

# فهرست

## فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

- ۷ درس اول: استدلال ریاضی
- ۱۳ درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح
- ۲۶ درس سوم: هم‌نهمتی در اعداد صحیح و کاربردها
- ۴۶ مسائل تشریحی فصل اول
- ۴۸ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل اول
- ۶۳ پاسخ مسائل تشریحی فصل اول
- ۷۴ پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل اول

## فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

- ۱۰۸ درس اول: معرفی گراف
- ۱۲۳ درس دوم: مدل‌سازی با گراف
- ۱۳۱ مسائل تشریحی فصل دوم
- ۱۳۶ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل دوم
- ۱۴۹ پاسخ مسائل تشریحی فصل دوم
- ۱۵۹ پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل دوم

## فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

- ۱۸۲ درس اول: مباحثی در ترکیبیات
- ۱۹۹ درس دوم: روش‌هایی برای شمارش
- ۲۱۲ مسائل تشریحی فصل سوم
- ۲۱۷ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل سوم
- ۲۳۰ پاسخ مسائل تشریحی فصل سوم
- ۲۴۶ پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل سوم

۲۷۴ نمونه امتحان نیم‌سال اول

۲۷۷ نمونه امتحان‌های نیم‌سال دوم

۲۸۳ سوالات کنکور سراسری ۹۸

۲۸۵ پاسخ تشریحی کنکور سراسری ۹۸

۲۸۸ پاسخ‌نامه کلیدی

## درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

چرا می‌گوییم عدد ۶ بر ۲ بخش پذیر است اما عدد ۵ بر ۲ بخش پذیر نیست؟ پاسخ ساده است، چون  $\frac{6}{2}$  برابر ۳ است که عددی صحیح است ولی  $\frac{5}{2}$  برابر ۲/۵ است که صحیح نیست. بنابراین می‌توانیم بگوییم اگر کسر  $\frac{a}{b}$  عددی صحیح شود  $a$  بر  $b$  بخش پذیر است. یعنی اگر داشته باشیم  $\frac{a}{b} = q$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) می‌توانیم بگوییم  $a$  بر  $b$  بخش پذیر است. اما در تعریف بخش پذیری، این رابطه به دلایلی طرفین‌وسطین می‌شود. یعنی:

عدد  $a$  را بر  $b$  بخش پذیر می‌گویند هرگاه  $a = bq$ .

قبل از این که بحث را ادامه دهیم یک چیز مهمی که باید درباره عدد بگوییم این است که منظور از عدد در بخش نظریه اعداد، عددهای صحیح است. مثلاً نمی‌توانیم بگوییم  $\sqrt{6}$  بر  $\sqrt{2}$  بخش پذیر است. اما گفتیم هرگاه  $a = bq$  یعنی  $a$  بر  $b$  بخش پذیر است.

برای مثال از تساوی  $10 = 5 \times 2$  می‌توان نتیجه گرفت  $10$  بر  $2$  بخش پذیر است و همچنین  $10$  بر  $5$  نیز بخش پذیر است. حالا یک مفهومی وجود دارد که تقریباً برعکس مفهوم بخش پذیری است. یعنی وقتی می‌گوییم  $10$  بر  $5$  بخش پذیر است، می‌توانیم بگوییم  $5$  می‌شمارد یا عاد می‌کند  $10$  را. به طور کلی وقتی داریم  $a = bq$ ، می‌توانیم بگوییم  $a$  بر  $b$  بخش پذیر است و  $b$  می‌شمارد  $a$  را.

**$b \mid a$  یا عاد می‌کند  $a$ ، هرگاه داشته باشیم  $a = bq$  و می‌نویسیم:  $b \mid a \Leftrightarrow a = bq$**

خب! خوب است حالا یک ذره از این مفهوم بخش پذیری و عاد کردن سؤال حل کنیم تا راحت‌تر جا بیفتد.

● هر یک از رابطه‌های  $15 \mid x$  و  $90 \mid x$  به ازای چند عدد طبیعی دورقمی برقرار است؟ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی هر دو رابطه برقرار است؟  $15 \mid x$  دقیقاً یعنی چی؟ یک کمی قبل دیدیم که رابطه عاد کردن، یک تساوی معادل داشت، یعنی با توجه به رابطه:  $b \mid a \Leftrightarrow a = bq$  می‌توان نوشت:

خب حالا قرار است  $x$  یک عدد طبیعی دورقمی باشد، پس:

پس رابطه به ازای ۶ عدد برقرار است. اگر بخواهیم این عددها را پیدا کنیم، کافی است جای  $q$  مقادیر بالا را قرار دهیم. در این صورت:

$$x = 15, 30, 45, 60, 75, 90$$

همان‌طور که می‌بینید، این‌ها مضارب ۱۵ هستند، به بیان دیگر رابطه  $15 \mid x$  یعنی این که  $x$  بر ۱۵ بخش پذیر است یا این که « $x$  یک مضرب ۱۵» است. اما برسیم به رابطه  $90 \mid x$ .

این‌جا  $x$ هایی به درد ما می‌خورد که ۹۰ بر آن‌ها بخش پذیر باشد، خب ۹۰ به چه عددهای دورقمی بخش پذیر است؟ ۹۰، ۴۵، ۳۰، ۱۸، ۱۵، ۱۰ این عددها در حقیقت مقسوم‌علیه‌های طبیعی دورقمی ۹۰ هستند.

اگر بخواهیم  $x$  عددی باشد که در هر دو رابطه  $x \mid 15$  و  $x \mid 90$  صدق کند، یعنی از یک طرف  $x$  باید مضرب ۱۵ باشد و از طرف دیگر باید  $x$  یک شمارنده یا مقسوم‌علیه ۹۰ باشد.  
در این حالت عددهای قابل قبول که همان اشتراک دو حالت قبلی هستند، عبارت‌اند از ۹۰، ۴۵، ۳۰ و ۱۵.  
اگر داشته باشیم  $x \mid a$  یعنی  $x$  مضرب  $a$  است. یا به عبارت دیگر  $x$  بر  $a$  بخش‌پذیر است.  
اگر داشته باشیم  $x \mid a$  یعنی  $x$  شمارنده یا مقسوم‌علیه  $a$  است یا به عبارت دیگر  $a$  بر  $x$  بخش‌پذیر است.

**تست** اگر  $a$  عددی طبیعی باشد رابطه  $a^2 - 1 \mid a + 1$  ..... رابطه  $a^2 + 3a + 2 \mid a + 1$  .....  
 (۱) همواره برقرار است و - نیز همواره برقرار است.  
 (۲) همواره برقرار است ولی - به ازای همه مقادیر  $a$  برقرار نیست.  
 (۳) به ازای همه مقادیر  $a$  برقرار نیست ولی - همواره برقرار است.  
 (۴) به ازای همه مقادیر  $a$  برقرار نیست و - نیز به ازای همه مقادیر  $a$  برقرار نیست.

**پاسخ** گزینه ۲ دیدیم که رابطه  $a \mid b$  زمانی برقرار است که عدد صحیحی مثل  $q$  پیدا شود به طوری که  $a = bq$ . حالا با توجه به این که  $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$  الان ضرب دو عدد  $(a - 1)$  و  $(a + 1)$  شده  $a^2 - 1$  پس می‌توان نتیجه گرفت  $a^2 - 1 \mid a - 1$  و  $a^2 - 1 \mid a + 1$ . پس رابطه اول برقرار است.

اما با توجه به این که:  $a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$  می‌توان نتیجه گرفت  $a^2 + 3a + 2 \mid a + 1$  و  $a^2 + 3a + 2 \mid a + 2$ . اما رابطه  $a^2 + 3a + 2 \mid a + 1$  به ازای همه مقادیر  $a$  برقرار نیست. برای مثال اگر  $a = 1$  باشد باید  $6 \mid 2$  که این رابطه نادرست است.

برای تشخیص این که یک رابطه عادی کردن درست است یا نه، یک کار ساده می‌شود کرد. کافی است رابطه عادی کردن را نود درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید تا یک کسر به وجود آید. حالا اگر حاصل این کسر عددی صحیح شد، رابطه درست و اگر نشد رابطه درست نیست. برای مثال بیایید درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را بررسی کنیم:

الف)  $18 \mid 6$       ب)  $3^3 \mid 3^2$       پ)  $a^2 + 1 \mid 0$

خُب! با توجه به چیزی که گفتیم، هر یک از رابطه‌ها را به یک کسر تبدیل می‌کنیم.

الف)  $\frac{18}{6} = 3$  عددی صحیح است پس رابطه درست است.      ب)  $\frac{3^3}{3^2} = \frac{3}{1} = 3$  عددی صحیح نیست، پس رابطه درست نیست.

پ)  $\frac{0}{a^2 + 1} = 0$  صفر عددی صحیح است، پس رابطه درست است.

**تست** چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که بر ۵۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱۹ (۴)      ۱۸ (۳)      ۱۷ (۲)      ۱۶ (۱)

**پاسخ** گزینه ۲ با توجه به آن چه گفتیم اگر بر ۵۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی  $55 \mid x$  داریم:

می‌خواهیم  $x$  سه‌رقمی باشد، بنابراین:

بنابراین  $q$  از ۲ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند. می‌دانیم تعداد عددهای بزرگ‌تر مساوی عدد  $a$  و کوچک‌تر مساوی عدد  $b$  برابر است با  $b - a + 1$ . بنابراین:

$$18 - 2 + 1 = 17$$

اما یک جور دیگر هم می‌شود به این سؤال پاسخ داد که کمی کوتاه‌تر است. اما قبل از آن یک نکته:

به این سؤال ساده توجه کنید: ۳۰ سیب را بین ۷ نفر تقسیم می‌کنیم، به هر کدام چند سیب می‌رسد؟

نه! سرکارتان نگذاشته‌ام. یک هدفی دارم از این سؤال. جواب که ساده است:  $\lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$

نتیجه‌ای که می‌خواستیم از این سؤال بگیریم این بود که:

تعداد مضارب طبیعی عدد  $a$  که کوچک‌تر مساوی عدد  $n$  است برابر است با:  $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$

حالا در سؤال قبل می‌خواستیم مضارب سه‌رقمی عدد ۵۵ را حساب کنیم. برای این کار کافی است مضارب ۵۵ را در فاصله ۱ تا ۹۹۹ حساب کنیم ولی چون فقط مضارب سه‌رقمی ۵۵ را می‌خواهیم پیدا کنیم باید آن قسمتی را که زیادی حساب کرده‌ایم، کم کنیم. یعنی:

$$1, 2, 3, \dots, 99, \quad 100, 101, \dots, 999$$

$$\left\lfloor \frac{999}{55} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{55} \right\rfloor = 18 - 1 = 17$$

بگذارید، این کار را کمی تمرین کنیم.

**مثال** هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف  $\{x \in \mathbb{N} : 7 \mid x, 210 < x < 630\}$

ب  $\{x \in \mathbb{N} : 8 \mid x, 320 \leq x < 800\}$

پ  $\{x \in \mathbb{N} : 9 \mid x, 540 < x \leq 990\}$

ت  $\{x \in \mathbb{N} : 11 \mid x, 220 \leq x \leq 1001\}$

**حل الف** بازه  $210 < x < 630$  است. یعنی:  $211, 212, \dots, 629$ . برای پیدا کردن مضارب 7 در این فاصله یک بار مضارب طبیعی 1 تا 629 را پیدا می‌کنیم سپس مضارب 7 را در قسمتی که زیادی حساب کرده‌ایم، کم می‌کنیم. یعنی:

$$1, 2, \dots, 210, \quad 211, 212, \dots, 629$$

$$\left\lfloor \frac{629}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{210}{7} \right\rfloor = 89 - 30 = 59$$

$$1, 2, \dots, 318, 319, \quad 320, 321, \dots, 799$$

**ب** با توجه به این‌که  $320 \leq x < 800$  بازه موردنظر ما  $320, 321, \dots, 799$  است. بنابراین:

$$\left\lfloor \frac{799}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{319}{8} \right\rfloor = 99 - 39 = 60$$

دقت کنید که ما می‌خواهیم مضارب 8 را از  $320$  تا  $799$  حساب کنیم. بنابراین خود  $320$  را باید جزء اعدادی که می‌خواهیم حساب کنیم. یعنی مضارب 8 را در  $319$  عدد اول حذف کنیم.

**پ** بازه موردنظر  $540 < x \leq 990$  است، یعنی ما مضارب 9 را در بازه  $541, \dots, 990$  می‌خواهیم. همانند آن‌چه در قسمت‌های قبل انجام دادیم، داریم:

$$1, 2, \dots, 540, \quad 541, \dots, 990$$

$$\left\lfloor \frac{990}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{540}{9} \right\rfloor = 110 - 60 = 50$$

دقت کنید که اگر یک عدد جابه‌جا در برکت‌ها قرار دهیم جوابمان غلط می‌شود. بنابراین خیلی مهم است که حدود این بازه‌ای را که می‌خواهیم درست تشخیص دهیم.

**ت** در این قسمت  $220 \leq x \leq 1001$  است. یعنی باید مضارب 11 را از  $220$  تا  $1001$  حساب کنیم و حواستان باشد که خود دو عدد  $220$  و  $1001$  را هم باید حساب کنیم. چون هر دوشان مضرب 11 هستند. یعنی یک بار مضارب 11 را از یک تا  $1001$  حساب می‌کنیم و بعد مضارب 11 را در آن بخشی که نمی‌خواهیم یعنی 1 تا  $219$  کم می‌کنیم.

$$1, \dots, 219, \quad 220, 221, \dots, 1001$$

$$\left\lfloor \frac{1001}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{219}{11} \right\rfloor = 91 - 19 = 72$$

در این مدل سؤال‌ها اگر خیلی علاقه‌مند به فرمول هستید، یک پیشنهادی برای شما دارم. اول با توجه به حدود  $x$  بازه را مشخص کنید. برای مثال دیدیم که در قسمت (پ)،  $220 \leq x \leq 1001$  است. یعنی بازه موردنظر  $220, 221, \dots, 1001$  است.

حالا آخرین عدد قابل قبول که این‌جا  $1001$  است را بگذارید در صورت جزءصحیح اول و از اولین عدد قابل قبول بازه که  $220$  است یکی کم کنید و بگذارید صورت جزءصحیح دوم.

در حالت کلی:  $\left\lfloor \frac{\text{اولین عدد بازه منتهای یک}}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\text{آخرین عدد بازه}}{n} \right\rfloor$

1 قبل از این که برسیم به ویژگی‌های بخش‌پذیری، بد نیست به چند مثال دیگر از مفهوم بخش‌پذیری و رابطه‌ی عا در کردن توجه کنیم.

**تست** به ازای چند عدد صحیح مانند  $x$  هر دو رابطه  $12 \mid x$  و  $24 \mid x$  برقرار است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)

**پاسخ** گزینه ۱ از رابطه  $12 \mid x$  می‌فهمیم که  $x$  مضرب 12 است، یعنی می‌توانیم هر عددی که بر 12 بخش‌پذیر است را به جای  $x$  قرار دهیم، عددیایی

مثل  $\dots, 36, \pm 24, \pm 12, 0$ ، اما آیا ما همه این عددها را می‌خواهیم؟ نه، فقط آن دسته از عددها را می‌خواهیم که در رابطه  $24 \mid x$  نیز صدق کند.

حالا یا باید یکی یکی این مضارب 12 را چک کنیم و ببینیم کدام آن‌ها شمارنده 24 هم هست یا نه (که البته واضح است راه خوبی نیست). یا این‌که:

$$12 \mid x \Rightarrow x = 12q$$

$$12q \mid 24 \Rightarrow q \mid 20$$

حالا  $x$  را در رابطه  $24 \mid x$  جایگزین می‌کنیم:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$$

خب، کار ساده‌تر شد. کافی است مقسوم‌علیه‌های 20 را پیدا کنیم. 20 بر چه عددهایی بخش‌پذیر است؟

یعنی به ازای 12 عدد این رابطه برقرار است.

**تست** به ازای چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و کوچک‌تر از ۲۰ مانند  $x$ ، رابطه  $10! \mid x!$  برقرار است؟

- ۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

**پاسخ** گزینه ۳ می‌دانیم  $10! = 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  اگر رابطه  $10! \mid x!$  را به صورت کسر نشان دهیم این طوری می‌شود:

$$\frac{10!}{x} = \frac{10 \times 9 \times \dots \times 2 \times 1}{x}$$

یکی یکی عددها را بررسی می‌کنیم. مشخص است که اگر جای  $x$  عدد ۱۱ را قرار دهیم، کسر ساده نمی‌شود، چون ۱۱ را با هیچ چیزی نمی‌شود ساده کرد. اما اگر جای  $x$  عدد ۱۲ را قرار دهیم با توجه به این که  $12 = 6 \times 2$  کسر ساده می‌شود، یعنی  $10! \mid 12!$  به همین ترتیب  $10!$  بر عددهای زیر نیز بخش‌پذیر است.

$$14 = 7 \times 2 \quad 15 = 5 \times 3 \quad 16 = 8 \times 2 \quad 18 = 9 \times 2$$

**تست** کوچک‌ترین مقدار  $n$  برای آن که رابطه  $n! \mid 715!$  برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

- ۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

**پاسخ** گزینه ۲ کلید پاسخ‌دادن به این سؤال این است که ۷۱۵ را تجزیه کنیم:

$$715 = 5 \times 11 \times 13$$

$$\frac{n!}{715} = \frac{n!}{5 \times 11 \times 13}$$

حالا اگر رابطه  $n! \mid 715!$  را به صورت یک کسر بنویسیم، داریم:

خب حالا باید کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی را پیدا کنیم که هر سه عدد ۵، ۱۱ و ۱۳ را در تجزیه‌اش داشته باشد. به نظر شما اگر جای  $n$  عدد ۱۱ را قرار دهیم رابطه درست می‌شود؟ معلوم است که نه، چون ۱۳ توی مخرج باقی می‌ماند. اما اگر  $n = 13$  باشد ۱۳! هم عامل ۵ دارد، هم عامل ۱۱ دارد و هم عامل ۱۳، بنابراین پاسخ سؤال ۱۳! است که مجموع ارقام عدد ۱۳ برابر است با  $1 + 3 = 4$ .

### ویژگی‌های بخش‌پذیری

رابطه  $6 \mid 12$  را در نظر بگیرید. کسر معادل این رابطه  $\frac{12}{6}$  است که عددی صحیح است. می‌دانیم اگر یک عدد صحیح را در یک عدد صحیح دیگر ضرب کنیم، حاصل عددی صحیح می‌شود. برای مثال  $10 = 5 \times \frac{12}{6}$  که عددی صحیح است. حالا اگر همین را به صورت یک رابطه عادی نشان دهیم، این طوری می‌شود:

$$6 \mid 12 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 5} 6 \mid 60$$

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

در حالت کلی می‌شود گفت سمت راست رابطه عادی را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. یعنی:

اما سمت چپ را چه طور؟ آیا سمت چپ رابطه عادی را هم می‌شود در هر عددی ضرب کنیم؟ پاسخ منفی است.

برای مثال به همین رابطه  $6 \mid 12$  نگاه کنید، اگر سمت چپ آن را در ۵ ضرب کنیم به رابطه  $30 \mid 12$  می‌رسیم که نادرست است. اما با سمت چپ رابطه عادی چه کار می‌توانیم بکنیم؟ فرض کنید  $15 \mid x$  این یعنی این که  $x$  یک عددی است که بر ۱۵ بخش‌پذیر است. مثل ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ...  
 حُب مشخص است عددهایی که بر ۱۵ بخش‌پذیرند همگی بر ۵ هم بخش‌پذیرند. همین‌طور همه‌شان بر ۳ نیز بخش‌پذیرند. بنابراین از  $15 \mid x$  می‌توان نتیجه گرفت  $5 \mid x$  و  $3 \mid x$ . به بیان دیگر سمت چپ رابطه عادی را می‌توانیم به مقسوم‌علیه‌های عدد داده‌شده تقسیم کنیم و آب هم از آب تکان نخورد.  
 $a \mid b \Rightarrow$  هر یک از مقسوم‌علیه‌های  $a$

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

البته یک‌جور دیگری هم می‌توانیم این را به زبان ریاضی نشان دهیم که کمی شیک‌تر است:

پس به عنوان یک نتیجه‌گیری کلی یادتان باشد، وقتی یک رابطه عادی دارید، سمت راست آن را در هر عددی (البته می‌دانید که منظورمان عدد صحیح است) دلتان می‌خواهد ضرب کنید و سمت چپ آن را به شمارنده‌هایش تقسیم کنید.

**تست** از رابطه  $a^2 \mid b^3$  کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

- ۱)  $a^2 \mid b^3$  (۲)  $2a^2 \mid b^6$  (۳)  $a^2 \mid b^6$  (۴)  $a \mid b$

**پاسخ** گزینه ۴ درست است. زیرا گفتیم می‌توانیم سمت چپ را به شمارنده‌های عدد تقسیم کنیم. این‌جا نیز سمت چپ رابطه  $a^2 \mid b^3$  را

به ۲ تقسیم کرده‌ایم. در ۲) سمت راست رابطه  $a^2 \mid b^3$  را در  $2a^2$  ضرب کرده‌ایم که با توجه به این که دیدیم می‌شود سمت راست یک رابطه عادی را

در هر عددی ضرب کرد پس این رابطه نیز درست است. در ۳) هر دو کار با هم انجام شده. یعنی هم سمت چپ رابطه  $a^2 \mid b^3$  تقسیم بر ۲ شده و

هم سمت راست آن در  $b^3$  ضرب شده.

اما ۴ همیشه درست نیست. برای مثال اگر  $b = 8$  و  $a = 16$  باشد.  $b^3 = 512$  و  $2a^2 = 512$  یعنی  $2a^2 \mid b^3$  اما  $a \nmid b$ .  
می‌دانیم اگر  $\frac{a}{b}$  عددی صحیح باشد  $(\frac{a}{b})^n$  نیز عددی صحیح است، هم‌چنین اگر  $(\frac{a}{b})^n$  عددی صحیح باشد  $\frac{a}{b}$  نیز صحیح است. (با برهان خلف می‌توان

$$\begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow a^n \mid b^n \\ a^n \mid b^n &\Rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

ثابت کرد.) بنابراین:

**مثال** ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند و  $a^4 \mid b^9$ ، آن‌گاه  $a^5 \mid b^9$ .

$$\begin{aligned} a^4 \mid b^9 &\xrightarrow{\text{به توان ۵}} a^{20} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{سمت راست } b \times} a^{20} \mid b^{36} \\ (a^5)^4 \mid (b^9)^4 &\xrightarrow{\text{ریشه چهارم می‌گیریم.}} a^5 \mid b^9 \end{aligned}$$

**حل**

**تست** از رابطه  $x^3 \mid y^5$  کدام رابطه نتیجه می‌شود؟

$$\begin{aligned} x^5 \mid y^8 & \text{ (۱)} & x^8 \mid y^{13} & \text{ (۳)} & x^9 \mid y^{11} & \text{ (۲)} \end{aligned}$$

**پاسخ** گزینه ۴  
برای جواب‌دادن به این مدل تست‌ها یا باید مثل سؤال قبلی تلاش کرد یکی‌یکی گزینه‌ها را ثابت کنید یا با مثال نقض رد کنید. اما یک راه ساده‌تری هم وجود دارد که بد نیست یاد بگیرید. در این مدل سؤال‌ها سعی کنید دو طرف رابطه داده‌شده را یکسان کنید. یعنی چه جور؟ برای مثال در این سؤال داریم  $x^3 \mid y^5$  ساده‌ترین راه برابر کردن دو طرف، این است که  $x$  و  $y$  را هر دو برابر یک فرض کنیم. که البته فایده‌ای ندارد چون به ازای  $x = 1$  و  $y = 1$  همه گزینه‌ها درست می‌شوند.

اما اگر بخواهیم دو طرف با هم برابر باشند می‌شود یک کاری کرد،  $x$  و  $y$  را به صورت یک عدد توان‌دار با یک پایه دلخواه فرض می‌کنیم (برای سادگی کار می‌شود پایه را ۲ گرفت) و توان‌ها را جابه‌جا می‌کنیم. یعنی در این‌جا چون توان  $x$  سه است  $y$  را برابر  $3^3$  و چون توان  $y$  پنج است  $x$  را برابر  $2^5$  می‌گیریم با این کار  $x^3 = (2^5)^3 = 2^{15}$  و  $x^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$ . حالا با این عددها گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^5 \mid y^8 &\Rightarrow (2^5)^5 \mid (2^3)^8 \Rightarrow 2^{25} \nmid 2^{24} & \text{ (۱)} \\ x^9 \mid y^{11} &\Rightarrow (2^5)^9 \mid (2^3)^{11} \Rightarrow 2^{45} \nmid 2^{33} & \text{ (۲)} \\ x^8 \mid y^{13} &\Rightarrow (2^5)^8 \mid (2^3)^{13} \Rightarrow 2^{40} \nmid 2^{39} & \text{ (۳)} \\ x^{10} \mid y^{17} &\Rightarrow (2^5)^{10} \mid (2^3)^{17} \Rightarrow 2^{50} \mid 2^{51} & \text{ (۴)} \end{aligned}$$

برای اثبات ۴ می‌توانیم این کار را هم بکنیم:

$$x^3 \mid y^5 \xrightarrow{\text{به توان ۱۰}} x^{30} \mid y^{50} \xrightarrow{\text{سمت راست } y \times} x^{30} \mid y^{51} \Rightarrow (x^{10})^3 \mid (y^{17})^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x^{10} \mid y^{17}$$

چند ویژگی دیگر از رابطه عا در کردن:

$$\begin{aligned} a \mid b, b \mid c &\Rightarrow a \mid c \\ a \mid b, a \mid c &\Rightarrow a \mid mb + nc \\ a \mid b, b \neq 0 &\Rightarrow |a| \leq |b| \end{aligned}$$

اثبات این ویژگی‌ها ساده است و در کتاب درسی آمده است. برای مثال دومی را که به نظر سخت‌تر است ثابت می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = maq \\ a \mid c \Rightarrow c = aq' \xrightarrow{\times n} nc = naq' \end{cases} \xrightarrow{+} mb + nc = maq + naq' \Rightarrow \underbrace{mb + nc = a(mq + nq')}_{*} \Rightarrow a \mid mb + nc$$

(\*) توجه کنید این‌جا از تعریف عا در کردن استفاده کردیم. دیدیم که وقتی  $5 \times 2 = 10$  است، می‌شود نتیجه گرفت  $5 \mid 10$ . حالا هم ضرب دو عدد  $a$  و  $mq + nq'$  شده  $mb + nc$ ، پس می‌شود نتیجه گرفت  $a \mid mb + nc$ .

