فهرست

فصل (۵)

کاربرد مشتق

درس ۱

اکسترمم‌های تابع

تابع اکیداً صعودی

تابع $f(x)$ با دامنهٔ D_f اکیداً صعودی است اگر و تنها اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع اکیداً نزولی

تابع $f(x)$ با دامنهٔ D_f اکیداً نزولی است اگر و تنها اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع اکیداً یکنوا

تابعی که در دامنه‌اش اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع یکنوا نامیده می‌شود.

آزمون یکنوایی تابع

فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد:

الف اگر $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f در بازهٔ I اکیداً صعودی است.

ب اگر $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f در بازهٔ I اکیداً نزولی است.

پ اگر $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f در بازهٔ I ثابت است.

تذکر برای تعیین یکنوایی تابع، مشتق آن را تعیین علامت می‌کنیم. در فاصله‌های که مشتق تابع مثبت باشد، تابع اکیداً صعودی و در فاصله‌هایی که مشتق آن منفی باشد، تابع اکیداً نزولی است.

مثال

کدام گزینه دربارهٔ تابع $f(x) = x^۳ - x^۲ - x$ درست است؟

۱) در بازهٔ $(-۱, \frac{۱}{۳})$ اکیداً نزولی است.

۲) در بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۱)$ اکیداً صعودی است.

۳) در بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۱)$ اکیداً نزولی است.

۴) در بازهٔ $(-۱, \frac{۱}{۳})$ اکیداً صعودی است.

پاسخ **گزینهٔ ۳** مشتق تابع $f'(x) = ۳x^۲ - ۲x - ۱$ است و ریشه‌های آن ۱ و $-\frac{۱}{۳}$ هستند. با توجه به جدول تعیین علامت $f'(x)$، تابع در بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۱)$ اکیداً نزولی است.

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

اکسترمم‌های نسبی تابع

تعریف نقطهٔ ماکسیمم نسبی

تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول c دارای ماکسیمم نسبی است، هرگاه بازهٔ بازی مانند I شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\forall x \in I : f(c) \geq f(x)$$

به بیان دیگر، عرض تابع در نقطهٔ c از عرض دیگر نقاط بازهٔ I کم‌تر نباشد. در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f می‌نامند.

تعریف نقطهٔ مینیمم نسبی

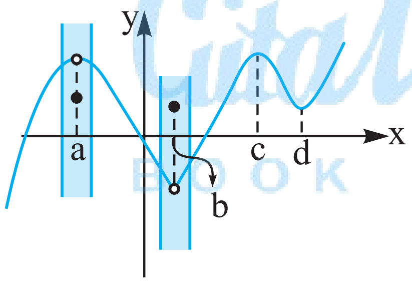
تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه بازهٔ بازی مانند I شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\forall x \in I : f(c) \le f(x)$$

به بیان دیگر، عرض تابع در نقطهٔ c از عرض دیگر نقاط بازهٔ I بیشتر نباشد. در این صورت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامند.

تذکر نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع را نقاط اکسترمم نسبی تابع نیز می‌نامند.

مثلاً در تابع شکل زیر نقطهٔ a، نقطهٔ مینیمم نسبی است؛ زیرا در همسایگی این نقطه (این همسایگی با نوار رنگی نمایش داده شده است) عرض نقطهٔ a از عرض بقیهٔ نقاط بیشتر نیست. در این تابع، نقطهٔ b نقطهٔ ماکسیمم نسبی است زیرا در همسایگی این نقطه که با نوار رنگی نمایش داده شده است، عرض نقطهٔ b از عرض دیگر نقاط کم‌تر نیست. هم‌چنین نقطهٔ c، نقطهٔ ماکسیمم نسبی و نقطهٔ d، نقطهٔ مینیمم نسبی تابع هستند.



نقاط بحرانی تابع

اگر $c \in D_f$ و f در یک همسایگی نقطهٔ c تعریف شده باشد، نقطهٔ c را نقطهٔ بحرانی تابع f نامند هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ مشتق تابع در نقطهٔ c، برابر صفر باشد. $(f'(c) = 0)$

۲ تابع در نقطهٔ c مشتق‌پذیر نباشد.

تذکرمهم اگر دامنهٔ تابعی بازهٔ $[a,b]$ باشد، نقاط a و b (نقاط مرزی) بحرانی نیستند، زیرا تابع در هیچ همسایگی این دو نقطه تعریف نشده است.

مثال

تابع $f(x)=|x^2-4|$ دارای چند نقطهٔ بحرانی است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ گزینهٔ ۴ **روش اول** دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است و اگر آن را به صورت چندضابطه‌ای تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x\le -2 \text{ یا } x\ge 2 \\ -x^2+4 & -2<x<2 \end{cases}$$

تنها نقاط مشکوک به ناپیوستگی، نقاط ۲ و ۲− هستند که با تحقیق ساده‌ای معلوم می‌گردد تابع در این دو نقطه پیوسته است.

