ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی و آمار (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ آزمون‌های شمارهٔ ۵، ۶، ۷ و ۸ به‌ترتیب امتحان نهایی خرداد، شهریور و دی ۹۸ و دی ۹۹ هستند. این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های شمارهٔ ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به ترتیب امتحان نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، خرداد و شهریور ۹۹ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همهٔ آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت، برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت، همهٔ آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی و آمار (۳) نیاز دارید، در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

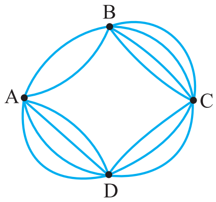
بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۳

فصل		نوبت اول	نوبت دوم (خرداد)	شهریور و دی
۱		۱۵	۵	۸
۲	تا صفحهٔ ۶۰	۵	۵/۵	۵/۵
	صفحهٔ ۶۰ به بعد	—		
۳		—	۹/۵	۶/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

ردیف | **آزمون شمارهٔ ۱** | نوبت اول پایهٔ دوازدهم | نمره

فصل اول

۱ الف) مطابق شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم و برگردیم به طوری که در مسیر برگشت، از مسیر رفته شده استفاده نکنیم؟ (تمام جاده‌ها دوطرفه هستند.) — نمره: ۲



ب) جای خالی را پر کنید.

اگر در بین داده‌ها، دادهٔ دورافتاده داشته باشیم بهتر است از شاخص مرکزی .... استفاده کنیم.

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: — نمره: ۱

الف) $\dfrac{8\times 7\times 6!}{2!\times 7!}$

ب) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

۳ مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی دارد؟ — نمره: ۰/۷۵

۴ با ارقام ۰,۱,۳,۵,۶,۷,۸ و بدون تکرار ارقام: — نمره: ۱/۵

الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟

پ) چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت که یکان آن ۷ و صدگان آن صفر است؟

در ساختن اعداد به شرایط و محدودیت‌های سؤال توجه کنید. اگه مسئله شرط خاصی نداشت پُرکردن خانه‌ها رو از چپ به راست انجام بدین.

۵ با حروف کلمهٔ «وساطت» و بدون تکرار حروف: — نمره: ۱

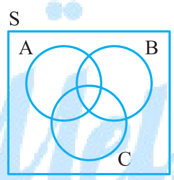
الف) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ط» ختم شود؟

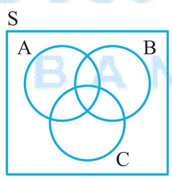
۶ در هر قسمت، پیشامد مطلوب را رنگ کنید: — نمره: ۱

در حل مسائل پیشامدها می‌تونید از تمام قوانین مجموعه‌ها که در سال‌های قبل خوندین، استفاده کنین.

الف) A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند. (نه B رخ دهد نه C)



ب) A، B و C رخ دهند.



۷ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد آن‌گاه تاسی را می‌ریزیم در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم: — نمره: ۱/۵

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهرشده روی تاس زوج باشد یا حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید با اعضا مشخص کنید.

۸ از جعبه‌ای که شامل ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که: — نمره: ۲

الف) هر ۳ سیب سالم باشند.

ب) ۲ سیب خراب باشند.

پ) تعداد سیب‌های سالم یکی بیشتر از لکه‌دارها باشد.

در حل مسائل احتمال، اولین قدم محاسبهٔ $n(S)$ است و باید دقت کنید که در محاسبهٔ $n(S)$ هیچ محدودیتی رو برای انتخاب افراد یا اشیاء در نظر نمی‌گیریم.

۹ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمالات زیر را حساب کنید: — نمره: ۳

الف) اعداد ظاهرشده، یکسان باشند. (پیشامد A)

ب) مجموع اعداد ظاهرشده، ۴ باشد. (پیشامد B)

پ) حاصل‌ضرب اعداد ظاهرشده، کم‌تر از ۳۷ باشد. (پیشامد C)

۱۰ گام‌های مختلف چرخهٔ آمار در حل مسائل را فقط نام ببرید. — نمره: ۱/۲۵

چرخهٔ آمار دارای ۵ گام (مرحله) است که تعریف اون‌ها بسیار مهمه.

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱ — نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره
	فصل دوم	
۱۱	**جاهای خالی را پر کنید.** **الف) یک دنباله، نوعی تابع است که دامنهٔ آن .... است.** **ب) رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ $8, -4, 2, -1, \dots$ برابر با .... است.**	۱
۱۲	**اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید.** **الف) کاهش دمای هوا با دورشدن از سطح زمین** ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ **ب) میزان ساعات مطالعهٔ دانش‌آموزان یک کلاس براساس شمارهٔ هر دانش‌آموز در لیست کلاس** ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ **پ) حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر** ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ **ت) تغییرات سطح آب یک دریاچه در ۱۰ سال اخیر** ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ **ث) میزان مصرف ماهانهٔ برق آپارتمان‌های با شمارهٔ ۱ تا ۱۰۰ یک مجتمع** ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$	۱/۲۵
۱۳	**الف) برای دنبالهٔ $2, 7, 12, 17, \dots$ هم ضابطهٔ تابعی و هم رابطهٔ بازگشتی بنویسید.** **ب) برای دنبالهٔ $16, 3, 16, 3, 16, \dots$ یک رابطهٔ دوضابطه‌ای بنویسید.**	۱/۵
۱۴	**اگر $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$ ، $b_n = 4$ و $c_n = 4 + (-1)^n$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.** $a_1 + b_8 - c_2 = ?$	۱/۲۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. **(۱/۵)**

الف) برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت .... = !۰ تعریف می‌کنیم.