چند ویژگی دیگر از عا در کردن هست که خوب است این‌ها را نیز با هم مرور کنیم:

- همه عددها بر ۱ و -۱ بخش‌پذیرند.
- هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است.
- صفر بر همه عددها بخش‌پذیر است.
- تنها عددی که ۱ را می‌شمارند ۱ و -۱ اند.
- هر عدد اول فقط بر خودش و قرینه‌اش و یک منهای یک بخش‌پذیر است.

در مورد رابطه  $a \mid b$  خوب است یک توضیحی بدهیم. در اول این درس گفتیم در تعریف رابطه بخش پذیری زمانی می‌گوییم  $a$  بر  $b$  بخش پذیر است که  $a = bq$  و رابطه را طرفین وسطین شده داده‌اند. علت این است که بتوانند با این تعریف ثابت کنند صفر بر خودش بخش پذیر است:  $0 = 0 \times q \Rightarrow 0 \mid 0$ . حالا وقت آن است که چند سؤال از ویژگی‌های رابطه عاد کردن ببینیم.

**تست** اگر  $a > 1$  عدد طبیعی باشد و دو عدد  $7m + 5$  و  $8m + 3$  بر  $a$  بخش پذیر باشند،  $a$  کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ  گزینه ۴

$$\begin{aligned} a &\mid 8m + 3 \\ a &\mid 7m + 5 \end{aligned}$$

برای حذف کردن  $m$ ، سمت راست رابطه بالایی را در ۷ و سمت راست رابطه پایینی را در ۸ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$a \mid 8m + 3 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 7} a \mid 56m + 21$$

$$a \mid 7m + 5 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 8} a \mid 56m + 40$$

حالا از ویژگی  $a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid mb + nc$  استفاده می‌کنیم. سمت چپ هر دو رابطه یکسان است، می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم.

$$\begin{cases} a \mid 56m + 21 \\ a \mid 56m + 40 \end{cases} \Rightarrow a \mid 19 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 19$$

با توجه به این که  $a > 1$  است پس  $a$  فقط می‌تواند ۱۹ باشد.

**تست** به ازای چند عدد صحیح مانند  $x$  رابطه  $5x + 2 \mid 3x + 1$  برقرار است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ  گزینه ۱

دیدیم که هر عددی خودش را می‌شمارد، بنابراین  $3x + 1 \mid 3x + 1 \mid 5x + 2$  از طرفی می‌خواهیم  $5x + 2 \mid 3x + 1$ ، مثل بالا تلاش می‌کنیم جمله  $x$  دار را در عبارت سمت راست حذف کنیم.

$$3x + 1 \mid 3x + 1 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 5} 3x + 1 \mid 15x + 5 \xrightarrow{(-)} 3x + 1 \mid 1$$

$$3x + 1 \mid 5x + 2 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 3} 3x + 1 \mid 15x + 6 \quad \text{غیرقابل قبول} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

بنابراین رابطه فقط به ازای یک مقدار صحیح  $x$  برقرار است.

**تست** بزرگ‌ترین مقدار  $x$  که به ازای آن رابطه  $5x^2 + 2 \mid x - 3$  برقرار است، چه مجموع ارقامی دارد؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۱۱ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ  گزینه ۴

$$x - 3 \mid x - 3$$

$$x - 3 \mid 5x^2 + 2$$

دوباره برنامه این است که سمت راست‌ها را یک‌کاری کنیم تا برسیم به یک عدد (یعنی جمله  $x$  دار را حذف کنیم). چند راه وجود دارد. اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که سمت راست رابطه اولی را در  $5x$  ضرب کنیم.

$$x - 3 \mid x - 3 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 5x} x - 3 \mid 5x^2 - 15x$$

$$x - 3 \mid 5x^2 - 15x \xrightarrow{(-)} x - 3 \mid 15x + 2 \quad \text{از طرفی } 5x^2 + 2 \mid x - 3 \text{، از این دو رابطه داریم:}$$

$$x - 3 \mid 5x^2 + 2$$

خب تا این جا جمله  $x^2$  دار را از سمت راست تساوی حذف کردیم حالا جمله  $x$  دار را حذف می‌کنیم:

$$x - 3 \mid x - 3 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 15x} x - 3 \mid 15x - 45 \xrightarrow{(-)} x - 3 \mid 47$$

$$x - 3 \mid 15x + 2 \quad x - 3 \mid 15x + 2$$

$$x - 3 = 47 \Rightarrow x = 50$$

چون بزرگ‌ترین مقدار  $x$  را می‌خواهیم:

اما یک جور سریع‌تری و در یک مرحله هم می‌شد همان اول کار  $5x^2$  را حذف کرد. نگاه کنید:

$$x - 3 \mid x - 3 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times 5(x+3)} x - 3 \mid 5(x^2 - 9)$$

$$x - 3 \mid 5x^2 - 45 \Rightarrow x - 3 \mid 47$$

$$x - 3 \mid 5x^2 + 2$$

از طرفی:

ولی یک نکته تستی هم بد نیست یاد بگیرید. در این مدل سؤال‌ها اگر ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم، سؤال خیلی سریع و

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{۳ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم.}} 5 \times (3)^2 + 2 = 47$$

ساده‌تر حل می‌شود.

$$x - 3 \mid 47 \Rightarrow x - 3 = 47 \Rightarrow x = 50$$

این همان عددی است که عبارت سمت چپ آن را می‌شمارد. یعنی:



برای پیدا کردن مقادیر صحیح  $x$  در رابطه مثل  $f(x) = x - a$  کافی است ریشه عبارت سمت چپ یعنی  $a$  را در عبارت سمت راست قرار دهیم و به رابطه  $f(a) = x - a$  برسیم.

**مثال** ثابت کنید بزرگ‌ترین مقدار  $x$  که در رابطه  $3x^2 + 1 \mid 4x + 3$  صدق می‌کند عدد ۱۰ است.

$$4x + 3 \mid 4x + 3 \quad \text{هر عددی خودش را می‌شمارد}$$

**حل** خوب این یکی به نظر سؤال سخت‌تری است. دو رابطه را می‌نویسیم:

$$4x + 3 \mid 3x^2 + 1$$

باید متغیر را در عبارت سمت راست حذف کنیم تا به یک عدد برسیم. در عبارت پایینی جمله  $x$  دارد و وجود ندارد و فقط یک  $3x^2$  داریم. بنابراین اگر عبارت بالا را در مزدوجش ضرب کنیم، آن‌جا هم جمله  $x$  دارد به وجود نمی‌آید.

$$4x + 3 \mid 4x + 3 \xrightarrow{\times(4x-3)} 4x + 3 \mid 16x^2 - 9$$

$$4x + 3 \mid 16x^2 - 9 \xrightarrow{\times 3} 4x + 3 \mid 48x^2 - 27 \quad (-) \rightarrow 4x + 3 \mid 43$$

$$4x + 3 \mid 3x^2 + 1 \xrightarrow{\times 16} 4x + 3 \mid 48x^2 + 16$$

$$4x + 3 = 43 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$$

چون بیشترین مقدار را می‌خواهیم:

یک چیزی هم بد نیست یواشکی یادتان بدهم (البته مثال نقض هم دارد ولی خیلی جاها هم کار می‌کند). در این مدل سؤال‌ها هم می‌شود ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد. فقط چون ریشه کسری است وقتی آن را در عبارت سمت راست قرار می‌دهید باید مخرج مشترک بگیرید و صورت

کسر را به دست بیاورید. عبارت سمت چپ، صورت کسر عبارت سمت راست را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال:

$$4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \times 3 + 1 = \frac{27}{16} + 1 = \frac{43}{16}$$

$-\frac{3}{4}$  را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

همان‌طور که می‌بینید صورت کسر عدد ۴۳ است. عبارت سمت چپ ۴۳ را می‌شمارد، بنابراین  $4x + 3 \mid 43$  و بقیه‌اش هم مثل بالا.

**تست** چند نقطه روی منحنی به مختصات  $yx = y + 2x + 1$  وجود دارد که هر دو مولفه  $x$  و  $y$  در آن عددهایی طبیعی باشند؟

۴ بی‌شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)

$$yx = y + 2x + 1 \Rightarrow yx - y = 2x + 1 \Rightarrow y(x - 1) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

**پاسخ** گزینه ۳ ابتدا  $y$  را بر حسب  $x$  به دست می‌آوریم:

اگر قرار باشد  $y$  عددی طبیعی باشد، یعنی کسر  $\frac{2x+1}{x-1}$  باید عددی طبیعی باشد و یک کسر زمانی عددی صحیح است که صورتش بر مخرجش بخش پذیر

$$x - 1 \mid 2x + 1$$

باشد یا به بیان دیگر مخرجش صورتش را بشمارد. پس:

$$x - 1 \mid x - 1 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2} \begin{array}{l} x - 1 \mid 2x - 2 \\ x - 1 \mid 2x + 1 \end{array} \quad (-) \rightarrow x - 1 \mid 3$$

مقادیر  $x$  را از این رابطه پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{1} = 5 \quad \checkmark$$

$$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{طبیعی نیست}$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = \frac{9}{3} = 3 \quad \checkmark$$

$$x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \quad \text{طبیعی نیست}$$

پس دو نقطه  $\left(\begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array}\right)$  و  $\left(\begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array}\right)$  روی این منحنی‌اند و در آن  $x$  و  $y$  هر دو عددهایی طبیعی‌اند.

**تست** به ازای چند عدد صحیح رابطه  $5x + 1 \mid x^3 + 2$  برقرار است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**پاسخ** گزینه ۲ خوب! این سؤال با سؤال‌های قبلی فرق دارد. همین‌طور که می‌بینید عبارت سمت چپ یک چندجمله‌ای درجه ۳ است. یک راه پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها مثل سؤال‌های قبل حذف کردن جملات  $x$  دارد و رسیدن به یک عدد است، اما راه ساده‌تری هم برای جواب‌دادن به این سؤال‌ها وجود دارد. واضح است که رشد عبارت  $x^3 + 2$  از  $5x + 1$  سریع‌تر است. یعنی به ازای عددهای کوچک مثل صفر، ۱، ۲، ۱، ... ممکن است قدرمطلق  $5x + 1$  بزرگ‌تر از  $x^3 + 2$  باشد. اما وقتی  $x$  بزرگ باشد قطعاً  $5x + 1$  از  $x^3 + 2$  کم‌تر خواهد بود. پس فقط کافی است درستی این رابطه را به ازای عددهای کوچک چک کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow 2 \mid 1 \quad \text{نادرست است}$$

$$x = 1 \Rightarrow 6 \mid 3 \quad \checkmark$$

$$x = 2 \Rightarrow 11 \mid 10 \quad \text{نادرست است}$$



و مشخص است به ازای  $x \geq 3$  حتماً  $x^3 + 2$  بزرگتر از  $5x + 1$  است و رابطه نادرست خواهد بود. حالا در عددهای منفی بررسی می‌کنیم:

$x = -1 \Rightarrow 1 | -4$  ✓

نادرست است.  $x = -2 \Rightarrow -6 | -9$

و به ازای  $x \leq -3$  نیز مشخص است که  $|5x + 1|$  کوچک‌تر از  $|x^3 + 2|$  است و رابطه برقرار نیست. پس فقط به ازای  $x = 1$  و  $x = -1$  رابطه برقرار است.

**مثال** اگر  $7 | 3k + 2$  ثابت کنید:  $49 | 9k^2 - 9k - 10$ .

**حل** عبارت  $9k^2 - 9k - 10$  را تجزیه می‌کنیم:

می‌دانیم  $7 | 3k + 2$  بنابراین:

$$9k^2 - 9k - 10 = (3k + 2)(3k - 5)$$

$$7 | 3k + 2 \xrightarrow{(-)} 7 | 3k - 5$$

$$7 | 7$$

$$a | b, c | d \Rightarrow ac | bd$$

$$7 | 3k + 2 \Rightarrow 49 | (3k + 2)(3k - 5)$$

$$7 | 3k - 5$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد:  
بنابراین:

**تست** اگر  $x$  و  $y$  دو عدد صحیح باشند، به طوری که  $2a + 3b | 3a + 7b$  کدام گزینه درست نیست؟

(۱)  $2a + 3b | 5a$       (۲)  $2a + 3b | 5b$       (۳)  $2a + 3b | a - b$       (۴)  $2a + 3b | a + b$

**پاسخ** گزینه ۴ این سؤال‌ها، سؤال‌های ساده‌ای نیستند. چون باید تک‌تک گزینه‌ها را بررسی کنیم. سمت راست (۱) فقط متغیر  $a$  وجود دارد بنابراین سعی می‌کنیم  $b$  را از سمت راست رابطه داده شده در صورت سؤال حذف کنیم.

$$2a + 3b | 2a + 3b \xrightarrow{\times 7} 2a + 3b | 14a + 21b \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | 5a$$

$$2a + 3b | 3a + 7b \xrightarrow{\times 2} 2a + 3b | 6a + 14b$$

پس (۱) درست است. با توجه به این که در (۲) در سمت راست فقط  $b$  وجود دارد، این بار  $a$  را حذف می‌کنیم:

$$2a + 3b | 2a + 3b \xrightarrow{\times 3} 2a + 3b | 6a + 9b \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | 5b$$

$$2a + 3b | 3a + 7b \xrightarrow{\times 2} 2a + 3b | 6a + 14b$$

خب حالا تلاش کنیم (۳) یا (۴) را ثابت کنیم:

$$2a + 3b | 3a + 7b \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | a - b$$

$$2a + 3b | 2a + 3b \xrightarrow{\times 2} 2a + 3b | 4a + 6b$$

پس (۳) نیز درست است.

حُب به نظر می‌رسد به اندازه کافی از بخش‌پذیری و ویژگی‌های آن سؤال حل کردیم و بقیه‌اش را در تمرین‌ها ببینید.

### بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

$d$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  می‌گویند و می‌نویسند  $d = (a, b)$  هر وقت دوتا اتفاق بیفتد:

(۱)  $d$  مقسوم‌علیه هر دو عدد باشد، یعنی  $d | a$  و  $d | b$ .

(۲) در بین همه مقسوم‌علیه‌ها (شمارنده‌های مشترک، عدد  $d$  بزرگ‌تر از همه باشد. یعنی اگر مثلاً  $c$  هم یک مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد است و  $c | a$  و  $c | b$ ، آن‌گاه  $c \leq d$  باشد، این‌جوری خیالمان راحت می‌شود که  $d$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد یا خودمانی‌ترش همان ب.م.م دو عدد است.

برای مثال اگر بخواهیم (۱۲، ۱۸) را پیدا کنیم، داریم:

$$12 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$12 \text{ و } 18 \text{ م.م.م یا مقسوم‌علیه‌های مشترک } = \{1, 2, 3, 6\}$$

که در میان م.م.ها یا مقسوم‌علیه‌های مشترک  $b$  یا بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۶ است.

برای پیدا کردن بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو یا چند عدد می‌شود همانند مثال قبل مجموعه مقسوم‌علیه‌های عددها را نوشت و از میان مشترک‌ها بزرگ‌ترینشان را انتخاب کرد که البته در مورد عددهای بزرگ کار سختی است، کار دیگری که می‌شود کرد این است که:

برای پیدا کردن ب.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب می‌کنیم.

برای مثال اگر بخواهیم (۳۰۰، ۱۴۴) را حساب کنیم، داریم:

$$144 = 2^4 \times 3^2 \Rightarrow (144, 300) = 2^2 \times 3 = 12$$

دو عدد  $a$  و  $b$  را نسبت به هم اول می‌گویند هرگاه  $(a, b) = 1$  باشد.

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$



**مثال** ثابت کنید عدد طبیعی  $n$  هر چه باشد دو عدد  $9n + 4$  و  $11n + 5$  همواره نسبت به هم اول اند.

**حل** ب.م.م دو عدد را  $d$  می‌نامیم. داریم:

$$(11n + 5, 9n + 4) = d \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid 9n + 4 \xrightarrow{\text{سمت راست } 11 \times} d \mid 99n + 44 \\ d \mid 11n + 5 \xrightarrow{\text{سمت راست } 9 \times} d \mid 99n + 45 \end{array} \xrightarrow{(-)} d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

**تست** اگر  $(a, 6) = 3$  باشد، فرم کلی  $a$  بر حسب متغیر  $x \in \mathbb{Z}$  به کدام صورت است؟

$9x + 6$  (۴)       $6x + 3$  (۳)       $6x$  (۲)       $3x$  (۱)

**پاسخ** گزینه ۳  
وقتی  $(a, 6) = 3$  شده است، یعنی  $a$  بر ۳ و در نتیجه  $a$  بر ۳ بخش پذیر است. اما اگر  $a$  زوج باشد چون می‌دانیم بر ۳ هم بخش پذیر است، یعنی بر ۶ بخش پذیر است که در آن صورت  $(a, 6)$  برابر ۶ می‌شود نه ۳. پس  $a$  یک عددی است که بر ۳ بخش پذیر است ولی بر ۲ بخش پذیر نیست. یعنی حاصل ضرب ۳ در یک عدد فرد است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$a = 3(2x + 1) = 6x + 3$$

### کوچک‌ترین مضرب مشترک

با یک مثال شروع می‌کنیم. به نظر شما کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۵ چه عددی است (واضح است که منظورمان در عددهای طبیعی است). مجموعه مضارب طبیعی دو عدد را می‌نویسیم:

$$12 \text{ مضارب طبیعی } = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, \dots\}$$

$$15 \text{ مضارب طبیعی } = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, \dots\}$$

$$15 \text{ و } 12 \text{ مضرب‌های طبیعی مشترک } = \{60, 120, \dots\}$$

که مشخص است کوچک‌ترین عضو مجموعه بالا عدد ۶۰ است. همان‌طور که می‌بینید این عدد ۶۰ این‌جا دو ویژگی دارد. اول این‌که مضرب هر دو عدد است یعنی بر هر دو عدد بخش پذیر است یا به بیان دیگر هر دو عدد ۱۲ و ۱۵ عدد ۶۰ را می‌شمارند:  $12 \mid 60$  و  $15 \mid 60$  و دوم این‌که در میان همه مضارب طبیعی مشترک ۱۲ و ۱۵ مثل ۱۲۰ و ۱۸۰ و ... این عدد ۶۰ از همه کوچک‌تر است.

عدد طبیعی  $c$  را ک.م.م دو عدد  $a$  و  $b$  می‌نامیم و می‌نویسیم  $[a, b] = c$  هر گاه دو شرط زیر برقرار باشد:

①  $a \mid c, b \mid c$

(یعنی  $c$  بر هر دو عدد بخش پذیر باشد و مضرب‌شان باشد.)

②  $\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$

(یعنی اگر  $m$  هم یک مضرب مشترک دو عدد بود،  $c$  از  $m$  کوچک‌تر باشد که بتوانیم بگوییم ک.م.م است.)

برای به دست آوردن ک.م.م دو یا چند عدد کافی است عددها را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم.

**تست** مجموع ارقام کوچک‌ترین عضو مجموعه  $\{x \in \mathbb{N} : 24 \mid x, 30 \mid x\}$  چه عددی است؟

$6$  (۴)       $5$  (۳)       $4$  (۲)       $3$  (۱)

**پاسخ** گزینه ۱  
در واقع ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۳۰ را باید پیدا کنیم. داریم:

$$[24, 30] = [2^3 \times 3, 2 \times 3 \times 5] = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$$

با استفاده از تعاریف ب.م.م و ک.م.م به راحتی می‌توان ثابت کرد:

①  $a \mid b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$

②  $(a, b)[a, b] = |ab|$

**تست** اگر  $m$  عددی صحیح باشد، حاصل  $([a, a^4], (a^2, a^3))$  کدام است؟

$a^4$  (۴)       $|a|$  (۳)       $a^2$  (۲)       $a$  (۱)

**پاسخ** گزینه ۲  
می‌دانیم  $a^2 \mid a^3$ ، پس  $(a^2, a^3) = |a^2| = a^2$ . همچنین چون  $a \mid a^4$ ، پس  $[a, a^4] = |a^4| = a^4$ . بنابراین حالا چون

$$a^2 \mid a^4 \Rightarrow (a^2, a^4) = a^2$$

$$([a, a^4], (a^2, a^3)) = (a^4, a^2)$$

**قضیه تقسیم و کاربردها**

از دبستان به یاد دارید که در تقسیم عدد  $a$  بر  $b$  بین مقسوم و مقسوم‌علیه، باقی‌مانده و خارج‌قسمت رابطهٔ روبه‌رو برقرار است:

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{\phantom{a} q} \\ r \end{array}$$

فرض کنید بخواهیم  $30$  سکه را بین  $7$  نفر تقسیم کنیم. اگر من تقسیم را این‌طوری انجام دهم به نظر تان درست است؟

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 7} \\ \underline{- 21} \phantom{3} \\ 9 \end{array}$$

می‌دانیم  $30 = 7 \times 3 + 9$  یعنی تساوی درست است.

اما مشخص است که یک چیزی این‌جا غلط است. بله! این‌جا سه سکه به  $7$  نفر داده‌ایم و  $9$  سکه باقی مانده که این غلط است. چرا که این  $9$  سکه باقی‌مانده از تعداد افراد بیشتر است. یعنی می‌شود نفری یک سکه دیگر به این  $7$  نفر داد و  $2$  سکه باقی بماند، یعنی تقسیم درست این‌طوری است:

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 7} \\ \underline{- 28} \phantom{4} \\ 2 \end{array}$$

حالا درست شد. هدف از طرح این مثال این بود که در تقسیم  $a$  بر  $b$  فقط تساوی  $a = bq + r$  کافی نیست و باقی‌مانده هم باید از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد. هم‌چنین می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد. مثلاً نمی‌توانیم  $5$  سکه به هر نفر بدهیم و  $5$  سکه باقی بماند! بنابراین  $0 \leq r < b$ . بنابراین:

اگر  $a$  عدد صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد در این صورت در تقسیم عدد  $a$  بر  $b$ ، عددهای منحصر‌به‌فرد  $r$  و  $q$  یافت می‌شوند به طوری که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ .

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{\phantom{a} q} \\ r \end{array}$$

در این حالت به  $q$  خارج‌قسمت، به  $r$  باقی‌مانده، به  $a$  مقسوم و به  $b$  مقسوم‌علیه می‌گویند.

● دقت کنید که  $b$  عددی طبیعی،  $q$  و  $a$  عددهای صحیح و  $r$  عددی حسابی است.

**مثال** در یک تقسیم اگر  $83$  واحد به مقسوم اضافه کنیم،  $7$  واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و یک واحد از باقی‌مانده کم می‌شود. مقسوم‌علیه این تقسیم کدام است؟

**حل**

$$a \overline{) b} \Rightarrow a = bq + r, 0 \leq r < b$$

$$\begin{array}{r} \phantom{a} \overline{) q} \\ r \end{array}$$

حالا گفته به مقسوم  $83$  واحد اضافه شده یعنی  $a$  تبدیل شده به  $a + 83$ ، به خارج‌قسمت  $7$  واحد اضافه شده یعنی شده  $q + 7$  و از باقی‌مانده یکی کم شده یعنی باقی‌ماندهٔ جدید شده  $r - 1$ ، داریم:

$$a + 83 = b(q + 7) + r - 1$$

$$a = bq + r$$

$$83 = 7b - 1 \Rightarrow 7b = 84 \Rightarrow b = 12$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

**تست** در تقسیم عددی بر  $9$  باقی‌مانده برابر  $7$  شده است. اگر  $66$  واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج‌قسمت ..... واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر ..... می‌شود.

۱، ۸ (۴)

۸، ۸ (۳)

۸، ۷ (۲)

۷، ۷ (۱)

**پاسخ** گزینهٔ ۴

$$a \overline{) 9}$$

$$\underline{\phantom{a} q} \Rightarrow a = 9q + 7$$

$$7$$

$$a + 66 = 9q + 73$$

$66$  واحد به مقسوم اضافه شده است. اگر به طرفین تساوی بالا  $66$  واحد اضافه کنیم، داریم:

می‌دانیم در تقسیم، باقی‌مانده باید کم‌تر از  $9$  باشد. بنابراین باید یک کاری کنیم که آن عدد  $73$  به صورت یک مضرب  $9$  و یک عدد کوچک‌تر از  $9$  دربیاید.

$$a + 66 = 9q + 72 + 1 = 9(q + 8) + 1$$

تقسیم یک عدد مثبت بر یک عدد مثبت دیگر را قبلاً بارها دیده‌ایم. الان می‌خواهیم ببینیم پیدا کردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده در تقسیم یک عدد منفی بر یک عدد مثبت چگونه است. به این سؤال ساده توجه کنید.