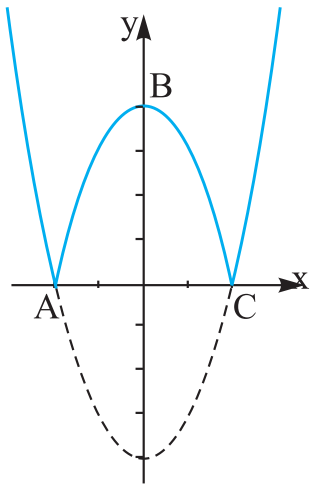
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-2 \text{ یا } x>2 \\ -2x & -2<x<2 \end{cases}$$

چون $f'_+(2)=4$ و $f'_-(2)=-4$، پس تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست، در نتیجه $x=2$ یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

چون $f'_-(-2)=-4$ و $f'_+(-2)=4$ پس تابع در $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست و در نتیجه $x=-2$ نیز یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

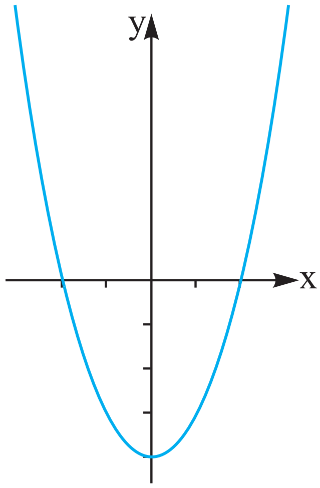
در بقیهٔ نقاط، تابع مشتق‌پذیر است، پس اگر این تابع نقطهٔ بحرانی دیگری داشته باشد منحصر به نقاطی است که مشتق تابع در آن صفر می‌شود، تنها ریشهٔ مشتق تابع $x=0$ است که بحرانی می‌باشد پس تابع دارای سه نقطهٔ بحرانی است.

روش دوم نمودار $f(x)=x^2-4$ مانند شکل (۱) و نمودار $f(x)=|x^2-4|$ مانند شکل (۲) است. با توجه به شکل (۲)، تابع در نقاط A و C مشتق‌ناپذیر (گوشه‌ای) و B، نقطهٔ ماکسیمم نسبی $(f'=0)$ است، پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.



$y = |x^۲ - ۴|$

شکل (۲)



$y = x^۲ - ۴$

شکل (۱)

مثال

تابع $f(x) = \sqrt{۴x - x^۲}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

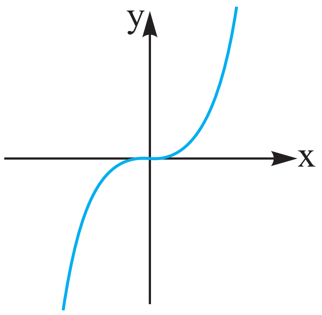
پاسخ | گزینهٔ ۲ تابع وقتی تعریف شده است که $۴x - x^۲ \geq ۰$. ریشه‌های این عبارت $x = ۰$ و $x = ۴$ هستند. پس از تعیین علامت، مشخص می‌شود که $D_f = [۰,۴]$ است. نقاط $x = ۰$ و $x = ۴$ مرزی هستند و بنا بر تذکری که داده شد این نقاط نمی‌توانند بحرانی باشند. مشتق تابع به صورت $f'(x) = \dfrac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}}$ است و تابع در بازهٔ $(۰,۴)$ مشتق‌پذیر است، یعنی نقطهٔ بحرانی از نوع مشتق‌ناپذیر ندارد، پس اگر نقطهٔ بحرانی داشته باشد، منحصر به نقاطی است که مشتق در آن‌ها صفر باشد.

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

پس تابع فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد.

قضیهٔ فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$.

تذکرمهم توجه داشته باشیم که عکس قضیهٔ فرما درست نیست، یعنی اگر $f'(c) = 0$، آن‌گاه دلیلی ندارد که نقطهٔ c اکسترمم نسبی باشد. به عنوان مثال، در تابع $f(x) = x^3$ داریم $f'(x) = 3x^2$، پس $f'(0) = 0$ ولی با توجه به نمودار، تابع $f(x) = x^3$ در مبدأ مختصات دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی نیست.



$f(x) = x^3$

دو نتیجهٔ مهم:

۱ نقطهٔ اکسترمم نسبی یک تابع، نقطهٔ بحرانی تابع است، زیرا اگر تابع در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، بنا بر قضیهٔ فرما مشتق تابع در این نقطه صفر است، پس بحرانی است و اگر تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد، بنا به تعریف، نقطه‌ای بحرانی است.

۲ اگر تابعی در یک بازه ثابت باشد، تمام نقاط آن بازه نقاط بحرانی هستند، زیرا مشتق تابع در تمام این نقاط برابر با صفر است.

آزمون مشتق اول

اگر نقطهٔ $x = c$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f و این تابع در $x = c$ پیوسته و تابع در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

الف اگر f' در نقطهٔ c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، $x = c$ یک نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

ب اگر f' در نقطهٔ c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، $x = c$ یک نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، f در نقطهٔ $x=c$ نه دارای ماکسیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی.