ب) اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به .... طریق انجام‌پذیر است.

پ) تعداد جایگشت‌های nتایی از n شیء برابر با .... است.

ت) اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم از نمودار .... استفاده می‌کنیم.

ث) اگر پیشامد A حتمی باشد، احتمال آن برابر با .... است.

ج) هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که .... در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

۲ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. **(۱)**

الف) وقتی دادهٔ دورافتاده داریم، میانه معیار مناسبی برای توصیف داده‌ها می‌باشد.

ب) برای توصیف داده‌های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد.

پ) مرتب‌کردن داده‌ها در گام دوم چرخهٔ آمار اتفاق می‌افتد.

ت) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحلهٔ بیان مسئله صورت می‌گیرد.

۳ گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. **(۱)**

الف) حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۵

ب) روش نمونه‌گیری مربوط به کدام مرحلهٔ چرخهٔ آمار است؟

۱) طرح و برنامه‌ریزی ۲) بیان مسئله ۳) بحث و نتیجه‌گیری ۴) تحلیل داده‌ها

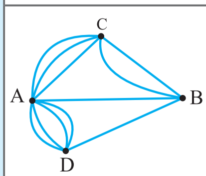
پ) با ۸ نقطهٔ متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۴۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۵۶

ت) حاصل عبارت $p(۲,۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۴ بین چهار شهر A، B، C و D مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟ **(۰/۷۵)**



۵ از بین ۲ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی و ۳ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و ۲ دانش‌آموز رشتهٔ انسانی، ۳ دانش‌آموز را به تصادف برای اردوی مشهد انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش‌آموز انتخاب شود؟ **(۰/۷۵)**

۶ جدول زیر را کامل کنید. **(۱/۵)**

ضابطهٔ دنباله	فرمول بازگشتی	۴ جملهٔ اول دنباله
$a_n = ۲n+۱$		

۷ با توجه به دنباله‌های $a_n = ۲^{۲n+۱}$، $b_n = \frac{۱۵}{n+۱}$ و $c_n = (\frac{۱}{۲})^{n-۲}$ حاصل عبارت $a_۱ - b_۴ + c_۲$ را به دست آورید. **(۱)**

۸ در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اول ۱۷− و جملهٔ دهم برابر ۱۰ است. جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید. **(۱)**

۹ در دنبالهٔ حسابی مقابل، مجموع ۱۶ جملهٔ اول را به دست آورید. $۱۱, ۸, ۵, \ldots$ **(۱)**

۱۰ کدام‌یک از جملات عمومی زیر مربوط به دنبالهٔ حسابی است؟ اختلاف‌مشترک آن را به دست آورید. **(۱)**

الف) $a_n = n(n-۱)$ ب) $b_n = ۳(n-۲)$

۱۱ به کمک رابطهٔ بازگشتی $a_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $a_{n+۱} = \frac{۲}{۳}a_n$: **(۱/۵)**

الف) سه جملهٔ اول دنباله را بنویسید.

ب) جملهٔ عمومی و نسبت‌مشترک آن را به دست آورید.

۱۲ نخستین جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی ۹۶ و نسبت‌مشترک این دنباله ۲ می‌باشد، کدام جملهٔ دنباله برابر ۷۶۸ است؟ **(۱/۵)**

ردیف	آزمون شماره ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ خرداد ۱۴۰۰	نمره
۱۳	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. الف) $4^{\frac{1}{3}}$ ب) $(0/8)^{\frac{2}{9}}$ پ) $\sqrt[5]{(21)^4}$ ت) $\sqrt[8]{(0/47)^3}$	۲
۱۴	در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x را مشخص کنید. الف) $8^4 \times 9^x = 72^4$ ب) $(5^x)^6 = \frac{1}{5^2}$ پ) $(0/6)\times(0/6)^x\times(0/6)^3=(0/6)^8$	۱/۵
۱۵	حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. الف) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^4$ ب) $5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{-1}{3}}$	۱
۱۶	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 3^x$ را رسم کنید.	۱
۱۷	پدر سارا قصد دارد مبلغ ۲۰ میلیون تومان را برای هزینهٔ دانشگاه دخترش در بانکی سپرده‌گذاری کند. این بانک سالانه ۲۰٪ سود به سپرده‌ها پرداخت می‌کند. پدر سارا بعد از ۲ سال چه مبلغی را می‌تواند دریافت کند؟	۱
	موفق باشید جمع نمرات	۲۰

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف)

مسیر رفت: $A \to B \to C$: تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۴ = ۸$ یا $A \to D \to C$: تعداد حالت‌ها $= ۴ \times ۳ = ۱۲$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌های مسیر رفت $= ۸ + ۱۲ = ۲۰$

مسیر برگشت: $C \to B \to A$: تعداد حالت‌ها $= ۳ \times ۱ = ۳$ یا $C \to D \to A$: تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۳ = ۶$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌های مسیر برگشت $= ۳ + ۶ = ۹$

تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت $= ۲۰ \times ۹ = ۱۸۰$

ب) میانه

۲- الف)

$$\frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!} = \frac{۸ \times \cancel{۷} \times \cancel{۶!}}{۲ \times ۱ \times \cancel{۷} \times \cancel{۶!}} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

ب) $(n+۳)$ بزرگ‌تر از $(n+۱)$ است، پس آن را باز می‌کنیم تا به $(n+۱)$ برسیم:

$$\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!} = \frac{(n+۳)(n+۲)\cancel{(n+۱)!}}{\cancel{(n+۱)!}} = (n+۳)(n+۲)$$

