۴\ m/s$ باشد:

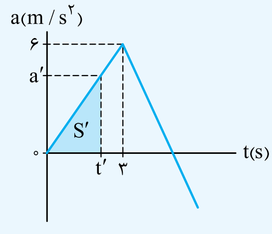
$$\Delta v = v' - v_۰ \xrightarrow[v'=۰]{v_۰=-۴\ m/s} \Delta v = ۰-(-۴) = ۴\ m/s$$

یعنی مساحت S' در شکل (پ) باید برابر ۴ باشد:

$$S' = ۴ \Rightarrow \frac{a't'}{۲} = ۴ \Rightarrow a't' = ۸ \quad (۱)\ \text{رابطهٔ}$$

با کمی دقت در شکل (پ) می‌بینیم که بین a' و t' نسبت تالسی ۶ به ۳ برقرار است:

$$\frac{a'}{t'} = \frac{۶}{۳} \Rightarrow a' = ۲t' \quad (۲)\ \text{رابطهٔ}$$



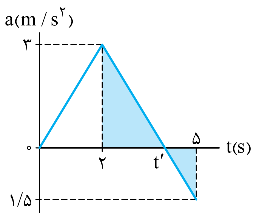
(پ)

حالا a' رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم و جواب تست را پیدا می‌کنیم:

$$a't' = ۸ \xrightarrow{a'=۲t'} ۲t'^۲ = ۸ \Rightarrow t'^۲ = ۴ \Rightarrow t' = ۲\,s$$

۲۳۲. (گزینه ۳) لحظه‌ای که نمودار شتاب ـ زمان، محور t را قطع می‌کند، علامت و جهت شتاب تغییر می‌کند. مطابق شکل برای محاسبهٔ این لحظه (t')، از تشابه دو مثلث رنگی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۵-t'}{t'-۲} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۱/۵}}}{\underset{۲}{\cancel{۳}}} \Rightarrow ۱۰-۲t' = t'-۲ \Rightarrow ۳t' = ۱۲ \Rightarrow t' = ۴\,s$$

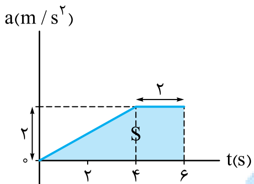


۲۳۳. (گزینه ۳) **گام اول**: سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر تغییرات سرعت (یعنی Δv) است؛ پس مساحت زیر نمودار یعنی ذوزنقهٔ رنگی را حساب می‌کنیم:

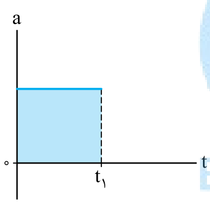
$$\Delta v = S = \frac{(۲+۶)\times ۲}{۲} = ۸\ m/s$$

گام دوم: چون متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، سرعت اولیه برابر صفر است؛ یعنی:

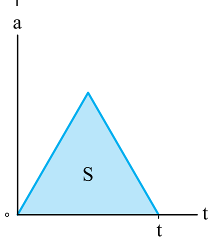
$$\Delta v = v - v_۰ \Rightarrow ۸ = v - ۰ \Rightarrow v = ۸\ m/s$$



۲۳۴. (گزینه ۴) مطابق شکل، نمودار شتاب ـ زمان در بازهٔ $(۰, t_۱)$ بالای محور t قرار دارد، پس $\Delta v > ۰$ است؛ اما چون در مورد سرعت اولیه (اندازه و مثبت‌بودن آن) اطلاعاتی نداریم، نمی‌توانیم دربارهٔ نوع حرکت حرفی بزنیم!



۲۳۵. (گزینه ۱) مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان، تغییرات سرعت را نشان می‌دهد. مطابق شکل، چون نمودار شتاب ـ زمان بالای محور t است؛ تغییرات سرعت مثبت است $(\Delta v > ۰)$. حالا از آن‌جا که متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، سرعت اولیه‌اش هم صفر است؛ بنابراین اندازهٔ سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $(۰, t)$ همواره در حال افزایش است؛ یعنی حرکت این متحرک در بازهٔ $(۰, t)$ **پیوسته تندشونده** است.



تکنیک بدون شک حرکتی که از حال سکون شروع می‌شود، تندشونده است. از آن‌جا که در تمام مدت جهت شتاب *(شما بخوانید نیروی خالص وارد بر جسم)* مثبت و در جهت حرکت است، پس این حرکت در تمام لحظه‌ها تندشونده است.

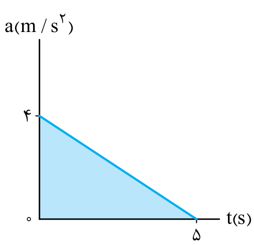
۲۳۶. (گزینه ۴) **گام اول**: مساحت زیر نمودار a ـ t برابر تغییرات سرعت است. با توجه به این موضوع مقدار تغییرات سرعت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v = \frac{۴\times ۵}{۲} = ۱۰\ m/s$$

گام دوم: با داشتن سرعت اولیه و تغییرات سرعت، سرعت نهایی را تعیین می‌کنیم:

$$v_۲ = v_۱ + \Delta v = -۶+۱۰ = ۴\ m/s$$

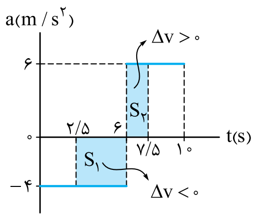
می‌بینید که سرعت از $-۶\ m/s$ به $۴\ m/s$ رسیده است. یعنی ابتدا اندازهٔ سرعت متحرک کاهش پیدا کرده و به صفر می‌رسد (کندشونده) و بعد از تغییر جهت از صفر تا $۴\ m/s$ افزایش پیدا کرده است (تندشونده)؛ بنابراین حرکت متحرک ابتدا کُندشونده و سپس تندشونده بوده است.



۲۳۷. (گزینه ۲) می‌دانیم که مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان در یک بازهٔ زمانی، تغییرات سرعت متحرک در آن بازه را نشان می‌دهد؛ با این حساب اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲/۵\,s$، $\vec{v}_۱$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۷/۵\,s$، $\vec{v}_۲$ باشد، مساحت زیر نمودار در این بازهٔ زمانی، تغییرات سرعت در این بازهٔ زمانی را نشان می‌دهد؛ یعنی:

$$\Delta v_{(۲/۵,۷/۵)} = -S_۱ + S_۲ = -\overbrace{(۶-۲/۵)}^{۳/۵}\times ۴ + \overbrace{(۷/۵-۶)}^{۱/۵}\times ۶ = -۱۴+۹ = -۵\ m/s$$

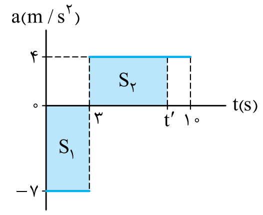
$$\Rightarrow \vec{v}_۲ - \vec{v}_۱ = \Delta\vec{v}_{(۲/۵,۷/۵)} = (-۵\vec{i})\ m/s$$



۲۳۸. گزینه ۳ جهت حرکت وقتی تغییر می‌کند که علامت سرعت عوض شود. با این حساب باید دنبال لحظه‌ای بگردیم که در آن $v=۰$ می‌شود.