چگونه نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع را پیدا کنیم؟

برای پیداکردن نقاط اکسترمم نسبی تابع، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ نقاط بحرانی تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

۳ با توجه به آزمون مشتق اول و با استفاده از جدول تعیین علامت مشتق، نقاط اکسترمم نسبی را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

مثال

فاصلهٔ نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}-۶x$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳۴}$

۲) $۲\sqrt{۱۷}$

۳) $\sqrt{۳۴}$

۴) $\sqrt{۱۷}$

پاسخ گزینهٔ ۱ تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس اگر نقطه‌ای بحرانی داشته باشد، منحصر به نقاطی است که مشتق آن‌ها صفر باشد.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶ \xrightarrow{f'=۰} x=\pm\sqrt{۲}$$ نقاط بحرانی

x	$-\infty$		$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
$f'=۳x^{۲}-۶$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$۴\sqrt{۲}$ max	↘	$-۴\sqrt{۲}$ min	↗	$+\infty$

با توجه به جدول، $A(\sqrt{۲},-۴\sqrt{۲})$ نقطهٔ مینیمم نسبی و $B(-\sqrt{۲},۴\sqrt{۲})$ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع هستند، پس فاصلهٔ این دو نقطه برابر است با:

$$AB=\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۲})^۲+(-۴\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۸+۱۲۸}=۲\sqrt{۳۴}$$

مثال

کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=|x^۲-x|$ درست است؟

۱) دارای دو ماکسیمم و یک مینیمم نسبی است.

۲) دارای یک ماکسیمم و یک مینیمم نسبی است.

۳) دارای دو مینیمم نسبی و یک ماکسیمم نسبی است.

۴) فقط دارای یک مینیمم نسبی است.

پاسخ | گزینهٔ ۳ | **روش اول** | دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و در این بازه پیوسته است. ریشه‌های عبارت درون قدرمطلق $x=۰$ و $x=۱$ هستند که بحرانی می‌باشند. اگر $f(x)$ را به صورت تابع دوضابطه‌ای تبدیل کنیم، داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^۲+x & ۰\le x\le ۱\\ x^۲-x & x<۰ \text{ یا } x>۱\end{cases}$$

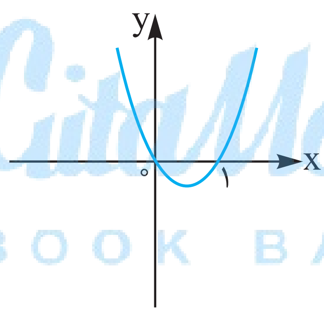
مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}-۲x+۱ & ۰<x<۱\\ ۲x-۱ & x<۰ \text{ یا } x>۱\end{cases}$$

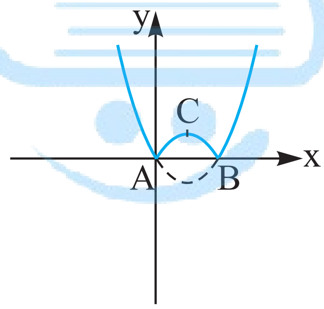
ریشهٔ مشتق تابع $x=\frac{۱}{۲}$ است، پس تابع فقط سه نقطهٔ بحرانی دارد. با توجه به جدول تعیین علامت مشتق می‌توان دریافت که نقاط $x=۰$ و $x=۱$ مینیمم نسبی و نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ ماکسیمم نسبی تابع هستند:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			min		max		min		

روش دوم نمودار $y=x^2-x$ در شکل (۱) و با استفاده از آن نمودار $f(x)=|x^2-x|$ مانند شکل (۲) است. با توجه به شکل (۲) نقاط A و B مینیمم نسبی و C نقطهٔ ماکسیمم نسبی است.



شکل (۱)



شکل (۲)

نکتهٔ مهم اگر نقطهٔ $A(a,b)$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه هر دو شرط زیر برقرار هستند:

۱ $f(a)=b$، یعنی نقطهٔ A در تابع صدق می‌کند.

۲ $f'(a)=0$.

مثال

چنان‌چه نقطهٔ $M(۱,-۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابعی با ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$ باشد، حاصل $۲a-b$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ | گزینهٔ ۲

تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=۳x^۲+۲ax+b$، پس در نقطهٔ M مشتق‌پذیر است. بنا بر نکتهٔ فوق داریم:

$$\begin{cases} f(۱)=-۱ \Rightarrow ۱+a+b+۱=-۱ \Rightarrow a+b=-۳ \\ f'(۱)=۰ \Rightarrow ۳+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۳ \end{cases}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود $a=۰$ و $b=-۳$، پس $۲a-b=۳$.

اکسترمم‌های مطلق تابع

تعریف ماکسیمم مطلق تابع

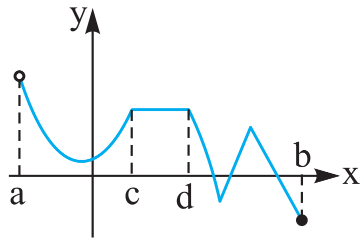
اگر $c\in D_f$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ ماکسیمم مطلق تابع $f(x)$ است هرگاه به ازای **هر** $x\in D_f$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم مطلق تابع f می‌نامند.

