

فهرست

پایه دوازدهم

فصل اول: ماتریس و کاربردها ۷

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی ۲۸

فصل سوم: بردارها ۶۵

آزمون های جامع

آزمون جامع (۱) ۸۴

آزمون جامع (۲) ۸۵

پاسخنامه آزمون جامع (۱) ۸۶

پاسخنامه آزمون جامع (۲) ۸۷

فصل اول

ماتریس و کاربردها

آشنایی با ماتریس

ماتریس، جدولی مستطیلی از اعداد حقیقی است. ماتریسی با m سطر و n ستون را از مرتبه $m \times n$ و هر یک از اعداد داخل آن را یک درایه گوئیم. درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام را با نماد a_{ij} و ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نشان می‌دهیم. مثلاً در ماتریس $A_{3 \times 3}$ زیر، $a_{21} = 2$ و $a_{12} = -1$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن، یکسان باشد.

ماتریس صفر: ماتریسی است که تمام درایه‌های آن، صفر باشند که آن را با نماد $\bar{O}_{m \times n}$ نشان می‌دهیم.

اگر $A = [i^2 - j^2 + 1]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A ، کدام است؟

۱۵ (۴)

۹ (۳)

۴ (۲)

-۱ (۱)

گزینه «۳»

پاسخ: طبق فرض، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{a_{ij} = i^2 - j^2 + 1} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A = 9$$

چند ماتریس خاص

۱. **ماتریس سطری:** ماتریسی است که فقط یک سطر دارد.

۲. **ماتریس ستونی:** ماتریسی است که فقط یک ستون دارد.

۳. **ماتریس قطری:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن، صفر باشند.

تذکر: منظور از درایه‌های واقع بر قطر اصلی، درایه‌های $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ است.

۴. **ماتریس اسکالر:** ماتریسی قطری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، یکسان‌اند.

۵. **ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی اسکالر است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، ۱ باشند. ماتریس همانی از مرتبه n را با نماد I_n نشان می‌دهیم.

۶. **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های زیر قطر اصلی آن، صفر باشند.

۷. **ماتریس پایین‌مثلثی:** ماتریسی مربعی است که درایه‌های بالای قطر اصلی آن، صفر باشند.

$$A = [a \ b \ c \ d]_{1 \times 4}$$

(سطری)

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

(ستونی)

$$C = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(قطری)

$$D = \begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(اسکالر)

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(همانی (واحد))

$$E = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \circ & d & e \\ \circ & \circ & f \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(بالامثلثی)

$$F = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ b & c & \circ \\ d & e & f \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(پایین‌مثلثی)

۲ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & a^2 + 3a + 2 \\ a^2 + a - 2 & 2 \end{bmatrix}$ قطری باشد، ماتریس $B = \begin{bmatrix} a+4 & a^2+3a \\ a+2 & 2a+6 \end{bmatrix}$ چگونه است؟

- گزینه «۳»
 (۱) همانی (۲) اسکالر (۳) بالامثلثی (۴) پایین مثلثی

پاسخ: چون ماتریس A قطری است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + 3a + 2 = 0 &\Rightarrow a = -1, a = -2 \\ a^2 + a - 2 = 0 &\Rightarrow a = 1, a = -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a = -2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ماتریس } B \text{ بالا مثلثی است.}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس را مساوی گوئیم هرگاه اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های آن‌ها، نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

۴ اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x^2 - x & y^2 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+7 & 1 \\ 3x-x^2 & x-4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، حاصل $x-y$ کدام است؟

- گزینه «۴»
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

پاسخ: چون ماتریس‌ها مساوی‌اند، درایه‌ها را نظیر به نظیر با یک دیگر برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^2 - x = y + 7 \\ y^2 = 1 \\ 3x - x^2 = 0 \\ x - 4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = y + 7 \\ y = \pm 1 \\ x = 0 \text{ یا } 3 \\ x - 4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x - y = 3 - (-1) = 4$$

اعمال جبری روی ماتریس‌ها - ۱

جمع دو ماتریس: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند، مجموع آن‌ها ماتریس $C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ از همان مرتبه است.