برای این کار از بردار سرعت اولیه و مساحت زیر نمودار کمک می‌گیریم:

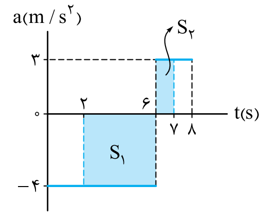
$$\begin{cases}\Delta v=-S_۱+S_۲=-(۷)\times ۳+۴(t'-۳)=۴t'-۳۳\\ \Delta\vec v=\vec v'-\vec v_۰ \xrightarrow{\vec v'=۰,\ \vec v_۰=-۵\vec i} \Delta\vec v=۵\vec i \Rightarrow \Delta v=۵\,m/s\end{cases} \Rightarrow ۵=۴t'-۳۳ \Rightarrow ۴t'=۳۸ \Rightarrow t'=۹/۵\,s$$



۲۳۹. گزینه ۳ برای محاسبهٔ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی (۲s تا ۷s) به کمک مساحت زیر نمودار، اول تغییرات سرعت در این بازهٔ زمانی و بعد شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v_{(۲,۷)}=-S_۱+S_۲=-\underbrace{(۶-۲)}_{۴}\times ۴+\underbrace{(۷-۶)}_{۱}\times ۳=-۱۶+۳=-۱۳\,m/s \Rightarrow \Delta\vec v_{(۲,۷)}=(-۱۳\vec i)\,m/s$$

$$\Rightarrow \vec a_{av(۲,۷)}=\frac{\Delta\vec v_{(۲,۷)}}{\Delta t}=\frac{-۱۳\vec i}{\underbrace{۷-۲}_{۵}}=(-۲/۶\vec i)\,m/s^۲$$

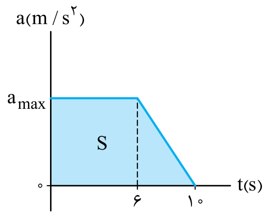


۲۴۰. گزینه ۲ **گام اول**: با توجه به مقدار شتاب متوسط در بازهٔ زمانی (۰,۱۰s)، تغییرات سرعت را به دست می‌آوریم:

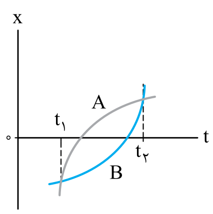
$$a_{av(۰,۱۰)}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۷/۲=\frac{\Delta v}{۱۰-۰} \Rightarrow \Delta v=۷۲\,m/s$$

گام دوم: در شکل روبه‌رو مساحت زیر نمودار تغییرات سرعت را نشان می‌دهد؛ بنابراین a_{max} برابر است با:

$$\Delta v=S=\frac{\overbrace{(۶+۱۰)}^{\overset{۸}{\cancel{۱۶}}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}a_{max}=۷۲ \Rightarrow a_{max}=۹\,m/s^۲$$



۲۴۱. گزینه ۲ مطابق شکل روبه‌رو هر دو متحرک به یک‌اندازه جابه‌جا شده‌اند. چون تغییر جهت هم نداده‌اند، مسافت طی‌شده برای آن‌ها مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است؛ بنابراین: $l_A=l_B$

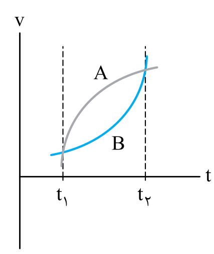


اگر در درستی گزینه‌های دیگر شک دارید، می‌توانید توضیحات زیر را بخوانید:

(۱) در شکل (الف) می‌بینید که مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان متحرک A بیشتر از B است؛ پس جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط A بیشتر از B است. ✓

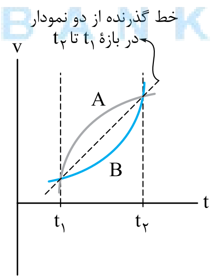
(۳) می‌دانید در نمودار سرعت ـ زمان، شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ نمودار برابر شتاب متوسط است. همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید خط گذرنده از دو نمودار در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ یکسان است. پس در این بازه شتاب متوسط دو متحرک برابر است.

(۴) در شکل (پ) معلوم است که مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان متحرک A بیشتر از B است؛ پس تغییرات سرعت و در نتیجه شتاب متوسط متحرک A بیشتر از B است.



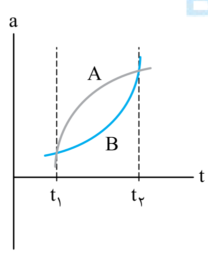
(الف)

$v_{av,A}>v_{av,B}$



(ب)

$a_{av,A}=a_{av,B}$



(پ)

$a_{av,A}>a_{av,B}$

۲۴۲. گزینه ۴ سرعت متوسط متحرک A را حساب می‌کنیم:

$$\vec v_{av,A}=\frac{\vec d_A}{\Delta t}=\frac{-۴\vec i-(-۱۲\vec i)}{۵}=\frac{۸\vec i}{۵}=(۱/۶\,m/s)\vec i$$

پس (۱) درست است.

حالا به سراغ تندی متوسط متحرک A می‌رویم. متحرک A در مبدأ تغییر جهت داده است؛ پس از مکان $-۱۲\vec i$ به مبدأ رفته و سپس تغییر جهت داده و به مکان $-۴\vec i$ بازگشته است. با توجه به این موضوع مسافت طی‌شده برابر است با:

$$l_A=|\Delta x_{۱,A}|+|\Delta x_{۲,A}|=|۰-(-۱۲)|+|(-۴)-۰|=۱۲+۴=۱۶\,m$$

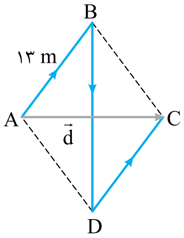
در نتیجه تندی متوسط برابر با $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲\,m/s$ است و (۳) درست است.

