

بنامه

# آموزش جامع ریاضی ۳

این کتاب شامل موارد زیر می باشد:

● درس نامه جامع

● تست های کنکور

● تست های تکمیلی

عنوان و نام پدید آور	: آموزش جامع ریاضی ۳/پدیدآورندگان گروه طراحان [انتشارات چهارخونه]; ویراستار نجمه موسوی، لیلابلوچی.
مشخصات نشر	: تهران : چهارخونه ، ۱۳۹۹
مشخصات ظاهری	: ۱۰۲ ص. : جدول ، نمودار؛ ۲۲×۲۹ س م.
شابک	: 978-600-305-175-1
وضعیت فهرست نویسی	: فیبای مختصر
شناسه افزوده	: انتشارات چهارخونه
شماره کتابشناسی ملی	: ۵۵۴۳۳۹۲

## آموزش جامع ریاضی ۳

ناشر : انتشارات چهارخونه

پدید آورندگان : گروه طراحان

ویراستار : نجمه موسوی - لیلابلوچی

صفحه آرایی و حروفچینی : محبوبه شریفی

لیتوگرافی : امیر گرافیک

چاپ و صحافی : یگانه

نوبت چاپ : سوم - پاییز ۱۳۹۹

شمارگان : ۵۰۰ جلد

قیمت : ۴۰.۰۰۰ تومان

فروشگاه اینترنتی : [www.4Khooneh.org](http://www.4Khooneh.org)

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است. و هرگونه نسخه برداری پیگرد قانونی دارد.

تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۶۲۰۰۰۲۶ - ۶۶۹۲۷۷۹۶ - ۶۶۹۲۸۱۷۱

جهت دریافت کتاب در تهران از طریق پیک و در شهرستانها از طریق پست با شماره تلفن

۶۶۹۲۸۰۲۹ (۰۲۱) تماس حاصل فرمایید یا از طریق سایت به صورت اینترنتی تهیه نمایید

# فهرست مطالب

## پودمان اول: کاربرد برخی تابع ها در زندگی روزمره

۵	یادآوری تابع و مفاهیم آن
۹	سوالات چهارگزینه ای یادآوری
۱۱	درس اول: تابع های چند ضابطه ای
۱۳	سوالات چهارگزینه ای درس اول
۱۶	درس دوم: تابع های مثلثاتی
۲۱	سوالات چهارگزینه ای درس دوم
۲۳	درس سوم: تابع نمایی
۲۷	سوالات چهارگزینه ای درس سوم
۲۹	پاسخنامه پودمان اول

## پودمان دوم: درك مفهوم حد

۳۶	درس اول: حد تابع ها
۴۰	درس دوم: محاسبه حد تابع ها
۴۳	سوالات چهارگزینه ای درس اول و دوم
۴۶	پاسخنامه پودمان دوم

## پودمان سوم: مقایسه حدهای يك طرفه و دو طرفه و پیوستگی تابع ها

۵۰	درس اول: حدهای یک طرفه و دو طرفه
۵۳	سوالات چهارگزینه ای درس اول
۵۵	درس دوم: پیوستگی تابع ها
۶۰	سوالات چهارگزینه ای درس دوم
۶۴	پاسخنامه پودمان سوم

## پودمان چهارم: درك مفهوم مشتق

۷۱	درس اول: مشتق تابع ها
۷۴	درس دوم: مشتق و سرعت متحرک ها
۷۵	درس سوم: تعبیر هندسی مشتق
۷۶	سوالات چهارگزینه ای درس اول و دوم و سوم
۷۸	پاسخنامه پودمان چهارم

## پودمان پنجم: محاسبات مشتق و کاربردها

۸۲	درس اول: محاسبه مشتق تابع ها
۸۶	سوالات چهارگزینه ای درس اول
۸۸	درس دوم: تابع صعودی و نزولی و مشتق آنها
۹۴	سوالات چهارگزینه ای درس دوم
۹۷	پاسخنامه پودمان پنجم