**مثال**باقی مانده و خارج قسمت تقسیم  $-41$  را بر  $7$  به دست آورید.**حل**خب اگر عدد  $41+$  بود پاسخ ساده بود:

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 7} \\ -35 \quad 5 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$41 = 7 \times 5 + 6$$

$$\begin{array}{r} -41 \overline{) 7} \\ -35 \quad -5 \\ \hline -6 \end{array}$$

$$-41 = 7 \times (-5) - 6$$

که همه چیز هم در آن درست است. یعنی:

و باقی مانده که  $6$  است از مقسوم علیه یعنی  $7$  کم تر است. اما اگر بنویسیم:

که  $-6$  را به عنوان باقی مانده نمی توانیم قبول کنیم، چون که باقی مانده نمی تواند منفی باشد. این جا باید یک  $q$  و  $r$  پیدا کنیم که در رابطه  $-41 = 7q + r$

صدق کند و  $0 \leq r < 7$  باشد.

$$\begin{array}{r} -41 \overline{) 7} \\ \quad \quad q \\ \hline \quad \quad r \end{array}$$

خب یک راه این است که در تساوی بالا به سمت راست تساوی یک عدد  $7$  (یعنی به اندازه مقسوم علیه) اضافه و کم کنیم:

$-7$  آخر را با  $7$  که در  $-5$  ضرب شده فاکتور می گیریم و  $7$  مثبت را با  $-6$  جمع می کنیم. داریم:

$$-41 = 7 \times (-5) - 6 + 7 - 7 \Rightarrow -41 = 7 \times (-6) + 1$$

خب! حالا شد. همان طور که می بینید عدد باقی مانده  $1$  است که بین صفر و  $7$  است.

بنابراین خارج قسمت برابر  $-6$  و باقی مانده  $1$  است. اما یک راه فرمولی هم برای پیدا کردن خارج قسمت و باقی مانده وجود دارد که شاید ساده تر باشد و

فرقی نمی کند عددها مثبت یا منفی باشند.

در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  داریم:

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

$$r = a - bq$$

برای مثال در سؤال قبل می خواستیم باقی مانده و خارج قسمت تقسیم  $-41$  را بر  $7$  پیدا کنیم. این یعنی  $a = -41$  و  $b = 7$  است. داریم:

$$q = \left\lfloor \frac{-41}{7} \right\rfloor = \left\lfloor -5.857 \right\rfloor = -6$$

$$r = a - bq = -41 - 7 \times (-6) = -41 + 42 = 1$$

یک روش دیگری هم برای پیدا کردن باقی مانده و خارج قسمت در عددهای منفی وجود دارد که البته همان روش اول است اما کمی سریع تر است. این جوری که وقتی می خواهیم باقی مانده یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت به دست آوریم، اگر عدد منفی بر عدد مثبت بخش پذیر باشد که باقی مانده و خارج قسمت مشخص است. برای مثال باقی مانده و خارج قسمت تقسیم  $-42$  بر  $7$  به ترتیب برابر صفر و  $-6$  است. اما اگر عدد منفی بر عدد مثبت بخش پذیر نبود، شما بیاید منفی بودن مقسوم را بی خیال شوید و آن را به صورت مثبت بر مقسوم علیه منفی تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی مانده را در این حالت به دست آورید بعد با استفاده از این دو رابطه باقی مانده و خارج قسمت واقعی را پیدا کنید.

(باقی مانده در حالی که عدد مثبت باشد)  $r = b -$  باقی مانده

(خارج قسمت در حالی که عدد مثبت باشد)  $q = -(1 +$  خارج قسمت

برای مثال وقتی می خواهیم باقی مانده و خارج قسمت  $-41$  را بر  $7$  به دست آوریم، اول می آیم خود  $41$  را بر  $7$  تقسیم می کنیم و خارج قسمت و

باقی مانده را به دست می آوریم. یعنی:

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 7} \\ -35 \quad 5 \\ \hline 6 \end{array}$$

حالا با استفاده از رابطه داده شده باقی مانده و خارج قسمت واقعی را پیدا می کنیم. همان طور که می بینید، باقی مانده وقتی  $41$  را مثبت فرض کرده ایم

$$r = 7 - 6 = 1$$

و خارج قسمت  $5$  شده، بنابراین:

$$q = -(1 + 5) = -6$$

**مثال** اگر باقی‌مانده  $a$  در تقسیم بر ۱۲ برابر ۷ و خارج‌قسمت آن  $q$  باشد، باقی‌مانده تقسیم  $۳۷ + ۵a$  بر ۱۵ و خارج‌قسمت این تقسیم را بر حسب  $q$  به دست آورید.

**حل** اول رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$a \begin{array}{r} \underline{12} \\ q \\ 7 \end{array} \Rightarrow a = 12q + 7$$

پس مقدار  $۳۷ + ۵a$  را بر حسب  $q$  به دست می‌آوریم:

$$۵a + ۳۷ = ۵(۱۲q + ۷) + ۳۷ = ۶۰q + ۳۵ + ۳۷ = ۶۰q + ۷۲$$

حالا باید باقی‌مانده و خارج‌قسمت  $۶۰q + ۷۲$  را بر ۱۵ به دست آوریم. بهترین راه به دست آوردن خارج‌قسمت، استفاده از جزء‌صحیح است. (ببینید وقتی می‌خواهیم خارج‌قسمت یک چیزی را بر یک چیز دیگر به دست آوریم، کافی است جزء‌صحیح این چیز را به آن چیز دیگر حساب کنیم!) داریم:

$$\text{خارج‌قسمت} = \left\lfloor \frac{۶۰q + ۷۲}{۱۵} \right\rfloor = \left\lfloor ۴q + ۴ \frac{۸}{۱۵} \right\rfloor = ۴q + ۴$$

پس خارج‌قسمت جدید بر حسب  $q$  برابر  $۴q + ۴$  است. حالا باقی‌مانده  $۶۰q + ۷۲$  را بر ۱۵ به دست می‌آوریم. دقت کنید که  $۶۰q + ۷۲$  جمع دو مقدار به دست آمده، یکی  $۶۰q$  و یکی  $۷۲$ ، می‌شود تک‌تک باقی‌مانده هر کدام را به ۱۵ به دست آورده و حاصل را با هم جمع کنیم. مشخص است که  $۶۰q$  بر ۱۵ بخش‌پذیر است، یعنی باقی‌مانده آن بر ۱۵ برابر صفر است. (پس این‌که هیپی!) می‌ماند باقی‌مانده  $۷۲$  به ۱۵ که ۱۲ است:

$$\begin{array}{r} ۱۵ \overline{) ۷۲} \\ - ۶۰ \\ \hline ۱۲ \end{array}$$

بنابراین باقی‌مانده  $۶۰q + ۷۲$  بر ۱۵ برابر ۱۲ است. البته یک‌جور دیگر هم می‌شد باقی‌مانده و خارج‌قسمت  $۶۰q + ۷۲$  را بر ۱۵ به دست آورد:

$$۶۰q + ۷۲ = ۶۰q + ۶۰ + ۱۲ = ۱۵(q + ۴) + ۱۲$$

مشخص است که خارج‌قسمت جدید  $q + ۴$  و باقی‌مانده ۱۲ است.

**تست** اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت  $m$  و  $n$  بر ۱۳ به ترتیب برابر ۷ و ۱۱ باشد، باقی‌مانده  $۷n - ۵m$  بر ۱۳ کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۷      ۳) ۱۰      ۴) ۴۲ -

**پاسخ** گزینه ۳

$$m \begin{array}{r} \underline{13} \\ q \\ 7 \end{array} \Rightarrow m = 13q + 7$$

$$\Rightarrow ۷n - ۵m = ۷(۱۳q' + ۱۱) - ۵(۱۳q + ۷) = ۶۵q' + ۷۷ - ۶۵q - ۳۵ = ۶۵q' - ۶۵q + ۴۲$$

$$n \begin{array}{r} \underline{13} \\ q' \\ 11 \end{array} \Rightarrow n = 13q' + 11$$

حالا باید باقی‌مانده  $۶۵q' - ۶۵q + ۴۲$  را بر ۱۳ به دست آوریم. با توجه به این‌که  $۶۵q$  و  $۶۵q'$  بر ۱۳ بخش‌پذیرند، بنابراین باقی‌مانده آن‌ها در تقسیم بر ۱۳ برابر صفر است و فقط می‌ماند پیدا کردن باقی‌مانده  $۴۲$  بر ۱۳ و از روش سوم که ساده‌تر است استفاده می‌کنیم. اول  $۴۲$  را مثبت فرض می‌کنیم و باقی‌مانده  $۴۲$  را بر ۱۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} ۱۳ \overline{) ۴۲} \\ - ۳۹ \\ \hline ۳ \end{array}$$

حالا از رابطه «باقی‌مانده وقتی عدد مثبت باشد  $-b =$  باقی‌مانده» واقعی را پیدا می‌کنیم:

$$r = ۱۳ - ۳ = ۱۰$$

اما اگر می‌خواستیم به صورت مستقیم هم باقی‌مانده  $۶۵q' - ۶۵q + ۴۲$  را بر ۱۳ به دست آوریم، می‌شد:

$$۶۵q' - ۶۵q + ۴۲ = ۶۵q' - ۶۵q - ۵۲ + ۱۰ = ۱۳(\underbrace{۵q' - ۷q - ۴}_{\text{خارج‌قسمت}}) + \underbrace{۱۰}_{\text{باقی‌مانده}}$$

**تست** مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر  $۵^\circ$  باقی‌مانده آن ۵ برابر خارج‌قسمت آن باشد، کدام است؟

- ۱) ۱۶      ۲) ۱۷      ۳) ۱۸      ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

**پاسخ** گزینه ۳

عدد  $a$  را فرض می‌کنیم. می‌خواهیم باقی‌مانده، پنج برابر خارج‌قسمت باشد، یعنی  $r = ۵q$  داریم:

$$a \begin{array}{r} \underline{5^\circ} \\ q \\ 5q \end{array} \Rightarrow a = 5^\circ q + 5q = 55q$$

ممکن است فکر کنیم  $q$  هر چه بزرگ‌تر باشد، عدد هم بزرگ‌تر می‌شود و ما می‌توانیم هر چه قدر دلمان می‌خواهد  $q$  را بزرگ بگیریم. اما این‌طور نیست. یادتان باشد در رابطه تقسیم، باقی‌مانده یک شرطی هم داشت که:  $0 \leq r < b$ . بنابراین در این‌جا  $۵^\circ < ۵q \leq ۰$  و در نتیجه  $q < ۱^\circ$  یعنی  $q_{\max} = ۹ \Rightarrow a_{\max} = ۹ \times ۵۵ = ۴۹۵ \Rightarrow$  مجموع ارقام  $= ۴ + ۹ + ۵ = ۱۸$  حداکثر می‌تواند ۹ باشد.



**تست** باقی مانده تقسیم  $24k$  بر  $132$  برابر کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

$$24k \mid 132 \Rightarrow 24k = 132q + r, 0 \leq r < 132$$

$$\begin{array}{r} \_ \quad q \\ - \quad r \end{array}$$

$$r = -132q + 24k = 12(-11q + 2k)$$

همان طور که می بینید  $r$  مضرب  $12$  است. پس باید در میان گزینه ها دنبال عددی بگردیم که مضرب  $12$  بوده و از  $132$  کم تر باشد که فقط  $60$  چنین ویژگی ای دارد.

پاسخ گزینه ۲

### افزار مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

می دانیم در تقسیم بر  $2$ ، دو دسته عدد داریم. عددهای زوج که آن ها را با  $2k$  نشان می دهیم و عددهای فرد که با  $2k+1$  نشان می دهیم. به همین ترتیب در تقسیم به  $3$  عددها می توانند سه نوع باقی مانده مختلف داشته باشند. یعنی یا بر  $3$  بخش پذیر باشند که در این صورت می توان آن ها را به فرم  $3k$  نوشت یا بر  $3$  باقی مانده ای برابر  $1$  داشته باشند، یعنی به فرم  $3k+1$  باشند و بالاخره یا در تقسیم به  $3$  باقی مانده ای برابر  $2$  داشته باشند که در این صورت آن ها را به فرم  $3k+2$  می توان نوشت.

**تست** دو عدد فرد در تقسیم بر  $4$  باقی مانده های یکسانی دارند. اگر این دو عدد را در هم ضرب کنیم، فرم کلی عدد به دست آمده بر حسب  $k$

به کدام صورت است؟

$$4k+3 \text{ یا } 4k+1 \quad (4)$$

$$8k+3 \quad (3)$$

$$4k+3 \quad (2)$$

$$4k+1 \quad (1)$$

$$4k \Rightarrow \text{زوج است.}$$

$$4k+1$$

عددها در تقسیم بر  $4$  در یکی از چهار دسته مقابل قرار می گیرند:

پاسخ گزینه ۱

$$4k+2 \Rightarrow \text{زوج است.}$$

$$4k+3$$

چون گفته دو عدد فردند و در تقسیم به چهار باقی مانده یکسانی دارند، پس یا هر دو به فرم  $4k+1$  اند و یا هر دو به فرم  $4k+3$ . اگر هر دو عدد به فرم  $4k+1$  باشند، داریم:

$$a = 4k+1 \Rightarrow ab = 16kk' + 4k + 4k' + 1 = 4(4kk' + k + k') + 1 = 4q + 1$$

$$b = 4k'+1$$

و اگر هر دو عدد به فرم  $4k+3$  باشند، داریم:

$$a = 4k+3 \Rightarrow ab = 16kk' + 12k + 12k' + 9 = 4(4kk' + 3k + 3k' + 2) + 1 = 4q' + 1$$

$$b = 4k'+3$$

یعنی در هر دو حالت حاصل ضرب دو عدد به فرم  $4k+1$  است.

**مثال** ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم به  $8$  باقی مانده ای برابر  $1$  دارد.

**حل** همان طور که در سؤال قبل دیدید، در تقسیم بر  $4$ ، چهار دسته عدد وجود دارد که عددهای فرد در آن به صورت  $4k+1$  یا  $4k+3$  است. در هر دو حالت مربع عدد را پیدا می کنیم:

$$a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8q + 1$$

$$a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8q' + 1$$

**تست**  $a$  در تقسیم به  $2$  باقی مانده ای برابر  $1$ ،  $b$  در تقسیم بر  $4$  باقی مانده ای برابر  $2$  و  $c$  در تقسیم بر  $6$  باقی مانده ای برابر  $3$  دارد. باقی مانده  $a^2 + b^2 + c^2$  در تقسیم به  $8$  کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

با توجه به اطلاعات داده شده عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را می توان به فرم های زیر نوشت:

$$a = 2k+1$$

$$b = 4k+2$$

$$c = 6k+3$$

پاسخ گزینه ۴

مشخص است که عددهای  $a$  و  $c$  فرد است. بنابراین با توجه به آنچه در سؤال قبل ثابت کردیم باقی مانده  $a^2$  و  $c^2$  در تقسیم بر  $8$  برابر  $1$  است، می ماند پیدا کردن باقی مانده  $b^2$  در تقسیم بر  $8$ .

$$b = 4k+2 \Rightarrow b^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4 = 8q + 4$$

همان طور که می بینید  $b^2$  در تقسیم بر  $8$  باقی مانده ای برابر  $4$  دارد. بنابراین:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (8k+1) + (8k'+4) + (8k''+1) = 8(k+k'+k'') + 6$$

پس باقی مانده  $a^2 + b^2 + c^2$  در تقسیم بر  $8$  برابر  $6$  است.

**مثال** ثابت کنید هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

**حل** می‌دانیم عددها را می‌توان در تقسیم بر ۶ به یکی از ۶ فرم مقابل نوشت:

$6k$  مضرب ۶ است.  
 $6k + 1$   
 $6k + 2$  زوج است.  
 $6k + 3$  مضرب ۳ است.  
 $6k + 4$  زوج است.  
 $6k + 5$

اول نیست.

بنابراین فقط در حالت‌های  $6k + 1$  و  $6k + 5$  عدد می‌تواند اول باشد.

**مثال** اگر باقی‌مانده  $a$  بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد، باقی‌مانده  $a$  بر ۵۶ چند است؟

**حل** این جور سؤال‌ها را در فصل بعد و بعد از آموختن هم‌نهشتی راحت‌تر می‌توانید پاسخ دهید اما نمونه‌های ساده‌اش را (مثل این سؤال) با استفاده از الگوریتم تقسیم می‌توان جواب داد:

$$a \begin{array}{r} \underline{7} \\ - \\ 2 \end{array} \Rightarrow a = 7q + 2 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 8} 8a = 56q + 16$$

$$\xrightarrow{-} 8a - 7a = 56q + 16 - 56q' - 35 = 56(q - q') - 19$$

$$a \begin{array}{r} \underline{8} \\ - \\ 5 \end{array} \Rightarrow a = 8q' + 5 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 7} 7a = 56q' + 35$$

$$\Rightarrow a = 56k - 56 + 37 \Rightarrow a = 56(k - 1) + 37$$

پس باقی‌مانده  $a$  در تقسیم به ۵۶ برابر ۳۷ است.

هالا بدون اتلاف وقت خیلی سریع تمرین‌های تشریحی ۱۶ تا ۳۶ و تست‌های ۴۴ تا ۱۴۵ را حل کن.

### درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

- ۱۶- اگر  $a, b$  و  $c$  سه عدد طبیعی باشند، به طوری که  $abc \mid ab + c$ ، ثابت کنید بیشترین مقدار  $a + b + c$  برابر ۵ است.
- ۱۷- اگر  $a^y \mid b^x$  ثابت کنید  $a^{11} \mid b^8$  و با یک مثال نقض نشان دهید  $a^{13} \mid b^9$  نادرست است.
- ۱۸- ثابت کنید اگر  $x^3 \mid 128$ ، آن گاه  $x^5 \mid 2^{14}$ .
- ۱۹- اگر  $a$  عددی صحیح باشد به طوری که  $3a + 2 \mid 11$  ثابت کنید:  $24a^2 + 43a + 18 \mid 121$ .
- ۲۰- دو عدد طبیعی پیدا کنید به طوری که حاصل ضرب آن‌ها از دو برابر عدد کوچک‌تر به علاوه عدد بزرگ‌تر ۱۵ واحد بیشتر باشد.
- ۲۱- ثابت کنید هیچ مقدار صحیحی مانند  $x$  وجود ندارد که به ازای آن  $x^2 + 2$  بر  $5x + 3$  بخش پذیر باشد.
- ۲۲- به ازای چند عدد طبیعی  $n > 2$  رابطه  $n^2 - n \mid (n-2)!$  برقرار است؟
- ۲۳- ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  عددهایی طبیعی باشند و  $ab \mid a + b$  و  $a$  عددی اول باشد، آن گاه  $b = a^2 - a$ .
- ۲۴- بزرگ‌ترین عضو مجموعه  $\{x \in \mathbb{N} : x \mid 80, x \mid 300\}$  را به دست آورده، پیدا کنید این مجموعه چند عضو دورقمی دارد؟
- ۲۵- اگر  $(a, 60) = 10$  باشد، درباره تعداد عوامل ۲، ۳ و ۵ عدد  $a$  چه می‌توان گفت؟
- ۲۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مانند  $x$  رابطه  $[x, 15] = 60$  برقرار است؟
- ۲۷- باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم  $a$  بر ۲۴ به ترتیب برابر ۱۷ و  $q$  است باقی‌مانده  $5a + 41$  بر ۲۰ و خارج قسمت این تقسیم بر حسب  $q$  کدام است؟
- ۲۸- اگر باقی‌مانده  $a$  بر ۳۳ برابر ۲۱ و باقی‌مانده  $b$  بر ۲۲ برابر ۱۹ باشد، باقی‌مانده  $3a - 5b$  بر ۱۱ چند است؟
- ۲۹- عدد  $a$  مضرب ۸ است و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۲۴ برابر  $r$  شده است. اگر ۳۳ واحد به  $a$  اضافه کنیم، خارج قسمت دو واحد اضافه می‌شود. درباره باقی‌مانده جدید چه می‌توان گفت؟
- ۳۰- اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  و  $b$  بر ۴ به ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم  $(b-a)^6 + (a+b)^4 + a^2$  بر ۸ چند است؟
- ۳۱- چند نقطه روی منحنی به معادله  $yx^2 - 2x^3 - y - 1 = 0$  وجود دارد که هر دو مولفه آن عددهایی صحیح باشد؟
- ۳۲- ثابت کنید اگر  $P$  عددی اول باشد، معادله  $xy + x + y = p - 1$  در  $\mathbb{N}$  جواب ندارد.





۳۳- ثابت کنید مربع هر عدد اول بزرگتر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۳۴- اگر  $13 \mid 5a + 7b$  ثابت کنید  $13 \mid 2a - 5b$ .

۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند  $x$  رابطه  $x^2 + x + 1 \mid 13$  برقرار است؟

۳۶- اگر باقی مانده  $x$  بر ۱۶ و ۱۵ به ترتیب برابر ۷ و ۲ باشد، باقی مانده  $x$  بر ۱۲۰ چند است؟



## درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

۴۴- چند عدد صحیح وجود دارد که در میان عددهای صحیح فقط بر خودش و ۱ بخش پذیر باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار
- ۴۵- اگر  $a \mid c$  و  $ab \mid c$  کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $b \mid c$  (۲)  $a + b \mid c$  (۳)  $a - b \mid c$  (۴)  $a^2 \mid c$
- ۴۶- اگر  $a - b \mid a$  آن گاه:

- (۱)  $a \mid a - b$  (۲)  $b \mid a - b$  (۳)  $a \mid b$  (۴)  $a - b \mid b$
- ۴۷- اگر  $ab \mid 6$ :

- (۱) هم  $a$  بر ۶ بخش پذیر است و هم  $b$ .  
 (۳) ممکن است نه  $a$  بر ۶ بخش پذیر باشد و نه  $b$ .

۴۸- حاصل ضرب دو عدد به فرم  $7k + 3$  به کدام فرم است؟

- (۱)  $7q + 1$  (۲)  $7q + 2$  (۳)  $7q + 3$  (۴)  $7q - 1$

۴۹- اگر  $2a + 3b \mid 2a + 4b$ ،  $2a + 3b \mid a - b$ ،  $2a + 3b \mid 2a - 3b$  و  $2a + 3b \mid 2a$  همواره درست است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۰- اگر  $a \mid x - y$  و  $a \mid z - t$  کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $a \mid xt - yz$  (۲)  $a \mid xt + yz$  (۳)  $a \mid xy + yt$  (۴)  $a \mid (x + y)(z + t)$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

۵۱- اگر  $a^2 \mid 48$  و  $b^2 \mid 375$ ، کمترین مقدار  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۷ (۳) ۸۱ (۴) ۸۷

۵۲- اگر  $a^2 \mid 108$  کدام گزینه درست نیست؟

- (۱)  $a \mid 18$  (۲)  $a \mid 12$  (۳)  $4 \mid a^2$  (۴)  $27 \mid a^2$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۵۳- اگر  $a \mid 18$  و  $b \mid 18$ ، آن گاه کدام رابطه درست نیست؟ ( $a, b \in \mathbb{N}$ )

- (۱)  $6 \mid b$  (۲)  $a \mid 3b$  (۳)  $a \mid 54$  (۴)  $3a \mid b$

۵۴- رابطه  $a^2 - a - 1 \mid a$  به ازای چند عدد صحیح  $a$  برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۵۵- اگر  $a^2 \mid a + b$ ، آن گاه کدام رابطه زیر، لزوماً صحیح نیست؟

- (۱)  $a^2 \mid b^2$  (۲)  $a \mid 3b - 2a$  (۳)  $a^2 \mid a - b$  (۴)  $a^2 \mid a^2 + b^2$

۵۶- اگر  $a$  و  $b$  عددهایی طبیعی باشند و  $ab \mid a + b$ ، کدام یک از نتیجه گیری های زیر لزوماً درست نیست؟

- (۱)  $a \mid b$  (۲)  $a \mid 2$  (۳)  $2a \mid b + 2$  (۴)  $b \mid a + 2$

۵۷- اگر  $a^2 \mid b^2$  کدام نتیجه گیری درست نیست؟

- (۱)  $a^5 \mid b^8$  (۲)  $a^3 \mid b^5$  (۳)  $a^y \mid b^{10}$  (۴)  $a^6 \mid b^y$

۵۸- اگر  $b^5 \mid a^2 + 2a + 1$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $a + 1 \mid b^2$  (۲)  $a + 1 \mid b^2$  (۳)  $a^2 + 3a^2 + 3a + 1 \mid b^6$  (۴)  $a^2 + 3a^2 + 3a + 1 \mid b^y$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۵۹- اگر  $a \mid b + 3$  و  $a \mid c - 2$ ، آن گاه باقی مانده تقسیم  $bc + 1$  بر  $a$ ، همواره برابر کدام است؟ ( $a \geq 5$ )

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳)  $a - 5$  (۴) صفر

۶۰- چند عدد دورقمی طبیعی مانند  $a$  وجود دارد به طوری که  $a \mid 10$  و  $a \mid 15$ ؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۱- بزرگ‌ترین مقدار  $x$  برای آن که  $5 + 7x \mid x - 2$ ، چه مجموع ارقامی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۶۲- اگر  $a \neq 1$  عددی طبیعی باشد به طوری که  $4 + 5m \mid a$  و  $3 + 2m \mid a$  در این صورت  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۶۳- اگر  $2 + b \mid a$  و  $1 + b^3 \mid a$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $a \mid b + 1$  (۲)  $a \mid b^2 + 1$  (۳)  $a \mid 7$  (۴)  $a \mid 5$

۶۴- به ازای چند عدد صحیح مانند  $x$  رابطه  $5x + 7 \mid 3x + 2$  برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند  $x$  رابطه  $4x^3 - x^5 - 4x^7 \mid x^9$  برقرار است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۶- به ازای چند عدد طبیعی مانند  $x$  رابطه  $1 + x^2 \mid x^3 + 1$  برقرار است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۶۷- چند مقدار صحیح  $n$  وجود دارد به گونه‌ای که  $n + 6$  بر  $n^2 + 2$  بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶۸- چند نقطه روی منحنی به معادله  $3x - y = 2yx + 2$  وجود دارد که هر دو مولفه آن عددهایی صحیح باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۹- چند عدد صحیح وجود دارد که ۴ برابرش به علاوه یک بر ۳ برابرش منهای یک بخش پذیر باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۰- اگر فقط به ازای دو عدد صحیح  $x$  رابطه  $a - x^2 \mid x - 2$  برقرار باشد،  $a$  چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

۷۱- بزرگ‌ترین مقدار  $a$  برای آن که هر دو رابطه  $1 + 3m \mid a$  و  $2 + m^2 \mid a$  برقرار باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

۷۲- به ازای کدام مقدار  $m$  اگر  $a$  عدد طبیعی باشد و هر دو عدد  $9k + m$  و  $7k + 6$  را بشمارد، فقط دو مقدار برای  $a$  وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۷۳- کدام یک از عددهای زیر می‌تواند اول باشد؟ ( $n > 3$ )

- (۱)  $n! + 3$  (۲)  $n! + n - 1$  (۳)  $n! - n + 1$  (۴)  $n! + n + 1$

۷۴- چندتا از عددهای  $12 + 100!$ ،  $31 + 100!$  و  $97 + 100!$  اول است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۵- باقی‌مانده تقسیم  $7! + 8!$  بر  $210$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۸۰

۷۶- بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی  $n$  که به ازای آن هر دو رابطه  $30 + 6n \mid 12$  و  $30 + 6n \mid 21$  برقرار باشد، کدام است؟

- (۱) ۹۱ (۲) ۹۳ (۳) ۹۵ (۴) ۹۶

۷۷- اگر  $2n + 1 \mid 5$ ، عبارت  $14n^2 + 19n + 6$  همواره بر کدام عدد زیر، بخش پذیر است؟ ( $n \in \mathbb{Z}$ )

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۵ (۴) ۳۰

۷۸- اگر  $x$  عددی طبیعی باشد از دو رابطه  $24 \mid x$  و  $30 \mid x$  نتیجه می‌شود ..... و از دو رابطه  $24 \mid x$  و  $30 \mid x$  نتیجه می‌شود .....