ضرب عدد در ماتریس: حاصل ضرب عدد حقیقی r در ماتریس $A_{m \times n}$ ، ماتریسی هم مرتبه با A است که هر درایه‌اش، r برابر درایه نظیرش در ماتریس A است، یعنی $rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$.

ویژگی‌های ضرب عدد در ماتریس: ماتریس‌های هم مرتبه A و B و اعداد حقیقی r و s مفروض‌اند. در این صورت:

۱ $r(A \pm B) = rA \pm rB$ ۲ $(r \pm s)A = rA \pm sA$ ۳ $(rs)A = r(sA) = s(rA)$

قرینه یک ماتریس: به ازای هر ماتریس A ، ماتریس $A(-1)$ را قرینه A گوئیم و با نماد $-A$ نشان می‌دهیم.

تفاضل دو ماتریس: تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B را به صورت $A + (-B)$ تعریف کرده و با نماد $A - B$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، درایه‌های ماتریس $A - B$ از تفریق درایه‌های نظیرشان در A و B به دست می‌آیند.

۴ اگر $A = [i-j]_{2 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ به طوری که $j = k$ ؛ $i^2 - j$ ؛ $i > j$ ؛ $i+j$ ؛ $i > j$ کوچک‌ترین درایه ماتریس $A + B$ ، کدام است؟

- گزینه «۴»
 (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

پاسخ: ماتریس‌های A و B را مشخص می‌کنیم تا ماتریس $A + B$ را بیابیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow \text{کوچک‌ترین درایه} = 0$$

۵ اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری که $2A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ و $2B - 3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $A - B$ ، کدام است؟

- گزینه «۱»
 (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) -۱ (۴) -۴

پاسخ: با توجه به فرض سؤال، یک دستگاه دو معادله - دو مجهول، تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \\ 2B - 3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 8 & -11 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \\ -2B + 3A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -8 & 11 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌زنیم}} 7A = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -14 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}} B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی} = -2 + 4 = 2$$

ضرب دو ماتریس: دو ماتریس $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ (که تعداد ستون‌های A برابر با تعداد سطرهای B است)، مفروض‌اند. $A \times B$ ماتریسی چون $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ است که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c_{ij} = [A \text{ سطر } i] \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

۱) ضرب ماتریس $A_{m \times n}$ در ماتریس $B_{p \times q}$ (یعنی $A \times B$) در صورتی قابل تعریف است که $n = p$.

۲) اگر ماتریس $A \times B$ قابل تعریف باشد، ماتریس $B \times A$ لزوماً قابل تعریف نیست.

نکته: اگر I ماتریس همانی و A ماتریسی مربعی هم‌مرتبه با آن باشد، آن‌گاه $AI = IA = A$.

توان‌های یک ماتریس مربعی: توان‌های ماتریس مربعی A ، به صورت مقابل تعریف می‌شوند:

$$A^2 = A \times A, A^3 = A^2 \times A, \dots, A^n = A^{n-1} \times A$$

نتیجه: اگر I ماتریس همانی باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n ، $I^n = I$.

نکته: اگر A ماتریسی مربعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $(kA)^n = k^n A^n$.

(مشابه ریاضی ۹۴ داخل)

سه ماتریس $A_{3 \times 4}$ ، $B_{4 \times 2}$ و $C_{2 \times 3}$ مفروض‌اند. کدام یک از ضرب‌های زیر، تعریف نمی‌شود؟

BCA (۴)

ACB (۳)

CAB (۲)

ABC (۱)

پاسخ: با توجه به عبارات زیر، نتیجه می‌گیریم ماتریس ACB قابل تعریف نیست.