# ریاضی ۳

۱ کاربرد برخی تابع ها در زندگی روزمره

۲ درک مفهوم حد

۳ مقایسه حدهای یک طرفه و دو طرفه و پیوستگی تابعها

۴ درک مفهوم مشتق

۵ محاسبات مشتق و کاربردها

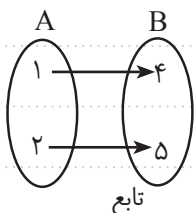
# پودمان اول

## «کاربرد برخی تابعها در زندگی روزمره»

### یادآوری تابع و مفاهیم آن

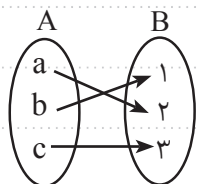
مطمئناً تا حالا اسم تابع زیاد به گوشتان خورده است. تابع به معنای تبعیت کننده یا دنبال کننده است. در طبیعت نیز رابطه زیادی بین کمیت‌ها وجود دارد. مثل رابطه میزان بارش با خشکسالی؛ همانطور که مشخص است خشکسالی تابعی از میزان بارش است. در واقع هر چقدر بارش زیاد شود خشکسالی کم می‌شود.

**تعریف تابع:** اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف) فقط یک مقدار برای کمیت (ب) به دست آید در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.



به عبارت دیگر تابع رابطه‌ای بین دو مجموعه A و B است که در آن هر عضو از مجموعه A فقط به یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود.

نمایش‌های مختلف تابع:



(۱) نمودار ون (۲) زوج مرتب (۳) ضابطه (۴) نمودار

(۱) نمودار ون: دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود که هر عضو از مجموعه اول به وسیله پیکان به مجموعه دوم وصل می‌شود.

(۲) زوج مرتب: حالت دیگر نمایش تابع، زوج مرتب است که فرم کلی نمایش آن  $A(x, y)$  است.

$$A(5, 4), B(6, 8), C(2, -5)$$

$$D = \{(4, 5), (7, 6), (9, 10)\}, E(a, 50)$$

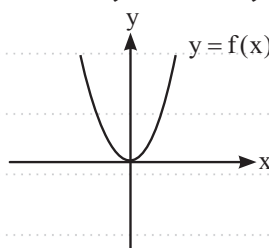
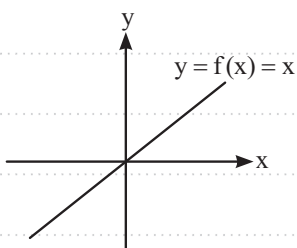
**نکته:** \* هیچگاه  $(a, b)$  و  $(b, a)$  به یک معنا نمی‌باشند و با هم برابر نمی‌باشند.  $(a, b) \neq (b, a)$

\* اگر دو زوج مرتب با یکدیگر برابر باشند تمام عضوهای متناظر آنها می‌بایست با هم برابر باشند.

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

(۳) ضابطه: ضابطه به معنای عبارت جبری می‌باشد که مقدار  $x$  را به  $y$  یا همان  $f(x)$  نسبت می‌دهد که یک عبارت جبری می‌تواند درجه‌های مختلفی داشته باشد.  $y = f(x) = 2x, \dots, y = f(x) = x^2, \dots, y = f(x) = |x|, \dots, y = f(x) = 2x^3 - 2$

(۴) نمودار: هر تابعی دارای یک نمودار است به طور مثال:



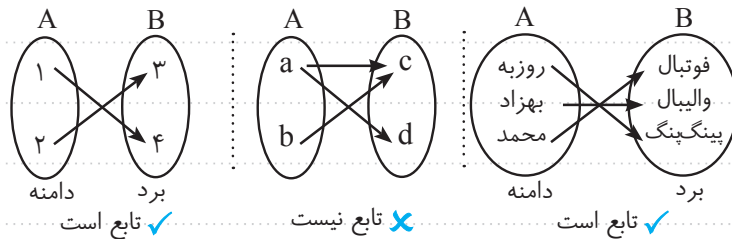
دامنه تابع: دامنه تابع یعنی مقادیری که تابع در آن تعریف می‌شود و با  $D$  نمایش داده می‌شود.