چون تندی متوسط دو متحرک با هم برابر است، مسافت طی‌شده توسط دو متحرک هم برابر است. از آن‌جایی که هر دو متحرک فقط یک بار و در مبدأ تغییر جهت داده‌اند، متحرک B از $\vec d_{۱,B}=۹\vec i$ به مبدأ و پس از تغییر جهت در مبدأ به نقطهٔ $\vec d_{۲,B}$ رفته است. با توجه به این‌که مسافت طی‌شده در این حرکت ۱۶ m است، داریم:

$$l_B=|\Delta x_{۱,B}|+|\Delta x_{۲,B}| \xrightarrow{l_A=l_B} ۱۶=|۰-۹|+|x_۲-۰| \Rightarrow ۱۶=۹+x_۲ \Rightarrow x_۲=۷\,m \Rightarrow \vec d_{۲,B}=۷\vec i$$

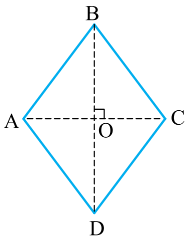
پس (۲) درست است. حالا به سراغ این‌که چرا (۴) نادرست است، می‌رویم:

$$\vec v_{av,B}=\frac{\vec d_B}{\Delta t}=\frac{۷\vec i-۹\vec i}{۵}=\frac{-۲\vec i}{۵}=(-۰/۴\,m/s)\vec i$$



۲۴۳. گزینه ۲ **گام اول**: متحرک مسافت $l_{AB}+l_{BD}+l_{DC}=۵۰\ m$ را طی کرده است. با توجه به این‌که در لوزی ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است. مطابق شکل روبه‌رو داریم:

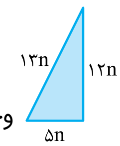
$$l_{AB}+l_{BD}+l_{DC}=۵۰\ m \Rightarrow ۱۳+l_{BD}+۱۳=۵۰ \Rightarrow l_{BD}=۵۰-۲۶=۲۴\ m$$



گام دوم: در لوزی قطرها بر هم عمود هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس:

$$\left.\begin{matrix}OB=۱۲\,m\\AB=۱۳\,m\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB^۲=OA^۲+OB^۲ \Rightarrow ۱۳^۲=OA^۲+۱۲^۲ \Rightarrow OA^۲=۱۶۹-۱۴۴=۲۵ \Rightarrow OA=۵\,m$$

تکنیک در مثلث BOA، الگوی مثلث



وجود دارد! بنابراین:

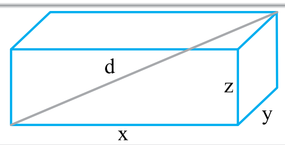
$$۱۳n=۱۳ \Rightarrow OA=۵n=۵\,m$$

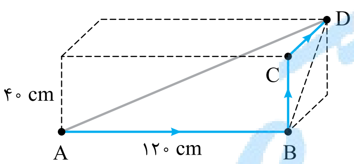
گام سوم: مطابق شکل، اندازهٔ جابه‌جایی برابر اندازهٔ قطر کوچک است، یعنی:

$$d=۲OA=۲\times۵=۱۰\ m$$

۲۴۴. گزینه ۲

یادآوری به طور کلی در یک مکعب به ابعاد x، y و z، اندازهٔ قطر مکعب برابر است با: $d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$





گام اول: ابتدا با توجه به مسافت طی‌شده، از نقطهٔ A تا D، اندازهٔ ضلع CD را حساب می‌کنیم:

$$l=AB+BC+CD=۱۲۰+۴۰+CD=۱۹۰\ cm \Rightarrow CD=۳۰\ cm=۰/۳\ m$$

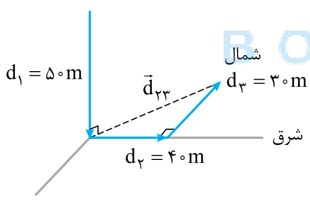
گام دوم: مطابق شکل، جابه‌جایی برابر طول پاره‌خط AD است؛ یعنی قطر مکعب‌مستطیل:

$$AD=\sqrt{(۱/۲)^۲+(۰/۳)^۲+(۰/۴)^۲}=\sqrt{\underbrace{۱/۴۴+۰/۰۹+۰/۱۶}_{۱/۶۹}} \Rightarrow AD=۱/۳\ m$$

تکنیک در مثلث BDC الگوی مثلث ۵n، ۴n، ۳n و در مثلث ABD، الگوی مثلث ۱۳n، ۱۲n، ۵n داریم؛ بنابراین:

$$\begin{cases}BC=۴۰\ cm\\CD=۳۰\ cm\end{cases} \Rightarrow BD=۵۰\ cm$$

$$\begin{cases}AB=۱۲۰\ cm\\BD=۵۰\ cm\end{cases} \Rightarrow AD=۱۳۰\ cm=۱/۳\ m$$



۲۴۵. گزینه ۲ **گام اول**: ابتدا حساب می‌کنیم که متحرک روی سطح چند متر جابه‌جا شده است. مطابق شکل چون بردار جابه‌جایی در جهت شمال بر بردار جابه‌جایی در جهت شرق عمود است؛ بنابراین:

$$|\vec{d}_{۲۳}|=|\vec{d}_۲+\vec{d}_۳|=\sqrt{d_۲^۲+d_۳^۲}=\sqrt{۴۰^۲+۳۰^۲}=\sqrt{۲۵۰۰}=۵۰\ m$$

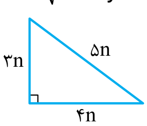
گام دوم: از طرفی بردار $\vec{d}_۱$ که در جهت پایین است بر بردار $\vec{d}_{۲۳}$ عمود است؛ یعنی:

$$d=|\vec{d}_۱+\vec{d}_{۲۳}|=\sqrt{d_۱^۲+d_{۲۳}^۲}=\sqrt{۵۰^۲+۵۰^۲}=\sqrt{۲۵۰۰+۲۵۰۰}=\sqrt{۵۰۰۰}=۵۰\sqrt{۲}\ m$$

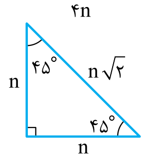
تکنیک ۱ اگر در سه‌بعد (در راستای عمود بر هم) حرکت داشته باشیم، می‌توانیم مستقیم از رابطهٔ زیر جابه‌جایی را حساب کنیم:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{(۳۰)^۲+(۴۰)^۲+(۵۰)^۲}=\sqrt{۹۰۰+۱۶۰۰+۲۵۰۰}=\sqrt{\underbrace{۵۰۰۰}_{۲\times۲۵۰۰}} \Rightarrow d=۵۰\sqrt{۲}\ m$$

تکنیک ۲ تکنیک مثلث‌های معروف:



$$\begin{cases}(\text{شرق})d_۲=۴۰\ m\\(\text{شمال})d_۳=۳۰\ m\end{cases} \xrightarrow{\text{مثلث } ۵n,۴n,۳n} d_{۲۳}=۵۰\ m$$