- (۱)  $3 \mid x$ ،  $x \mid 120$  (۲)  $3 \mid x$ ،  $x \mid 240$  (۳)  $6 \mid x$ ،  $x \mid 120$  (۴)  $6 \mid x$ ،  $x \mid 240$

۷۹- عددهای  $a > 1$ ،  $b > 1$  و  $a \neq b$  هر دو فقط دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی هستند. اگر رابطه‌های  $3 \mid a$  و  $3 \mid b$  برقرار باشد،  $a + b$  برابر کدام یک از

عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۸۰- اگر  $12 \mid x$  و  $20 \mid x$  عددی طبیعی باشد،  $x$  ..... مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد که بزرگ‌ترین آن ..... است.

- (۱) ۴، ۲ (۲) ۴، ۳ (۳) ۸، ۲ (۴) ۴، ۴

۸۱- بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد  $4n + 1$  و  $8n + 6$  کدام است؟

- (۱) همواره ۱ (۲) ۱ یا ۲ (۳) ۱ یا ۲ یا ۴ (۴) ۲ یا ۴

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)



۸۲- اگر  $[a, 4] = 12$  و  $[b, 4] = 12$  و  $0 < a < 12$  و  $0 < b < 12$  و  $a + b$ ،  $a \neq b$  کدام است؟

- (۱) همواره ۶ (۲) ۹ یا ۶ (۳) همواره ۹ (۴) ۹ یا ۱۲

۸۳- عدد  $2n + 1$  نسبت به کدام یک از عددهای زیر ممکن است اول نباشد؟

- (۱)  $2n - 1$  (۲)  $4n + 1$  (۳)  $5n + 1$  (۴)  $6n + 1$

۸۴- مجموعه  $\{x \in \mathbb{N} : x \mid 72, x \mid 84\}$  چند عضو دورقمی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۵- کوچکترین عضو مجموعه  $\{x \in \mathbb{N}, 15 \mid x, 50 \mid x\}$  برابر ..... و این مجموعه ..... عضو سه رقمی دارد.

- (۱) ۳، ۷۵ (۲) ۶، ۷۵ (۳) ۳، ۱۵۰ (۴) ۶، ۱۵۰

۸۶- اگر  $d = (54, 90)$  و  $x \in \mathbb{N}$  و  $x \mid 90$  و  $x \mid 54$  و  $x < d$ ، چند مقدار برای  $x$  وجود دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸۷- حاصل  $(2^9, -6^3)$  کدام است؟

- (۱)  $2^3$  (۲)  $2^6$  (۳)  $2^9$  (۴)  $2^9 \times 3^3$

۸۸- اگر  $m$  عددی طبیعی باشد، حاصل  $[(m^3, m^7), [m^5, m^7]]$  کدام است؟

- (۱)  $m^7$  (۲)  $m^7$  (۳)  $m^5$  (۴)  $m^7$

۸۹- اگر  $(a, b) = d$ ، حاصل  $([d, a^2], [a, b], a)$  کدام است؟

- (۱)  $a$  (۲)  $a^2$  (۳)  $[a, b]$  (۴)  $|a|$

۹۰- چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰ مانند  $a$  وجود دارد که فرد باشد و مضرب ۳ نباشد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۹

۹۱- اگر  $(a, 6) = 3$ ، باقی مانده  $2 + 3a$  بر ۹ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

(سراسری ۸۹)

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی  $n$ ، دو عدد به صورت  $25n + 9$  و  $11n + 4$  نسبت به هم اول اند؟

- (۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۹۳- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی  $n$ ، دو عدد  $7 + 12n$  و  $2 - 5n$  نسبت به هم اول نباشند، آن گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹ (۸۸)

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی  $n$ ، هر دو عدد  $5 + 7n$  و  $2 + 11n$  مقسوم علیه مشترک برابر ۳ دارند؟

- (۱) هیچ عدد (۲) یک عدد (۳) دو عدد (۴) بی شمار عدد (۹۱)

۹۵- به ازای مقادیر مختلف  $a > 3$  بزرگترین مقدار بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $15a + 3$  و  $15a - 12$  کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵ (۹۰)

۹۶- حاصل  $(8 - 14!, -5 + 13!)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱۳

۹۷- اگر  $7q + r = 107$  و  $0 \leq r < 7$  باشد،  $r - q$  کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳

(۸۵)

۹۸- در تقسیم عدد  $a$  بر  $63$  باقی مانده ۱۷ است. اگر  $60$  واحد به  $a$  اضافه کنیم، باقی مانده و خارج قسمت چه تغییری می کند؟

- (۱) سه واحد کم می شود - یک واحد اضافه می شود. (۲) سه واحد اضافه می شود - یک واحد اضافه می شود.

- (۳) سه واحد اضافه می شود - تغییر نمی کند. (۴) سه واحد کم می شود - دو واحد اضافه می شود.

۹۹- در تقسیم  $a$  بر  $23$ ، باقی مانده برابر  $r$  شده است. اگر  $41$  واحد به  $a$  اضافه کنیم، باقی مانده برابر صفر می شود، خارج قسمت چه تغییری می کند؟

- (۱) تغییر نمی کند. (۲) یکی اضافه می شود. (۳) ۲ تا اضافه می شود. (۴) ۳ تا اضافه می شود.

۱۰۰- اگر باقی مانده  $a$  بر  $17$  برابر  $5$  باشد، باقی مانده  $4 + 3a$  بر  $17$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱۹

۱۰۱- اگر  $x = 13k + 3$  و  $y = 13k' + 11$  باشد، باقی مانده  $5x - 3y$  بر  $13$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۰۲- اگر در تقسیم اعداد طبیعی  $a$  و  $a + 100$  بر عدد طبیعی  $b$ ، باقی مانده ها به ترتیب برابر با  $10$  و  $11$  باشند، کمترین مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۳۳ (۳) ۶۶ (۴) ۹۹ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۰۳- اگر  $a-1$  مضرب ۶ و  $a+1$  مضرب ۸ باشد، باقی‌مانده  $a^2-2$  بر ۲۴ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲۳ (۴) ۴۷

۱۰۴- اگر  $a = 15k + 4$  باشد، خارج‌قسمت تقسیم  $8a - 7$  بر ۲۰ کدام است؟

- (۱)  $8k-1$  (۲)  $8k-2$  (۳)  $6k-1$  (۴)  $6k-2$

۱۰۵- خارج‌قسمت  $21-20!$  بر ۲۰ کدام است؟

- (۱)  $20!-1$  (۲)  $20!-2$  (۳)  $19!-1$  (۴)  $19!-2$

۱۰۶- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر ۳۵ باقی‌مانده‌شان ۵ برابر خارج‌قسمت آن‌ها باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۰۷- اگر  $a$  و  $b$  اعداد صحیح متمایز و مثبتی باشند به طوری که باقی‌مانده تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۲۳، دو برابر مکعب خارج‌قسمت باشد، آن‌گاه  $2a + b$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۲۵ (۳) ۱۴۹ (۴) ۸۷

۱۰۸- در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۳۷ باقی‌مانده تقسیم از مربع خارج‌قسمت آن ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار  $a$  مضرب کدام عدد است؟ (۸۴)

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۱۰۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی‌مانده توان دوم خارج‌قسمت است، کدام است؟ (۸۵)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۱۱۰- چند عدد طبیعی مانند  $b$  وجود دارد که در تقسیم عدد ۱۳۷ به  $b$  باقی‌مانده برابر ۱۶ شود؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

۱۱۱- اگر در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر  $b$ ، باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و  $a-1$ ،  $b$ ، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم  $a^2$  بر  $b$  کدام است؟ (ب > ۱) (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) به  $a$  بستگی دارد.

۱۱۲- چند عدد طبیعی مانند  $b$  وجود دارد که در تقسیم عدد ۱۷۱ بر  $b$  خارج‌قسمت برابر ۹ شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۳- در تقسیم  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ ، باقی‌مانده، ۳۴ و خارج‌قسمت، عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کم‌تر از ۷۰ برای  $a$  وجود دارد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۴- عدد  $a$  نه مضرب ۳ است و نه مضرب ۲، باقی‌مانده آن در تقسیم بر ۱۲، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۵- اگر  $a$  عددی صحیح و فرد باشد و  $a^2 + 4$  بر  $b$  باقی‌مانده  $a^2b^2 + a^2 + b^2 + a^2$  بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۶- باقی‌مانده  $97^2 + 92 + 5^2 + 1^2$  بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۱۷- کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند اختلاف مکعب‌های دو عدد متوالی باشد؟

- (۱) ۳۲۹ (۲) ۳۳۱ (۳) ۳۳۴ (۴) ۳۳۷

۱۱۸- اگر  $k$  عددی صحیح باشد، باقی‌مانده تقسیم  $k^2 + 1$  بر ۵، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۱۹- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که  $a^4 - b^4$  همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- (۱) ۸۰ (۲) ۴۰ (۳) ۹۶ (۴) ۱۶

۱۲۰- اگر  $9^n | 27^m$  و  $64^m | a^n$ ، کم‌ترین مقدار طبیعی  $a$  چه مجموع ارقامی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۲۱- به ازای چند عدد طبیعی  $n$ ، هر دو عدد  $\frac{n+3}{5}$  و  $\frac{n^3+2n}{10}$  اعداد صحیح هستند؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۲۲- بزرگ‌ترین مقدار صحیح کسر  $\frac{x^3+5}{2x+1}$  کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۹ (۳) ۱۴۱ (۴) ۱۷۶



۱۲۳- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند  $n$  رابطه  $6^n | n^2$  برقرار است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۱۲۴- اگر  $3x + 2y = 7$ ، به ازای کدام مقدار  $m$  می توان نتیجه گرفت:  $7 | x + my$ ؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۲۵- اگر  $a^2 + b^2 | a - b$  کدام گزینه درست نیست؟

- (۱)  $a - b | 2a^2$  (۲)  $a - b | 2ab$  (۳)  $a - b | (a + b)^2$  (۴)  $a - b | b^4$

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح مانند  $x$  رابطه  $2^x | 2^x(x+2)(5x+1)$  برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۱

۱۲۷- اگر عدد طبیعی  $2n + 1$  بر ۵ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم  $6 + 19n + 14n^2$  بر ۲۵ کدام است؟ (۹۶)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۲۸- اگر  $a$ ، عضوی از مجموعه  $\{2^n | n \in \mathbb{N}\}$  باشد، آن گاه به ازای چند مقدار  $a$ ، عدد طبیعی مانند  $k$  می توان یافت به گونه ای که رابطه  $2 + k^2 | a$  برقرار باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱۲۹- دو عدد  $a^2 + a + 3$  و  $a - 1$  نسبت به هم اول اند. کدام گزاره همواره درست است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- (۱)  $a = 5k + 1$  (۲)  $a = 5k$  (۳)  $a \neq 5k$  (۴)  $a \neq 5k + 1$

۱۳۰- اگر  $(a, 24) = 6$ ، حاصل  $(a^2, 216)$  کدام است؟

- (۱) همواره ۳۶ (۲) ۳۶ یا ۷۲ (۳) ۳۶ یا ۱۰۸ (۴) همواره ۷۲

۱۳۱- دو عدد  $A = 7^2 \times 5^3 \times 3^4 \times 11$  و  $B = 11 \times 5^p \times 3^2 \times 7^5$  دارای ۲۳ مقسوم علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم علیه های

مثبت کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟ (۹۰)

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۵۴۰ (۴) ۷۲۰

۱۳۲- اگر  $n$  عددی طبیعی و ب.م.م دو عدد  $n + 2$  و  $n - 1$ ، عددی مخالف ۱ باشد، جمع ارقام کوچک ترین عدد سه رقمی  $n$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱۳۳- باقی مانده تقسیم  $b$  بر ۸ برابر ۳ و باقی مانده تقسیم  $a$  بر  $b$  برابر ۱ است. اگر  $a$  مضرب ۸ باشد، خارج قسمت تقسیم  $a$  بر  $b$  برابر کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۱ (۴) ۹

۱۳۴- در تقسیمی، مقسوم،  $2^0$  برابر باقی مانده و باقی مانده ماکزیمم است، مقسوم علیه حداکثر کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۱۳۵- اگر  $a + 3$  مضرب ۷ باشد و  $a - 11$  بر ۱۴ بخش پذیر نباشد، باقی مانده  $a$  بر ۱۴ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۸

۱۳۶- دو عدد طبیعی ۱۰۷ و ۸۳ را بر عدد طبیعی  $b$  تقسیم نموده ایم. باقی مانده ها به ترتیب ۳ و ۵ شده است. عدد  $b$ ، چند مقدار متفاوت می تواند داشته باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۷- عدد طبیعی  $a$ ، فرد است. اگر در تقسیم  $a$  بر  $20$ ، باقی مانده یک عدد مربع کامل باشد، آن گاه رقم دهگان بزرگ ترین عدد سه رقمی  $a$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱۳۸- باقی مانده تقسیم عدد طبیعی  $A$  بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲، ۴ و ۸ است. باقی مانده تقسیم بزرگ ترین عدد سه رقمی  $A$  بر ۲۳ کدام است؟ (۹۷)

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۴

۱۳۹- اگر باقی مانده تقسیم  $A$  بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی مانده تقسیم  $2A$  بر ۶۳ چگونه است؟

- (۱) عدد اول (۲) مضرب ۲ (۳) مضرب ۳ (۴) مضرب ۵

۱۴۰- اگر باقی مانده  $a$  بر ۳۰ و ۱۲ به ترتیب برابر ۱۷ و ۱۱ شود، باقی مانده  $a$  بر ۶۰ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۴۳ (۴) ۴۷

۱۴۱- اگر  $5 | 7a + 1$  و  $5 | 3b + 7$ ، باقی مانده  $ab - 1$  بر ۵ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۲- اگر  $11 | a + 3b + k$  و  $11 | 5a + 4b + 3$ ، آن گاه کم ترین مقدار طبیعی  $k$  کدام است؟  $(a, b \in \mathbb{Z})$  (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۴۳- اگر  $7 \mid a + 3b$  و  $7 \nmid b$ ، به ازای چند مقدار  $k$  از مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 7\}$ ، رابطه  $7 \mid 2a + kb$  لزوماً برقرار است؟  $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      (گانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۴۴- باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی  $N$  بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج‌قسمت می‌شود. رقم یکان عدد

بزرگ‌تر  $N$  کدام است؟ (۹۵)

۲ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

۱۴۵- اگر همواره یکی از عددهای  $a$ ،  $a + x$  و  $a + y$  بر ۳ بخش‌پذیر باشد،  $x + y$  برابر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۴۲ (۱)      ۴۳ (۲)

۴۴ (۳)      ۴ (۴) برابر هر کدام از این سه عدد می‌تواند باشد.





۲۳- داریم:

$$a + b \mid ab \quad a + b \mid ab \quad \xrightarrow{(-)} \quad a + b \mid a^2$$

$$a + b \mid a + b \quad \xrightarrow{\times a} \quad a + b \mid ab + a^2$$

$a$  عددی اول است، پس مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن  $a$  و  $a^2$  هستند. بنابراین:

$a + b = 1$  امکان‌پذیر نیست، چون  $a$  و  $b$  عددهای طبیعی‌اند.

یا

امکان‌پذیر نیست، چون  $b$  باید عددی طبیعی باشد.  $a + b = a \Rightarrow b = 0$ .

یا

$$a + b = a^2 \Rightarrow b = a^2 - a \quad \checkmark$$

۲۴- هر دو عبارت  $x \mid 300$  و  $x \mid 80$  را به صورت کسر می‌نویسیم تا درک

بهتری پیدا کنیم.

$$x \mid 80 \Rightarrow \frac{80}{x} = \frac{2^4 \times 5}{x}$$

$$x \mid 300 \Rightarrow \frac{300}{x} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{x}$$

$x$  باید جوری باشد که هر دوی این کسرها عددی صحیح شود. در صورت کسر اول فقط عوامل ۲ و ۵ و در صورت کسر دوم فقط عوامل ۲، ۳ و ۵ است، پس اگر قرار باشد هر دو کسر عددی صحیح باشد،  $x$  فقط می‌تواند عوامل ۲ و ۵ داشته باشد. (برای مثال: آگه  $x$  عامل ۷ داشته باشد، ۷ رو با پی ساره کنیم که کسر عدد صحیح

بشه؟ با هیچ پی! هم همین  $x$  عامل ۳ هم نمی‌تونه داشته باشه چون کسر بالایی ساده نمی‌شه.)

چون  $x$  فقط عوامل ۲ و ۵ دارد می‌توان آن را به صورت  $2^\alpha \times 5^\beta$  نوشت. در

این صورت دو کسر به صورت مقابل خواهند شد:

$$\frac{80}{x} = \frac{2^4 \times 5}{2^\alpha \times 5^\beta}$$

$$\frac{300}{x} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{2^\alpha \times 5^\beta}$$

$\alpha$  و  $\beta$  را حداکثر برابر چه عددهایی می‌توانیم قرار دهیم تا هر دو کسر عددهایی

صحیح باشند؟ از رابطه  $\frac{2^4 \times 5}{2^\alpha \times 5^\beta}$  می‌توان نتیجه گرفت  $\alpha \leq 4$  و  $\beta \leq 1$  و اگر

قرار باشد کسر  $\frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{2^\alpha \times 5^\beta}$  عددی صحیح باشد، باید  $\alpha \leq 2$  و  $\beta \leq 2$  باشد

چون می‌خواهیم هر دوی کسرها عددی صحیح باشند، باید:

$$\alpha \leq 4 \quad \wedge \quad \alpha \leq 2 \Rightarrow \alpha \leq 2$$

$$\beta \leq 1 \quad \wedge \quad \beta \leq 2 \Rightarrow \beta \leq 1$$

بنابراین  $0 \leq \alpha \leq 2$  و  $0 \leq \beta \leq 1$  تغییر می‌کند. حداکثر مقدار  $x$  که همان بزرگ‌ترین

مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است، زمانی رخ می‌دهد که  $\alpha$  و  $\beta$  بیشترین مقدار

خود را داشته باشند، یعنی  $\alpha = 2$  و  $\beta = 1$  که در این حالت  $x = 2^2 \times 5 = 20$

می‌شود. اما چون عضوی دورقمی مجموعه خواسته شده می‌توان  $\alpha = 1$  و  $\beta = 1$  را

هم در نظر گرفت که در این صورت  $x = 2 \times 5 = 10$  است.

به طور ساده‌تر اگر بخواهیم این سؤال را جمع‌بندی کنیم بزرگ‌ترین مقدار

$x$ ، ب.م.م دو عدد ۸۰ و ۳۰۰ یعنی عدد ۲۰ است و بقیه عضوی مجموعه

نیز مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۲۰، یعنی  $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$  که ما این‌جا

عضوی دورقمی آن را می‌خواستیم. یعنی ۱۰ و ۲۰.

در پایان خوب است این نکته را یادآوری کنیم:

$$x \mid a \Rightarrow x \mid (a, b) \quad x \mid b$$

۲۰- عددها را  $a$  و  $b$  می‌نامیم و فرض می‌کنیم  $a < b$  است، با توجه به

$$ab = 2a + b + 15$$

اطلاعات سؤال داریم:

$$ab - 2a = b + 15$$

را برحسب  $b$  پیدا می‌کنیم:

$$a(b - 2) = b + 15 \Rightarrow a = \frac{b + 15}{b - 2}$$

اگر قرار باشد  $a$  عددی طبیعی شود باید کسر  $\frac{b + 15}{b - 2}$  عددی طبیعی باشد،

یعنی  $b + 15$  بر  $b - 2$  بخش‌پذیر باشد پس از این رابطه مقادیر  $b$  را پیدا

$$b - 2 \mid b + 15$$

می‌کنیم:

$$\begin{cases} b - 2 \mid b - 2 \\ b - 2 \mid b + 15 \end{cases} \xrightarrow{(-)} b - 2 \mid 17$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 2 = 1 \Rightarrow b = 3 \\ \Rightarrow a = \frac{3 + 15}{3 - 2} = 18 \text{ غ.ق. چون } a \text{ باید کوچک‌تر از } b \text{ باشد.} \\ b - 2 = -1 \Rightarrow b = 1 \\ \Rightarrow a = \frac{1 + 15}{1 - 2} = -16 \text{ طبیعی نیست.} \\ b - 2 = 17 \Rightarrow b = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{17} = 2 \checkmark \\ b - 2 = -17 \Rightarrow b = -15 \text{ طبیعی نیست.} \end{cases}$$

پس دو عدد ۲ و ۱۹ هستند.

۲۱- اگر بخواهیم  $x^2 + 2$  بر  $5x + 3$  بخش‌پذیر باشد باید  $x^2 + 2 \mid 5x + 3$ .

$$\begin{cases} 5x + 3 \mid 5x + 3 \\ 5x + 3 \mid x^2 + 2 \end{cases} \xrightarrow{\times(5x+3)} 5x + 3 \mid 25x^2 - 9$$

$$\begin{cases} 5x + 3 \mid x^2 + 2 \\ 5x + 3 \mid 25x^2 + 50x + 15 \end{cases} \xrightarrow{\times 25} 5x + 3 \mid 25x^2 + 50x + 15$$

$$\xrightarrow{(-)} 5x + 3 \mid 59 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3 = 1 \Rightarrow x = \frac{-2}{5} \quad \times \\ 5x + 3 = -1 \Rightarrow x = \frac{-4}{5} \quad \times \\ 5x + 3 = 59 \Rightarrow x = \frac{56}{5} \quad \times \\ 5x + 3 = -59 \Rightarrow x = \frac{-62}{5} \quad \times \end{cases}$$

پس به ازای هیچ مقداری از  $x$ ، رابطه برقرار نیست.

۲۲- می‌دانیم رشد یک عبارت فاکتوریلی خیلی سریع‌تر از رشد یک چندجمله‌ای

است. بنابراین از یک عددی به بعد تماماً!  $(n - 2)!$  از  $n^3 - n$  بزرگ‌تر خواهد

شد و رابطه دیگر برقرار نیست. بنابراین در عددهای کوچک رابطه را بررسی

می‌کنیم تا جایی که  $(n - 2)!$  بزرگ‌تر از  $n^3 - n$  شود. داریم:

$$n = 3 \Rightarrow 1! \mid 27 - 3 \quad \checkmark$$

$$n = 4 \Rightarrow 2! \mid 64 - 4 \quad \checkmark$$

$$n = 5 \Rightarrow 3! \mid 125 - 5 \quad \checkmark$$

$$n = 6 \Rightarrow 4! \mid 216 - 6 \quad \times$$

$$n = 7 \Rightarrow 5! \mid 343 - 7 \quad \times$$

$$n = 8 \Rightarrow 6! \mid 512 - 8 \quad \times$$

از این‌جا به بعد سمت چپ رابطه بزرگ‌تر از سمت راست می‌شود و رابطه برقرار نیست.

پس فقط به ازای سه عدد ۳، ۴ و ۵ رابطه برقرار است.



۹۹q و ۱۱۰q' - ۱۱ بخش پذیرند و باقی مانده آن‌ها بر ۱۱ برابر صفر است. فقط کافی است باقی مانده ۳۲ - را بر ۱۱ به دست آوریم.

اگر از روش سوم پیداکردن باقی مانده وقتی مقسوم عددی منفی باشد استفاده

$$\text{کنیم، داریم: } ۳۲ \mid ۱۱ \Rightarrow ۱۱ - ۱۰ = ۱$$

$$\frac{-۲۲}{۱۰} \quad ۲$$

البته می‌شه این هوری هم باقی مانده رو پیدا کرد.

$$۹۹q - ۱۱۰q' - ۳۲ = ۹۹q - ۱۱۰q' - ۳۲ + ۱ = ۱۱(۹q - ۱۰q' - ۳) + ۱ = ۱۱m + ۱$$

$$۲۹ \quad a \mid ۲۴ \Rightarrow a = ۲۴q + r, \quad ۰ \leq r < ۲۴$$

a مضرب ۸ است، بنابراین  $a = ۸k$  داریم:

$$۸k = ۲۴q + r \Rightarrow r = ۸k - ۲۴q = ۸(k - ۳q)$$

پس r باید مضرب ۸ باشد و از طرفی کم‌تر از ۲۴ است. پس: ۱۶ یا ۸ یا ۰

$$۲۴ \mid a + ۳۳ \Rightarrow a = ۳۳ - ۲۴(q + ۲) + r', \quad ۰ \leq r' < ۲۴$$

$$\frac{q + ۲}{r'}$$

$$۲۴q + r + ۳۳ = ۲۴q' + ۴۸ + r'$$

$$r = ۱۵ + r'$$

با توجه به این که r یا صفر یا ۸ یا ۱۶ است و r' دست کم صفر است، پس  $r = ۱۶$  و  $r' = ۱$  است.