۳- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{(۶-۳)! \times ۳!} = \frac{۶!}{(۳! \times ۳!)} \Rightarrow \frac{\cancel{۶} \times ۵ \times ۴ \times \cancel{۳!}}{\cancel{۳ \times ۲} \times ۱ \times \cancel{۳!}} = ۲۰$$

۴- الف) شرط خاص نداریم پس پُرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

۱،۳،۵،۶،۷،۸ — ۰،۱،۳،۵،۶،~~۸~~

۶	۶	۵	۴

۰،۱،۳،۵،۶،۷،~~۸~~ — ۰،۱،۳،۵،~~۶~~

$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب $= ۶ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۷۲۰$

ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس ابتدا خانهٔ مربوط به یکان را پُر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:

~~۱~~،۳،۵،۶،۷،۸ — ۰،۳،۵،۶،~~۷~~ — ۱،۳،۵،۷

۵	۵	۴	۳	۴

۰،۳،۵،۶،۷،~~۸~~ — ۰،۱،۳،۵،~~۶~~

تعداد عددهای مطلوب $= ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۴ = ۱۲۰۰$

پ) یکان فقط باید ۷ باشد پس برای آن فقط یک انتخاب وجود دارد. در مورد صدگان نیز فقط یک انتخاب (رقم صفر) داریم، پس ابتدا این دو خانه را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پُرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم:

۱،۳،۵،۶،۸ — رقم صفر — رقم ۷

۵	۴	۳	۱	۲	۱

~~۱~~،۳،۵،۶،۸ — ~~۳~~،۵،۶،۸ — ~~۵~~،۶،۸

$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب $= ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

۵- الف) بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم چون کلمهٔ «وساطت» به زبان فارسی است:

۱	۲	۳	۴	۵

$\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $= ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

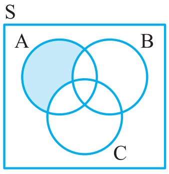
ب)

«ط» — «و»

۱	۱	۲	۳	۱

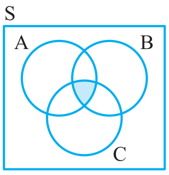
$\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $= ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$

۶- الف) فقط باید A رخ دهد یعنی باید قسمتی از A را رنگ کنیم که با B یا C اشتراک نداشته باشد:



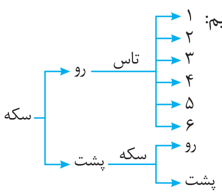
$A-(B \cup C)$

ب) می‌خواهیم هر ۳ پیشامد با هم رخ دهند. لذا قسمت مشترک A، B و C را رنگ می‌کنیم:



$A \cap B \cap C$

۷- الف) بهتر است یک نمودار درختی برای این مسئله رسم کنیم:



فضای نمونه $S = \{(ر,۱),(ر,۲),\ldots,(ر,۶),(پ,ر),(پ,پ)\}$

ب) پیشامد مطلوب $A = \{\underbrace{(ر,۲),(ر,۴),(ر,۶)}_{\text{عدد تاس زوج باشد}},\underbrace{(پ,ر),(پ,پ)}_{\text{حداقل یکی از تاس‌ها پشت بیاید}}\}$

۸- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{۱۴}{۳} = \frac{۱۴!}{۱۱! \times ۳!} = \frac{۱۴ \times ۱۳ \times \cancel{۱۲} \times \cancel{۱۱!}}{\cancel{۱۱!} \times \cancel{۳ \times ۲} \times ۱} = ۳۶۴$$

الف)

$$n(A) = \binom{۱۰}{۳}_{\text{سالم}} = \frac{۱۰!}{۷! \times ۳!} = \frac{۱۰ \times \cancel{۹} \times \cancel{۸} \times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!} \times \cancel{۳} \times \cancel{۲} \times ۱} = ۱۲۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲۰}{۳۶۴}$$

ب) وقتی ۲ سیب خراب است پس سیب سوم سالم است؛ لذا داریم:

$$n(A) = \binom{۴}{۲} \times \binom{۱۰}{۱} = ۶ \times ۱۰ = ۶۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۰}{۳۶۴}$$

پ) باید ۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب انتخاب شود:

$$n(A) = \overset{\text{سالم}}{\binom{۱۰}{۲}} \times \overset{\text{خراب}}{\binom{۴}{۱}} = ۴۵ \times ۴ = ۱۸۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۸۰}{۳۶۴}$$

۹- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم: $n(S)=۶^۲=۳۶$

الف) می‌خواهیم دو عدد ظاهرشده، یکسان باشند پس پیشامد مطلوب، به صورت زیر است:

$$A=\{(\overset{\substack{\text{تاس اول}\\ \uparrow}}{۱},\underset{\substack{\downarrow\\ \text{تاس دوم}}}{۱}),(۲,۲),\dots,(\overset{\substack{\text{تاس اول}\\ \uparrow}}{۶},\underset{\substack{\downarrow\\ \text{تاس دوم}}}{۶})\}\Rightarrow n(A)=۶\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ب) باید اعدادی از دو تاس را انتخاب کنیم که جمعشان ۴ شود:

$$B=\{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)\}\Rightarrow n(B)=۳\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

پ) تاس‌ها هر عددی که ظاهر شوند ضربشان کمتر از ۳۷ است پس C یک پیشامد حتمی (قطعی) است و احتمال وقوع آن ۱ است. (نیاز به هیچ محاسبه‌ای نیست).