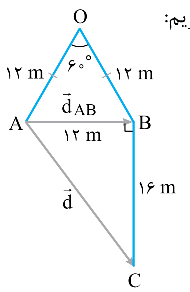
$$\begin{cases}(\text{شمال شرقی})d_{۲۳}=۵۰\ m\\(\text{پایین})d_۱=۵۰\ m\end{cases} \xrightarrow{\text{مثلث } n\sqrt{۲},n,n} d=۵۰\sqrt{۲}\ m$$

۲۴۶. گزینه ۱ **گام اول**: باید جابه‌جایی متحرک را از A تا B و کل مسیر تعیین کنیم. اگر به شکل زیر نگاه کنید، می‌بینید که AOB یک مثلث متساوی‌الساقین است که یک زاویهٔ ۶۰° دارد. می‌دانید مثلث متساوی‌الساقینی که یک زاویهٔ ۶۰° داشته باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی متحرک از A تا B برابر با $AB=OA=OB=۱۲\ m$ است. برای جابه‌جایی کل هم باید اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AC}$ را به کمک فیثاغورس حساب کنیم:

$$d=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}=\sqrt{۱۴۴+۲۵۶}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰\ m$$

تکنیک در اضلاع مثلث ABC، الگوی ۳n، ۴n و ۵n وجود دارد:

$$\begin{cases}۳n=۱۲\ m\\۴n=۱۶\ m\end{cases} \Rightarrow d=۵n=۲۰\ m$$



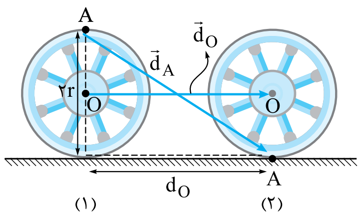
گام دوم: چون سرعت متوسط و جابه‌جایی در مسیر AOB و کل مسیر را داریم، می‌توانیم مدت زمان هر یک از این جابه‌جایی‌ها را به دست آوریم:

$$\Delta t_{AOB} = \frac{d_{AOB}}{v_{av,AOB}} \Rightarrow \Delta t_{AOB} = \frac{۱۲}{۳} = ۴\,s \quad , \quad \Delta t = \frac{d}{v_{av}} = \frac{۲۰}{۲/۵} = ۸\,s$$

گام سوم: برای به دست آوردن تندی متوسط در مسیر AOB و کل مسیر همه‌چیز را داریم:

$$s_{av,AOB} = \frac{l_{AOB}}{\Delta t_{AOB}} = \frac{AO+OB}{\Delta t_{AOB}} = \frac{۱۲+۱۲}{۴} = ۶\,m/s$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{AO+OB+BC}{\Delta t} = \frac{۱۲+۱۲+۱۶}{۸} = ۵\,m/s$$



۲۴۷. گزینه ۴ **گام اول**: پس از این‌که چرخ نیم دور بزند، مطابق شکل روبه‌رو نقطهٔ A در پایین‌ترین قسمت چرخ قرار می‌گیرد برای این‌که نقطهٔ A از وضعیت (۱) به وضعیت (۲) برسد، چرخ باید در راستای افقی به اندازهٔ نصف محیط خود جابه‌جا شود؛ بنابراین همان‌طور که در شکل می‌بینید جابه‌جایی مرکز چرخ $(\vec{d}_O)$ هم برابر نصف محیط چرخ خواهد بود:

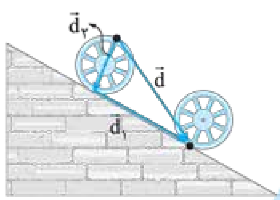
$$d_O = \frac{\text{محیط چرخ}}{۲} = \pi r \xrightarrow[\pi=۳]{r=۰/۵\,m} d_O = ۳\times ۰/۵ = ۱/۵\,m$$

گام دوم: با توجه به شکل نقطهٔ A به اندازهٔ $d_O = ۱/۵\,m$ در راستای افقی و به اندازهٔ $۲r = ۲\times ۰/۵ = ۱\,m$ در راستای قائم جابه‌جا شده است بنابراین به کمک قضیهٔ فیثاغورس جابه‌جایی نقطهٔ A به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$d_A = \sqrt{۱^۲ + (۱/۵)^۲} = \sqrt{۱+۲/۲۵} = \sqrt{۳/۲۵} \Rightarrow d_A = \sqrt{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\,m$$

۲۴۸. گزینه ۳ **گام اول**: به کمک رابطهٔ سرعت متوسط، جابه‌جایی تکه‌سنگ را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \sqrt{۱۳} = \frac{d}{۱} \Rightarrow d = \sqrt{۱۳}\,m$$



گام دوم: وقتی که چرخ نیم دور می‌زند، هر یک از نقاط چرخ (از جمله نقطه‌ای که سنگ به آن چسبیده) به موازات سطح شیب‌دار به اندازهٔ نصف محیط چرخ $(d_۱)$ جابه‌جا می‌شوند. از طرفی پس از نیم دور چرخش چرخ، جابه‌جایی سنگ در راستای عمود بر سطح شیب‌دار به اندازهٔ قطر چرخ $(d_۲)$ خواهد بود (به شکل روبه‌رو نگاه کنید) بنابراین به کمک قضیه فیثاغورس، جابه‌جایی کل سنگ برابر است با:

$$d = \sqrt{d_۱^۲ + d_۲^۲} \xrightarrow[d_۲=۲r]{d_۱=\pi r\,,\ \pi=۳} d = \sqrt{(۳r)^۲ + (۲r)^۲} = \sqrt{۱۳r^۲} = \sqrt{۱۳}\,r$$

در گام اول $d = \sqrt{۱۳}\,m$ به دست آمد؛ بنابراین:

$$\sqrt{۱۳}\,r = \sqrt{۱۳} \Rightarrow r = ۱\,m \Rightarrow r = ۱۰۰\,cm \Rightarrow \text{قطر چرخ} = ۲r = ۲۰۰\,cm$$

۲۴۹. گزینه ۱ **گام اول**: ابتدا معادلهٔ فاصلهٔ این دو متحرک را باید به دست آوریم. برای این کار، دو معادله را از هم کم می‌کنیم؛ یعنی:

$$\Delta x = x_A - x_B = ۴t^۲ - ۱۱t + ۱۳ - (۹t - ۱۳) = \underbrace{۴}_{A}t^۲ \underbrace{-۲۰}_{B}t \underbrace{+۲۶}_{C}$$

گام دوم: حالا باید کمینهٔ Δx را حساب کنیم. از ریاضی می‌دانید که در معادله درجهٔ دو (یعنی $x = At^۲ + Bt + C$) در لحظهٔ $t = -\frac{B}{۲A}$، مقدار x اکسترمم است؛ از طرفی چون A (ضریب $t^۲$) مثبت است، معادله کمینه دارد؛ بنابراین:

$$t_{min} = \frac{۲۰}{۲\times ۴} = \frac{۵}{۲}\,s \Rightarrow \Delta x_{min} = \cancel{۴}\times\frac{۲۵}{\cancel{۴}} - \overset{۱۰}{\cancel{۲۰}}\times\frac{۵}{\cancel{۲}} + ۲۶ = ۲۵ - ۵۰ + ۲۶ = ۱\,m$$

پس کم‌ترین فاصلهٔ دو متحرک از هم، یک متر است.