ماتریس ABC تعریف می‌شود. $A_{3 \times 4} B_{4 \times 2} C_{2 \times 3} \Rightarrow$ **گزینه (۱)**
برابر برابر

ماتریس CAB تعریف می‌شود. $C_{2 \times 3} A_{3 \times 4} B_{4 \times 2} \Rightarrow$ **گزینه (۲)**
برابر برابر

ماتریس ACB تعریف نمی‌شود. $A_{3 \times 4} C_{2 \times 3} B_{4 \times 2} \Rightarrow$ **گزینه (۳)**
نا برابر نا برابر

ماتریس BCA تعریف می‌شود. $B_{4 \times 2} C_{2 \times 3} A_{3 \times 4} \Rightarrow$ **گزینه (۴)**
برابر برابر

(ریاضی ۹۸ خارج)

به ازای کدام مقدار x و y ، ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

$x=1, y=-5$ (۴)

$x=2, y=-5$ (۳)

$x=2, y=-7$ (۲)

$x=1, y=-7$ (۱)

پاسخ: ابتدا ماتریس حاصل ضرب را یافته، سپس درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1+4y & -2x+4 \\ 7+y & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قطری است}} \begin{cases} -2x+4=0 \\ 7+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-7 \end{cases}$$

(ریاضی ۹۸ داخل)

از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، عدد غیر صفر x ، کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)

پاسخ: طبق فرض، داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11x-1-x-2-3x=0 \\ 4x-2=0 \\ x+2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-3=0 \\ 4x-2=0 \\ 3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{7} \\ x=\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(9x - 2) = 0 \xrightarrow{x \neq 0} x = \frac{2}{9}$$

ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i=j \\ 2 & ; i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۴ خارج)

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: ابتدا به کمک فرض سؤال، درایه‌های ماتریس A را یافته، سپس ماتریس $A^2 - 4A$ را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^2 - 4A) = 15$$

فصل دوم

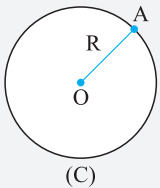
آشنایی با مقاطع مخروطی

مکان هندسی ۱-

یک مجموعه از نقاط را «مکان هندسی» گوییم هرگاه اولاً همه آن‌ها دارای ویژگی مشترکی باشند، دوماً هر نقطه که آن ویژگی را دارد، عضو آن مجموعه باشد.

دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت، به فاصله ثابت قرار دارند. دایره C به مرکز O و شعاع R را با

نماد $C(O, R)$ نشان می‌دهیم.



$OA = R \Leftrightarrow$ نقطه A روی دایره است.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

نقطه ثابت A روی خط l در صفحه، مفروض است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط l مماس‌اند، کدام است؟

(۱) یک خط

(۲) یک خط به جز یک نقطه از آن

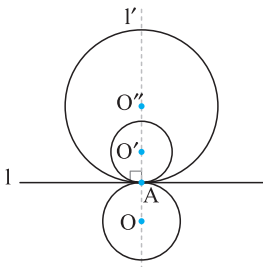
(۳) دو خط به موازات l

(۴) کل صفحه

پاسخ: می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است، پس مرکز همه این دایره‌ها روی

خطی گذرنده از A و عمود بر l قرار دارند (خط l'). اما خود نقطه A نمی‌تواند مرکز هیچ‌کدام از این دایره‌ها باشد، پس

گزینه (۲) صحیح است.



نقطه A و خط l در صفحه، مفروض‌اند. اگر m نقطه روی خط l وجود داشته باشد که از نقطه A به فاصله d باشد، m چند مقدار صحیح دارد؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(۱)

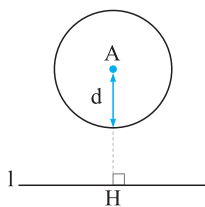
(۲)

(۳)

(۴)

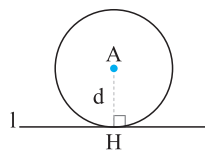
پاسخ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله d قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع d است، پس جواب مسئله، محل برخورد دایره و خط

l است که وضعیت‌های زیر را داریم:



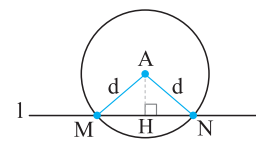
$AH > d$

فاقد جواب



$AH = d$

یک جواب (نقطه H)



$AH < d$

دو جواب (نقاط M و N)