۱۰- گام اول: بیان مسئله (فهم مسئله، تعریف دقیق مسئله)

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری، روش انجام کار)

گام سوم: گردآوری، سامان‌دهی و پاک‌سازی داده‌ها

گام چهارم: تحلیل داده‌ها (مرتب‌کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری و تفسیر نتایج (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید)

۱۱- الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$

ب) $a_{n+۱}=\frac{-۱}{۲}a_n\ ,a_۱=۸$

۱۲- هر قسمت را به شکل (هم‌دامنه → دامنه) می‌نویسیم سپس دامنه را بررسی می‌کنیم:

الف) ارتفاع از سطح زمین → کاهش دما
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$

ب) شمارهٔ هر دانش‌آموز در کلاس → میزان ساعات مطالعه
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$

پ) اندازهٔ ضلع مکعب → حجم مکعب
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$

ت) شمارهٔ سال‌های اخیر (۱۰ سال اخیر) → تغییرات سطح آب
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$

ث) شمارهٔ آپارتمان‌ها (۱ تا ۱۰۰) → میزان مصرف برق
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$

۱۳- الف) جملات دنباله ۵تا ۵تا زیاد می‌شوند، لذا خواهیم داشت:

ضابطهٔ تابعی (جملهٔ عمومی): $a_n=۵n-۳$

رابطهٔ بازگشتی: $a_{n+۱}=a_n+۵\ ,\ a_۱=۲$

ب) جملات دنباله، به صورت یک‌درمیان ۱۶ و ۳ هستند لذا چنین می‌نویسیم:

$$a_n=\begin{cases}۱۶ & \text{فرد } n\\ ۳ & \text{زوج } n\end{cases}$$

۱۴- $a_۱=\frac{۱^۲}{(-۱)^۱}=\frac{۱}{-۱}=-۱\ ,\ b_۸=۴\ ,\ c_۲=۴+(-۱)^۲=۴+۱=۵$

$\Rightarrow a_۱+b_۸-c_۲=(-۱)+۴-۵=-۲$

۵- $n(S)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!\times ۳!}=\frac{۷\times \cancel{۶}\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times \cancel{۶}}=۳۵$

$n(A)=\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{ریاضی}}\times\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{تجربی}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انسانی}}=۲\times ۳\times ۲=۱۲ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۵}$

۶- $a_n=۲n+۱ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} a_۱=۲(۱)+۱=۳ \\ \xrightarrow{n=۲} a_۲=۲(۲)+۱=۵ \\ \xrightarrow{n=۳} a_۳=۲(۳)+۱=۷ \\ \xrightarrow{n=۴} a_۴=۲(۴)+۱=۹ \end{cases}$

$d=a_۲-a_۱=۵-۳=۲$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ حسابی}} \begin{cases} a_{n+۱}=a_n+۲ \\ a_۱=۳ \end{cases}$

پس جدول به صورت زیر پُر خواهد شد:

ضابطهٔ دنباله	فرمول بازگشتی	۴ جملهٔ اول دنباله
$a_n=۲n+۱$	$\begin{cases} a_{n+۱}=a_n+۲ \\ a_۱=۳ \end{cases}$	۳,۵,۷,۹

۷- $a_n=۲^{۲n+۱} \xrightarrow{n=۱} a_۱=۲^{۲(۱)+۱}=۲^۳=۸$

$b_n=\frac{۱۵}{n+۱} \xrightarrow{n=۴} b_۴=\frac{۱۵}{۴+۱}=\frac{۱۵}{۵}=۳$

$c_n=(\frac{۱}{۲})^{n-۲} \xrightarrow{n=۲} c_۲=(\frac{۱}{۲})^{۲-۲}=(\frac{۱}{۲})^۰=۱$

$\Rightarrow a_۱-b_۴+c_۲=۸-۳+۱=۶$

۸- $a_{۱۰}=۱۰ \Rightarrow a+۹d=۱۰ \xrightarrow{a=-۱۷} -۱۷+۹d=۱۰$

$\Rightarrow ۹d=۲۷ \Rightarrow d=\frac{۲۷}{۹}=۳$

$a_n=a+(n-۱)d \Rightarrow a_n=-۱۷+(n-۱)\times ۳$

$=-۱۷+۳n-۳=۳n-۲۰$

۹- $۱۱,۸,۵,\ldots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی است}} d=۸-۱۱=-۳$

$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$

$\xrightarrow[n=۱۶]{a=۱۱,\ d=-۳} S_{۱۶}=\frac{۱۶}{۲}[\underbrace{۲(۱۱)+۱۵(-۳)}_{-۲۳}]=۸\times(-۲۳)=-۱۸۴$

۱۰- رابطهٔ $a_n=n(n-۱)$ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی نیست، زیرا:

$a_n=n(n-۱)=n^۲-n$

ولی می‌دانیم در جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، توان n فقط باید ۱ باشد. پس رابطهٔ $b_n=۳(n-۲)=۳n-۶$ بیان‌گر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با اختلاف مشترک $d=۳$ است. (ضریب n همان اختلاف‌مشترک است.)

۱۱- الف) $a_{n+۱}=\frac{۲}{۳}a_n \ (a_۱=\frac{۱}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} a_۲=\frac{۲}{۳}a_۱=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳} \\ \xrightarrow{n=۲} a_۳=\frac{۲}{۳}a_۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{سه جملهٔ اول}} \frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۹},\ldots$

ب) نسبت‌مشترک برابر $\frac{۲}{۳}$ است و جملهٔ عمومی برابر است با:

$a_n=ar^{n-۱}=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۲}{۳})^{n-۱}$

۱۲- $a_۱=۹۶,\ r=۲,\ a_n=۷۶۸,\ n=?$

$a_n=ar^{n-۱} \Rightarrow ۷۶۸=۹۶\times ۲^{n-۱} \Rightarrow ۲^{n-۱}=\frac{۷۶۸}{۹۶}$