۲۵۰. گزینه ۱ **گام اول**: جابه‌جایی را در بازهٔ $(۰,۵\,s)$ حساب می‌کنیم و به کمک آن مقدار B را تعیین می‌کنیم. با استفاده از این‌که اندازهٔ سرعت متوسط $۴\,m/s$ است، داریم:

$$\Delta x = v_{av}\Delta t = ۴\times ۵ = ۲۰\,m \quad (I)$$

از طرفی می‌دانیم $\Delta x = x_۵ - x_۰$ است:

$$\Delta x = x_۵ - x_۰ = ((۵)^۲ + B(۵) - ۲) - ((۰)^۲ + B(۰) - ۲) = ۲۵ + ۵B \quad (II)$$

$$(I),(II): ۲۰ = ۲۵ + ۵B \Rightarrow -۵ = ۵B \Rightarrow B = -۱$$

گام دوم: لحظهٔ تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۱)}{۲(۱)} = \frac{۱}{۲}\,s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در بازهٔ $(۰,۵\,s)$ برابر است با:

$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = |(x_{\frac{۱}{۲}} - x_۰)| + |(x_۵ - x_{\frac{۱}{۲}})|$$

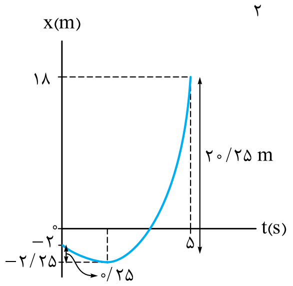
$$= |(\frac{۱}{۲})^۲ + (-۱)(\frac{۱}{۲}) - ۲) - (-۲)| + |((۵)^۲ + (-۱)(۵) - ۲) - ((\frac{۱}{۲})^۲ + (-۱)(\frac{۱}{۲}) - ۲)|$$

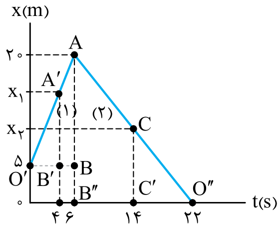
$$= |((\frac{۱}{۴}) - \frac{۱}{۲} - ۲) + ۲| + |(۲۵ - ۵ - ۲ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۲)| = |-۰/۲۵| + |۲۰/۲۵| = ۲۰/۵\,m$$

گام چهارم: با داشتن مسافت طی‌شده و مدت‌زمان طی مسافت، به دست آوردن تندی متوسط دیگر کاری ندارد:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۲۰/۵}{۵} = ۴/۱\,m/s$$

در نمودار مکان ـ زمان می‌توان کل داستان را یک‌جا ببینید.





۲۵۱. گزینه ۱ **گام اول:** ابتدا لحظه‌های $t = 4\,s$ (ابتدای بازه) و $t = 14\,s$ (انتهای بازه) را روی نمودار مشخص می‌کنیم.

گام دوم: حالا باید مقدار x_1 و x_2 را به دست آوریم. برای این کار از تشابه مثلث‌ها استفاده می‌کنیم. مطابق شکل، در بخش (۱) نمودار، دو مثلث $O'AB$ و $O'A'B'$ متشابه‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{x_1 - 5}{\underbrace{20-5}_{\cancel{15}\ 5}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} \Rightarrow x_1 - 5 = 10 \Rightarrow x_1 = 15\,m$$

به همین ترتیب در بخش (۲) نمودار، دو مثلث $O''AB''$ و $O''CC'$ متشابه هستند:

$$\frac{CC'}{AB''} = \frac{O''C'}{O''B''} \Rightarrow \frac{x_2}{\underset{10}{\cancel{20}}} = \frac{\overbrace{22-14}^{\cancel{8}\ 1}}{\underbrace{22-6}_{\cancel{16}\ \cancel{2}\ 1}} \Rightarrow x_2 = 10\,m$$

تکنیک بر روی محور t، ۱۴ میانگین ۶ و ۲۲ است. پس بر روی محور x، x_2 هم باید میانگین صفر و ۲۰ باشد؛ یعنی ۱۰ $= \frac{0+20}{2} = x_2$

گام سوم: با داشتن مقدار x_1 و x_2، می‌توانیم جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شدهٔ آن را حساب کنیم. (در محاسبهٔ مسافت حواستان به تغییر جهت هم باشد.)

$$\vec{d} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (10-15)\vec{i} = -5\vec{i} \quad , \quad l = |20-15| + |10-20| = 5+10 = 15\,m$$

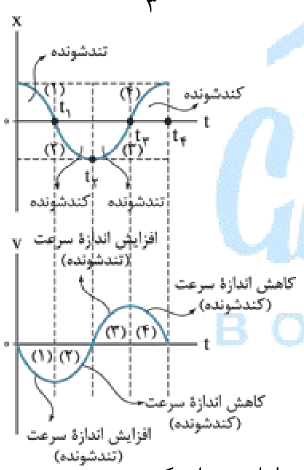
گام چهارم: حالا همه‌چیز برای محاسبهٔ تندی متوسط متحرک و سرعت متوسط آن فراهم است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{\underbrace{14-4}_{10}} = 1/5\,m/s$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{-5\vec{i}}{10} = -0/5\vec{i}\,m/s$$

۲۵۲. گزینه ۲ با توجه به این‌که معادلهٔ سرعت ـ زمان $v = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ ریشهٔ مضاعف دارد، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده با هم برابر است؛ بنابراین:

$$\ell = |\Delta x| = \left|\left(\frac{(2)^3}{3} - (2)^2 + 2 - 1\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - (0)^2 + (0) - 1\right)\right| = \left|\left(\frac{8}{3} - 4 + 2 - 1\right) - (-1)\right| = \frac{2}{3}\,m$$



۲۵۳. گزینه ۲ مطابق شکل نمودار x ـ t در بخش (۱) شیب منفی و اندازهٔ آن در حال افزایش است! پس در این بخش سرعت منفی و حرکت تندشونده باید باشد. (تا همین‌جا گزینهٔ درست را پیدا کرده‌ایم.)