تعریف مینیمم مطلق تابع

اگر $c\in D_f$ باشد، نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)$ است هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع f می‌نامند.

مثال

در تابع شکل مقابل، کدام گزینه درست است؟



۱) دو min نسبی، یک max نسبی، یک min و یک max مطلق دارد.

۲) دارای پنج نقطهٔ بحرانی است.

۳) دارای ماکسیمم و مینیمم مطلق است.

۴) بی‌شمار نقطهٔ بحرانی دارد.

پاسخ **گزینهٔ ۴** تابع در بازهٔ (c,d) ثابت است و مشتق تابع در تمام این نقاط برابر صفر است، پس تمام نقاط این بازه، بحرانی هستند. توجه داشته باشید که تابع در نقطهٔ b دارای مینیمم مطلق است ولی دارای ماکسیمم مطلق نیست.

قضیه: اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه این تابع در این بازه هم دارای ماکسیمم مطلق و هم دارای مینیمم مطلق است.

دقت کنید که تابع مثال قبل، نقض‌کنندهٔ قضیهٔ فوق نمی‌باشد. زیرا دامنهٔ تابع، بازهٔ $(a,b]$ است، یعنی بازه‌ای از دو سر بسته نیست.

تذکر اگر دامنهٔ تابع $[a,b]$ باشد، آن‌گاه نقاط a و b نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند ولی می‌توانند اکسترمم مطلق باشند.

چگونه اکسترمم‌های مطلق تابع را در یک بازهٔ بسته پیدا کنیم؟

اگر $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، برای پیداکردن اکسترمم‌های مطلق تابع به این ترتیب عمل می‌کنیم:

۱ تمام نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

۲ عرض‌های نقاط بحرانی و عرض‌های نقاط مرزی (نقاط a و b) را پیدا می‌کنیم.

۳ بزرگ‌ترین عددی که در گام ۲ به دست می‌آید، ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع است.

مثال

در تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^۲+۳}$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ اختلاف ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ تابع در $[-۱,۳]$ پیوسته است. (چرا؟)

$$f'(x)=\frac{۱\times(x^۲+۳)-۲x(x+۱)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{-x^۲-۲x+۳}{(x^۲+۳)^۲}$$

ریشه‌های مشتق ۱ و ۳- هستند و فقط نقطهٔ $x=۱$ در دامنهٔ تابع قرار دارد، پس تابع تنها یک نقطهٔ بحرانی دارد.

اکنون عرض‌های نقاط بحرانی و مرزی را پیدا می‌کنیم:

$$f(۱)=\frac{۱+۱}{۱+۳}=\frac{۱}{۲} \text{ و } f(-۱)=۰ \text{ و } f(۳)=\frac{۳+۱}{۹+۳}=\frac{۱}{۳}$$

در بین این اعداد، صفر از همه کوچک‌تر است، پس مینیمم مطلق تابع است و $\frac{۱}{۲}$ از همه بزرگ‌تر است، پس ماکسیمم مطلق تابع است و اختلاف آن‌ها برابر با $\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}$ است.

درس ۲

بهینه‌سازی

کارخانه‌ای را در نظر بگیرید که اجناسی تولید و به بازار عرضه می‌کند. مدیر این کارخانه می‌خواهد به گونه‌ای رفتار کند که سوددهی کارخانه بیشترین مقدار ممکن باشد. او راه‌های بسیاری در پیش دارد و مثلاً می‌تواند کیفیت اجناس را کاهش دهد تا هزینهٔ کم‌تری برای تولید لازم داشته باشد. ولی در این صورت بازار فروش را از دست می‌دهد و در نتیجه سوددهی کاهش می‌یابد. به مسائلی شبیه مثال فوق که به دنبال ماکسیمم یا مینیمم یک کمیت باشیم، بهینه‌سازی می‌گویند.

در مسائل بهینه‌سازی عمدتاً به دنبال اکسترمم مطلق یک تابع هستیم.

چگونه مسائل بهینه‌سازی را حل کنیم؟

برای حل مسائل بهینه‌سازی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

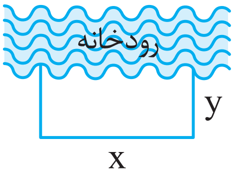
۱ با توجه به اطلاعات مسئله، تابعی تشکیل می‌دهیم و دامنهٔ آن را مشخص می‌کنیم.

۲ اگر تابع دارای دو متغیر باشد، با توجه به وابستگی این دو متغیر، یکی را برحسب دیگری پیدا کرده و آن را در تابعی که پیدا کردیم، قرار می‌دهیم تا تابعی با یک متغیر به دست آید.

۳ نقاط بحرانی تابع را مشخص کرده و با توجه به خواستهٔ مسئله، ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع را به دست می‌آوریم.

مثال

با طنابی به طول ۳۶ می‌خواهیم زمینی مستطیل‌شکل را که یک طرف آن منطبق بر ساحل رودخانه است محدود کنیم (در قسمت ساحل رودخانه طنابی برای محصورکردن به کار نمی‌بریم). بیشترین مساحتی که می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟



پاسخ فرض کنیم طول زمین x و عرض آن y باشد. طول طناب $x+۲y$ است، پس $x+۲y=۳۶$ یا $x=۳۶-۲y$ (۱).