۳- می‌دانیم باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.

$$a = ۴k + ۱ \quad b = ۴k' + ۲$$

a فرد است پس  $a^۲$  مربع عدد فرد است پس باقی مانده آن در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.

عددی فرد است.  $a + b = ۴k + ۱ + ۴k' + ۲ = ۴k + ۴k' + ۳$

پس  $(a + b)^۲$  نیز عددی فرد است و  $(a + b)^۴$  که مربع  $(a + b)^۲$  است.

مربع عددی فرد است که باقی مانده آن نیز در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.

$$b - a = ۴k' + ۲ - ۴k - ۱ = ۴k' - ۴k + ۱$$

پس  $(b - a)^۳$  نیز فرد است و  $(b - a)^۶$  مربع یک عدد فرد است پس

باقی مانده  $(b - a)^۶$  نیز در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.

بنابراین باقی مانده  $(b - a)^۶ + (a + b)^۴ + a^۲$  در تقسیم به ۸ برابر ۳ است.

$$۳۱ \quad yx^۲ - ۲x^۳ - y - ۱ = ۰ \Rightarrow yx^۲ - y = ۲x^۳ + ۱$$

$$\Rightarrow y(x^۲ - ۱) = ۲x^۳ + ۱ \Rightarrow y = \frac{۲x^۳ + ۱}{x^۲ - ۱}$$

اگر بخواهیم y عددی صحیح باشد  $۲x^۳ + ۱$  باید بر  $x^۲ - ۱$  بخش پذیر باشد

یا به عبارت دیگر  $x^۲ - ۱ \mid ۲x^۳ + ۱$  داریم:

$$\begin{cases} x^۲ - ۱ \mid ۲x^۳ + ۱ \\ x^۲ - ۱ \mid x^۲ - 1 \xrightarrow{\times 2x} x^۲ - 1 \mid ۲x^۳ - ۲x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x^۲ - ۱ \mid ۱ + ۲x$$

$$\xrightarrow{\times(۲x-۱)} \begin{cases} x^۲ - ۱ \mid ۴x^۲ - ۱ \\ x^۲ - ۱ \mid x^۲ - 1 \xrightarrow{\times 1} x^۲ - ۱ \mid ۴x^۲ - ۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x^۲ - ۱ \mid ۳$$

۲۵- می‌دانیم اگر  $(a, b) = d$  باشد،  $d \mid a$  و  $d \mid b$  و d بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک است. در این جا  $(a, ۶۰) = ۱۰ \mid a$  پس  $۱۰ \mid a$  بر  $a$  بخش پذیر است. یعنی  $a = ۱۰q$ .

$$(a, ۶۰) = ۱۰ \Rightarrow (a, ۲^۲ \times ۳ \times ۵) = ۲ \times ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰q, ۲^۲ \times ۳ \times ۵) = ۲ \times ۵ \Rightarrow (۲ \times ۵ \times q, ۲^۲ \times ۳ \times ۵) = ۲ \times ۵$$

q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد  $۱۰q$  مضرب ۲ می‌شود و با توجه به این که ۶۰ نیز مضرب ۲۰ است، ب.م.م دو عدد ۲۰ می‌شود و نه ۱۰. پس q فرد است و در واقع a فقط یک عامل ۲ دارد، هم‌چنین q مضرب ۳ نیست چون اگر مضرب ۳ باشد، a بر ۳۰ بخش پذیر می‌شود و چون ۶۰ هم بر ۳۰ بخش پذیر است ب.م.م دو عدد ۳۰ می‌شود و نه ۱۰. پس a عامل ۳ ندارد اما q می‌تواند مضرب ۵ باشد یا نباشد چون در هر دو حالت ب.م.م دو عدد باز هم همان عدد ۱۰ می‌شود. پس a دست کم یک شمارنده ۵ دارد. (می‌تواند هزارتا هم داشته باشد).

۲۶- می‌دانیم  $[x, ۱۵]$  یعنی کوچک‌ترین شمارنده مشترک دو عدد x و ۱۵، بنابراین ۶۰ مضرب عدد x است و در نتیجه  $۶۰ \mid x$ . حالا مجموعه مضارب طبیعی ۱۵ را نگاه کنید.  $\{۱۵, ۳۰, ۴۵, ۶۰, \dots\}$

x باید یک‌جوری باشد که کوچک‌ترین مضرب مشترک x و ۱۵ عدد ۶۰ بشود.

$$[x, ۱۵] = ۶۰ \Rightarrow [x, ۳ \times ۵] = ۲^۲ \times ۳ \times ۵$$

جدای از این که x باید ۶۰ را بشمارد x حتماً باید مضرب ۴ نیز باشد زیرا در غیر این صورت  $[x, ۱۵] = ۶۰$  نمی‌شود. برای مثال اگر  $x = ۱۰$  باشد،  $[۱۰, ۱۵] = ۳۰$

می‌شود و نه ۶۰. پس باید دنبال آن دسته شمارنده‌های عدد ۶۰ بگردیم که مضرب ۴ باشد. (به یور دیگر هم می‌شه اینو توضیح داد. ببینید موقع به دست آوردن ک.م.م. پی‌کار می‌کردیم؟ عوامل مشترک رو با توان بزرگ‌تر در غیر مشترک‌ها ضرب می‌کردیم. این‌ها جواب ک.م.م. ۶۰ شده و  $۱۵ = ۵ \times ۳$  پس باید x تماماً  $۲^۲$  داشته باشه که ک.م.م. ۶۰ بشه.)

بنابراین مقادیر قابل قبول برای x عبارتند از: ۴، ۱۲، ۲۰، ۶۰

$$۲۷ \quad a \mid ۲۴ \Rightarrow a = ۲۴q + ۱۷$$

$$\frac{q}{۱۷}$$

$$\Rightarrow ۵a + ۴۱ = ۵(۲۴q + ۱۷) + ۴۱ = ۱۲۰q + ۸۵ + ۴۱ = ۱۲۰q + ۱۲۶$$

حالا باید باقی مانده و خارج قسمت  $۱۲۰q + ۱۲۶$  را بر ۲۰ به دست آوریم.

$۱۲۰q$  که بر ۲۰ بخش پذیر است، یعنی در تقسیم به ۲۰ باقی مانده‌ای ندارد،

می‌ماند پیداکردن باقی مانده  $۱۲۶$  بر ۲۰ که ۶ است.

$$\frac{۱۲۶}{۲۰} \quad ۶$$

بنابراین باقی مانده  $۵a + ۴۱$  بر ۲۰ برابر ۶ است.

می‌دانیم برای پیداکردن خارج قسمت تقسیم a بر b کافی است  $\left[ \frac{a}{b} \right]$  را پیدا کنیم. داریم:

$$\left[ \frac{۵a + ۴۱}{۲۰} \right] = \left[ \frac{۱۲۰q + ۱۲۶}{۲۰} \right] = \left[ \frac{۱۲۰q}{۲۰} + \frac{۱۲۶}{۲۰} \right] = [۶q + ۶/۳] = ۶q + ۶$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم  $۵a + ۴۱$  بر ۲۰ بر حسب q برابر  $۶q + ۶$  است.

$$۲۸ \quad a \mid ۳۳ \Rightarrow a = ۳۳q + ۲۱ \quad b \mid ۲۲ \Rightarrow b = ۲۲q' + ۱۹$$

$$\frac{q}{۲۱} \quad \frac{q'}{۱۹}$$

$$\Rightarrow ۳a - ۵b = ۳(۳۳q + ۲۱) - ۵(۲۲q' + ۱۹)$$

$$= ۹۹q + ۶۳ - ۱۱۰q' - ۹۵ = ۹۹q - ۱۱۰q' - ۳۲$$

۳۵- اگر  $x^2 + x + 1$  تجزیه می‌شد خوب بود چون می‌شد دو پرانتز که حاصل ضرب آن‌ها بر ۱۳ بخش‌پذیر است. در این صورت یا پرانتز اول بر ۱۳ بخش‌پذیر می‌شد یا پرانتز دوم و یا هر دو. اما متأسفانه  $x^2 + x + 1$  تجزیه نمی‌شود، پس چه کار کنیم؟ می‌دانیم:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) x^2 + x + 1} \\ \underline{13 \overline{) 13}} \phantom{+ 1} \\ 13 \end{array} \xrightarrow{(-)} \begin{array}{r} 13 \overline{) x^2 + x - 12} \\ \underline{13 \overline{) 13}} \phantom{- 12} \\ 13 \end{array}$$

حالا می‌شود  $x^2 + x - 12$  را تجزیه کرد.

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

$$13 \overline{) (x + 4)(x - 3)}$$

پس یا  $x - 3$  بر ۱۳ بخش‌پذیر است یا  $x + 4$ ، بنابراین:

$$x - 3 = 13k \Rightarrow x = 13k + 3$$

$$x + 4 = 13k' \Rightarrow x = 13k' - 4$$

$$10 \leq 13k + 3 \leq 99 \quad 10 \leq 13k' - 4 \leq 99$$

$$7 \leq 13k \leq 96 \quad 14 \leq 13k' \leq 103$$

$$0.5 \leq k \leq 7.3 \quad 1.07 \leq k' \leq 7.9$$

شش عدد  $k' = 2, 3, \dots, 7$  و هفت عدد  $k = 1, 2, \dots, 7$

پس به ازای ۱۳ عدد دورقمی رابطه برقرار است.

۳۶- باقی‌مانده  $a$  در تقسیم به ۱۶ و ۱۵ به ترتیب برابر ۷ و ۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a \overline{) 16} \Rightarrow a = 16q + 7 \xrightarrow{\times 15} 15a = 240q + 105 \\ \underline{\phantom{a} 16} \\ \phantom{a} 7 \\ a \overline{) 15} \Rightarrow a = 15q' + 2 \xrightarrow{\times 16} 16a = 240q' + 32 \\ \underline{\phantom{a} 15} \\ \phantom{a} 2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow a = 240q' + 32 - 240q - 105 = 240(q' - q) - 73$$

$$\Rightarrow a = 240k - 73 \Rightarrow a = 240k - \underbrace{120 + 47}_{-73}$$

$$\Rightarrow a = 120(2k - 1) + 47$$

پس باقی‌مانده  $a$  بر ۱۲۰ برابر ۴۷ است.

$$x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \quad \times$$

$$x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = \frac{17}{3} \\ x = -2 \Rightarrow y = -5 \end{cases} \quad \times$$

$$x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \quad \times$$

پس دو نقطه با مختصات صحیح روی این منحنی وجود دارد.

$$xy + x + y = p - 1 \Rightarrow xy + x + y + 1 = p \quad -32$$

$$\Rightarrow (x + 1)(y + 1) = p$$

حاصل ضرب دو عدد برابر عددی اول شده است پس یکی از آن‌ها ۱ و دیگری عدد اول  $p$  داریم:

$$y + 1 = p \Rightarrow y = p - 1$$

چون  $x$  و  $y$  باید عددهایی طبیعی باشند پس معادله در  $\mathbb{N}$  جواب ندارد.

۳۳- دیدیم که: (۱) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به یکی از دو صورت  $6k + 5$  یا  $6k + 1$  نوشت.

(۲) مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$$p = 6x + 1 \Rightarrow p^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 6(6k^2 + 2k) + 1 = 6q + 1$$

$$p = 6k' + 5 \Rightarrow p^2 = 36k'^2 + 60k' + 25 \\ = 6(6k'^2 + 10k' + 4) + 1 = 6q' + 1$$

پس در هر دو حالت  $p^2$  در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد و یا به بیان دیگر  $p^2 - 1$  بر ۶ بخش‌پذیر است.

از طرفی چون عددهای اول بزرگ‌تر از ۳ فردند،  $p^2$  ربع یک عدد فرد است که در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. پس  $p^2 - 1$  بر ۸ نیز بخش‌پذیر است.

$$6 \mid p^2 - 1 \xrightarrow{\text{م.م.ک}} 24 \mid p^2 - 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 24m \Rightarrow p^2 = 24m + 1 \\ 8 \mid p^2 - 1$$

۳۴- از رابطه  $13 \mid 5a + 7b$  می‌خواهیم به رابطه‌ای برسیم که در آن ضریب  $a$  برابر ۲ باشد. خوب چه کار باید بکنیم. ببینید ما این دو رابطه را داریم:

$$13 \overline{) 5a + 7b} \quad 13 \overline{) 13a}$$

می‌توان سمت راست هر کدام از رابطه‌ها را در هر عددی بخواهیم ضرب کنیم. این‌جا باید فکر کنیم کدام رابطه را در چه عددی ضرب کنیم که وقتی دو رابطه را از هم کم می‌کنیم ضریب  $a$  برابر ۲ شود.

اگر بالایی را دو برابر کنیم ضریب  $a$  برابر ۱۰ می‌شود که اگر از  $13a$  کم کنیم  $3a$  باقی می‌ماند اما اگر رابطه بالایی را در ۳ ضرب کنیم داریم:

$$13 \overline{) 5a + 7b} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 13 \overline{) 15a + 21b} \\ \underline{13 \overline{) 13a}} \\ 13 \overline{) 2a + 21b} \end{cases} \xrightarrow{(-)} 13 \overline{) 2a + 21b}$$

خب ضریب  $a$  درست شد! حالا برویم سراغ ضریب  $b$ :

$$13 \overline{) 2a + 21b} \xrightarrow{(-)} 13 \overline{) 2a - 5b} \\ 13 \overline{) 13b} \xrightarrow{\times 2} 13 \overline{) 26b}$$

۴۴- گزینه ۲ ممکن است فکر کنید عددهای اول چنین ویژگی‌ای دارند اما برای مثال عدد ۳ هم بر ۳ بخش پذیر است، هم بر ۳-، هم بر ۱ و هم بر ۱- . عددهای مرکب بر عددهای بیشتری بخش پذیرند. عدد ۱ به جز خودش بر ۱- نیز بخش پذیر است. اما عدد ۱- عددی است که بر خودش و ۱ بخش پذیر است و تنها عددی است که این خاصیت را دارد.

۴۸ |  $a^3 \Rightarrow 2^4 \times 3 | a^3 \Rightarrow \frac{a^3}{2^4 \times 3} \in \mathbb{Z}$  **گزینه ۴ - ۵۱**

کسر  $\frac{a^3}{2^4 \times 3}$  باید عددی صحیح باشد. چهار عامل ۲ در مخرج داریم، بنابراین

$a$  باید دست کم دو عامل ۲ داشته باشد. (دقت کنید که اگر  $a$  فقط یک عامل ۲ داشته باشد، یعنی عددی مثل ۶ باشد، وقتی به توان ۳ می رسد دارای سه عامل ۲ است و مخرج ۴ عامل ۲ دارد، پس کسر ساده نمی شود.) بنابراین  $a$  باید دست کم دو عامل ۲ و یک عامل ۳ داشته باشد. پس:  $a_{\min} = 2^2 \times 3 = 12$

از طرفی:  $375 | b^2 \Rightarrow 3 \times 5^3 | b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{3 \times 5^3} \in \mathbb{Z}$

کسر  $\frac{b^2}{3 \times 5^3}$  باید عددی صحیح باشد. با استدلال مشابه،  $b$  باید دست کم ۲

عامل ۵ و یک عامل ۳ داشته باشد. بنابراین:  $b_{\min} = 25 \times 3 = 75$   
در نتیجه کمترین مقدار  $a + b$  برابر است با:  $75 + 12 = 87$

**۵۲ - گزینه ۲** رابطه  $a^2 | 108$  را تبدیل به کسر می کنیم:

$$\frac{a^2}{108} = \frac{a^2}{2^2 \times 3^3}$$

خب! این کسر باید عدد صحیح باشد. همان طور که در مخرج کسر می بینید یک  $2^2$  در مخرج است و یک  $3^3$ .  $a$  نمی تواند فرد باشد، چون ۲های مخرج ساده نمی شوند. اما اگر  $a$  یک عامل ۲ داشته باشد کافی است. چون اگر  $a$  یک عامل ۲ داشته باشد  $a^2$  دارای دو عامل ۲ است و  $2^2$  در مخرج و صورت ساده می شوند. حالا می رویم سراغ عوامل ۳. در مخرج یک  $3^3$  داریم. اگر  $a$  فقط یک عامل ۳ داشته باشد کافی نیست، چرا که در این صورت  $a^2$  دارای ۲ عامل ۳ می شود ولی مخرج ۳ عامل ۳ دارد که بعد از ساده کردن یک عامل ۳ در مخرج می ماند. پس  $a$  باید دست کم ۲ عامل ۳ داشته باشد، یعنی  $a$  دست کم یک عامل ۲ و دست کم ۲ عامل ۳ دارد، یعنی  $a_{\min} = 2 \times 3^2$ . که در این حالت رابطه  $a^2 | 108$  نیز برقرار می شود چرا که  $2^2 \times 3^3 | 2^2 \times 3^4$ . بنابراین با توجه به گزینه ها  $a | 12$  لزوماً درست نیست.

**۵۳ - گزینه ۴** می دانیم سمت راست رابطه عاقد کردن را می توان در هر عدد دلخواهی ضرب و سمت چپ رابطه عاقد کردن را می توان بر هر کدام از مقسوم علیه های آن تقسیم کرد. بنابراین:

۱)  $18 | b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۳}} 6 | b$

۲)  $a | 18, 18 | b \Rightarrow a | b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} a | 3b$

۳)  $a | 18 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} a | 54$

اما گزینه  $3a | b$  ممکن است درست نباشد، مثلاً اگر  $a$  و  $b$  هر دو ۱۸ باشند، رابطه  $3a | b$  برقرار نیست.

**۵۴ - گزینه ۱** می دانیم اگر  $a | 1$ ، آن گاه  $a = \pm 1$  است. بنابراین با

توجه به این که  $a^2 - a - 1 | 1$  پس  $a^2 - a - 1 = \pm 1$ .

داریم:  $a^2 - a - 1 = 1 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$

$a^2 - a - 1 = -1 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

پس به ازای ۴ عدد صحیح این رابطه برقرار است.

**۴۵ - گزینه ۱** سؤال ساده ای است و در حقیقت یکی از ویژگی های

عاقد کردن است. می دانیم اگر  $c | ab$  می توان نتیجه گرفت  $c | a$  و  $c | b$  پس **۱** درست است.

اما اگر  $a = 2, b = 3, c = 6$  و **۲** و **۴** رد می شوند. برای رد **۳** کافی است  $a$  را برابر ۲،  $b$  را برابر ۳- و  $c$  را برابر ۶ فرض کنید.

**۴۶ - گزینه ۴** این هم سؤال بسیار ساده ای است. داریم:

$$\begin{array}{l} a-b | a-b \\ \xrightarrow{(-)} a-b | b \\ a-b | a \end{array}$$

**۴۷ - گزینه ۳** فرض کنید  $a = 2$  و  $b = 3$  باشد، **۱** و **۲** رد

می شود. هم چنین اگر  $a = 1$  و  $b = 6$  **۴** نیز رد می شود.

**۴۸ - گزینه ۲** دو عدد را  $a = 7k + 3$  و  $b = 7k' + 3$  فرض

می کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} ab &= (7k + 3)(7k' + 3) = 49kk' + 21k + 21k' + 9 \\ &= \underbrace{49kk' + 21k + 21k' + 7 + 2}_{\text{مضرب ۷}} = 7(7kk' + 3k + 3k' + 1) + 2 = 7q + 2 \end{aligned}$$

**۴۹ - گزینه ۴** یک بار  $a$  را از سمت راست رابطه حذف می کنیم و

یک بار  $b$  را. اما قبل از آن یک کمی رابطه را ساده تر می کنیم:

$$\begin{array}{l} 2a + 3b | 2a + 4b \\ \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | a + b \\ 2a + 3b | 2a + 3b \end{array}$$

حالا داریم:

$$\begin{array}{l} 2a + 3b | a + b \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2a + 3b | 2a + 2b \\ 2a + 3b | 2a + 3b \end{cases} \\ \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | b \quad (I) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a + 3b | a + b \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 2a + 3b | 3a + 3b \\ 2a + 3b | 2a + 3b \end{cases} \\ \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | a \quad (II) \end{array}$$

درستی  $a | 2a + 3b$  که ثابت شد.

برای اثبات درستی  $a - b | 2a + 3b$  کافی است (I) و (II) را از هم کم کنیم:

$$\begin{array}{l} 2a + 3b | a \\ 2a + 3b | b \\ \Rightarrow 2a + 3b | a - b \end{array}$$

هم چنین:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2a + 3b | a \xrightarrow{\times 2} 2a + 3b | 2a \\ 2a + 3b | b \xrightarrow{\times 3} 2a + 3b | 3b \end{cases} \\ \xrightarrow{(-)} 2a + 3b | 2a - 3b \end{array}$$

پس هر سه رابطه درست است.

**۵۰ - گزینه ۱**  $a | x - y \xrightarrow{\times t} a | xt - yt \xrightarrow{(-)} a | xt - yz$   
 $a | z - t \xrightarrow{\times y} a | zy - ty$

پس **۱** درست است.

برای بقیه گزینه ها مثال نقض می آوریم:

کافی است  $a = 5, x = 7, y = 2, z = 6, t = 1$  باشد.

۵ |  $7 + 12$  **۲**

۵ |  $14 + 2$  **۳**

۵ |  $9 \times 7$  **۴**

۵۹- گزینه ۳  
 $a|b+3 \Rightarrow b+3=aq \Rightarrow b=aq-3$

$a|c-2 \Rightarrow c-2=aq' \Rightarrow c=aq'+2$

دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:  $bc = a^2 qq' + 2aq - 3aq' - 6$   
 بر  $a$  بخش‌پذیر است.

سه جمله اول، بر  $a$  بخش‌پذیر است. از طرفی می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند عددی منفی باشد، بنابراین:

$bc+1 = a(aqq' + 2q - 3q') - 5 = ak - 5 = ak - a + a - 5$   
 $= a(k-1) + \underbrace{a-5}_r$   
 بنابراین باقی‌مانده برابر  $a-5$  است.

۶۰- گزینه ۳  
 $10|a \Rightarrow a=10k$

ابتدا کل مضارب دورقمی  $10$  را پیدا می‌کنیم:

$10 \leq 10k < 100 \Rightarrow 1 \leq k < 10$

پس به ازای  $9$  عدد رابطه برقرار است. حالا از میان این‌ها باید عددهایی که مضرب  $15$  هستند را حذف کنیم، یعنی  $30$ ،  $60$  و  $90$ ، بنابراین  $6$  عدد دورقمی وجود دارد که بر  $10$  بخش‌پذیر است ولی بر  $15$  بخش‌پذیر نیست.

۶۱- گزینه ۱  
 می‌دانیم سمت راست یک رابطه عادی کردن را در هر

عدد دلخواهی می‌توان ضرب کرد:

$x-2|x-2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 7} x-2|7x-14$

از طرفی داریم  $x-2|7x+5$ .

هم‌چنین می‌دانیم اگر  $a|b$  و  $a|c$ ، آن‌گاه  $a|b-c$ . این‌جا داریم:

$x-2|7x-14 \xrightarrow{(-)} x-2|-19$

$x-2|7x+5$

بزرگ‌ترین عددی که  $-19$  را می‌شمارد عدد  $19$  است. پس:

$x-2=19 \Rightarrow x=21 \Rightarrow 1+2=3$

۶۲- گزینه ۴  
 می‌دانیم اگر  $a|b$  آن‌گاه  $a|mb$ .

$a|2m+3 \xrightarrow{\times 5} a|10m+15 \xrightarrow{(-)} a|7 \Rightarrow a=1,7$

$a|5m+4 \xrightarrow{\times 2} a|10m+8$

چون  $a \neq 1$  است، پس  $a=7$ .

۶۳- گزینه ۳  
 از اتحاد  $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

استفاده می‌کنیم و سعی می‌کنیم  $b$  را از سمت راست تساوی حذف کنیم:

$a|b+2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times (b^2-2b+4)} a|b^2+8 \Rightarrow a|7$   
 $a|b^2+1$

۶۴- گزینه ۳  
 $x$  را از سمت راست رابطه حذف می‌کنیم:

$3x+2|3x+2 \xrightarrow{\times 5} 3x+2|15x+10 \xrightarrow{(-)} 3x+2|11$

$3x+2|5x+7 \xrightarrow{\times 3} 3x+2|15x+21$

$3x+2=11 \Rightarrow x=3$  ✓

$3x+2=-11$  ✗

$3x+2=1$  ✗

$3x+2=-1 \Rightarrow x=-1$  ✓

۵۵- گزینه ۳  
 $a^2|a+b \xrightarrow{\times a} a^2|a^2+ab \xrightarrow{(-)} a^2|ab \xrightarrow{\div a} a|b$

$a|b \xrightarrow{\text{به توان } 2} a^2|b^2$  ✓ ۱

$a|b \Rightarrow a|3b \xrightarrow{(-)} a|3b-2a$  ✓ ۲

$a|a \Rightarrow a|2a$

$a|b \Rightarrow a^2|b^2 \Rightarrow a^2|a^2+b^2$  ۴

$a|a \Rightarrow a^2|a^2$  ۳ ممکن است درست نباشد.