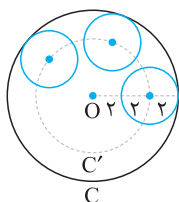
پس مقدار m می‌تواند صفر، یک یا دو باشد. یعنی سه مقدار صحیح برای m وجود دارد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

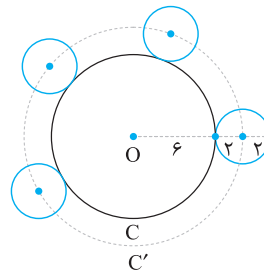
در صفحه، مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ واحد که بر دایره $C(O, 6)$ مماس باشند، کدام است؟

- گزینه «۳»
 (۱) دایره‌ای به شعاع ۸ (۲) دایره‌ای به شعاع ۴ (۳) دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ (۴) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۶

پاسخ: چون دو دایره می‌توانند مماس داخل یا مماس خارج باشند، دو وضعیت داریم:



دایره $C'(O, 4)$



دایره $C'(O, 8)$

بنابراین دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸، جواب مسئله‌اند.

دو نقطه A و B به فاصله ۷ واحد از یک‌دیگر در صفحه، مفروض‌اند. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۲ و از B به فاصله $4x - 3$ واحد باشد، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

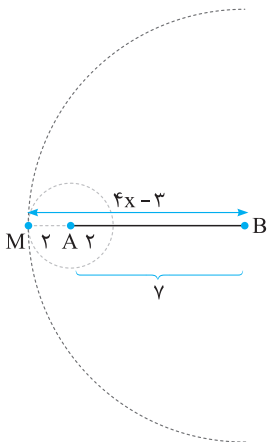
- گزینه «۴»
 (۱) ۲ (۲) ۲/۲۵ (۳) ۳ (۴) ۲ یا ۳

پاسخ:

نکته

اگر نقطه‌ای با چند ویژگی خواسته شده باشد، ابتدا مکان هندسی مربوط به هر ویژگی را یافته، سپس اشتراک این مکان هندسی‌ها را مشخص می‌کنیم تا نقطه مورد نظر، به دست آید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۲ واحد باشند، دایره $C(A, 2)$ و مکان هندسی نقاطی که از B به فاصله $4x - 3$ واحد باشند، دایره $C'(B, 4x - 3)$ است. پس جواب مسئله، محل برخورد این دو دایره است و چون فرض شده که مسئله فقط یک جواب دارد، دو دایره مماس‌اند. در نتیجه دو حالت داریم:



حالت دوم: دو دایره، مماس داخل باشند، در این صورت، داریم:

$$AB = |AM - MB|$$

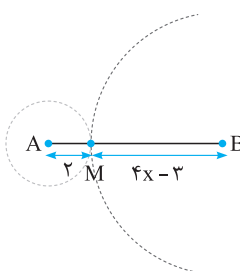
$$\Rightarrow 7 = |2 - 4x + 3|$$

$$\Rightarrow |5 - 4x| = 7$$

$$\Rightarrow 5 - 4x = \pm 7 \Rightarrow 4x = -2$$

غ ق ق

$$\text{یا } 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$



حالت اول: دو دایره، مماس خارج باشند، در این صورت، داریم:

$$AB = AM + MB$$

$$\Rightarrow 7 = 2 + 4x - 3$$

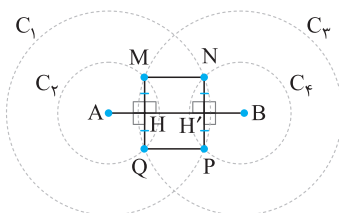
$$\Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

از دو حالت فوق نتیجه می‌گیریم $x = 2$ یا $x = 3$.