$\Rightarrow ۲^{n-۱}=۸ \Rightarrow ۲^{n-۱}=۲^۳ \Rightarrow n-۱=۳ \Rightarrow n=۴$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) ۱ ب) $m\times n$ پ) $n!$

ت) جعبه‌ای ث) ۱ ج) $A\cap B=\varnothing$

۲- الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۳- الف) گزینهٔ «۳»؛ زیرا: $\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$

ب) گزینهٔ «۱»

پ) گزینهٔ «۴»؛ زیرا:

تعداد مثلث‌ها $=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۵!\times ۳!}=\frac{۸\times ۷\times \cancel{۶}\times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times \cancel{۶}}=۵۶$

ت) گزینهٔ «۳» $p(۲,۲)=\frac{۲!}{(۲-۲)!}=\frac{۲!}{۰!}=\frac{۲\times ۱}{۱}=۲$

۴- نباید از شهر B عبور کنیم پس باید ابتدا از شهر C به شهر A و سپس از شهر A به شهر D برویم، ضمناً چون این دو عمل، پشت سر هم انجام می‌شود باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

تعداد حالت‌های مسیر CAD $=\underset{CA}{۳}\times\underset{AD}{۴}=۱۲$

۱۳-
الف) $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4^1}$ ب) $(0/8)^{\frac{2}{9}}=\sqrt[9]{0/8^2}$

پ) $\sqrt[5]{21^4}=21^{\frac{4}{5}}$ ت) $\sqrt[8]{(0/47)^3}=(0/47)^{\frac{3}{8}}$

۱۴-
الف) $8^4\times 9^x=72^4 \Rightarrow 9^x=\frac{72^4}{8^4} \Rightarrow 9^x=9^4 \Rightarrow x=4$

ب) $(5^x)^6=\frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{6x}=5^{-2} \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

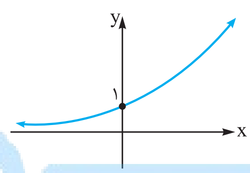
پ) $(0/6)^1\times(0/6)^x\times(0/6)^3=(0/6)^8$

$\Rightarrow (0/6)^{1+x+3}=(0/6)^8 \Rightarrow x+4=8 \Rightarrow x=4$

۱۵-
الف) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^4=\frac{a^{\frac{1}{2}\times 4}}{a^{\frac{1}{4}\times 4}}=\frac{a^2}{a^1}=a^{2-1}=a$

ب) $5^{\frac{1}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}=5^0=1$

۱۶- عدد پایه در $y=3^x$ یعنی ۳ بزرگ‌تر از ۱ است، پس تابعی افزایشی یا صعودی به شکل مقابل داریم:



۱۷- با یک مسئلهٔ رشد مواجه هستیم:

$c=20$ میلیون تومان $, r=\frac{20}{100}=0/2, t=2, f(2)=?$

$f(t)=c(1+r)^t \Rightarrow f(2)=20(1+0/2)^2=20\times(1/2)^2$

$=20\times 1/44=28/8$ میلیون تومان

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل را به $(m+n)$ طریق می‌توان انجام داد. حرف «یا» نشان‌دهندهٔ این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. (اصل جمع برای بیشتر از ۲ عمل هم برقرار است.) مثلاً اگر علی بتواند برای رفتن به دانشگاه از ۳ خط تاکسی یا ۴ خط اتوبوس یا ۲ خط مترو استفاده کند، تعداد حالت‌های رفتن او به دانشگاه برابر است با: $۳+۴+۲=۹$

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحلهٔ متوالی اول و دوم انجام شود، به طوری که مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم، هر یک از حالت‌های مرحلهٔ اول به n طریق انجام شود، در کل آن عمل به $m\times n$ طریق، قابل انجام است. حرف «و» نشان می‌دهد که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می‌دهیم. یعنی همهٔ کارها (عمل‌ها) با هم انجام می‌شوند.

مثلاً فرض کنید امیر ۲ جفت کفش، ۳ پیراهن و ۵ شلوار دارد تعداد حالت‌هایی که او می‌تواند از کفش‌ها و پوشاک خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با:

$۳۰ = ۲\times۳\times۵ =$ تعداد حالت‌ها

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۲۶ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۶ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۶ نفر مشورت بگیرد؟

ب) او به چند طریق می‌تواند از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرطی که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند؟

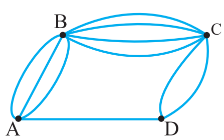
پاسخ: الف) باید از اصل جمع استفاده کنیم. چون مدیرعامل فقط می‌تواند ۱ نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: $۲۶ = ۱۶+۱۰ =$ تعداد حالت‌ها

ب) باید از اصل ضرب استفاده کنیم. چون مدیر می‌خواهد هم با گروه A و هم با گروه B مشورت کند؛ یعنی دو عمل را با هم انجام می‌دهد (به طور متوالی) لذا:

$۱۶۰ = ۱۶\times۱۰ =$ تعداد حالت‌ها

استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور هم‌زمان

در بعضی از سؤالات، مخصوصاً سؤالات مربوط به سفر از یک شهر به یک شهر دیگر، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.



مثال: فردی می‌خواهد از شهر A به شهر C برود. او به چند طریق (حالت) می‌تواند این کار را انجام دهد به شرطی که:

الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.

ب) حتماً از شهر B بگذرد.

پاسخ: الف) برای رفتن از A به C دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} A \to B \to C : \text{مسیر}\quad ۱۲ = ۳\times۴ = \text{تعداد حالت‌ها} \\ A \to D \to C : \text{مسیر}\quad ۲ = ۱\times۲ = \text{تعداد حالت‌ها} \end{cases}$$

$۱۴ = ۲+۱۲ =$ تعداد کل حالت‌ها $\xleftarrow{\text{طبق اصل جمع}}$

ب) این فرد می‌خواهد از A به C برود و حتماً از B هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر $A \to B \to C$ وجود دارد.