برد تابع: بیان‌گر این است که هر عضو از دامنه، نهایتاً به چه عضوی اشاره می‌کند و آن را با  $R$  نمایش می‌دهند.

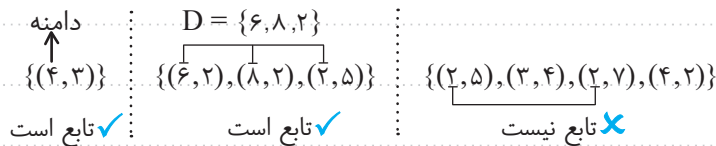
\* خوب همانطور که گفتیم مفهوم تابع این است که اگر رابطه‌ای بین مجموعه اول و دوم وجود داشته باشد، به صورتی که هر عضو از مجموعه اول دقیقاً به یک عضو از مجموعه دوم نظیر بشود. حال با توجه به این تعریف به بررسی تابع بودن یا نبودن در حالت‌هایی که رابطه بین دو مجموعه:

(۱) نمودار ون ، (۲) زوج مرتب ، (۳) نمودار ، (۴) ضابطه باشد می‌پردازیم.

(۱) تشخیص تابع بودن از روی نمودار ون: یک رابطه بین مجموعه  $A$  و مجموعه  $B$  در نمودار ون نمایش داده شده است. تنها در صورتی تابع است که هر عضو  $A$  دقیقاً با یک پیکان خارج بشود و به  $B$  وارد بشود.



(۲) تشخیص تابع بودن از روی زوج مرتب: دقت نمایید که به مؤلفه‌های اول در زوج مرتب دامنه و به مؤلفه‌های دوم، برد آن گفته می‌شود. اما اگر یک رابطه به صورت زوج مرتب داده شده باشد، هنگامی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی دو مؤلفه اول برابر نداشته باشند.



**نکته:** اگر دو زوج مرتبی در مؤلفه اول برابر باشند تنها در صورتی تابع هستند که مؤلفه دوم آن‌ها نیز با یکدیگر برابر باشند.

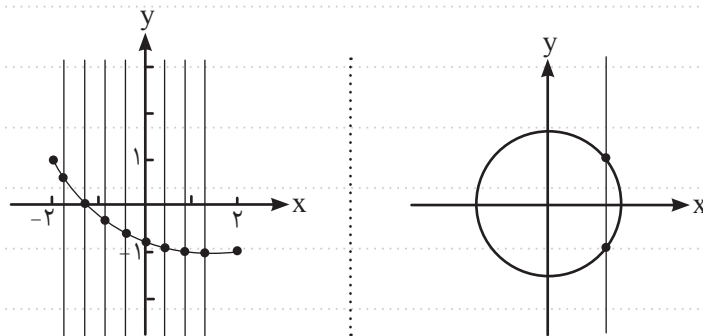
مثال: مقدار  $a$  و  $b$  را به گونه‌ای به دست آورید که رابطه زیر بیانگر یک تابع باشد.

$$\{(3, a), (4, b), (4, 8), (3, b)\}$$

حل.