مساحت این زمین $S=xy$ است. می‌خواهیم S بیشترین مقدار ممکن باشد، پس باید نقاط بحرانی تابع S را پیدا کنیم، اما S تابعی دومتغیره برحسب x و y است و باید سعی کنیم آن را به تابعی با یک متغیر تبدیل کنیم. از رابطهٔ (۱) داریم:

$$S=(۳۶-۲y)y \Rightarrow S=-۲y^۲+۳۶y$$

اکنون S تابعی یک‌متغیره برحسب y است. داریم:

$$S'=-۴y+۳۶ \xrightarrow{S'=۰} y=۹ \xrightarrow{x=۳۶-۲y} x=۱۸$$

پس بیشترین مساحت $S=۱۸\times۹=۱۶۲$ متر مربع است.

مثال

مجموع دو عدد ثابت و مثبت برابر با ۷۲ است. اگر مربع عدد اول ضرب‌در عدد دوم بیشترین مقدار ممکن باشد، نسبت عدد اول به عدد دوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ ۲** عدد اول را x و عدد دوم را y می‌گیریم:

$$x+y=۷۲ \Rightarrow y=۷۲-x \quad (۱)$$

می‌خواهیم حاصل $P=x^۲y$ بیشترین مقدار ممکن باشد. این تابعی از دو متغیر است و باید به تابعی با یک متغیر تبدیل شود. با استفاده از (۱) داریم:

$$P=x^۲(۷۲-x) \Rightarrow P=-x^۳+۷۲x^۲$$

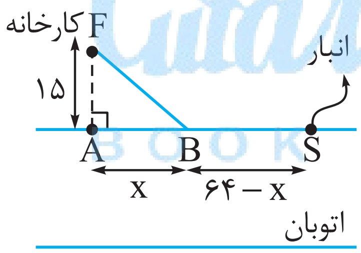
نقاط بحرانی این تابع را پیدا می‌کنیم:

$$P' = -۳x^۲ + ۱۴۴x \xrightarrow{P'=۰} x = ۰ \text{ یا } x = ۴۸$$

به ازای $x = ۰$، مقدار P نیز صفر می‌شود که ماکسیمم مطلق نیست، پس $x = ۴۸$ و از (۱) نتیجه می‌شود $y = ۲۴$ و در نتیجه $\frac{x}{y} = \frac{۴۸}{۲۴} = ۲$.

مثال

کارخانهٔ F در ۱۵ کیلومتری اتوبان قرار دارد. انبار این کارخانه کنار اتوبان است و فاصله‌اش از تصویر F روی اتوبان ۶۴ کیلومتر است. مسئولین کارخانه می‌خواهند جاده‌ای معمولی از کارخانه به نقطه‌ای روی اتوبان بکشند تا از طریق آن اجناس تولیدی را به انبار انتقال دهند. اگر سرعت مجاز در اتوبان $۱۳۰\ km/h$ و در جادهٔ معمولی $۵۰\ km/h$ باشد، نقطهٔ B در چند کیلومتری نقطهٔ A باشد تا در کم‌ترین زمان ممکن اجناس از کارخانه به انبار منتقل شوند؟



پاسخ اگر فرض کنیم $AB = x$، آن‌گاه $BS = ۶۴ - x$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF داریم $BF = \sqrt{۲۲۵ + x^۲}$.

$$t_۱ = \frac{FB}{v_۱} = \frac{\sqrt{۲۲۵ + x^۲}}{۵۰} \quad \text{زمان لازم برای رفتن از } F \text{ به } B$$

$$t_۲ = \frac{BS}{v_۲} = \frac{۶۴ - x}{۱۳۰} \quad \text{زمان لازم برای رفتن از } B \text{ به } S$$

زمان کل $t = t_۱ + t_۲ \Rightarrow t = \frac{\sqrt{۲۲۵ + x^۲}}{۵۰} + \frac{۶۴ - x}{۱۳۰}$

$۰ \leq x \leq ۶۴$

می‌خواهیم t کم‌ترین مقدار ممکن باشد، پس باید نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ $[۰,۶۴]$ پیدا کنیم. تابع در این بازه مشتق‌پذیر است، پس نقاط بحرانی فقط نقاط با مشتق صفر هستند.

$$t' = \frac{\cancel{۲}x}{۵۰ \times \cancel{۲}\sqrt{۲۲۵ + x^۲}} - \frac{۱}{۱۳۰} = ۰$$

$$\Rightarrow ۵۰\sqrt{۲۲۵ + x^۲} = ۱۳۰x \Rightarrow ۵\sqrt{۲۲۵ + x^۲} = ۱۳x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۲۵(۲۲۵ + x^۲) = ۱۶۹x^۲$$

$$\Rightarrow ۱۴۴x^۲ = ۲۵ \times ۲۲۵ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} ۱۲x = ۵ \times ۱۵$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵ \times ۱۵}{۱۲} = \frac{۵ \times ۵}{۴} = ۶/۲۵ \text{ km}$$