$۱۲ = ۳\times۴ =$ تعداد حالت‌های مسیر

نماد فاکتوریل

فاکتوریل را با نماد «!» نشان می‌دهیم؛ اگر n عدد طبیعی باشد $n!$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$$

یعنی برای محاسبهٔ $n!$ عدد n را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب می‌کنیم.

مثلاً: $۲! = ۲\times۱ = ۲\ ,\ ۳! = ۳\times۲\times۱ = ۶\ ,\ ۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$

ضمناً توجه کنید که $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ می‌باشد. همچنین اگر بخواهیم کسری مانند $\frac{۱۰!}{۸!}$ را حساب کنیم لزومی ندارد ۱۰ و ۸ را تا ۱ باز کنیم، چون وقت‌گیر خواهد بود بلکه بهتر است ۱۰ را تا ۸ باز کنیم، فقط حواستان باشد موقع بازکردن یک عدد هر جا متوقف شدیم، باید علامت ! بگذاریم:

$$\frac{۱۰!}{۸!} = \frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}^{۱}}{\cancel{۸!}_{۱}} = ۹۰$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید:

الف) $۵! - ۳! = ?$

ب) $\frac{۴!\times۵!\times۰!}{۸!\times۱!} = ?$

پاسخ: الف) $\begin{cases} ۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰ \\ ۳! = ۳\times۲\times۱ = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۵! - ۳! = ۱۲۰ - ۶ = ۱۱۴$

دقت کنید که $(۵-۳)!$ با $۲!$ برابر نمی‌شود.

ب) $$\frac{۴!\times۵!\times۰!}{۸!\times۱!} = \frac{(\cancel{۴}^{۱}\times\cancel{۳}^{۱}\times\cancel{۲}^{۱}\times۱)\times\cancel{۵!}^{۱}\times۱}{(\cancel{۸}_{\cancel{۲}_{۱}}\times۷\times\cancel{۶}_{۲}\times\cancel{۵!}_{۱})\times۱} = \frac{۱}{۱۴}$$

در این سؤال، دیدیم ۸ به ۵ نزدیک‌تر است تا ۸ نسبت به ۴. پس ۸ را تا ۵ باز کردیم.

جایگشت

به هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، یک جایگشت آن n شیء می‌گوییم و تعداد آن‌ها برابر با $n!$ می‌باشد. مثلاً با حروف a، b و c می‌توانیم کلمات زیر را بسازیم (بدون توجه به بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات):

abc و acb و bac و bca و cab و cba

۶ جایگشت (کلمه) ایجاد شد.

البته اگر فقط تعداد جایگشت‌ها را بخواهیم، می‌گوییم چون ۳ حرف متمایز داریم، تعداد جایگشت‌ها (کلمات) برابر با $۳!$ می‌باشد: $۶ = ۳\times۲\times۱ = ۳! =$ تعداد جایگشت‌ها

مثال: ۵ نفر به چند حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند؟

پاسخ: طبق درس‌نامهٔ گفته‌شده، ۵ نفر به $۵!$ حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند و می‌دانید که: $۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

روش کلی ساختن اعداد و کلمات: معمولاً برای ساختن اعداد و کلمات از روش پرکردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم، ولی اگر بخواهیم کلمات لاتین یا اعداد را بسازیم، خانه‌ها را از چپ به راست پر

می‌کنیم. البته باید به شرایط و محدودیت‌های سؤال، حتماً توجه کنیم؛ مثلاً اگر گفته شود عدد زوج بسازید، در جایگاه یکان (اولین خانهٔ سمت راست) باید رقم‌های زوج قرار دهیم، سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم.

برای فهم بهتر، به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال با ارقام ۰،۱،۲،۵،۶،۷ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد ۶رقمی می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵رقمی و فرد می‌توان ساخت؟

پ) چند عدد ۵رقمی و زوج می‌توان ساخت؟

ت) چند عدد ۴رقمی مضرب ۵ می‌توان ساخت؟

پاسخ الف) هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود، پس برای پرکردن اولین خانهٔ سمت چپ، ۵ انتخاب وجود دارد (یکی از ارقام ۱،۲،۵،۶،۷) در تمامی سؤالاتی که گفته می‌شود تکرار ارقام غیرمجاز است، پس از پرکردن هر خانه، باید، یکی از ارقام استفاده‌شده را به دلخواه خط بزنیم:

۵	۵	۴	۳	۲	۱

۱,۲,۵,۶,۷ — ۰,۱,۲,۵,~~۶~~ — ۰,۱,~~۲~~

۰,۱,۲,۵,۶,~~۷~~ — ۰,۱,۲,~~۵~~ — ۰,~~۱~~

خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم.

تعداد عددهای مطلوب $\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}}$ = ۵×۵×۴×۳×۲×۱ = ۶۰۰

ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس اولین خانهٔ سمت راست به ۳ حالت پر می‌شود؛ (یکی از ارقام ۱، ۵، ۷) سپس به سراغ خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم. (از چپ به راست حرکت می‌کنیم.)

۴	۴	۳	۲	۳

۱,۲,۵,۶,~~۷~~ — ۰,۱,۲,~~۵~~ — ۱,۵,۷

۰,۱,۲,۵,~~۶~~ — ۰,۱,~~۲~~

تعداد عددهای مطلوب $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ = ۴×۴×۳×۲×۳ = ۲۸۸

پ) باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم، یک بار حالتی که یکان صفر باشد و بار دیگر حالتی که یکان صفر نباشد (۲ یا ۶ باشد)، سپس جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم. (اصل جمع) شاید بپرسید چه موقع این کار را انجام می‌دهیم؟ فقط وقتی که صفر جزء رقم‌های داده‌شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم این کار را انجام می‌دهیم. البته تکرار ارقام هم باید غیرمجاز باشد.