در بخش (۲) حرکت، شیب هم‌چنان منفی و اندازهٔ آن در حال کاهش است! پس در این بخش سرعت هم‌چنان منفی و حرکت کندشونده باید باشد، در بخش (۳) شیب مثبت و اندازهٔ آن در حال افزایش است؛ پس در این بخش سرعت مثبت و حرکت تندشونده است.

در بخش (۴) باز هم شیب مثبت و اندازهٔ آن در حال کاهش است، پس در این بخش سرعت مثبت و حرکت کندشونده است.

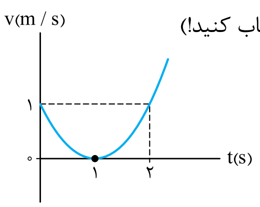
یادآوری گفتیم که در نمودار مکان ـ زمان قبل از رسیدن به اکسترمم حرکت تندشونده و بعد از آن کندشونده است.

تکنیک **به نمودار نگاه کنید، در بازهٔ صفر تا t_2 شیب نمودار مکان ـ زمان (یعنی سرعت) منفی است پس در این بازه، نمودار سرعت ـ زمان زیر محور t قرار دارد. این وضعیت فقط در نمودار ۲ دیده می‌شود.**

۲۵۴. گزینه ۴ ابتدا نمودار v ـ t را با توجه به معادلهٔ سرعت رسم می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های معادله و لحظهٔ اکسترمم را باید حساب کنیم:

$$v = t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1\,s \text{ (ریشهٔ مضاعف)}$$

چون ریشهٔ مضاعف است، لحظهٔ اکسترمم هم $t = 1\,s$ می‌شود. (اگر شک دارید، از رابطهٔ $t = \frac{-B}{2A}$، یک بار دیگر لحظهٔ اکسترمم را حساب کنید!)



با توجه به مثبت‌بودن ضریب t^2، سهمی باید رو به بالا باشد؛ بنابراین:

حالا با توجه به نمودار، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) علامت سرعت همواره مثبت است؛ پس متحرک پیوسته در جهت محور x حرکت کرده است. ✗

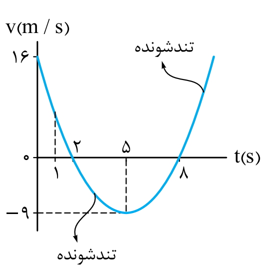
۲) با توجه به گزینهٔ قبل، جهت متحرک تغییری نکرده است کلاً! ✗

۳) قبل از $t = 1\,s$ نمودار سرعت ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور t و بعد از آن در حال دورشدن از محور t است؛ بنابراین حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است. ✗

۴) اگر $t = 2\,s$ را در معادلهٔ سرعت ـ زمان قرار دهید؛ به عدد روبه‌رو می‌رسید:

$$v_2 = (2-1)^2 = 1\,m/s \Rightarrow v_0 = v_2 \Rightarrow \Delta v = 0 \ ✓$$

۲۵۵. گزینه ۲ **گام اول:** برای حل این تست ابتدا نمودار v ـ t را با توجه به معادلهٔ سرعت ـ زمان رسم می‌کنیم.



برای این کار باید ریشه‌های معادلهٔ سرعت ـ زمان و نقطهٔ اکسترمم را حساب کنیم:

$$v = t^2 - 10 + 16 = (t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2\,s \\ t_2 = 8\,s \end{cases}$$

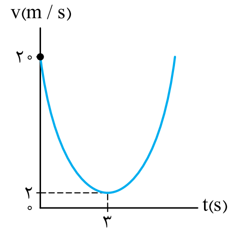
$$\text{ضریب } t^2 \text{ مثبت‌است.} \Rightarrow t_{min} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2+8}{2} = 5\,s$$

(از رابطهٔ $t_{min} = \frac{-B}{2A}$ هم می‌توانید t_{min} را حساب کنید ولی خب محاسبهٔ لحظهٔ وسط کار راحت‌تری است!)

گام دوم: هر جا که نمودار در حال دورشدن از محور t باشد (افزایش اندازهٔ سرعت)، حرکت تندشونده خواهد بود. مطابق شکل نمودار، در بازه‌های زمانی ۲s تا ۵s و از لحظهٔ ۸s به بعد $(۸\,s,+\infty)$ حرکت تندشونده است؛ در بین گزینه‌ها، ۲/۵ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی ۲/۵s تا ۵s در این بازه قرار دارد.

.۲۵۶ (گزینهٔ ۳) **گام اول:** اگر Δ معادلهٔ $v = ۲t^۲ - ۱۲t + ۲۰$ صفر یا بزرگ‌تر از صفر باشد، کم‌ترین اندازهٔ سرعت، صفر خواهد شد. پس در قدم اول Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = B^۲ - ۴AC = (-۱۲)^۲ - (۴\times۲\times۲۰) = -۱۶ < ۰$$



پس تندی این متحرک هرگز صفر نخواهد شد. (یعنی نمودار سرعت زمان هرگز محور t را قطع نخواهد کرد.)

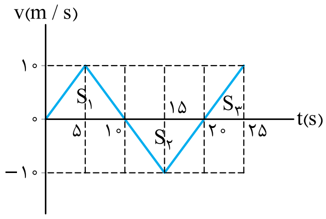
گام دوم: حالا لحظهٔ اکسترمم‌شدن معادلهٔ سرعت را و در صورت مثبت‌بودن t، سرعت در این لحظه را حساب می‌کنیم:

$$t = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۱۲)}{۲\times۲} = ۳\,s \Rightarrow v_۳ = ۲(۳)^۲ - ۱۲(۳) + ۲۰ = ۲\,m/s$$

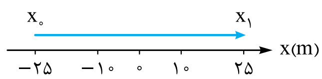
یعنی نزدیک‌ترین فاصلهٔ نمودار v - t با محور زمان ۲ m/s است. (شکل روبه‌رو)

پس (۳) جواب ماست.

.۲۵۷ (گزینهٔ ۴) با توجه به نمودار، متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s در جهت محور x ($S_۱$ بالای محور t)، در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۲۰s در خلاف جهت محور x ($S_۲$ پایین محور t) و در بازهٔ زمانی ۲۰s تا ۲۵s دوباره در جهت محور x حرکت کرده است. حالا می‌خواهیم بدانیم متحرک در طی این حرکتش چند بار از ۱۰متری مبدأ، یعنی $x = \pm۱۰\,m$ گذشته است؛ برای این کار به کمک مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی را در سه بازهٔ زمانی‌ای که گفتیم، حساب می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که بعد از هر جابه‌جایی، چندبار از $x = \pm۱۰\,m$ عبور کرده است!