مؤلفه اول برابر پس باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشد.  $b = 8, a = b = 8$

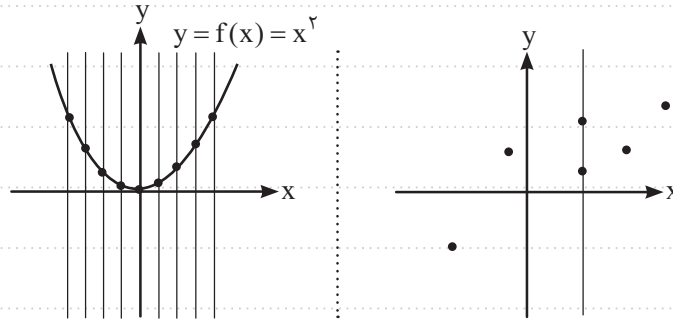
(۳) تشخیص تابع بودن از روی نمودار: اگر نمودار یک رابطه در دسترس باشد هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خطی موازی محور عرض‌ها ( $y$ ) رسم نماییم، نمودار را تنها در یک نقطه قطع کند و نه بیشتر. در ضمن  $x$ های نمودار را دامنه تابع و  $y$ های آن را برد تابع می‌نامند.



$$D_f = [-2, 2], R_f = [-1, 1]$$

تابع است ✓

تابع نیست ✗



$$D_f = \mathbb{R}, R_f = [0, +\infty)$$

✓ تابع است

✗ تابع نیست

۴) تشخیص تابع بودن از روی ضابطه: در ابتدا ضابطه را با کمک نمودار جئوجبرا رسم می‌کنیم. سپس طبق آنچه درباره تشخیص تابع بودن از روی نمودار گفته شد عمل می‌کنیم. روش دیگری به غیر از رسم نمودار برای ضابطه وجود دارد که خارج از کتاب است و فقط جهت مطالعه آزاد گفته می‌شود.

### بیشتر بدانیم

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

شرط تابع بودن یک ضابطه این است که به ازای یک  $x$  تنها یک  $y$  داشته باشیم.

مثال: بررسی نمایید که آیا ضابطه الف)  $y = x$  و ب)  $x = |y|$  تابع هستند.

الف)  $y = x: x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

✓ تابع است

ب)  $x = |y|: x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = \pm y_2$

✗ تابع نیست

نکته: هرگاه در ضابطه‌ای  $y$  توان زوج (۲ و ۴ و ۶ و ...) یا قدرمطلق داشت، به احتمال بسیار زیاد ضابطه یک تابع را مشخص نمی‌کند.

### نکته

دامنه چند جمله‌ای‌هایی مانند  $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$  همواره برابر  $\mathbb{R}$  است به طور مثال دامنه تابع  $y = x^2$  و  $y = x^3 + 2x - 1$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

مثال: در هر یک از توابع زیر دامنه و مقدار  $f(3)$  را به دست آورید.

حل.

الف)  $f(x) = 4x^2 + 8$

$D_f = \mathbb{R}, f(3) = 4 \times (3)^2 + 8 = 44$

ب)  $f(x) = \frac{4x+8}{x-3}$

تابع در ۳ مقدار ندارد و تعریف نشده است. زیرا ریشه مخرج جزء دامنه تابع نیست.

$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

ترکیب توابع: ترکیب دو تابع به معنای قرار دادن یک تابع در درون تابعی دیگر است. به عنوان مثال اگر تابع  $g(x)$  را درون تابع  $f(x)$  قرار دهیم تابع جدیدی به نام  $f(g(x))$  به دست می‌آید که آن را با  $f \circ g(x)$  نمایش می‌دهیم.

• آموزش جامع ریاضی ۳ •

تابع  $y = f(x)$  را در نظر بگیرید. این تابع را می‌توان به عنوان یک ماشین در نظر گرفت که اگر  $x$  را به عنوان ورودی دریافت کند  $f(x)$  یا  $y$  را به عنوان خروجی به ما تحویل دهد.



حال اگر دو تابع  $f$  و  $g$  را داشته باشیم اگر  $x$  را به عنوان ورودی به ماشین  $g$  دهیم،  $g(x)$  خروجی ماشین  $g$  خواهد بود. حال اگر این خروجی را به عنوان ورودی به ماشین  $f$  دهیم، ماشین  $f$ ،  $f(g(x))$  را به عنوان خروجی به ما می‌دهد.