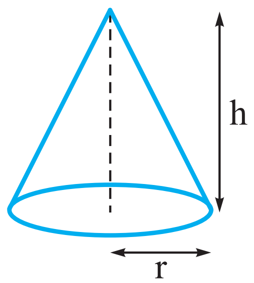
مثال

در یک مخروط قائم، شعاع قاعده r و ارتفاع آن h است. اگر $r + h = ۶$ باشد، بیشترین حجم مخروط کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۸\pi}{۳}$

۳) $\frac{۱۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲\pi}{۳}$

پاسخ گزینهٔ ۴ حجم مخروط برابر است با $V=\frac{\pi}{۳}r^۲h$. می‌خواهیم V بیشترین مقدار ممکن باشد. ابتدا آن را به تابعی با یک متغیر تبدیل می‌کنیم. $r+h=۶ \Rightarrow h=۶-r$



پس:

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲(۶-r)=\frac{\pi}{۳}(۶r^۲-r^۳)$$

$$V'=\frac{\pi}{۳}(۱۲r-۳r^۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۰ \\ r=۴ \Rightarrow h=۲ \end{cases}$$

اگر $r=۰$ باشد، حجم صفر است.

$$Max(V) \overset{r=۴}{\underset{h=۲}{=\!=}} \frac{\pi}{۳}\times ۴^۲\times ۲=\frac{۳۲\pi}{۳}$$

مثال

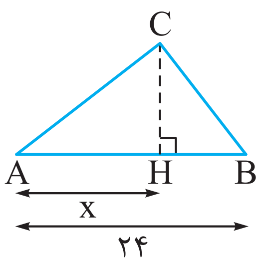
می‌خواهیم مثلثی با قاعدهٔ ۲۴ متر و مساحت ۶۰ متر مربع بسازیم به طوری که محیط آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد. کم‌ترین مقدار محیط این مثلث کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

پاسخ گزینهٔ ۳ اگر ارتفاع مثلث، CH باشد، آن‌گاه:

$$S=\frac{CH\times AB}{۲}=۶۰ \Rightarrow CH\times ۲۴=۱۲۰ \Rightarrow CH=۵\ m$$

اگر $AH=x$، آن‌گاه $BH=۲۴-x$. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH داریم:



$AC = \sqrt{x^{۲} + ۲۵}$ و $BC = \sqrt{(۲۴ - x)^{۲} + ۲۵}$

محیط مثلث $P = ۲۴ + \sqrt{x^{۲} + ۲۵} + \sqrt{(۲۴ - x)^{۲} + ۲۵}$

$۰ < x < ۲۴$

$$P' = \frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{x^{۲} + ۲۵}} + \frac{-\cancel{۲}(۲۴ - x)}{\cancel{۲}\sqrt{(۲۴ - x)^{۲} + ۲۵}} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^{۲} + ۲۵}} = \frac{(۲۴ - x)}{\sqrt{(۲۴ - x)^{۲} + ۲۵}}$$

اکنون طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow x\sqrt{(۲۴ - x)^{۲} + ۲۵} = (۲۴ - x)\sqrt{x^{۲} + ۲۵}$$

به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^{۲}\cancel{(۲۴ - x)^{۲}} + ۲۵x^{۲} = \cancel{(۲۴ - x)^{۲}x^{۲}} + (۲۴ - x)^{۲} \times ۲۵$$

$$\Rightarrow x = \pm(۲۴ - x)\begin{cases} \xrightarrow{\text{در حالت } \ominus} \text{جواب ندارد.} \\ \xrightarrow{\text{در حالت } \oplus} x = ۱۲ \end{cases}$$

اگر جدول علامت مشتق را تشکیل دهیم، خواهیم دید که $x = ۱۲$ نقطهٔ مینیمم است؛ پس:

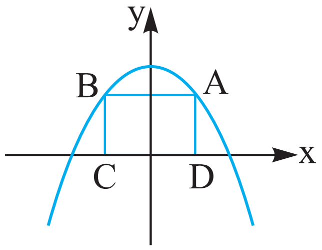
$$Min\{P\} = ۲۴ + \sqrt{۱۲^{۲} + ۲۵} + \sqrt{(۲۴ - ۱۲)^{۲} + ۲۵}$$

$$= ۲۴ + ۱۳ + ۱۳ = ۵۰$$

مثال

دو رأس مستطیلی روی محور xها و دو رأس دیگر آن روی سهمی به معادلهٔ $y=12-x^2$ و بالای محور xها قرار دارد. بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲



پاسخ گزینهٔ ۴ اگر طول رأس A را x بگیریم، آن‌گاه عرض آن $12-x^2$ است و به علت تقارن طول نقطهٔ B برابر $-x$ است، پس:

$AB=2x$ و $AD=BC=12-x^2$

مساحت مستطیل $S=AB\times AD=2x(12-x^2)$

$S=-2x^3+24x\ ;\ 0<x<\sqrt{12}$

می‌خواهیم S بیشترین مقدار ممکن باشد، پس:

$$S'=-6x^2+24\xrightarrow{S'=0}x=\pm 2\xrightarrow{x>0}x=2$$

$$\mathrm{Max}\{S\}=-2\times 2^3+24\times 2=-16+48=32$$

پرسش‌های تستی

۱- کدام گزینه دربارهٔ تابع $y=x^3-3x+1$ درست نیست؟

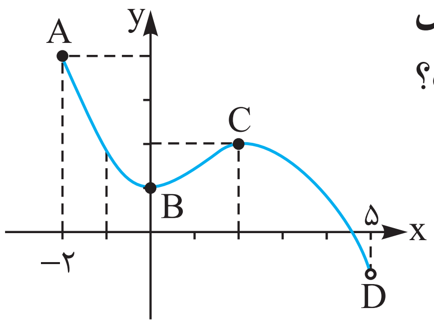
۱) تابع در بازهٔ $(-1,1)$ اکیداً نزولی است.

۲) تابع در بازهٔ $(-\infty,1)$ اکیداً صعودی است.

۳) تابع در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۴) تابع در $\mathbb{R}$ یکنوا نیست.

۲- نمودار تابعی با دامنهٔ $[-2,5)$ در شکل مقابل نمایش داده شده است. کدام گزینه درست است؟



۱) A نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع است.

۲) B نقطهٔ مینیمم مطلق تابع است.

۳) تابع دارای ماکسیمم مطلق نیست.

۴) C نقطهٔ ماکسیمم نسبی است.

۳- کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $f'(c)=0$ باشد، c نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۲) اگر c نقطهٔ بحرانی تابع باشد، آن‌گاه اکسترمم نسبی است.

۳) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد، c نقطهٔ بحرانی است.

۴) اگر $D_f=[a,b]$، a و b می‌توانند اکسترمم نسبی باشند.

۴- مجموع ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+2$ در بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر

۳) ماکسیمم مطلق ندارد. ۴) مینیمم مطلق ندارد.

۵- اگر $A(-1,-1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{bx}$ باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(1,-1)$

۶- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=-x^3+3x^2+1$ در آن اکیداً صعودی است، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۷- تعداد نقطه‌های بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & -2<x<0 \\ x^3-3x & 0\le x<2 \end{cases}$ کدام است؟

۱) دو ۲) سه ۳) چهار ۴) پنج

۸- بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویهٔ قائمه و وتر آن‌ها برابر با ۶ باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۹- دو برابر عددی از عددی دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصل‌ضرب این دو عدد کم‌ترین مقدار ممکن باشد، مجموع آن‌ها کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۰- طول قاعدهٔ جعبه‌ای به شکل مستطیل بدون درب، دو برابر عرض آن است، اگر مساحت کل این جعبه ۰/۵۴ متر مربع باشد، بیشترین حجم جعبه کدام است؟

۱) ۰/۲۷ ۲) ۰/۵۴ ۳) ۰/۰۱۸ ۴) ۰/۰۳۶

پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۲» مشتق تابع $y' = ۳x^۲ - ۳$ و ریشه‌های آن $x = \pm ۱$ هستند.

با توجه به جدول تعیین علامت مشتق ملاحظه می‌شود که در بازهٔ $(-\infty, ۱)$ ابتدا صعودی و سپس نزولی است، پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

در بازهٔ $(-۱, ۱)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(۱, +\infty)$ نیز اکیداً صعودی است.

x	$-\infty$	-۱		۱	$+\infty$
y'	+	۰	−	۰	−
y	↗		↘		↗

۲- گزینهٔ «۴» نقطهٔ C نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع است. توجه کنید که A نقطهٔ ماکسیمم مطلق تابع هست ولی نسبی نیست، زیرا نقطه‌های مرزی نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند. هم‌چنین B نقطهٔ مینیمم نسبی است ولی مطلق نیست زیرا عرض بعضی نقاط تابع از عرض نقطهٔ B کم‌تر هستند.

۳- گزینهٔ «۳» بنا بر قضیهٔ فرما، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

در تابع $f(x)=x^{۳}$، می‌دانیم $f'(۰)=۰$ ولی نقطهٔ $x=۰$ نه ماکسیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. هم‌چنین نقاط مرزی نمی‌توانند نقاط اکسترمم نسبی تابع باشند، در نتیجه گزینهٔ (۴) نیز نادرست است.

۴- گزینهٔ «۲» تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=۳x^{۲}-۶x$.

ریشه‌های مشتق $x=۰$ و $x=۲$ هستند ولی فقط $x=۰$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ قرار دارد. اکنون عرض نقاط بحرانی و مرزی را پیدا می‌کنیم:

$$f(۰)=۲ \text{ و } f(-۱)=-۱-۳+۲=-۲ \text{ و } f(۱)=۱-۳+۲=۰$$

پس ماکسیمم مطلق تابع، برابر با ۲ و مینیمم مطلق آن ۲− و در نتیجه مجموع آن‌ها صفر است. باید توجه داشته باشیم که چون تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ پیوسته است، پس هم دارای ماکسیمم مطلق و هم دارای مینیمم مطلق است.