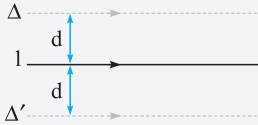
پاره خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

(ریاضی ۹۹ دافل)

- گزینه «۳»
 (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) دوزنقه متساوی‌الساقین

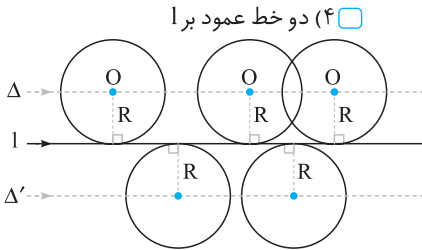


پاسخ: اولاً چون دایره‌ها دوه‌دو هم‌نهشت‌اند، $MQ = NP$. می‌دانیم خط‌المركزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است، پس $MH = NH'$ و چون $MH \parallel NH'$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ ، چهارضلعی $MNH'H$ مستطیل است. در نتیجه $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$. به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم $\hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$. بنابراین چهارضلعی $MNPQ$ هم مستطیل است.



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصله ثابت d باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات l و به فاصله d در طرفین آن می‌باشند.

خط l در صفحه، مفروض است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط l مماس باشند، کدام است؟ ($R > 0$) (مشابه تمرین کتاب درسی)

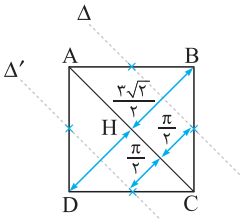


گزینه «۳»
 (۱) یک خط به موازات l (۲) یک خط عمود بر l (۳) دو خط به موازات l (۴) دو خط عمود بر l
پاسخ: می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است. پس مرکز تمام دایره‌های مورد نظر، از خط l به فاصله ثابت R قرار دارند و برعکس. بنابراین مکان هندسی مرکز این دایره‌ها، دو خط Δ و Δ' به موازات l و در طرفین آن است.

مربع $ABCD$ به ضلع ۳ واحد، مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد که از قطر AC به فاصله $\frac{\pi}{4}$ باشد؟ (کنکورهای قدیم)

گزینه «۴»
 (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) چهار
پاسخ:

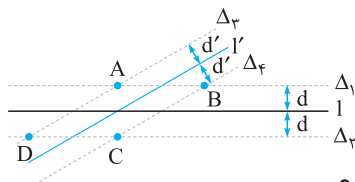
بادآوری طول قطر مربعی به ضلع a ، برابر است با $a\sqrt{2}$.



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از قطر AC به فاصله $\frac{\pi}{4}$ باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات آن است. حال چون $BH = \frac{1}{4}BD = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 2/1$ و $\frac{\pi}{4} = 1/5$ ، نتیجه می‌گیریم $\frac{\pi}{4} < \frac{3\sqrt{2}}{4}$. پس Δ و Δ' محیط مربع را در چهار نقطه، قطع می‌کنند.

دو خط متقاطع l و l' در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از l به فاصله d و از l' به فاصله d' باشد؟ ($d, d' > 0$)

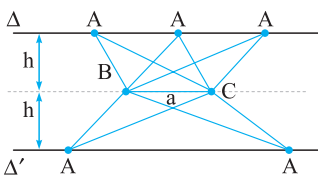
(مشابه تمرین کتاب درسی) (۴) دقیقاً چهار (۳) دقیقاً دو (۲) صفر یا چهار (۱) صفر یا دو



گزینه «۴»
پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از l به فاصله d باشند، دو خط Δ_1 و Δ_2 به موازات l و مکان هندسی نقاطی که از l' به فاصله d' باشند، دو خط Δ_3 و Δ_4 به موازات l' می‌باشد. حال چون l و l' متقاطع‌اند، Δ_1 و Δ_2 با Δ_3 و Δ_4 متقاطع‌اند و مسئله، چهار جواب دارد.

در صفحه، مکان هندسی رئوس مثلث‌های هم‌ارزی (هم‌مساحتی) که قاعده آن‌ها مشترک باشد، کدام است؟

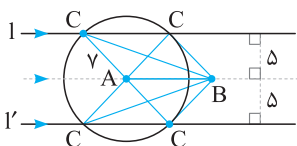
(۱) یک خط (۲) دو خط متقاطع (۳) دو خط موازی (۴) دو خط عمود برهم



گزینه «۳»
پاسخ: می‌دانیم مساحت مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع ($S = \frac{1}{2}ah$). حال چون مساحت و طول قاعده این مثلث‌ها یکسان است، ارتفاع آن‌ها (h) هم یکسان است. پس رأس سوم این مثلث‌ها (نقطه A)، به فاصله‌ای ثابت (h) از ضلع BC قرار دارد و برعکس. در نتیجه، مکان هندسی نقطه A روی دو خط Δ و Δ' به موازات BC و در طرفین آن می‌باشد.