حالت اول:

۵	۴	۳	۲	۱

۱,۲,۵,۶,۷ — ۱,۲,۵,~~۶~~ — فقط صفر

۱,۲,۵,۶,~~۷~~ — ۱,۲,~~۵~~

⇐ تعداد عددها = ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰

حالت دوم:

۴	۴	۳	۲	۲

۱,~~۲~~,۵,۶,۷ — ۰,۱,۵,~~۶~~ — ارقام ۲ یا ۶

۰,۱,۵,۶,~~۷~~ — ۰,۱,~~۵~~

⇐ تعداد عددها = ۴×۴×۳×۲×۲ = ۱۹۲

⇐ تعداد کل عددهای مطلوب = ۱۲۰ + ۱۹۲ = ۳۱۲

ت) باز هم باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم. یکی وقتی یکان صفر باشد، یکی وقتی یکان ۵ باشد:

حالت اول:

۵	۴	۳	۱

۱,۲,۵,۶,۷ — ۱,۲,۵,~~۶~~

۱,۲,۵,۶,~~۷~~ — فقط صفر

⇐ تعداد عددها = ۵×۴×۳×۱ = ۶۰

حالت دوم:

۴	۴	۳	۱

۱,۲,~~۵~~,۶,۷ — ۰,۱,۲,~~۶~~

۰,۱,۲,۶,~~۷~~ — فقط ۵

⇐ تعداد عددها = ۴×۴×۳×۱ = ۴۸

⇐ تعداد کل عددهای مطلوب = ۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸

مثال با حروف کلمهٔ «وصایت» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ی» ختم شود؟

پاسخ الف) چون می‌خواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم:

۱	۲	۳	۴	۵

و، ~~ص~~ — و، ص، ا، ~~ی~~ — و، ص، ا، ی، ت

و، ص، ~~ا~~ — و، ص، ا، ی، ~~ت~~

⇐ تعداد کلمات مطلوب = ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰

ب) برای خانه‌ها اول و آخر فقط ۱ انتخاب داریم، لذا:

۱	۱	۲	۳	۱

فقط «ی» — ص، ا، ~~ت~~ — فقط «و»

ص، ~~ا~~ — ص، ا، ت

⇐ تعداد کلمات مطلوب = ۱×۳×۲×۱×۱ = ۶

تبدیل r شیء از n شیء اگر بخواهیم از بین n شیء مختلف، r شیء را انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها کنار هم مهم باشد، می‌توانیم از فرمول تبدیل استفاده کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

البته به جای استفاده از فرمول بالا، می‌توانیم از همان روش پرکردن خانه‌ها نیز استفاده کنیم.

مثال به چند طریق می‌توانیم از بین ۷ شرکت‌کننده در یک مسابقه به ۳ نفر اول جایزه دهیم؟

پاسخ روش اول در مسابقات، ترتیب انتخاب‌ها مهم است، لذا از فرمول تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}^{۱}}{\cancel{۴!}_{۱}}=۲۱۰$$

روش دوم می‌توانیم از روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم:

۷	۶	۵

نفر اول — نفر سوم

نفر دوم

⇐ تعداد حالت‌ها = ۷×۶×۵ = ۲۱۰

ترکیب r شیء از n شیء اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم و **ترتیب انتخاب‌ها مهم نباشد** از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال از بین ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره را انتخاب کنیم، به طوری که:

الف) محدودیتی نداشته باشیم.

ب) هر ۳ مهره آبی باشند.

پ) حداقل ۲ مهره آبی باشند.

پاسخ در این‌جا ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست، پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

الف) ۳ مهره را باید از بین ۹ مهرهٔ موجود انتخاب کنیم: (۹ = ۴ + ۵)

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۶!\times۳!}=\frac{۹\times۸\times۷\times\cancel{۶!}^{۱}}{\cancel{۶!}_{۱}\times۳\times۲\times۱}=۸۴$$

ب) ۳ مهرهٔ آبی را باید از بین ۴ مهرهٔ آبی موجود انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۱!\times ۳!} = \frac{۴\times \cancel{۳!}}{۱\times \cancel{۳!}} = ۴$$

پ) حداقل ۲ مهره، باید آبی باشند؛ یعنی ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ قرمز باید انتخاب شوند یا هر ۳ مهره، آبی انتخاب شوند، لذا:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \overset{\text{۲ آبی}}{\binom{۴}{۲}} \times \overset{\text{۱ قرمز}}{\binom{۵}{۱}} \overset{\text{یا}}{+} \overset{\text{۳ آبی}}{\binom{۴}{۳}} = ۶\times ۵+۴=۳۴$$

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

مثلاً در مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A برابر است با:

$$\binom{۶}{۴} = \frac{۶!}{۲!\times ۴!} = \frac{۶\times ۵\times \cancel{۴!}}{۲\times ۱\times \cancel{۴!}} = ۱۵$$

نکته برای یافتن تعداد وترها و تعداد مثلث‌های ساخته‌شده با تعدادی نقطه که روی محیط یک دایره قرار دارند، باز هم از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال **۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟**

پاسخ هر وتر روی دایره دارای ۲ نقطهٔ ابتدایی و انتهایی است، لذا:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۸!\times ۲!} = \frac{۱۰\times ۹\times \cancel{۸!}}{\cancel{۸!}\times ۲\times ۱} = ۴۵$$

هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ بنابراین:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۷!\times ۳!} = \frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times ۳\times ۲\times ۱} = ۱۲۰$$

انتخاب اجباری اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم به شرطی که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، باید $(r-k)$ شیء را از بین $(n-k)$ شیء باقی‌مانده انتخاب کنیم یعنی تعداد حالت‌های ممکن برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد.