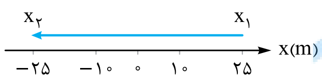


۱) بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s: $\Delta x_۱ = S_۱ = \frac{۱۰\times۱۰}{۲} = ۵۰\,m \Rightarrow x_۱ = x_۰ + \Delta x_۱ = -۲۵ + ۵۰ = ۲۵\,m$



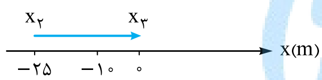
با توجه به اندازهٔ جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی متحرک، ۲ بار از ۱۰متری مبدأ عبور کرده است.

۲) بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۲۰s: $\Delta x_۲ = -S_۲ = \frac{-(۲۰-۱۰)\times۱۰}{۲} = -۵۰\,m \Rightarrow x_۲ = x_۱ + \Delta x_۲ = ۲۵ - ۵۰ = -۲۵\,m$



در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۲۰s نیز، متحرک، ۲ بار از ۱۰متری مبدأ عبور کرده است.

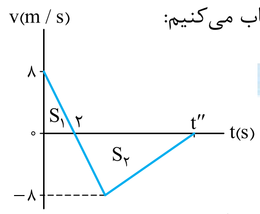
۳) بازهٔ زمانی ۲۰s تا ۲۵s: $\Delta x_۳ = S_۳ = \frac{(۲۵-۲۰)\times۱۰}{۲} = ۲۵\,m \Rightarrow x_۳ = x_۲ + \Delta x_۳ = -۲۵ + ۲۵ = ۰$



در این بازه متحرک، ۱ بار از ۱۰متری مبدأ عبور کرده است.

بنابراین در مجموع متحرک، ۵ بار $(۲+۲+۱)$ از ۱۰متری مبدأ عبور کرده است.

.۲۵۸ (گزینهٔ ۲) **گام اول:** ابتدا با توجه به سرعت متوسط متحرک در t'' ثانیهٔ اول $(۰, t'')$ و مساحت زیر نمودار، مقدار t'' را حساب می‌کنیم:

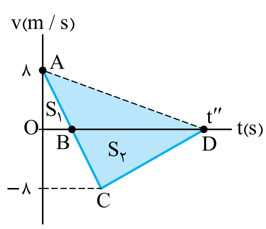


$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_۱ - S_۲}{t'' - ۰} \Rightarrow -۲/۴ = \frac{\frac{۸\times۲}{۲} - \frac{۸(t''-۲)}{۲}}{t''} \Rightarrow -۲/۴t'' = ۸ - ۴t'' + ۸ \Rightarrow ۱/۶t'' = ۱۶$$

$$\Rightarrow t'' = ۱۰\,s$$

گام دوم: حالا که مقدار t'' را می‌دانیم، می‌توانیم با جمع مساحت‌های زیر نمودار، مسافت طی‌شده و بعد از آن تندی متوسط در این بازه را حساب کنیم:

$$\ell = S_۱ + S_۲ = \frac{۸\times۲}{۲} + \frac{۸\times(۱۰-۲)}{۲} = ۸ + ۳۲ = ۴۰\,m\,,\; s_{av(۰,۱۰)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۴۰}{۱۰} = ۴\,m/s$$



تکنیک در شکل روبه‌رو مساحت دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ با هم برابر است. چرا؟ چون قاعدهٔ هر دو مثلث BD و ارتفاع هر دو برابر ۸ واحد است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av} = \frac{S_۱ + S_۲}{t'' - ۰} = \frac{\text{مساحت مثلث OAD}}{t''} = \frac{\frac{۸\times t''}{۲}}{t''} = ۴\,m/s$$

.۲۵۹ (گزینهٔ ۳) بررسی عبارت‌ها:

الف) در لحظه‌های ۳s و ۵s نمودار محور t را قطع کرده و در نتیجه سرعت تغییر علامت می‌دهد، پس جهت سرعت متحرک، ۲ بار تغییر می‌کند. ✓

ب) از $t = ۳\,s$ تا $t = ۵\,s$ که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. باید بیشینهٔ سرعت در این قسمت را به دست آوریم. با توجه به لحظه‌های ۳s و ۵s که در آن‌ها سرعت صفر می‌شوند، معادلهٔ سرعت ـ زمان را می‌نویسیم. این لحظه‌ها ریشه‌های معادلهٔ سرعت به ازای $v = ۰$ هستند. پس داریم:

$$v = \underset{\downarrow}{-}(t-۳)(t-۵)$$

(علامت منفی به خاطر رو به پایین بودن سهمی است.)

همان‌طور که می‌دانید سهمی مورد نظر در لحظهٔ وسط ۳s تا ۵s بیشینه می‌شود:

$$t = \frac{۳+۵}{۲} = ۴\,s$$

پس در $t = ۴\,s$ سرعت را به دست می‌آوریم:

$$t = ۴\,s \Rightarrow v_۴ = -(۴-۳)(۴-۵) = ۱\,m/s \checkmark$$

پ) در تمام بازهٔ زمانی صفر تا $۳\,s$ علامت سرعت منفی است و متحرک فقط در یک جهت (منفی) حرکت کرده است. پس اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی با هم مساوی است. در نتیجه اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط با هم برابر است. ✗

ت) کافی است $t = ۶\,s$ را در معادله‌ای که به دست آوردیم، قرار دهیم:
$$v_۶ = -(۶-۳)(۶-۵) = -۳\ m/s$$
اندازهٔ سرعت متحرک $۳\ m/s$ است و چون سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. ✓

۲۶۰. گزینه ۱ **گام اول:** در نمودار مکان ـ زمان برای تشخیص سرعت اولیه باید شیب اولیهٔ نمودار را نگاه کنیم:

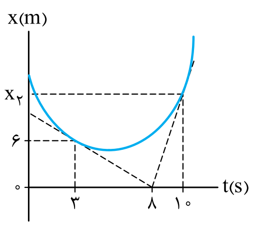
شیب اولیهٔ نمودار A منفی است. ← سرعت اولیهٔ متحرک A در جهت منفی محور x است.

شیب اولیهٔ نمودار B صفر است. ← سرعت اولیهٔ متحرک B صفر است (از حال سکون شروع به حرکت کرده است).

شیب اولیهٔ نمودار C مثبت است. ← سرعت اولیهٔ متحرک C مثبت است.

گام دوم: اگر نمودار مکان ـ زمان نقطهٔ مینیمم داشته باشد (این شکلی: ◡)، شتاب مثبت و اگر نقطهٔ ماکسیمم داشته باشد (این شکلی: ◠)، شتاب منفی است.
پس علامت شتاب متحرک A مثبت و شتاب متحرک B و C منفی است.