۲ مرحله لازم است تا  $f(g(x))$  تشکیل شود.

(۱)  $x$ هایی که اجازه‌ی ورود به ماشین  $g$  را دارند ( $x \in D_g$ ) وارد تابع  $g$  می‌شوند تا  $g(x)$  خارج شود.

(۲) حال از بین  $g(x)$ هایی که خارج شده‌اند (خروجی‌های ماشین  $g$ )،  $g(x)$ هایی اجازه‌ی ورود به ماشین  $f$  را دارند که  $g(x) \in D_f$  باشند و به این ترتیب  $f(g(x))$  به عنوان خروجی به دست می‌آید.

پس دامنه‌ی تابع  $f(g(x))$  یا  $f \circ g(x)$  برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

به همین ترتیب  $g(f(x))$  را می‌توان تعریف کرد و دامنه‌ی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال ۱: اگر  $f = \{(-2, 1), (0, -1), (1, -2), (3, 0)\}$  و  $g = \{(-3, 0), (0, 4), (2, 3)\}$  باشد، با به دست آوردن دامنه‌ی تابع  $f \circ g$ ، این تابع را به دست آورید.

حل.  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$$\begin{aligned} D_g = \{-3, 0, 2\} & \quad g(-3) = 0 \in D_f \\ & \quad g(0) = 4 \notin D_f \Rightarrow D_{f \circ g} = \{-3, 2\} \\ D_f = \{-2, 0, 1, 3\} & \quad g(2) = 3 \in D_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &= \{(-3, y_1), (2, y_2)\} \\ y_1 &= f(g(-3)) = f(0) = -1 \\ y_2 &= f(g(2)) = f(3) = 0 \end{aligned} \Rightarrow f \circ g = \{(-3, -1), (2, 0)\}$$

مثال ۲: اگر  $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ،  $g(x) = 4(x^2 + x)$  باشد، ضابطه‌ی تابع  $f \circ g(x)$  به ازای  $x \geq -\frac{1}{4}$  کدام است؟

- الف)  $2x$       ب)  $-2x$       ج)  $2(1+x)$       د)  $-2(1+x)$

حل.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(4(x^2 + x)) = 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 1 - |2x + 1| = 1 - 2x - 1 = -2x$$

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



# سوالات چهار گزینه‌ای پودمان اول

## «یادآوری تابع و مفاهیم آن»



۱ تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{1-2x}$  ، به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف شده است؟ (سراسری ۹۶)

- (۱)  $(-\infty, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, \frac{1}{2})$  (۳)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  (۴)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$

۲ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{-x^2+x+2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  کدام بازه است؟ (سراسری ۸۹)

- (۱)  $(1, 2]$  (۲)  $(1, 2)$  (۳)  $[-1, 2]$  (۴)  $(1, +\infty)$

۳ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+2x-3}}$  کدام است؟ (سراسری ۸۵)

- (۱)  $[-1, 3]$  (۲)  $\mathbb{R} - (-3, 1)$

- (۳)  $\mathbb{R} - [-1, 3]$  (۴)  $\mathbb{R} - [-3, 1]$

۴ دامنه تابع  $y = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$  کدام است؟ (سراسری ۸۴)

- (۱)  $(0, 1)$  (۲)  $(1, +\infty)$  (۳)  $[1, +\infty)$  (۴)  $\mathbb{R} - [-2, 1)$

۵ دو تابع بصورت:

$x$	۱	۳	۴	۰
$f(x)$	-۲	۴	۱	۲

$x$	۲	۱	۰	-۱	-۲
$g(x)$	۱	۲	۳	۴	۵

تعریف شده‌اند. مجموع عضوهای دامنه  $f \circ g$  کدام است؟ (سراسری ۸۴)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) ۱۵