۵- گزینهٔ «۱» نقطهٔ A باید در تابع صدق کند:

$$f(-۱)=-۱ \Rightarrow -۱=\frac{۱-۱+a}{-b} \Rightarrow a=b \quad (۱)$$

چون A نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس باید $f'(-۱)=۰$ باشد.

$$f'(x)=\frac{(۲x+۱)bx-b(x^{۲}+x+a)}{(bx)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{f'(-۱)=۰} ۰=\frac{(-۲+۱)b(-۱)-b(۱-۱+a)}{(-b)^{۲}}$$

$$\Rightarrow b-ab=۰ \Rightarrow b(۱-a)=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=۰ \\ a=۱ \end{cases}$$

اگر $b=۰$ باشد، تابع $f(x)$ تعریف‌نشده است، پس $b=۰$ قابل‌قبول نیست.
اگر $a=۱$ باشد از (۱) نتیجه می‌شود $b=۱$ ، پس $(a,b)=(۱,۱)$.

۶- گزینهٔ «۴» باید طول بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن $f'(x)$ مثبت باشد.

مشتق تابع $f'(x)=-۳x^{۲}+۶x$ و ریشه‌های مشتق $x=۰$ و $x=۲$ هستند.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

با توجه به جدول تعیین علامت مشتق، متوجه می‌شویم که تابع در بازهٔ $(۰,۲)$ اکیداً صعودی و طول این بازه برابر با ۲ است.

۷- گزینهٔ «۲» دامنهٔ تابع $(-۲,۲)$ است و در این بازه پیوسته است.
(تابع در $x=۰$ پیوسته است.)

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x+۳ & -۲<x<۰ \\ ۳x^{۲}-۳ & ۰<x<۲ \end{cases}$$

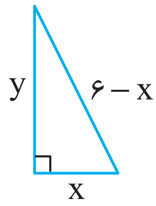
چون $f'_{-}(۰)=۳$ و $f'_{+}(۰)=-۳$ ، پس تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و در نتیجه این نقطه، بحرانی است. در بقیهٔ نقاط دامنه، تابع مشتق‌پذیر است.

ریشهٔ اولین ضابطه $x=-\frac{۳}{۲}$ است که در بازهٔ $-۲<x<۰$ قرار دارد، پس این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

ریشه‌های دومین ضابطه $x=\pm۱$ هستند که فقط $x=+۱$ در بازهٔ $۰<x<۲$ قرار دارد، پس $x=-۱$ بحرانی نیست ولی $x=۱$ بحرانی است.
در نتیجه تابع دارای سه نقطهٔ بحرانی است.

۸- گزینهٔ «۳» اگر طول یک ضلع زاویهٔ قائمه x باشد، طول وتر برابر $x-۶$ است. چنان‌چه فرض کنیم طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمه y باشد،

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$y^{۲}+x^{۲}=(۶-x)^{۲} \Rightarrow y=۲\sqrt{۹-۳x}$$

مساحت مثلث $S=\frac{۱}{۲}xy=x\sqrt{۹-۳x}$

$$S'=\sqrt{۹-۳x}-\frac{۳x}{۲\sqrt{۹-۳x}}$$

$$S'=۰ \Rightarrow \frac{۳x}{۲\sqrt{۹-۳x}}=\sqrt{۹-۳x} \Rightarrow ۳x=۲(۹-۳x)$$

$$\Rightarrow x=۲ \Rightarrow \text{Max}\{S\}=۲\sqrt{۹-۳\times ۲}=۲\sqrt{۳}$$

۹- گزینهٔ «۱» اگر آن دو عدد x و y باشند، آن‌گاه $۲x=y+۶$، پس $y=۲x-۶$: $P=xy=x(۲x-۶) \Rightarrow P=۲x^{۲}-۶x$

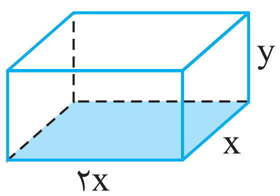
$$P'(x)=۴x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=۲\times\frac{۳}{۲}-۶=-۳$$

مجموع دو عدد $x+y=\frac{۳}{۲}-۳=-\frac{۳}{۲}$ است.

۱۰- گزینهٔ «۴» اگر عرض قاعده x باشد، طول آن ۲x خواهد بود. چنان‌چه ارتفاع جعبه را y بگیریم، آن‌گاه:

مساحت جعبه $=۲xy+۲(۲xy)+(۲x\times x)=۰/۵۴$

$$\Rightarrow ۶xy+۲x^{۲}=۰/۵۴ \Rightarrow y=\frac{۰/۲۷-x^{۲}}{۳x}$$



حجم جعبه $V=x\times ۲x\times y$

$$=۲x^{\cancel{۲}}\times\frac{۰/۲۷-x^{۲}}{۳\cancel{x}}=۰/۱۸x-\frac{۲}{۳}x^{۳}$$

$$V'=۰/۱۸-۲x^{۲}=۰ \Rightarrow x^{۲}=۰/۰۹ \Rightarrow x=\pm ۰/۳$$

چون $x>۰$، پس $x=۰/۳$.

$$\text{Max}\{V\}=۰/۱۸\times ۰/۳-\frac{۲}{۳}\times ۰/۰۲۷=۰/۰۳۶$$