مثال **مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که همگی آن‌ها شامل g باشند؟**

پاسخ می‌خواهیم g در تمام زیرمجموعه‌ها باشد، پس یک انتخاب اجباری داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{۷-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۴!\times ۲!} = \frac{۶\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times ۲\times ۱} = ۱۵$$

درس ۲: احتمال

پدیده‌های قطعی و تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، **پدیده یا آزمایش تصادفی** می‌گوییم. در پدیده‌های تصادفی از همهٔ نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از این‌که کدام نتیجه، قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، یک **برآمد** می‌گوییم. ضمناً به مجموعهٔ شامل تمام نتایج ممکن، **فضای نمونهٔ آزمایش** می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم. تعداد عضوهای S را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً لازم نیست تمام اعضای S را بنویسیم، چون عملی وقت‌گیر است. فقط کافی است $n(S)$ را به دست آوریم.

مثال **قطعی یا تصادفی بودن پدیده‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد در کلاس دوازدهم یک مدرسهٔ روزانه

ب) پرتاب سکه در مسابقهٔ فوتبال توسط داور برای تعیین مالکیت توپ

پ) خارج‌شدن ۱ مهرهٔ سفید از کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید (با چشم بسته یک مهره را انتخاب کرده‌ایم.)

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش «رو» و تاسش زوج بیاید، برنده است. تعیین برنده، قبل از بازی، پدیده‌ای قطعی است یا تصادفی؟

پاسخ الف) پدیدهٔ قطعی است، چون تمام دانش‌آموزان کلاس دوازدهم این مدرسه بالای ۱۰ سال سن دارند.

ب) پدیدهٔ تصادفی است؛ چون نمی‌دانیم سکه «رو» می‌آید یا «پشت».

پ) پدیدهٔ قطعی است؛ چون رنگ مهرهٔ انتخابی حتماً سفید است و از قبل قابل پیش‌بینی است.

ت) پدیدهٔ تصادفی است؛ چون نمی‌توانیم بگوییم حتماً سکه «رو» و تاس «زوج» می‌آید.

مثال **در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، تعداد اعضای فضای نمونه را به دست آورید. (در قسمت‌های الف، ب و پ اعضای S را نیز بنویسید.)**

الف) پرتاب یک تاس **ب) پرتاب یک سکه**

پ) پرتاب یک تاس و یک سکه **ت) پرتاب ۳ تاس**

ث) انتخاب ۳ نفر از بین ۵ معلم و ۲ دانشجو

پاسخ الف) $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S)=۶$

ب) $S=\{ر,پ\} \Rightarrow n(S)=۲$

پ) $S=\{\underbrace{(ر,۱),(ر,۲),\ldots,(ر,۶)}_{\text{۶ تا}},\underbrace{(پ,۱),(پ,۲),\ldots,(پ,۶)}_{\text{۶ تا}}\} \Rightarrow n(S)=\underset{\text{سکه}}{۲}\times\underset{\text{تاس}}{۶}=۱۲$

ت) $n(S)=۶\times ۶\times ۶=۲۱۶$

ث) $n(S)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!\times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times ۳\times ۲\times ۱}=۳۵$

پیشامد تصادفی به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونهٔ S یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با حروف A، B و C نمایش می‌دهیم و تعداد اعضای آن‌ها را با $n(A)$، $n(B)$ و $n(C)$ نمایش می‌دهیم.

مثال **در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر و تعداد اعضایشان را مشخص کنید:**

الف) عدد ظاهرشده، اول باشد. (پیشامد A)

ب) عدد ظاهرشده، حداقل ۴ باشد. (پیشامد B)

پ) عدد ظاهرشده، حداکثر ۴ باشد. (پیشامد C)

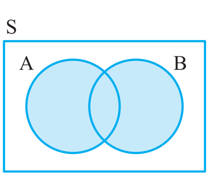
پاسخ الف) $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

اعداد اول: $A=\{۲,۳,۵\} \Rightarrow n(A)=۳$

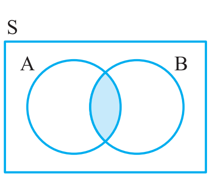
ب) حداقل ۴ یعنی خود ۴ یا بیشتر: $B=\{۴,۵,۶\} \Rightarrow n(B)=۳$

پ) حداکثر ۴ یعنی خود ۴ یا کم‌تر: $C=\{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(C)=۴$

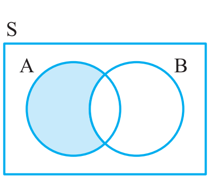
اعمال روی پیشامدها: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، آن‌گاه اجتماع و اشتراک A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند: (قسمت‌های رنگی)



$$\xrightarrow{\text{اجتماع A و B}} \underbrace{A\cup B}_{\text{حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.}}=\{x\in S \mid x\in A \overset{\text{یا}}{\vee} x\in B\}$$



$$\xrightarrow{\text{اشتراک A و B}} \underbrace{A\cap B}_{\text{A و B هر دو با هم رخ دهند.}}=\{x\in S \mid x\in A \overset{\text{و}}{\wedge} x\in B\}$$



$$\xrightarrow{\text{تفاضل B از A}} \underbrace{A-B}_{\text{A رخ دهد ولی B رخ ندهد.}}=\{x\in S \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$