گام سوم: در نقطهٔ اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) متحرک تغییر جهت می‌دهد. پس متحرک‌های A و C در یک لحظهٔ معین تغییر جهت می‌دهند.
با این حساب، عبارت «الف»، متحرک B، عبارت «ب»، متحرک A و عبارت «پ»، متحرک C را توصیف می‌کند.

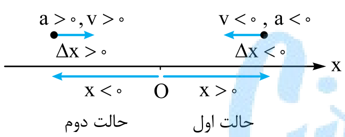


۲۶۱. گزینه ۴ **گام اول:** با توجه به شیب خط مماس، می‌توانیم سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۳\,s$ را به دست آوریم. (اطلاعاتمان برای محاسبهٔ شیب خط در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$ ناقص است.)
$$v_۱ = (t_۱ = ۳\,s) \text{ شیب خط در لحظهٔ } = \frac{۰-۶}{۸-۳} = \frac{-۶}{۵} = -۱/۲\ m/s \Rightarrow \vec{v}_۱ = (-۱/۲\vec{i})\ m/s$$

گام دوم: با توجه به داشتن شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ($۳\,s$ تا $۱۰\,s$)، می‌توانیم $v_۲$ (سرعت در لحظهٔ $t_۲$) را حساب کنیم:
$$\vec{a}_{av(۳,۱۰)} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow ۰/۸\vec{i} = \frac{\vec{v}_۲ - (-۱/۲\vec{i})}{۱۰-۳} \Rightarrow ۵/۶\vec{i} = \vec{v}_۲ + ۱/۲\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_۲ = (۴/۴\vec{i})\ m/s$$

گام سوم: حالا با داشتن سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$، می‌توانیم به کمک شیب خطی مماس در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$، بردار مکان را در این لحظه حساب کنیم:
$$v_۲ = \frac{x_۲ - ۰}{۱۰-۸} \Rightarrow ۴/۴ = \frac{x_۲}{۲} \Rightarrow x_۲ = ۸/۸\ m \Rightarrow \vec{x}_۲ = (۸/۸\ m)\vec{i}$$

۲۶۲. گزینه ۳ در صورت سؤال گفته شده که متحرک به طور تندشونده (a و v هم‌علامت) در حال نزدیک‌شدن به مبدأ است. دو حالت ممکن برای متحرک را در شکل روبه‌رو رسم کردیم:



حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ **درست**؛ در حالت اول $a<۰$ و $x>۰$ و در حالت دوم $a>۰$ و $x<۰$ است یعنی بردار مکان و شتاب متحرک در خلاف جهت یکدیگر است.

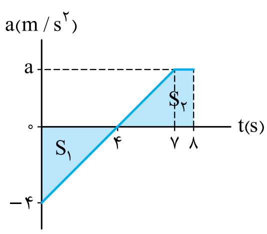
۲ **درست**؛ با توجه به رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ و مثبت‌بودن Δt، شتاب و تغییر سرعت یک متحرک همواره هم‌جهت‌اند.

۳ **نادرست**؛ در حالت اول $a<۰$ و $\Delta x<۰$ و در حالت دوم $a>۰$ و $\Delta x>۰$ است بنابراین جابه‌جایی و شتاب این متحرک هم‌جهت‌اند.

۴ **درست**؛ چون حرکت متحرک تندشونده است، سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند (هم‌علامت‌اند).

تکنیک با توجه به این‌که جابه‌جایی و سرعت همواره هم‌جهتند، ۳ و ۴ همدیگر را نقض می‌کنند یعنی اگر ۳ درست باشد، حتماً ۴ نادرست است و بالعکس. از طرفی طبق صورت تست حرکت متحرک تندشونده است پس سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند. با توجه به این موضوع، ۴ درست و ۳ نادرست است.

۲۶۳. گزینه ۳ **گام اول:** به کمک تشابه مثلث‌ها، مقدار a را به دست می‌آوریم:
$$\frac{a}{|-۴|} = \frac{۷-۴}{۴-۰} \Rightarrow \frac{a}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow a = ۳\ m/s^۲$$

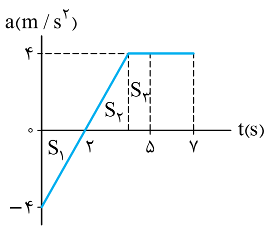


گام دوم: ابتدا با توجه به نمودار، تغییرات سرعت را به دست می‌آوریم:
$$\Delta v = S_۲ - S_۱ = \frac{۳\times(۱+۴)}{۲} - \frac{۴\times۴}{۲} = ۷/۵ - ۸ = -۰/۵\ m/s$$

گام سوم: حالا با داشتن سرعت اولیه و تغییرات سرعت، به راحتی می‌توانیم سرعت در $t = ۸\,s$ را به دست آوریم:
$$\Delta v = v - v_۰ \Rightarrow -۰/۵ = v-(-۵) \Rightarrow -۰/۵ = v+۵ \Rightarrow v = -۵-۰/۵ = -۵/۵\ m/s$$

گام چهارم: مطابق شکل در ثانیهٔ هشتم ($۷\,s$ تا $۸\,s$) شتاب مثبت است، علامت سرعت هم که از ابتدا تا $t>۸\,s$ منفی است، بنابراین $av<۰$ و حرکت **کندشونده** است.

۲۶۴. گزینه ۴ **گام اول:** دقت کنید که با نمودار شتاب ـ زمان طرف هستیم و از روی نمودار مشخص است که در تمام بازهٔ زمانی صفر تا $۷\,s$ حرکت شتابدار است یعنی در تمام این بازه حرکت یا تندشونده است یا کندشونده. از این‌که سؤال گفته حرکت در بازهٔ $۵\,s$ تا $۷\,s$ تندشونده بوده است می‌فهمیم که از $۲\,s$ تا $۵\,s$ حرکت کندشونده بوده و در نتیجه در لحظهٔ $t = ۵\,s$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت داده است. یعنی داریم: $v_{(۵)} = ۰$



گام دوم: با توجه به شکل روبه‌رو برای محاسبهٔ Δv، مساحت زیر نمودار در بازهٔ صفر تا $۵\,s$ را حساب می‌کنیم:
$$\Delta v_{(۰,۵)} = -S_۱ + S_۲ + S_۳ \xrightarrow{S_۱=S_۲} \Delta v_{(۰,۵)} = S_۳ = ۴\times(۵-۴) = ۴\ m/s$$

حواستون باشه با توجه به نمودار، شتاب متحرک در مدت $۲\,s$ از $-۴\ m/s^۲$ به صفر رسید. چون نمودار خطی است، $۲\,s$ هم طول می‌کشد تا شتاب آن از صفر به $۴\ m/s$ برسد. بنابراین ابعاد مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$ کاملاً برابر و در نتیجه $S_۱ = S_۲$ است.