چند نقطه متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه مختصات، می‌توان یافت که فاصله رأس C از نقطه A و پاره خط AB ، به ترتیب 5 و 7 واحد باشد؟ (ریاضی ۹۹ هجری)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



گزینه «۴»
پاسخ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله 5 واحد باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع 5 و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از پاره خط AB به فاصله 5 واحد باشند، دو خط l و l' به موازات آن و در طرفین آن است. پس نقطه C ، محل برخورد دایره با l و l' است که چون $5 < 7$ ، دایره با هر دو خط، متقاطع است و مسئله چهار جواب دارد.

تذکره چون پاره خط AB معلوم نیست، نقطه B می‌تواند درون، بیرون یا روی دایره باشد که در هر صورت، تأثیری در پاسخ این سوال ندارد.

فصل دوم

بردارها

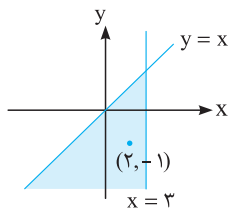
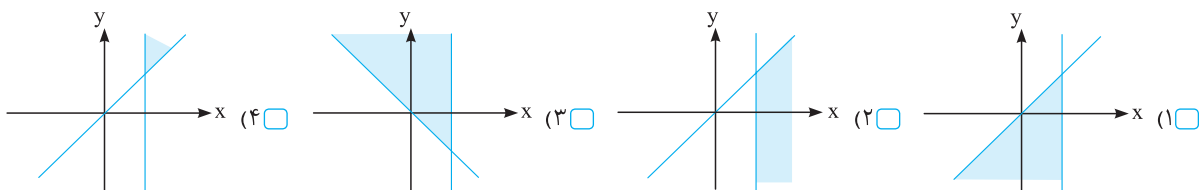
آشنایی با روابط در فضای \mathbb{R}^2

فضای دو بعدی، مجموعه‌ی همه‌ی زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های آن‌ها، اعداد حقیقی‌اند. به عبارت دیگر، $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. حال برای مشخص کردن ناحیه‌هایی که توسط خطوط یا منحنی‌ها در این فضا ایجاد می‌شوند، کافی است مختصات یک نقطه از آن ناحیه را با روابط داده شده، مقایسه کنیم.

۱ نمودار مربوط به رابطه $\begin{cases} y \leq x \\ x \leq 3 \end{cases}$ کدام است؟

گزینه «۱»

(مشابه تمرین کتاب درسی)

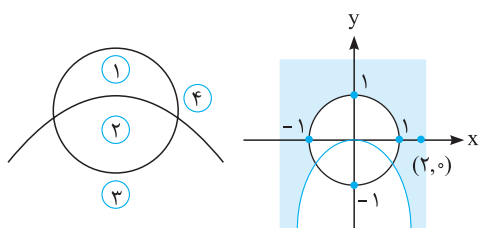
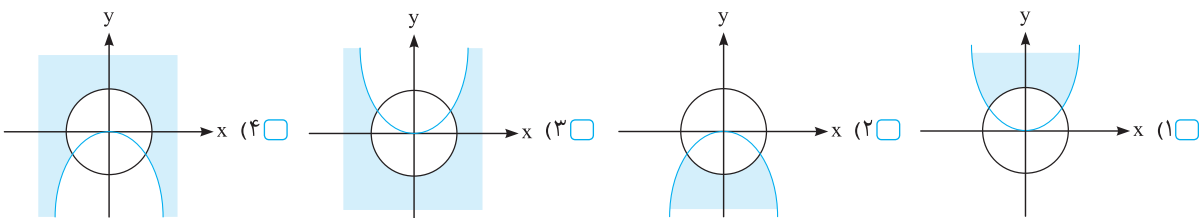