برای مثال اگر  $a=3$  و  $b=6$  باشد،  $a^2|a+b$  زیرا  $9|3+6$  اما:

$9 \nmid 3-6$

۵۶- گزینه ۳  
 می‌دانیم اگر  $ab|c$  می‌توان نتیجه گرفت:  $a|c$  و  $b|c$  داریم:

$a|a+b \Rightarrow \begin{cases} a|a+b \\ a|a \end{cases} \Rightarrow a|b$

$ab|a+b \Rightarrow \begin{cases} b|a+b \\ b|a \end{cases} \Rightarrow a=b$

حالا اگر در رابطه اصلی جایگزین کنیم، داریم:

$a^2|a+a \Rightarrow a^2|2a \xrightarrow{\div a} a|2 \Rightarrow a=1,2$

بنابراین فقط دو حالت وجود دارد:  $a=b=1$  یا  $a=b=2$ .

۱ و ۲ که واضح است درست‌اند.

در مورد ۳ اگر  $a=b=1$  باشد، داریم:  $1|1+2$  که نادرست است.

در ۴ اگر  $a=b=2$  باشد، داریم:  $1|1+2$  و اگر  $a=b=2$  باشد، داریم:  $2|2+2$  که هر دو درست‌اند.

۵۷- گزینه ۳  
 بهترین راه برای پاسخ‌گویی به این سؤالات این است که

به وسیله دو عدد توان‌دار،  $a^2$  و  $b^3$  را برابر کنیم. راحت‌ترین راه هم این‌طوری است که پایه را ۲ بگیریم، توان  $a$  را به  $b$  بدهیم و توان  $b$  را به  $a$  یعنی:

$a=2^3$        $b=2^2$

در این صورت  $a^2|b^3$  زیرا  $(2^3)^2|(2^2)^3$ .

حالا به ازای این مقادیر  $a$  و  $b$  گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$a^5|b^8 \Rightarrow (2^3)^5|(2^2)^8 \Rightarrow 2^{15}|2^{16}$  ✓ ۱

$a^3|b^5 \Rightarrow (2^3)^3|(2^2)^5 \Rightarrow 2^9|2^{10}$  ✓ ۲

$a^7|b^{10} \Rightarrow (2^3)^7|(2^2)^{10} \Rightarrow 2^{21}|2^{20}$  ✗ ۳

$a^4|b^7 \Rightarrow (2^3)^4|(2^2)^7 \Rightarrow 2^{12}|2^{14}$  ✓ ۴

همان‌طور که می‌بینید برای ۳ مثال نقض پیدا کردیم.

۵۸- گزینه ۲  
 داریم  $b^5|(a+1)^2$  همان‌طور که در سؤال‌های قبل

دیدید دو طرف را برابر می‌کنیم:  $a+1=2^5$        $b=2^2$   
 حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$a+1|b^2 \Rightarrow 2^5|(2^2)^2$  ✗ ۱

$a+1|b^3 \Rightarrow 2^5|(2^2)^3$  ✓ ۲

$(a+1)^3|b^6 \Rightarrow (2^5)^3|(2^2)^6$  ✗ ۳

$(a+1)^3|b^7 \Rightarrow (2^5)^3|(2^2)^7$  ✗ ۴

۲-۲x+1 | 3x-2 داریم:

$$\begin{aligned} 2x+1 \mid 2x+1 \xrightarrow{-x^2} 2x+1 \mid 6x+3 &\Rightarrow 2x+1 \mid 7 \\ 2x+1 \mid 3x-2 \xrightarrow{-x^2} 2x+1 \mid 6x-4 & \\ 2x+1=7 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=1 &\checkmark \\ 2x+1=-7 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow y=2 &\checkmark \\ 2x+1=1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-2 &\checkmark \\ 2x+1=-1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=5 &\checkmark \end{aligned}$$

۶۹- گزینه ۳ **راه اول** عدد را  $x$  می‌نامیم.  $4x+1$  باید بر  $3x-1$  بخش پذیر باشد یا به بیان دیگر  $3x-1 \mid 4x+1$ .

گفتیم که می‌شود برای پیدا کردن  $x$  در این گونه سؤال‌ها ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد، مخرج مشترک گرفته، عبارت را ساده کرد و صورت کسر را پیدا کرد. عبارت سمت چپ، صورت کسر عبارت سمت راست را می‌شمارد. نگاه کنید:

$$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \xrightarrow{\frac{1}{3} \text{ را در } 4x+1 \text{ جایگزین می‌کنیم.}} \frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$$

صورت کسر ۷ است. پس:

$$\begin{aligned} 3x-1 \mid 7 &\Rightarrow 3x-1=1 \quad \times \\ 3x-1=-1 &\Rightarrow x=0 \quad \checkmark \\ 3x-1=7 &\quad \times \\ 3x-1=-7 &\Rightarrow x=-2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

پس به ازای دو عدد صحیح رابطه برقرار است.

**راه دوم**

$$\begin{aligned} 3x-1 \mid 3x-1 \xrightarrow{-x^4} 3x-1 \mid 12x-4 &\xrightarrow{(-)} 3x-1 \mid 7 \\ 3x-1 \mid 4x+1 \xrightarrow{-x^2} 3x-1 \mid 12x+3 & \end{aligned}$$

و ادامه ماجرا!

$$\begin{aligned} x-2 \mid x-2 &\quad \text{گزینه ۷۰} \\ \xrightarrow{\text{سمت راست } (x+2) \times} x-2 \mid x^2-4 &\xrightarrow{(-)} x-2 \mid a-4 \\ \text{از طرفی: } x-2 \mid x^2-a & \end{aligned}$$

اگر فقط به ازای دو عدد صحیح بخواهیم رابطه برقرار باشد،  $a-4$  باید ۱ یا  $-1$  باشد:

$$\begin{aligned} a-4=1 &\Rightarrow a=5 \\ a-4=-1 &\Rightarrow a=3 \end{aligned}$$

پس  $a$  فقط دو مقدار می‌تواند داشته باشد.

۷۱- گزینه ۴ باید  $m$  را از سمت راست رابطه حذف کنیم تا به عدد برسیم:

$$\begin{aligned} a \mid 3m+1 \xrightarrow{\times(3m-1)} a \mid 9m^2-1 &\xrightarrow{(-)} a \mid 19 \\ a \mid m^2+2 \xrightarrow{\times 9} a \mid 9m^2+18 & \\ \Rightarrow a=1 \text{ یا } 19 & \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین مقدار آن برابر ۱۹ است.

۷۲- گزینه ۱ سعی می‌کنیم  $k$  را از سمت راست رابطه‌ها حذف کنیم:

$$\begin{aligned} a \mid 7k+6 \xrightarrow{\times 9} a \mid 63k+54 &\Rightarrow a \mid 7m-54 \\ a \mid 9k+m \xrightarrow{\times 7} a \mid 63k+7m & \end{aligned}$$

۶۵- گزینه ۲ می‌دانیم طبق قرارداد تنها عددی که به ازای آن

رابطه  $a \mid 0$  برقرار است، عدد صفر است. پس این رابطه تنها زمانی برقرار است که  $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4x = 0$  باشد. داریم:

$$\begin{aligned} x(x^6 - 4x^4 - x^2 + 4) &= x(x^4 - 1)(x^2 - 4) = 0 \\ \Rightarrow x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

پس رابطه به ازای  $x=0, x=1, x=-1, x=2, x=-2$  برقرار است، اما چون مقادیر طبیعی  $x$  خواسته شده، فقط  $x=1$  و  $x=2$  قابل قبول است.

۶۶- گزینه ۱ می‌دانیم اگر  $x$  عددی بزرگ باشد،  $|x^3 + 1|$  از

$|x^2 + 1|$  بیشتر است، بنابراین فقط ممکن است به ازای عددهای کوچک این رابطه برقرار باشد. کسر  $\frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$  را در نظر بگیرید.  $x$  را تا جایی بزرگ

می‌کنیم که قدرمطلق مخرج از قدرمطلق صورت بیشتر شود. مشخص است از آن جا به بعد هیچ وقت رابطه برقرار نیست.

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow 1 \mid 1 \quad \checkmark \\ x=1 &\Rightarrow 2 \mid 2 \quad \checkmark \\ x=2 &\Rightarrow 9 \mid 5 \quad \times \end{aligned}$$

سؤال گفته  $x$  طبیعی باشد.  $\Rightarrow$

به ازای  $x > 2$  رابطه برقرار نیست.

$$\begin{aligned} x=-1 &\Rightarrow 0 \mid 2 \quad \times \\ x=-2 &\Rightarrow -7 \mid 5 \quad \times \end{aligned}$$

سؤال گفته  $x$  طبیعی است.  $\Rightarrow$

پس رابطه فقط به ازای عدد ۱ برقرار است.

۶۷- گزینه ۱ کسر  $\frac{n+6}{n^2+2}$  باید عددی صحیح شود.

می‌دانیم رشد مخرج از صورت، بیشتر است. یعنی اگر  $n$  عددی بزرگ باشد، مخرج از صورت بیشتر می‌شود و رابطه برقرار نیست. در میان عددهای کوچک، رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow \frac{6}{2} = 3 \quad \checkmark \\ n=1 &\Rightarrow \frac{7}{3} \quad \times \\ n=-1 &\Rightarrow \frac{5}{3} \quad \times \\ n=2 &\Rightarrow \frac{8}{6} \quad \times \\ n=-2 &\Rightarrow \frac{4}{6} \quad \times \end{aligned}$$

به ازای  $n \geq 3$  و  $n \leq -3$  صورت کسر از مخرج، کوچک‌تر می‌شود که اگر  $n+6$  و  $n^2+2$  عددهایی غیرصفر باشند،  $n+6$  نمی‌تواند بر  $n^2+2$  بخش پذیر باشد.

اما اگر  $n = -6$  باشد، صورت کسر صفر می‌شود و حاصل کسر برابر صفر می‌شود، پس به ازای دو عدد  $n = -6$  و  $n = 0$  کسر عدد صحیحی می‌شود.

۶۸- گزینه ۴ ابتدا  $y$  را بر حسب  $x$  پیدا می‌کنیم:

$$2yx+2=3x-y \Rightarrow 2yx+y=3x-2 \Rightarrow y=\frac{3x-2}{2x+1}$$

اگر قرار باشد  $y$  عددی صحیح باشد، کسر  $\frac{3x-2}{2x+1}$  باید صحیح باشد پس باید

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

$$m = 7 \Rightarrow 7m - 54 = 49 - 54 = -5$$

$$a \mid -5 \Rightarrow a = 1, 5$$

پس پاسخ همین گزینه است. برای محکم‌کاری! بقیه گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم:

$$m = 9 \Rightarrow 7m - 54 = 63 - 54 = 9$$

$$a \mid 9 \Rightarrow a = 1, 3, 9$$

$$m = 6 \Rightarrow 7m - 54 = 42 - 54 = -12$$

$$a \mid -12 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$m = 10 \Rightarrow 7m - 54 = 70 - 54 = 16$$

$$a \mid 16 \Rightarrow a = 1, 2, 4, 8, 16$$

**۷۳- گزینه ۴** چون  $n > 3$  است پس در  $n!$  حتماً عامل ۳ وجود دارد. پس  $n! + 3$  بر ۳ بخش پذیر است.

$$n! + n - 1 = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 + n - 1$$

$$= (n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 + 1$$

بر  $n-1$  بخش پذیر است.

و طبق استدلال بالا بر  $n-1$  بخش پذیر است، پس اول نیست.

اما  $n! + n + 1$  ممکن است اول باشد. برای مثال به ازای  $n = 4$  داریم:

$$4! + 4 + 1 = 29 \text{ اول است.}$$

**۷۴- گزینه ۱** می‌دانیم:

$$100! = 100 \times 99 \times 98 \times 97 \times \dots \times 31 \times \dots \times 12 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

بنابراین در تجزیه  $100!$  هر سه عامل  $97$ ،  $31$  و  $12$  وجود دارد. بنابراین  $100! + 12$  بر  $100!$  بخش پذیر است. (از  $12$  می‌شود فاکتور گرفت).  $100! + 31$  بر  $31$  و  $97$  و  $100! + 97$  نیز بر  $97$  بخش پذیر است.

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

**۷۵- گزینه ۳**  $8!$  و  $7!$  بر  $210$  بخش پذیرند چون هر ۴ عامل فوق را دارند. پس فقط می‌ماند پیدا کردن باقی‌مانده  $210 - 720$  بر  $210$ . از روش دوم پیدا کردن باقی‌مانده در عددهای منفی، استفاده می‌کنیم:

$$720 \mid 210$$

$$-630 = 210 - 90 = 120$$

$$90$$

**۷۶- گزینه ۲** عدد  $6n + 30$  بر هر دو عدد  $21$  و  $12$  بخش پذیر است.

یعنی یک مضرب مشترک این دو عدد است پس بر ک.م.م این دو عدد بخش پذیر است:

$$[12, 21] = [2^2 \times 3, 3 \times 7] = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

$$12 \mid 6n + 30 \xrightarrow{\text{ک.م.م}} 84 \mid 6n + 30$$

$$21 \mid 6n + 30$$

$$\Rightarrow 6n + 30 = 84q \xrightarrow{\div 6} n + 5 = 14q \Rightarrow n = 14q - 5$$

$$14q - 5 \leq 99 \Rightarrow 14q \leq 104 \Rightarrow q \leq 7/4$$

$$q_{\max} = 7 \Rightarrow n_{\max} = 14 \times 7 - 5 = 93$$

**۷۷- گزینه ۲** می‌دانیم:  $14n^2 + 19n + 6 = (7n + 6)(2n + 1)$

$$5 \mid 2n + 1 \xrightarrow{(+)} 5 \mid 7n + 6$$

از طرفی:

$$5 \mid 5n + 5$$

هر دو عدد  $2n + 1$  و  $7n + 6$  بر ۵ بخش پذیرند، پس حاصل ضرب آن‌ها همواره مضرب ۲۵ است.

**۷۸- گزینه ۳** به بهانه این سؤال می‌خواهیم دو نکته مهم را با هم

مرور کنیم. اگر عددی مثل  $X$  بر دو عدد  $a$  و  $b$  بخش پذیر باشد، یعنی مضرب هر دو است، پس کم‌ترین مقدار طبیعی آن ک.م.م دو عدد است و بقیه مقادیر

آن، مضارب ک.م.م آن دو عدد است. یعنی:

$$a \mid X \Rightarrow [a, b] \mid X$$

$$b \mid X$$

برای مثال در این سؤال:

$$24 \mid X$$

$$30 \mid X$$

یعنی عدد  $X$  هم بر ۲۴ بخش پذیر است و هم بر  $30$ . کوچک‌ترین عدد طبیعی که هم مضرب ۲۴ است و هم مضرب  $30$  چه عددی است؟ مشخص است که ک.م.م  $24$  و  $30$   $[24, 30] = [2^3 \times 3, 2 \times 3 \times 5] = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$  است.

یعنی:

$$24 \mid X \Rightarrow 120 \mid X$$

$$30 \mid X$$

حالا برعکس داستان را نگاه کنید. فرض کنید  $a$  و  $b$  بر عددی مثل  $X$  بخش پذیر باشند. مشخص است بزرگ‌ترین  $X$  که این ویژگی را دارد همان ک.م.م دو عدد است و وقتی این دو عدد بر ک.م.مشان بخش پذیرند پس بر شمارنده‌های ک.م.م نیز بخش پذیرند. یعنی:

$$X \mid a \Rightarrow X \mid (a, b)$$

$$X \mid b$$

با مثال، بهتر می‌شود این مسئله را فهمید.

$X$  یک مقسوم‌علیه مشترک  $24$  و  $30$  است.

البته **۱** هم درست است و باید اصلاح شود.

$$X \mid 24$$

$$X \mid 30$$

خب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد  $24$  و  $30$  چند است؟

$$(24, 30) = (2^3 \times 3, 2 \times 3 \times 5) = 2 \times 3 = 6$$

یعنی بزرگ‌ترین عددی که هم  $24$  بر آن بخش پذیر است و هم  $30$  عدد است. خب وقتی این دو عدد هر دو بر  $6$  بخش پذیرند واضح است که بر مقسوم‌علیه‌های  $6$  یعنی  $3$ ،  $2$  و  $1$  نیز بخش پذیرند. پس:

$$X \mid 24 \Rightarrow X \mid 6$$

$$X \mid 30$$

می‌دانیم فقط عددهای اول دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی هستند (مثلاً  $7$  که عددی اول است فقط بر خودش و یک بخش پذیر است اما  $6$  چون اول نیست بر خودش، یک،  $2$  و  $3$  بخش پذیر است).

بنابراین  $a$  و  $b$  باید عددهایی اول باشند. خب چه عددهای اولی عدد  $30$  را می‌شمارند؟

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

با توجه به این که  $a \neq b$  است، یکی از حالت‌های

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & a+b \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{array}$$

روبه‌رو امکان پذیر است:

بنابراین  $a + b$  برابر  $6$  نمی‌تواند باشد.

**۸۰- گزینه ۱**  $X \mid 12$  و  $X \mid 20$  را به صورت کسر می‌نویسیم. باید جوری باشد که هر دو کسر عددهایی صحیح شوند. داریم:

$$\frac{20}{X} = \frac{2^2 \times 5}{X} \quad \frac{12}{X} = \frac{2^2 \times 3}{X}$$

در صورت کسر اول فقط عوامل  $2$  و  $5$  و در صورت کسر دوم فقط عوامل  $2$  و  $3$  داریم. با توجه به این که هر دو کسر باید عددی صحیح شوند  $X$  فقط می‌تواند عامل





۸۴- گزینه ۱ همان طور که گفتیم:  $x \mid a \Rightarrow x \mid (a, b)$   
 $x \mid b$

بنابراین:  $x \mid ۷۲ \Rightarrow x \mid (۷۲, ۸۴)$   
 $x \mid ۸۴$

$(۷۲, ۸۴) = (۲^۳ \times ۳^۲, ۲^۲ \times ۳ \times ۷) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲ \Rightarrow x \mid ۱۲$   
 تنها عدد دورقمی که ۱۲ را می شمارد خود عدد ۱۲ است.

۸۵- گزینه ۴ دیدیم که:  $a \mid x \Rightarrow [a, b] \mid x$   
 $b \mid x$

بنابراین:  $۱۵ \mid x \Rightarrow [۱۵, ۵۰] \mid x \Rightarrow [۳ \times ۵, ۲ \times ۵^۲] \mid x$   
 $۵۰ \mid x$

$\Rightarrow ۲ \times ۳ \times ۵^۲ \mid x \Rightarrow ۱۵۰ \mid x$   
 پس  $x$  مضرب  $۱۵۰$  است. مضارب  $۳$  رقمی  $۱۵۰$  را پیدا می کنیم:  $[\frac{۹۹۹}{۱۵۰}] = ۶$

۸۶- گزینه ۴ ابتدا  $(۵۴, ۹۰)$  را به دست می آوریم:  
 $(۵۴, ۹۰) = (۲ \times ۳^۳, ۲ \times ۳^۲ \times ۵) = ۲ \times ۳^۲ = ۱۸$

حالا با توجه به این که  $x \mid ۵۴$  و  $x \mid ۹۰$ ،  $x$  نیز یک مقسوم علیه مشترک دو عدد  $۵۴$  و  $۹۰$  است.

با توجه به این که:  $x \mid a \Rightarrow x \mid (a, b)$   
 $x \mid b$

بنابراین:  $x \mid ۵۴ \Rightarrow x \mid ۱۸$   
 $x \mid ۹۰$

پس  $x$  یک مقسوم علیه طبیعی  $۱۸$  است که خود  $۱۸$  نیز نیست. مقادیر قابل قبول برای  $x$  عبارت اند از:  $x = ۱, ۲, ۳, ۶, ۹$

۸۷- گزینه ۱ می دانیم  $۶ \mid ۶^۳ - ۶$  بنابراین  $۶^۳ = [-۶, ۶^۳]$  حالا باید ب.م.م دو عدد  $۲^۹$  و  $۶^۳$  را پیدا کنیم:

$(۲^۳ \times ۳^۳, ۲^۹) = ۲^۳$   
 مشخص است که بزرگ ترین عددی که هم  $۲^۹$  بر آن بخش پذیر باشد، و هم  $۲^۳ \times ۳^۳$  عدد  $۲^۳$  است.

۸۸- گزینه ۳ می دانیم که:  $a \mid b \Rightarrow (a, b) = |a|$   
 $[a, b] = |b|$

بنابراین: چون  $m$  طبیعی است.  $m^۳ \mid m^۷ \Rightarrow (m^۳, m^۷) = |m^۳| = m^۳$   
 $m^۳ \mid m^۵ \Rightarrow [m^۳, m^۵] = m^۵$

$m^۳ \mid m^۵ \Rightarrow [m^۳, m^۵] = m^۵$

۸۹- گزینه ۴ می دانیم که:  $a \mid b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$

از طرف دیگر می بینیم  $d$  یا ب.م.م دو عدد  $a$  و  $b$ ، هر دو را می شمارد، یعنی  $d \mid a$  و  $d \mid b$ . هم چنین ک.م.م دو عدد یا  $[a, b]$  بر هر دو عدد بخش پذیر است. یعنی:

$a \mid [a, b] \quad b \mid [a, b]$   
 $d \mid a \Rightarrow d \mid a^۲ \Rightarrow [d, a^۲] = |a^۲| = a^۲$   
 داریم:

$a \mid [a, b] \Rightarrow ([a, b], a) = |a| \Rightarrow (a^۲, |a|) = |a|$

$۲$  داشته باشد (مثلاً اگر  $x$  عامل  $۵$  هم داشته باشد، کسر دوم ساده نمی شود). مشخص است بزرگ ترین عددی که هر دو کسر به ازای آن عددی صحیح می شود عدد  $۴$  است و مقادیر دیگر  $x$  عددهای  $۱$  و  $۲$  است. یعنی  $x$  سه مقدار طبیعی می تواند داشته باشد که بزرگ ترین آن عدد  $۴$  است.

۸۱- گزینه ۱ ب.م.م دو عدد را  $d$  می نامیم، داریم:  
 $(۸n + ۶, ۴n + ۱) = d$

$d \mid ۴n + ۱ \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۸n + ۲ \Rightarrow d \mid ۴ \Rightarrow d = ۱, ۲, ۴$   
 $d \mid ۸n + ۶ \quad d \mid ۸n + ۶$

اما مقادیر  $۲$  و  $۴$  برای  $d$  قابل قبول نیستند! چرا که  $۴n + ۱$  عددی فرد است و عدد فرد نمی تواند بر  $۲$  یا  $۴$  بخش پذیر باشد.

۸۲- گزینه ۳  $[a, ۴] = ۱۲$  است یعنی  $۱۲$  از یک طرف مضرب  $a$  است. (یا به بیان دیگر  $a$  مقسوم علیه  $۱۲$  است) و از طرف دیگر  $a$  باید طوری باشد که کوچک ترین مضرب مشترک  $a$  و  $۱۲$  عدد  $۴$  باشد.

می دانیم:  $a \mid ۱۲ \xrightarrow{a < ۱۲} a = ۱, ۲, ۳, ۴, ۶$   
 ک.م.م تک تک این عددها را با  $۴$  پیدا می کنیم:

$[۱, ۴] = ۴ \quad [۳, ۴] = ۱۲ \quad [۶, ۴] = ۱۲$   
 $[۲, ۴] = ۴ \quad [۴, ۴] = ۴$

پس  $a$  برابر  $۳$  یا  $۶$  است و با همین استدلال  $b$  آن یکی است، یعنی اگر  $a = ۳$ ، آن گاه  $b = ۶$  و اگر  $a = ۶$  باشد،  $b = ۳$  است. پس  $a + b$  در هر حالت برابر  $۹$  است.

۸۳- گزینه ۳ گزینه ها را یکی یکی بررسی می کنیم:  
 $(۲n + ۱, ۲n - ۱) = d$

$d \mid ۲n - ۱ \xrightarrow{(-)} d \mid ۲ \Rightarrow d = ۱, ۲$   
 $d \mid ۲n + ۱$

اما  $d = ۲$  قابل قبول نیست. زیرا هر دو عدد  $۲n - ۱$  و  $۲n + ۱$  فردند و نمی توانند بر  $۲$  بخش پذیر باشند، پس  $d = ۱$ .

۲  $(۲n + ۱, ۴n + ۱) = d$   
 $d \mid ۲n + ۱ \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۴n + ۲ \xrightarrow{(-)} d \mid ۱ \Rightarrow d = ۱$   
 $d \mid ۴n + ۱ \quad d \mid ۴n + ۱$

۳  $(۲n + ۱, ۵n + ۱) = d$   
 $d \mid ۲n + ۱ \xrightarrow{\times ۵} d \mid ۱۰n + ۵ \xrightarrow{(-)} d \mid ۳ \Rightarrow d = ۱, ۳$   
 $d \mid ۵n + ۱ \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۱۰n + ۲$

که هر دو حالت قابل قبول است. برای مثال اگر  $n = ۱$  باشد:  $(۳, ۶) = ۳$   
 پس  $۲n + ۱$  ممکن است نسبت به  $۵n + ۱$  اول نباشد. برای محکم کاری (۴)

۴  $(۲n + ۱, ۶n + ۱) = d$   
 $d \mid ۲n + ۱ \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۶n + ۳ \Rightarrow d \mid ۲ \Rightarrow d = ۱, ۲$   
 $d \mid ۶n + ۱ \quad d \mid ۶n + ۱$

مشابه آن چه در (۱) گفته شد  $d = ۲$  قابل قبول نیست.