۶ اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $(g \circ f)(x) = 2x + 1$  باشد،  $g(0)$  کدام است؟ (آزاد ۸۲)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۱

۷ تعداد صفرهای تابع  $y = |2x^2 - 6x| + |x^2 - 2x - 3|$  برابر کدام است؟ (سراسری ۸۱)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸ دو تابع  $f = \{(1, 2), (0, -2), (4, 0), (-1, 1)\}$  و  $g = \{(2, 3), (-1, 5), (0, 3), (1, 1)\}$  مفروضند. مجموعه

{(1, 3), (0, 1), (-1, 6)} کدام گزینه را نشان می‌دهد؟ (سراسری ۸۱)

- (۱)  $g - f$  (۲)  $g \circ f$  (۳)  $f \circ g$  (۴)  $f + g$

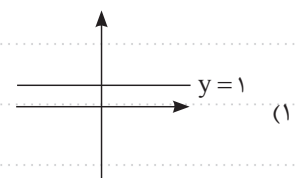
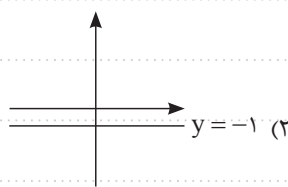
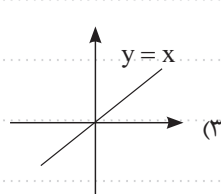
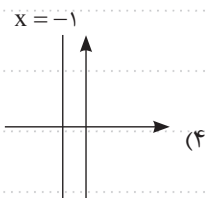
۹ اگر  $f(x) = x + 1$  و  $g(x) = x - 1$  و  $D_f = D_g = [1, 4]$  باشد، آنگاه کدام گزینه جزء دامنه  $f \circ g$  است؟ (آزاد ۸۰)

- (۱)  $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$  (۲)  $[1, 3]$  (۳)  $[1, \frac{5}{2}]$  (۴)  $[\frac{1}{2}, 3]$

۱۰ اگر  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  و  $g(x) = 3x - 2$  مقدار  $(g \circ f)(2)$  کدام است؟ (سراسری ۷۶)

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۱ کدام یک تابع نیست؟



۱۲) برد تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$  کدام است؟

- (۱)  $[-2, 2]$  (۲)  $[-1, 1]$  (۳)  $[0, 1]$  (۴)  $[0, 2]$

۱۳) دامنه‌ی تابع  $y = \frac{|1-x|}{\sqrt{x-|x|}}$  کدام است؟

- (۱)  $\{0\}$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $x > 0$

۱۴) در تابع  $f(x) = x^2 + 2x$  حاصل  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $2x + 1 + \Delta x$  (۲)  $2x + 1 + 2\Delta x$

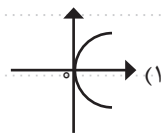
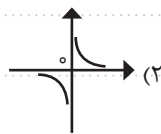
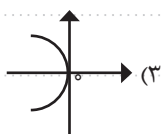
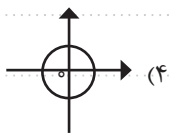
- (۳)  $2x + 2 + \Delta x$  (۴)  $2x + 2 + 2\Delta x$

۱۵) برد تابع  $f(x) = \frac{2}{x+2}$  بصورت مجموعه  $\{2 \text{ و } 1 \text{ و } -1\}$ ، دارای «چه دامنه‌ای» است؟

- (۱)  $\{-4, 0, -1\}$  (۲)  $\{1, 3, 4\}$

- (۳)  $\{2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$  (۴)  $\{-3, -1, 0\}$

۱۶) کدامین شکلها نموداریک تابع است؟



۱۷) کدام یک از رابطه‌های زیر بیانگر این است که  $x$  تابعی از  $y$  است؟

- (۱)  $x^2 + 1 = y$  (۲)  $|x| - y = 0$

- (۳)  $y = \sqrt{x} - 1$  (۴)  $\sqrt{y} - x^4 = 3$