۹۰- **کزیته ۳** **راه اول** باید بررسی کنیم عددی که فرد است ولی مضرب ۳ نیست به چه فرمی است. عددی که مضرب ۳ نیست یعنی یا به صورت  $3k+1$  است یا به صورت  $3k+2$ . اما از کجا معلوم این‌ها فرزند؟ در عددهایی به فرم  $3k+1$  اگر  $k$  زوج باشد عدد فرد و اگر  $k$  فرد باشد عدد زوج می‌شود. نگاه کنید:

فرد است.  $k \Rightarrow k=2q \Rightarrow 3k+1=3(2q)+1=6q+1$   
زوج است.  $k \Rightarrow k=2q+1 \Rightarrow 3k+1=3(2q+1)+1=6q+4$   
پس عدد ما می‌تواند به فرم  $6q+1$  باشد.

حالا برویم سراغ عددهایی به فرم  $3k+2$ . این‌جا اگر  $k$  زوج باشد،  $3k+2$  زوج و اگر  $k$  فرد باشد،  $3k+2$  فرد است:

$k \Rightarrow k=2q \Rightarrow 3k+2=6q+2$   
 $k \Rightarrow k=2q+1 \Rightarrow 3k+2=3(2q+1)+2=6q+5$   
پس عددهای ما یا به فرم  $6q+1$  اند یا به فرم  $6q+5$ . حالا باید ببینیم چند عدد این فرمی در فاصله خواسته شده وجود دارد:

$$6q+1 < 50 \Rightarrow 6q < 49 \Rightarrow q < 8 \frac{1}{6} \Rightarrow q = 0, 1, 2, \dots, 8$$

نه عدد

$$6q+5 < 50 \Rightarrow 6q < 45 \Rightarrow q < 7 \frac{5}{6} \Rightarrow q = 0, 1, 2, \dots, 7$$

هشت عدد

بنابراین در کل به ازای  $17 = 9 + 8$  عدد رابطه برقرار است.

**راه دوم** اول کل عددهای فرد را حساب می‌کنیم.

$$2k+1 < 50 \Rightarrow 2k < 49 \Rightarrow k < 24 \frac{5}{2} \Rightarrow k = 0, 2, \dots, 24$$

۲۵ عدد فرد در این فاصله داریم. حالا پیدا می‌کنیم چندتا از این عددهای فرد مضرب ۳ هم هستند (یعنی هم فرزند هم مضرب ۳، پس فرم کلی آن‌ها به صورت  $3(2q+1)$  خواهد بود).

$$6q+3 < 50 \Rightarrow 6q < 47 \Rightarrow q < 7 \frac{7}{6} \Rightarrow q = 0, 1, 2, \dots, 7$$

بنابراین هشت‌تا از عددها مضرب ۳ هستند.

۹۱- **کزیته ۲** می‌دانیم اگر  $(a, b) = d$  باشد  $d|a$  و  $d|b$ .

بنابراین با توجه به  $(a, 6) = 3$  می‌توان نتیجه گرفت:  $3|a \Rightarrow a = 3k$   
اما  $k$  نمی‌تواند زوج باشد، زیرا اگر  $k$  زوج باشد  $a$  مضرب ۶ می‌شود و در نتیجه  $(a, 6) = 6$  می‌شود. پس  $k$  باید فرد باشد:

$$k = 2q+1 \Rightarrow a = 3(2q+1) = 6q+3$$

$$\Rightarrow 3a+2 = 3(6q+3)+2 = 18q+11 = 9(2q+1)+2$$

پس باقی‌مانده  $3a+2$  بر ۹ برابر ۲ است.

۹۲- **کزیته ۴** ب.م.م دو عدد را  $d$  فرض می‌کنیم. داریم:

$$d | 11n+4 \xrightarrow{\times 25} d | 275n+100 \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d=1$$

$$d | 25n+9 \xrightarrow{\times 11} d | 275n+99$$

یعنی به ازای همه مقادیر  $n$  دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند. خوب چند عدد دورقمی داریم؟ درست است، ۹ تا!

۹۳- **کزیته ۱** می‌دانیم  $(a, b) = d$  باشد،  $d|a$  و  $d|b$ . داریم:

$$(5n-2, 12n+7) = d$$

$$\begin{cases} d | 5n-2 \xrightarrow{\times 12} d | 60n-24 \\ d | 12n+7 \xrightarrow{\times 5} d | 60n+35 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d | 59 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 59$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند ب.م.شان ۵۹ است.

۹۴- **کزیته ۱** ب.م.م دو عدد را  $d$  می‌نامیم، داریم:

$$(7n+5, 11n+2) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d | 11n+2 \xrightarrow{\times 7} d | 77n+14 \\ d | 7n+5 \xrightarrow{\times 11} d | 77n+55 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d | 41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 41$$

پس ب.م.م دو عدد یا ۱ است و یا ۴۱ و بنابراین هیچ‌وقت نمی‌تواند ۳ باشد.

۹۵- **کزیته ۳** می‌دانیم  $15a+3$  و  $15a-12$  هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند.

پس عدد ۳ یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است. یعنی  $d$  یک عامل ۳ دارد.

$$(15a-12, 15a+3) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 15a-12 \\ d | 15a+3 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d | 15$$

چون  $d$  از یک طرف مضرب است و از طرف دیگر ۱۵ را می‌شمارد، پس ۱۵ یا ۳ یا  $d = 15$  اما  $d = 15$  نیز نمی‌تواند باشد، چون برای مثال عدد  $15a+3$  در تقسیم به ۱۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد و نمی‌تواند بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد. بنابراین ب.م.م این دو عدد همواره برابر ۳ است.

**توجه** با یک مثال هم می‌شد فهمید!

$$a = 1 \Rightarrow (15a+3, 15a-12) = (18, 3) = 3$$

۹۶- **کزیته ۱** ب.م.م دو عدد را  $d$  می‌نامیم. داریم:

$$(13!+5, 14!-8) = d$$

$$d | 13!+5 \xrightarrow{\times 14} d | 14!+70$$

$$d | 14!-8 \quad d | 14!-8$$

$$d = 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78$$

$$78 = 2 \times 3 \times 13$$

می‌دانیم در تجزیه  $13!$  همه این عوامل وجود دارد. بنابراین  $13!+5$  نمی‌تواند بر هیچ‌کدام از عددهای ۲، ۳، ۶، ۱۳، ۲۶، ۳۹، ۷۸ بخش‌پذیر باشد، بنابراین  $d = 1$  است.

۹۷- **کزیته ۱** دیدیم که در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$

عددهای یکتای  $r$  و  $q$  یافت می‌شوند به طوری که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ . با توجه به این توضیح در این سؤال  $q$  و  $r$  به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده

$$q = \left\lfloor \frac{-107}{7} \right\rfloor = \lfloor -15 \frac{2}{7} \rfloor = -16$$

تقسیم  $-107$  بر ۷ است:

$$r = a - bq = -107 - 7 \times (-16) = -107 + 112 = 5$$

$$\Rightarrow r - q = 5 - (-16) = 21$$

۹۸- **کزیته ۱**  $a = 63q + 17 \Rightarrow a + 60 = 63q + 77$

می‌دانیم در تقسیم یک عدد بر ۶۳ باقی‌مانده باید کم‌تر از ۶۳ باشد. بنابراین:

$$a + 60 = 63q + 63 + 14 = 63(q+1) + 14$$

باقی‌مانده جدید ۱۴ است که نسبت به باقی‌مانده قبلی ۳ واحد کم شده و خارج‌قسمت جدید  $q+1$  است که نسبت به خارج‌قسمت قبلی یکی زیاد شده است.

۹۹- **کزیته ۳**  $a = 23q + r, 0 \leq r < 23$

$$a + 41 = 23q + r + 41$$

چون باقی‌مانده صفر است پس  $r + 41$  باید بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد. از طرفی  $0 \leq r < 23 \Rightarrow 41 \leq r + 41 < 64$ .

تنها مضرب ۲۳ در این فاصله عدد ۴۶ است. پس:

$$r + 41 = 46 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow a + 41 = 23q + 46 = 23(q+2)$$



۱۰۵- **گزینه ۴** برای پیدا کردن خارج قسمت  $a$  بر  $b$  کافی است  $\left[\frac{a}{b}\right]$  را به دست آوریم. داریم:

$$\left[\frac{20! - 21}{20}\right] = \left[\frac{20 \times 19 \times \dots \times 1}{20} - \frac{21}{20}\right] = [19! - 1/0.5]$$

$$= [19!] + [-1/0.5] = 19! - 2$$

۱۰۶- **گزینه ۱** می دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :  
 $a = bq + r, 0 \leq r < b$

داریم:

$$a = 35q + r, 0 \leq r < 35$$

$$\frac{a}{35} \Rightarrow a = 35q + r, 0 \leq r < 35$$

$$\Rightarrow a = 40q \Rightarrow q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

به ازای  $q = 0$  عدد طبیعی نمی شود و به ازای  $q = 5$  و  $q = 6$  عدد بزرگ تر مساوی  $200$  خواهد شد. بنابراین مقادیر قابل قبول برای  $q$  عبارتند از:  $1, 2, 3, 4$ .

۱۰۷- **گزینه ۳**  $a$  و  $b$  عددهایی متمایز و مثبت اند.

$$\frac{a}{23} \Rightarrow a = 23q + r, 0 \leq r < 23 \Rightarrow q = 1, 2$$

$$\frac{b}{23} \Rightarrow b = 23q' + r', 0 \leq r' < 23 \Rightarrow q' = 1, 2$$

چون قرار است  $a$  و  $b$  متمایز باشند، پس یا  $q = 1$  است و  $q' = 2$  و یا  $q = 2$  و  $q' = 1$ . هر دو حالت را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} q = 1 \Rightarrow a = 25 \\ q' = 2 \Rightarrow b = 62 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 50 + 62 = 112$$

$$\begin{cases} q = 2 \Rightarrow a = 62 \\ q' = 1 \Rightarrow b = 25 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 149$$

۱۰۸- **گزینه ۴** می دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :  
 $a = bq + r, 0 \leq r < b$

داریم:

$$\frac{a}{37} \Rightarrow a = 37q + r, 0 \leq r < 37$$

$$q^2 - 2 \Rightarrow a = 37q + q^2 - 2, 0 \leq q^2 - 2 < 37$$

$$\Rightarrow 2 \leq q^2 < 39 \Rightarrow q = 2, 3, 4, 5, 6$$

بیشترین مقدار  $q$  عدد  $6$  است، بنابراین:  $a = 37 \times 6 + 36 - 2 = 256$  که مضرب  $16$  است.

۱۰۹- **گزینه ۳** می دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :  
 $a = bq + r, 0 \leq r < b$

در این جا:

$$\frac{a}{47} \Rightarrow a = 47q + r, 0 \leq r < 47 \Rightarrow q = 0, 1, 2, \dots, 6$$

چون بزرگ ترین عدد را می خواهیم  $q$  را برابر  $6$  فرض می کنیم:  
 $a = 47 \times 6 + 36 = 318$   
مجموع ارقام  $= 3 + 1 + 8 = 12$

همان طور که دیده می شود خارج قسمت تقسیم،  $2$  واحد زیاد می شود.

۱۰۰- **گزینه ۲** باقی مانده  $a$  بر  $17$  برابر  $5$  است. یعنی  $a = 17q + 5$

داریم:

$$3a + 4 = 3(17q + 5) + 4 = 51q + 19$$

$$51q \text{ بر } 17 \text{ بخش پذیر است. پس باقی مانده آن بر } 17 \text{ برابر صفر است. فقط کافی است باقی مانده } 19 \text{ را بر } 17 \text{ پیدا کنیم:}$$

$$\frac{19}{17} = 1 \frac{2}{17}$$

۱۰۱- **گزینه ۴** عبارت خواسته شده را می سازیم:

$$5x - 3y = 5(12k + 3) - 3(12k' + 11) = 65k + 15 - 39k' - 33 = 65k - 39k' - 18 = 65k - 39k' - 26 + 8 = 13(5k - 3k' - 2) + 8$$

پس باقی مانده  $5x - 3y$  بر  $13$  برابر  $8$  است.

دقت کنید از رابطه  $5x - 3y = 65k - 39k' - 18$  نیز می شد باقی مانده  $5x - 3y$  بر  $13$  حساب کرد.  $65$  و  $39$  که بر  $13$  بخش پذیرند پس  $65k - 39k'$  نیز بر  $13$  بخش پذیرند و باقی مانده آن ها در تقسیم بر  $13$  برابر صفر است. می ماند پیدا کردن باقی مانده  $-18$  بر  $13$ .

از راه سومی که برای پیدا کردن باقی مانده عددهای منفی گفتیم، باقی مانده را پیدا می کنیم:

$$\frac{-18}{13} = -1 \frac{5}{13} \Rightarrow 13 - 5 = 8$$

۱۰۲- **گزینه ۲**  $\frac{a}{10} \Rightarrow a = 10q + r, 0 \leq r < 10$

$$\frac{a + 100}{11} \Rightarrow a + 100 = 11q' + r', 0 \leq r' < 11$$

$$\xrightarrow{(-)} 100 = b(q - q') + 1 \Rightarrow 99 = b(q - q')$$

با توجه به این که  $b > 11$  است، پس تنها حالت قابل قبول برای  $b$  عددهای  $33$  و  $99$  است که کمترین مقدار  $b$  عدد  $33$  است.

۱۰۳- **گزینه ۳**

$$a - 1 = 6k \xrightarrow{\text{دورابطه را در هم ضرب می کنیم.}} a^2 - 1 = 48kk'$$

$$a + 1 = 8k'$$

$$\Rightarrow a^2 = 48kk' + 1 \Rightarrow a^2 - 2 = 48kk' - 1$$

باید باقی مانده  $a^2 - 1$  بر  $48kk'$  را بر  $24$  پیدا کنیم.  $48kk'$  که بر  $24$  بخش پذیر است و باقی مانده ای بر  $24$  ندارد. پس فقط کافی است باقی مانده  $-1$  را بر  $24$  پیدا کنیم. از روش سوم پیدا کردن باقی مانده در عددهای منفی استفاده می کنیم:

$$\frac{-1}{24} = 0 \frac{23}{24} \Rightarrow 24 - 1 = 23$$

راه دیگر:

$$48kk' - 1 = 48kk' - 24 + 24 - 1 = 24(2kk' - 1) + 23 = 24q + 23$$

۱۰۴- **گزینه ۴** می دانیم خارج قسمت تقسیم  $a$  بر  $b$  برابر است با:  $\left[\frac{a}{b}\right]$ .

بنابراین:

$$a = 15k + 4 \Rightarrow 8a - 71 = 8(15k + 4) - 71 = 120k - 39$$

$$\left[\frac{120k - 39}{20}\right] = [6k - 1/95] = [6k] + [-1/95] = 6k - 2$$

**۱۱۰- گزینه ۲**

 می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

$$137 \mid b \quad \text{داریم:}$$

$$\underline{\quad} q \Rightarrow 137 = bq + 16, 16 < b$$

$$16$$

$$\Rightarrow 121 = bq \Rightarrow b \mid 121 \Rightarrow b = 1, 11, 121$$

 اما با توجه به شرط رابطه تقسیم فقط  $b = 121$  قابل قبول است.

**۱۱۱- گزینه ۲**

 می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

داریم:

 چون باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد، پس  $r = b - 1$ ؛ بنابراین:

$$a = bq + b - 1 \Rightarrow a + 1 = b(q + 1) \Rightarrow b \mid a + 1$$

$$b \mid a + 1 \xrightarrow{(+)} b \mid 2 \Rightarrow b = 1, 2 \quad \text{بنابراین: } b \mid a - 1$$

 $b > 1$  است، پس  $b = 2$  قابل قبول است.

 $a + 1$  و  $a - 1$  بر ۲ بخش پذیرند، پس هر دو زوج‌اند و  $a$  فرد است، در نتیجه  $a^2$  نیز فرد است و باقی‌مانده آن در تقسیم به ۲ برابر ۱ است.

**۱۱۲- گزینه ۲**

 می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

داریم:

$$171 \mid b$$

در این جا:

$$\underline{\quad} 9 \Rightarrow 171 = 9b + r, 0 \leq r < b$$

$$r$$

از شرط باقی‌مانده استفاده می‌کنیم:

$$r \geq 0 \Rightarrow 171 - 9b \geq 0 \Rightarrow 9b \leq 171 \Rightarrow b \leq 19$$

$$r < b \Rightarrow 171 - 9b < b \Rightarrow 10b > 171$$

$$\Rightarrow b > 17/1 \Rightarrow b = 18, 19$$

 پس به ازای دو مقدار  $b$ ، رابطه برقرار است.

**۱۱۳- گزینه ۲**

 می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ :

$$a \mid b \quad \text{داریم:}$$

$$\underline{\quad} q \Rightarrow a = bq + 34, 34 < b$$

$$34$$

 کم‌ترین مقدار  $b$ ، عدد ۳۵ است.

$$a = 35q + 34$$

 با توجه به این‌که  $q$  عددی طبیعی است، اگر  $q = 1$  باشد،  $a = 69$  است و اگر  $q > 1$  باشد،  $a$  عددی بزرگ‌تر از ۷۰ خواهد شد، پس فقط به ازای یک مقدار  $a$ ، رابطه برقرار است.

**۱۱۴- گزینه ۳**

در تقسیم به ۱۲، عددها را به شکل زیر می‌توان

دسته‌بندی کرد:

۱۲k	زوج	۱۲k + ۶	هم زوج هم مضرب ۳
۱۲k + ۱	✓	۱۲k + ۷	✓
۱۲k + ۲	زوج	۱۲k + ۸	زوج
۱۲k + ۳	مضرب ۳	۱۲k + ۹	مضرب ۳
۱۲k + ۴	زوج	۱۲k + ۱۰	زوج
۱۲k + ۵	✓	۱۲k + ۱۱	✓

همان‌طور که می‌بینید در چهار حالت، عبارت داده‌شده نه مضرب ۲ است و نه مضرب ۳ و در نتیجه باقی‌مانده به ۱۲، چهار حالت ۱، ۵، ۷ و ۱۱ را می‌تواند داشته باشد.

**۱۱۵- گزینه ۴**

اول از همه این‌که می‌دانیم مربع هر عدد فرد در تقسیم

 به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. اگر  $a$  فرد باشد  $a^2$  نیز فرد است،  $a^2 + 4$  نیز فرد

 است.  $b$  عددی است که  $a^2 + 4$  که عددی فرد است را می‌شمارد. پس  $b$  نیز

 فرد است.  $a^2, b^2$  و  $a^2 b^2$  هر سه مربع‌های عددهای فردند که در تقسیم به ۸

 باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند. پس باقی‌مانده  $a^2 b^2 + a^2 + b^2$  بر ۸ برابر است با ۳.

$$a^2 + b^2 + a^2 b^2 = a^2 + b^2 + (ab)^2 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 8k'' + 1$$

$$= 8(k + k' + k'') + 3$$

**۱۱۶- گزینه ۱**

می‌دانیم مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸

 باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. با توجه به این‌که  $1^2, 3^2, 5^2, \dots, 97^2$  همگی عددهای

فردند، باقی‌مانده همه آن‌ها در تقسیم به ۸ برابر ۱ است. کافی است تعداد این

عددها را به دست آوریم:

تشکیل یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۴ می‌دهند که جمله اول آن عدد ۱

 و جمله  $n$  آن  $a_n = a_1 + (n-1)d$  است. با توجه به این‌که  $a_n = a_1 + (n-1)d$  داریم:

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 97 \Rightarrow 4(n-1) = 96 \Rightarrow n = 25$$

تک‌تک این ۲۵ عدد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند. پس:

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{25} = 25$$

و باقی‌مانده ۲۵ در تقسیم به ۸ برابر ۱ است.

**۱۱۷- گزینه ۲**

 دو عدد متوالی را  $k$  و  $k+1$  می‌نامیم. داریم:

$$(k+1)^2 - k^2 = 3k^2 + 3k + 1 = 3k(k+1) + 1$$

 چون  $k+1$  و  $k$  دو عدد متوالی‌اند پس حاصل ضرب آن‌ها زوج‌اند. یعنی به جای

$$(k+1)^2 - k^2 = 6q + 1$$

یعنی اختلاف مکعب‌های دو عدد متوالی در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱

دارد. باقی‌مانده گزینه‌ها را در تقسیم به ۶ پیدا می‌کنیم:

۳۲۹	۳۳۱	۳۳۴	۳۳۷
۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
۵۴	۵۵	۵۵	۵۶
۲۹	۳۱	۳۴	۳۷
۲۴	۳۰	۳۰	۳۶
۵	۱	۴	۱

**۱ و ۳** حذف می‌شوند اما از میان **۲ و ۴** باید بررسی کنیم کدام

 می‌تواند به فرم  $3k(k+1) + 1$  باشد. داریم:

$$3k(k+1) + 1 = 331 \Rightarrow k(k+1) = 110 \Rightarrow k = 10 \quad \checkmark$$

$$3k(k+1) + 1 = 337 \Rightarrow k(k+1) = 112 \quad \times$$

هیچ دو عدد پشت‌سرهمی وجود ندارد که حاصل ضربشان برابر ۱۱۲ شود.

**۱۱۸- گزینه ۱**

 می‌دانیم در تقسیم عدد  $k$  بر عدد ۵، پنج نوع

 باقی‌مانده مختلف وجود دارد. در هر ۵ حالت، باقی‌مانده  $k^2 + 1$  را بر ۵ به

$$k = 5q \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 1 \Rightarrow$$

دست می‌آوریم:

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$$k = 5q + 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 10q + 2 \Rightarrow$$

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

$$k = 5q + 2 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 \Rightarrow$$

مضرب ۵ است.

$$k = 5q + 3 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 \Rightarrow$$

مضرب ۵ است.

$$k = 5q + 4 \Rightarrow k^2 + 1 = 25q^2 + 40q + 17 \Rightarrow$$

در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

 بنابراین باقی‌مانده  $k^2 + 1$  در تقسیم به ۵ هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر ۳ و ۴ باشد.

۱۱۹- گزینه ۴

می دانیم مربع هر عدد فرد را می توان به صورت  $8q + 1$  نمایش داد. داریم:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \Rightarrow a^4 - b^4 = (8q + 1 - 8q' + 1)(8q + 1 + 8q' + 1) = (8(q - q') + 2)(8(q + q') + 2) = [8(q - q')]^2(4q + 4q' + 1) = 16(q - q')(4q + 4q' + 1)$$

پس عبارت، همواره بر ۱۶ بخش پذیر است.

۱۲۰- گزینه ۳

می دانیم  $27 = 3^3$  و  $9 = 3^2$ . داریم:

$$27^m | 9^n \Rightarrow 3^{3m} | 3^{2n}$$

این رابطه زمانی برقرار است که  $3m \leq 2n$  یا  $\frac{3}{2}m \leq n$  باشد. (اگر درست نمی فهمید به کسر معادل این رابطه فکر کنید.  $\frac{3^{2n}}{3^{3m}}$  باید عددی صحیح باشد، چه زمانی این اتفاق رخ می دهد؟ وقتی توان ۳ صورت بزرگ تر یا معادل توان ۳ مخرج باشد.) حالا برویم سراغ ساده کردن رابطه  $64^m | a^n$ . داریم:

$64^m | a^n \Rightarrow 2^{6m} | a^n$

اگر کسر معادل این رابطه یعنی  $\frac{a^n}{2^{6m}}$  را در نظر بگیریم، مشخص است که در مخرج یک عالمه ۲ داریم. بنابراین  $a$  حتماً باید ۲ یا توانی از ۲ باشد. هم چنین می دانیم کمترین مقدار  $a$  خواسته شده، اما اگر  $a = 2$  باشد به کسر  $\frac{2^n}{2^{6m}}$  می رسیم که همیشه برقرار نیست، چون داشتیم  $\frac{3m}{2} \leq n$  ولی این جا باید  $n \geq 6m$  باشد.

برای آن که به رابطه  $\frac{3m}{2} \leq n$  برسیم  $a$  دست کم باید ۱۶ باشد. در این صورت داریم:

$$64^m | 16^n$$

که اگر آن را ساده کنیم:  $2^{6m} | 2^{4n} \Rightarrow 6m \leq 4n \Rightarrow \frac{3m}{2} \leq n$  پس کمترین مقدار  $a$  عدد ۱۶ است که مجموع ارقام آن  $1+6=7$  است.

۱۲۱- گزینه ۱

$n+3$  باید بر ۵ و  $n^2+2n$  باید بر ۱۰ بخش پذیر باشند داریم:

$$5 | n+3 \Rightarrow n+3 \equiv 0 \Rightarrow n \equiv -3 \equiv 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 8 \\ 2n \equiv 4 \end{cases} \Rightarrow n^2 + 2n \equiv 2$$

واضح است عددی که در تقسیم به ۵ باقی مانده ای برابر دو دارد نمی تواند بر ۱۰ بخش پذیر باشد بنابراین رابطه به ازای هیچ عدد صحیحی برقرار نیست.

۱۲۲- گزینه ۴

اگر بخواهیم کسر عددی صحیح باشد باید  $5x^2 + 1 | 2x + 1$  ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داده صورت کسر را پیدا می کنیم:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = -\frac{1}{4} + 5 = \frac{39}{4}$$

پس  $39 | 2x + 1$  چون بزرگترین مقدار  $x$  خواسته شده است.

$$2x + 1 = 39 \Rightarrow x = 19 \Rightarrow \text{کسر} = \frac{19^2 + 5}{39} = 176$$

۱۲۳- گزینه ۴

رابطه  $6^n | n^2$  را به کسر تبدیل می کنیم. کسر  $\frac{6^n}{n^2}$  باید عددی صحیح باشد.

$$\frac{6^n}{n^2} = \frac{2^n \times 3^n}{n^2}$$

در صورت کسر فقط عوامل ۲ و ۳ وجود دارد. بنابراین عددهایی که به جز این دو عامل را داشته باشند نمی توان در مخرج قرار داد. برای مثال رابطه به ازای  $n = 10$  برقرار نیست. چون در تجزیه ۱۰ عامل ۵ وجود دارد و این ۵ با صورت ساده نمی شود. حالا در میان عددهای طبیعی دورقمی آن هایی را که فقط عوامل ۲ و ۳ در تجزیه شان دارند پیدا می کنیم:

{۱۲, ۱۶, ۱۸, ۲۴, ۲۷, ۳۲, ۳۶, ۴۸, ۵۴, ۶۴, ۷۲, ۸۱, ۹۶}

۱۲۴- گزینه ۲

می دانیم:

$$7 | 7x \quad 7 | 3x + 2y$$

اگر بخواهیم در سمت راست رابطه یک  $x$  باقی بماند، می توانیم رابطه پایینی را در ۲ ضرب کنیم و رابطه ها را از هم کم کنیم:

$$\begin{array}{r} 7 | 7x \\ 7 | 6x + 4y \end{array} \xrightarrow{(-)} 7 | x - 4y$$

خب  $m$  می تواند ۴- باشد اما ۴- در گزینه ها نیست. بنابراین:

$$\begin{array}{r} 7 | x - 4y \\ 7 | 7y \end{array} \xrightarrow{(+)} 7 | x + 3y$$

حالا درست شد و  $m$  می تواند برابر ۳ باشد.

۱۲۵- گزینه ۲

$$\begin{cases} a-b | a-b \xrightarrow{\times(a+b)} a-b | a^2 - b^2 \\ a-b | a^2 + b^2 \quad a-b | a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(-)} a-b | 2b^2 \quad (I) \\ \xrightarrow{(+)} a-b | 2a^2 \quad (II) \end{array}$$

پس ۱) درست است.

$$a-b | a-b \xrightarrow{\times 2a} a-b | 2a^2 - 2ab$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به (II)}} a-b | 2a^2 \Rightarrow a-b | 2ab \quad (III)$$

پس ۲) نیز درست است.

$$a-b | a-b \xrightarrow{\times(a-b)} a-b | a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به (III)}} a-b | 2ab \xrightarrow{\times 2} a-b | 4ab$$

$$\xrightarrow{(+)} a-b | (a+b)^2$$

پس ۳) نیز درست است.

۴) اما نادرست است. اگر  $a = 5$  و  $b = 3$  باشد،  $5 - 3 | 5^2 + 3^2$  اما  $5 - 3 \nmid 3^2$ .

۱۲۶- گزینه ۱

اگر  $x$  زوج باشد  $x^2 + 1$  فرد است و اگر  $x$  فرد باشد  $5x + 2$  فرد است. با توجه به این که  $2^x$  عددی است که فقط و فقط در تجزیه اش عوامل ۲ دارد نمی تواند بر عددی فرد بخش پذیر باشد مگر این که آن عدد فرد ۱ یا ۱- باشد.  $5x + 2$  که نمی تواند برابر ۱ یا ۱- باشد اما اگر  $x^2 + 1 = 1$  باشد،  $x = 0$  است که به ازای  $x = 0$  رابطه به صورت  $2 | 1$  درمی آید که باز نادرست است. پس این رابطه هیچ گاه برقرار نیست.

۱۲۷- گزینه ۴

سعی می کنیم  $14n^2 + 19n + 6$  را تجزیه کنیم. به طوری که یکی از عوامل آن  $2n + 1$  باشد. برای این کار  $14n^2 + 19n + 6$  را بر  $2n + 1$  تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} 14n^2 + 19n + 6 \quad | \quad 2n + 1 \\ -(14n^2 + 7n) \quad \quad \quad 7n + 6 \\ \hline 12n + 6 \\ -(12n + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

می‌دهد، اگر  $n = 1$  باشد، می‌شود  $2^3$  و  $2^2$  که توان کوچک‌تر  $2^2$  است اما اگر  $n \geq 2$  باشد توان کوچک‌تر  $2^3$  خواهد شد. بنابراین:

$$n = 1 \Rightarrow (2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^2) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

$$n \geq 2 \Rightarrow (2^2 \times 3^{2n}, 2^3 \times 3^2) = 2^2 \times 3^2 = 108$$

**۱۳۱- گزینه ۴** خوب است یک بار دیگر یادآوری کنیم: برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب می‌کنیم. اما برای پیدا کردن ک.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. یک نکته دیگر را هم در این سؤال یاد بگیریم: (اثباتش را بی‌خیال شوید، هر چند واقعاً سخت نیست.)

برای پیدا کردن مقدار مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را تجزیه کرده توان‌ها را با یک جمع کرده در هم ضرب کنیم:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

$$n \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی} = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

دیدیم که  $x \mid a \Rightarrow x \mid (a, b)$  ، بنابراین:

$$x \mid 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \Rightarrow x \mid 2^{\min\{3,p\}} \times 3^{\min\{4,p\}} \times 5^{\min\{2,p\}} \times 7^{\min\{2,p\}}$$

$$x \mid 2^5 \times 3^2 \times 5^p \times 11$$

می‌دانیم  $\min\{3, p\}$  یا ۳ است و یا  $p$ . اگر ۳ باشد، داریم:

$$\bullet \quad x \mid 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \Rightarrow x \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های} = 4 \times 3 \times 4 = 48$$

امکان‌پذیر نیست. پس  $\min\{3, p\} = p$  است. یعنی  $x \mid 2^3 \times 3^2 \times 5^p$  تعداد مقسوم‌علیه‌های  $x$  برابر است با:  $(3+1)(2+1)(p+1) = 12(p+1)$  اما می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۲۴ تا ۲۳ تا به جز یک که با عدد ۱ می‌شود (تا ۲۴). پس:  $12(p+1) = 24 \Rightarrow p+1 = 2 \Rightarrow p = 1$  حالا ک.م.م دو عدد را پیدا می‌کنیم:

$$A = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \Rightarrow [A, B] = 2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$$

$$B = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(5+1)(4+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 720$$

**۱۳۲- گزینه ۱** ب.م.م دو عدد را  $d$  می‌نامیم. در این صورت:

$$(9n-1, n+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n+2 \xrightarrow{\times 9} d \mid 9n+18 \\ d \mid 9n-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19$$

از آنجایی که ب.م.م عددی بزرگ‌تر از ۱ است، پس  $d = 19$  و دو عدد، بر ۱۹ بخش‌پذیرند:

$$\Rightarrow k > 5/3 \xrightarrow{k=6} n = 112 \Rightarrow 1+1+2=4$$

**۱۳۳- گزینه ۲** خارج‌قسمت تقسیم  $b$  بر  $a$  را  $q$  فرض می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} b \\ \underline{a} \\ q \Rightarrow b = \lambda q + 3 \end{array}$$

خارج‌قسمت  $a$  بر  $b$  را  $k$  فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{r} a \\ \underline{b} \\ k \Rightarrow a = bk + 1 \end{array}$$

$$\text{پس } (2n+1)(7n+6) = 14n^2 + 19n + 6$$

از طرفی:

$$\begin{array}{r} 5 \mid 2n+1 \\ \xrightarrow{(+)} 5 \mid 7n+6 \\ 5 \mid 5n+5 \end{array}$$

پس هر دو عدد  $2n+1$  و  $7n+6$  بر ۵ بخش‌پذیرند. بنابراین  $(7n+6)(2n+1)$  مضرب ۲۵ است.

**۱۳۸- گزینه ۲** اعضای مجموعه  $A$  به صورت زیر است:

$$A = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$$

می‌دانیم  $a \in A$  است. اگر  $a = 2$  باشد، داریم:  $2 \mid k^2 + 2$  روشن است اگر  $k$  زوج باشد، این رابطه برقرار است، پس برای  $a = 2$  می‌توان مقادیری برای  $k$  پیدا کرد که رابطه برقرار باشد.

اگر  $a = 4$  باشد، رابطه به صورت  $4 \mid k^2 + 2$  خواهد بود. مشخص است که اگر  $k$  فرد باشد،  $k^2 + 2$  نیز فرد است و رابطه برقرار نیست. اما اگر  $k$  زوج باشد، داریم:  $k = 2q \Rightarrow k^2 = 4q^2 \Rightarrow k^2 + 2 = 4q^2 + 2$

که این عبارت بر ۴ بخش‌پذیر نیست، چون در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که به ازای  $a = 8, a = 16, \dots$  نیز هیچ مقداری برای  $k$  وجود ندارد. پس فقط به ازای  $a = 2$  می‌توان مقادیری برای  $k$  پیدا کرد.

**۱۳۹- گزینه ۴** ب.م.م دو عدد را  $d$  فرض می‌کنیم، داریم:

$$(a-1, a^2+a+3) = d$$

$$d \mid a-1 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times (a+2)} d \mid a^2+a-2 \quad (I)$$

$$d \mid a^2+a+3 \quad (II)$$

با توجه به (I) و (II) داریم:

$$d \mid a^2+a-2 \xrightarrow{(-)} d \mid 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

$$d \mid a^2+a+3$$

چون دو عدد نسبت به هم اول‌اند پس  $d = 5$  نمی‌تواند باشد یعنی  $a-1$  نباید مضرب ۵ باشد. بنابراین:

$$a-1 \neq 5k \Rightarrow a \neq 5k+1$$

$$\bullet \quad 6 \mid a \Rightarrow a = 6k \text{ یعنی } (a, 24) = 6$$

اما می‌خواهیم بررسی کنیم  $a$  چند عامل ۲ و چند عامل ۳ دارد.  $a = 6k$  است اما اگر  $k$  زوج باشد، یعنی  $a$  دارای بیش از یک عامل ۲ باشد، آن‌گاه  $a$  بر ۱۲ هم بخش‌پذیر می‌شود در این صورت  $(a, 24) = 12$  می‌شود. پس  $a$  نمی‌تواند بیشتر از یک عامل ۲ داشته باشد و دقیقاً یک عامل ۲ دارد.

از طرفی با توجه به تساوی  $a = 6k$ ، می‌دانیم  $a$  دارای دست‌کم یک عامل ۳ است اما از آنجایی که ۱۲ نیز یک عامل ۳ دارد، اگر  $a$  بیش از یک عامل ۳ نیز داشته باشد (برای مثال  $a = 7$  باشد) باز هم ب.م.م آن با ۲۴ برابر ۶ می‌شود. پس می‌شود نتیجه گرفت  $a$  دست‌کم یک عامل ۳ دارد. یعنی اگر  $a = 2 \times 3^n \times \dots, n \geq 1$  داریم:

(توجه دارید که  $a$  ممکن است عوامل ۵، ۷ و ... نیز داشته باشد.)

حالا می‌خواهیم  $(a^2, 216)$  را پیدا کنیم. داریم:

$$(a^2, 216) = (2^2 \times 3^{2n} \times \dots, 2^3 \times 3^3)$$

با توجه به این‌که برای پیدا کردن ب.م.م دو یا چند عدد فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم، این‌جا این‌که  $n$  چه عددی باشد برای ما تعیین‌کننده است. در توان‌های ۲ که یکی  $2^2$  و دیگری  $2^3$  است توان کوچک‌تر یعنی  $2^2$  را در نظر می‌گیریم. اما در توان‌های ۳ دو حالت رخ



۴ (اگر  $q = 5$  باشد، عدد، چهاررقمی می‌شود) و  $r$  را برابر ۱۳ فرض کنیم، در این صورت:  
 $a = 200 \times 4 + 13^2 = 969$   
 که رقم دهگان آن ۶ است.

$$\begin{array}{r} A \quad | \quad 5 \\ \hline \quad \quad q \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \quad | \quad 7 \\ \hline \quad \quad q' \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \quad | \quad 11 \\ \hline \quad \quad q'' \\ \hline 8 \end{array} \quad \text{گزینه ۱}$$

$$\Rightarrow A = 5q + 2 \quad A = 7q' + 4 \quad A = 11q'' + 8$$

حالا باید یک‌جوری این سه تا رابطه را تبدیل به یک رابطه کنیم:  
 در فصل بعد که هم‌نهستی را بیاموزیم می‌بینیم که با نوشتن کلاس هم‌ارزی این مدل سؤال‌ها را راحت‌تر می‌شود حل کرد، اما چون در کتاب درسی این نوع سؤال‌ها در درس دوم یا بخش‌پذیری آمده است، خوب است یاد بگیریم این نوع سؤال‌ها را بدون هم‌نهستی چگونه می‌شود حل کرد. روش حل این مدل سؤال‌ها این‌طور است که باید یک عدد یکسانی پیدا کنیم که بر عددهای داده شده بخش‌پذیر باشد. برای مثال در این سؤال یعنی  $A - 2$  بر ۵ بخش‌پذیر است. اما در رابطه دوم که بر چیز خاصی بخش‌پذیر نیست و نتیجه به درد نمی‌خورد:

$$A = 5q + 2 \Rightarrow A - 2 = 5q$$

$$A = 7q' + 4 \Rightarrow A - 2 = 7q' + 2$$

پس چه کار کنیم. رابطه اول را یک بار دیگر نگاه کنید:

$$A = 5q + 2 \xrightarrow{+3} A + 3 = 5q + 5 = 5(q + 1)$$

این بار ۳ تا به  $A$  اضافه کردیم و دیدیم که  $A + 3$  بر ۵ بخش‌پذیر است. برای بقیه رابطه‌ها هم همین کار را بکنیم، ببینیم فایده‌ای دارد یا نه.

$$A = 7q' + 4 \Rightarrow A + 3 = 7q' + 7 = 7(q' + 1)$$

$$A = 11q'' + 8 \Rightarrow A + 3 = 11q'' + 11 = 11(q'' + 1)$$

خب! این به درد خورد. همان‌طور که می‌بینید  $A + 3$  بر هر سه عدد ۵، ۷ و ۱۱ بخش‌پذیر است. پس بر ک.م.م آن‌ها یعنی  $5 \times 7 \times 11 = 385$  نیز بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$A + 3 = 385k \Rightarrow A = 385k - 3$$

اگر بخواهیم  $A$  بزرگ‌ترین مقدار سه‌رقمی خود را داشته باشد کافی است  $k$  را برابر ۲ فرض کنیم (اگر  $k = 3$  باشد عدد سه‌رقمی می‌شود).

$$k = 2 \Rightarrow A = 767$$

حالا فقط کافی است باقی‌مانده ۷۶۷ را بر ۲۳ به دست آوریم:

$$\begin{array}{r} 767 \quad | \quad 23 \\ \hline 69 \quad 33 \\ \hline 69 \quad 33 \\ \hline 77 \\ \hline 69 \quad 33 \\ \hline 8 \end{array}$$

با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} A = 9q + 5 \xrightarrow{\times 7} 7A = 63q + 35 \\ A = 7q' + 6 \xrightarrow{\times 9} 9A = 63q' + 54 \\ \hline \rightarrow 2A = 63(q' - q) + 19 \end{cases} \quad \text{گزینه ۴}$$

پس باقی‌مانده ۲A بر ۶۳ برابر ۱۹ است که عددی اول است.

$$\left. \begin{array}{l} a \quad | \quad 30 \\ \hline \quad \quad q \Rightarrow a = 30q + 17 \xrightarrow{\times 4} 4a = 120q + 68 \\ \hline 17 \\ a \quad | \quad 12 \\ \hline \quad \quad q' \Rightarrow a = 12q' + 11 \xrightarrow{\times 5} 5a = 60q' + 55 \\ \hline 11 \\ \hline \rightarrow a = 60q' + 55 - 120q - 68 \Rightarrow a = 60(q' - 2q) - 13 \\ \hline = 60k - 60 + 47 = 60(k - 1) + 47 \end{array} \right\} \quad \text{گزینه ۴}$$

پس باقی‌مانده  $a$  بر ۶۰ برابر ۴۷ است.

$a$  مضرب ۸ است، آن را به صورت  $8m$  در نظر گرفته و  $b$  را از بالا جایگزین می‌کنیم:

$$8m = (8q + 3)k + 1 \Rightarrow 8m = 8kq + 3k + 1$$

$$\underline{8m - 8kq = 3k + 1}$$

مضرب ۸

$k$  باید طوری باشد که  $3k + 1$  مضرب ۸ باشد:

$$15 \times 3 + 1 = 46 \quad \times \text{ مضرب ۳ نیست.}$$

$$13 \times 3 + 1 = 40 \quad \checkmark \text{ مضرب ۸ است.}$$

$$11 \times 3 + 1 = 34 \quad \times \text{ مضرب ۸ نیست.}$$

$$9 \times 3 + 1 = 28 \quad \times \text{ مضرب ۸ نیست.}$$

۱۳۴- گزینه ۱ مقسوم، ۲۰ برابر باقی‌مانده است؛ یعنی  $a = 20r$  و

چون باقی‌مانده ماکزیمم است و می‌دانیم  $0 \leq r < b$ ، بیشترین مقدار  $r$  برابر است با:

$$r = b - 1$$

$$20(b - 1) \quad | \quad b$$

$$\frac{\quad \quad \quad}{b - 1} \quad q \Rightarrow 20(b - 1) = bq + b - 1$$

$$\Rightarrow 19(b - 1) = bq \Rightarrow \frac{b}{b - 1} = \frac{19}{q}$$

$b - 1$  و  $b$  نسبت به هم اول‌اند (یعنی کسر، ساده نمی‌شود)، بنابراین  $b$  برابر ۱۹ است.

$a + 3$  مضرب ۷ است. پس:

$$a + 3 = 7k \Rightarrow a = 7k - 3$$

در این صورت:  $a - 11 = 7k - 3 - 11 = 7k - 14$ .

اگر  $k$  زوج باشد،  $a - 11$  مضرب ۱۴ خواهد شد، پس  $k$  حتماً فرد است. بنابراین:  $k = 2q + 1 \Rightarrow a - 11 = 7(2q + 1) - 14 \Rightarrow a - 11 = 14q - 7 \Rightarrow a = 14q + 4$

پس باقی‌مانده  $a$  بر ۱۴ برابر ۴ است.

$$\begin{array}{r} 107 \quad | \quad b \\ \hline \quad \quad q \Rightarrow 107 = bq + 3, 2 < b \Rightarrow 104 = bq \\ \hline 3 \end{array} \quad \text{گزینه ۲}$$

$$\Rightarrow b | 104 \Rightarrow b | 2^3 \times 13 \quad (I)$$

$$\frac{83 \quad | \quad b}{\hline \quad \quad q' \Rightarrow 83 = bq' + 5, 5 < b \Rightarrow 78 = bq'}$$

$$\Rightarrow b | 78 \Rightarrow b | 2 \times 3 \times 13 \quad (II)$$

با توجه به دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$b | 2^3 \times 13 \Rightarrow b | 26 \Rightarrow b = 1, 2, 13, 26$$

$$b | 2 \times 3 \times 13$$

و با توجه به شرط رابطه تقسیم، یعنی  $b > 5$  فقط دو مقدار ۱۳ و ۲۶ برای  $b$  قابل قبول است.

۱۳۷- گزینه ۱  $a$  فرد است، آن را به صورت  $2k + 1$  در نظر می‌گیریم.

هم‌چنین باقی‌مانده مربع کامل است، پس آن را با  $r^2$  نشان می‌دهیم. داریم:

$$2k + 1 \quad | \quad 200$$

$$\frac{\quad \quad \quad}{r^2} \quad q \Rightarrow 2k + 1 = 200q + r^2, 0 \leq r^2 < 200 \Rightarrow 0 \leq r \leq 14$$

اما اگر  $r$  زوج باشد، سمت راست تسلاوی عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد خواهد شد که امکان‌پذیر نیست. بنابراین  $r$  عددی فرد بین صفر تا ۱۴ است.

اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، کافی است  $q$  را برابر

## ۱۴۱- گزینه ۲

$$\begin{array}{l} \Delta \mid 7a+1 \\ \Delta \mid 5a \end{array} \Rightarrow \Delta \mid 2a+1 \Rightarrow 2a+1 = \Delta q$$

$$\begin{array}{l} \Delta \mid 3b+7 \\ \Delta \mid 5b+5 \end{array} \Rightarrow \Delta \mid 2b-2 \Rightarrow 2b-2 = \Delta q'$$

$2a+1$  عددی فرد است، پس  $q$  نیز باید فرد باشد:

$$q = 2k+1 \Rightarrow 2a+1 = \Delta(2k+1) \Rightarrow 2a+1 = 10k+5 \\ \Rightarrow 2a = 10k+4 \Rightarrow a = 5k+2$$

$2b-2$  زوج است. پس  $q'$  باید زوج باشد:

$$q' = 2k' \Rightarrow 2b-2 = \Delta(2k') \Rightarrow 2b-2 = 10k' \\ \Rightarrow 2b = 10k'+2 \Rightarrow b = 5k'+1$$

حالا  $ab-1$  را تشکیل می‌دهیم:

$$ab-1 = (\Delta k + 2)(\Delta k' + 1) - 1 = \Delta^2 k k' + \Delta k + 2\Delta k' + 2 - 1 = \Delta(\Delta k k' + k + 2k') + 1$$

پس باقی‌مانده  $ab-1$  بر  $5$  برابر  $1$  است.

## ۱۴۲- گزینه ۱

$$11 \mid 5a + 4b + 3 \quad (I)$$

$$11 \mid a + 3b + k \xrightarrow{\times 5} 11 \mid 5a + 15b + 5k \quad (II)$$

با توجه به  $2$  رابطه  $(I)$  و  $(II)$  داریم:

$$\begin{cases} 11 \mid 5a + 4b + 3 \\ 11 \mid 5a + 15b + 5k \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 11 \mid 11b + 5k - 3 \\ 11 \mid 11b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} 11 \mid 5k - 3$$

در میان گزینه‌ها کوچک‌ترین عدد،  $5$  است که به ازای همان  $k = 5$  عبارت  $5k - 3$  برابر  $22$  می‌شود که بر  $11$  بخش‌پذیر است. در فصل بعد خواهیم دید که این مدل سؤال‌ها را با معادله هم‌نوشتی به صورت ساده‌تری می‌توان پاسخ داد.

## ۱۴۳- گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid a + 2b \xrightarrow{\times 2} 7 \mid 2a + 4b \\ 7 \mid 7b \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid 2a - b$$

می‌خواهیم  $7 \mid 2a + kb$ ، بنابراین  $7 \mid (k+1)b$ :

$$7 \mid 2a - b \xrightarrow{(-)} 7 \mid (k+1)b$$

بر  $b$  بخش‌پذیر نیست، پس  $k+1$  باید مضرب  $7$  باشد.

$$k+1 = 7q \Rightarrow k = 7q-1$$

می‌دانیم  $7 \leq k \leq 23$  است. در نتیجه:  $8 \leq 7q \leq 24 \Rightarrow 1 \leq q \leq 4$ . این رابطه به ازای  $1 \leq q \leq 4$  و  $q = 0$  برقرار است یعنی  $2$  مقدار  $k = 6$  و  $k = -1$ .

## ۱۴۴- گزینه ۱

پیش از حل سؤال لازم است بگویم در فصل بعد و آموختن هم‌نوشتی ساده‌تر می‌توانید به این سؤال‌ها جواب دهید.

$$N \mid 31 \\ \underline{\quad} \\ q \Rightarrow N = 31q + 26 \quad (I)$$

$$N \mid 43 \\ \underline{\quad} \\ q' \Rightarrow N = 43q' + q', \quad 0 \leq q' < 43 \quad (II)$$

با توجه به رابطه‌های  $(I)$  و  $(II)$  داریم:

$$31q + 26 = 43q' \Rightarrow 31q + 26 = 31q' + 12q' \\ \Rightarrow 31(q - q') = 12q' - 26 \Rightarrow 31(q - q') = 12(q' - 2)$$

سمت راست تساوی مضرب  $13$  است، پس سمت چپ آن نیز باید مضرب  $13$

باشد. یعنی  $13k = q - q'$ ، داریم:

$$31(13k) = 13(q' - 2) \Rightarrow 31k = q' - 2 \Rightarrow q' = 31k + 2$$

در رابطه  $(II)$  دیدیم که  $q' < 43$  بنابراین  $k$  حداکثر می‌تواند  $1$  باشد در نتیجه:

$$k = 1 \Rightarrow q' = 33 \Rightarrow N = 44 \times 33 = 1452$$

که رقم یکان آن برابر  $2$  است.

## ۱۴۵- گزینه ۱

می‌دانیم  $a$  در تقسیم به  $3$  سه حالت دارد یا مضرب  $3$  است  $(3k)$  یا در تقسیم به  $3$  باقی‌مانده‌ای برابر  $1$  دارد  $(3k+1)$  و یا در تقسیم به  $3$  باقی‌مانده‌ای برابر  $2$  دارد  $(3k+2)$ . اگر  $a$  مضرب  $3$  باشد که خود  $a$  بر  $3$  بخش‌پذیر است و  $x$  و  $y$  هر عددی می‌توانند باشند.

اگر  $a = 3k+1$  باشد باید حتماً یکی از عددهای زیر مضرب  $3$  باشد:

$$a + x = 3k + 1 + x \quad a + y = 3k + 1 + y$$

فرض می‌کنیم  $a + x$  مضرب  $3$  باشد، در این صورت:

$$a + x = 3k + 1 + x = 3q \Rightarrow x = 3q - 3k - 1 = 3(q - k) - 1 = 3m - 1$$

حالا اگر  $a = 3k+2$  باشد:

$$a + x = 3k + 2 + 3m - 1 = 3k + 3m + 1$$

مضرب  $3$  نیست. یعنی  $a + x$  و  $a + y$  مضرب  $3$  نیستند، پس باید مضرب  $3$  باشد:

$$a + y = 3q' \Rightarrow 3k + 2 + y = 3q'$$

$$\Rightarrow y = 3q' - 3k - 2 = 3(q' - k) - 2 = 3m' - 2$$

یعنی عددهای ما باید به فرم  $a + 3m - 1$  و  $a + 3m' - 2$  باشند، در این حالت  $x + y$  را پیدا می‌کنیم:

$$x + y = 3m - 1 + (3m' - 2) = 3m + 3m' - 3 = 3(m + m' - 1)$$

یعنی  $x + y$  باید بر  $3$  بخش‌پذیر باشد که در میان گزینه‌ها فقط  $42$  بر  $3$  بخش‌پذیر است.