پاسخ: دو خط $y = x$ و $x = 3$ چهار ناحیه در صفحه می‌سازند (با محورهای مختصات کاری نداریم). حال یک نقطه مانند $(2, -1)$ که در رابطه مورد نظر صدق می‌کند را انتخاب کرده و ناحیه‌ای که این نقطه در آن واقع است را می‌یابیم:

۲ نمودار رابطه $x^2 + y^2 \geq 1$ و $x^2 + y^2 \leq 0$ کدام است؟

گزینه «۲»

(مشابه تمرین کتاب درسی)

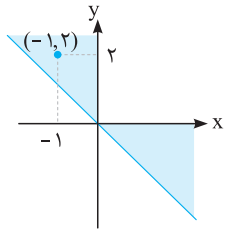
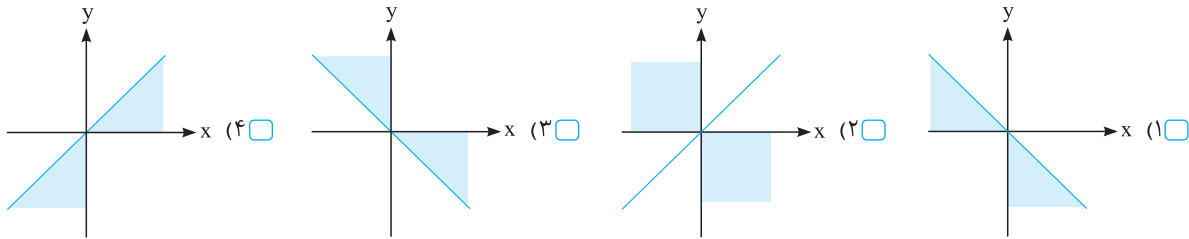


پاسخ: دایره $x^2 + y^2 = 1$ و سهمی $y = -x^2$ ، چهار ناحیه در صفحه می‌سازند. حال نقطه‌ای مانند $(2, 0)$ که در هر دو رابطه مورد نظر صدق می‌کند را در نظر گرفته و ناحیه‌ای که این نقطه در آن واقع است را مشخص می‌کنیم:

(مشابه تمرین کتاب درسی)

نمودار رابطه $x + y \geq 0$ و $xy \leq 0$ ، کدام است ؟

گزینه «۳»



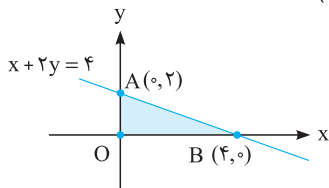
پاسخ: خط $x + y = 0$ صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که با انتخاب نقطه $(-1, 2)$ که در رابطه $x + y \geq 0$ صدق می‌کند، ناحیه $x + y \geq 0$ را می‌یابیم. از طرف دیگر، رابطه $xy \leq 0$ نشان می‌دهد که مختصات نقاط مورد نظر باید مختلف‌العلامه یا صفر باشند (یعنی در ربع دوم یا چهارم قرار داشته باشند)، پس باید قسمتی از ناحیه $x + y \geq 0$ را انتخاب کنیم که در ربع دوم یا چهارم قرار دارد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مساحت ناحیه حاصل از اشتراک روابط $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و $x + 2y \leq 4$ ، کدام است ؟

گزینه «۳»

- ۶ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)



پاسخ: طبق فرض، باید قسمتی از ناحیه $x + 2y \leq 4$ را انتخاب کنیم که در ربع اول قرار دارد. با یافتن نقاط برخورد خط $x + 2y = 4$ با محورهای مختصات، داریم:

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow A = (0, 2) \\ y = 0 &\Rightarrow x = 4 \Rightarrow B = (4, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

چند نقطه با مختصات صحیح مانند (x, y) در ناحیه اول و دوم وجود دارد که رابطه $x^2 + y \leq 8$ برای مختصات آن‌ها برقرار باشد ؟

گزینه «۳»

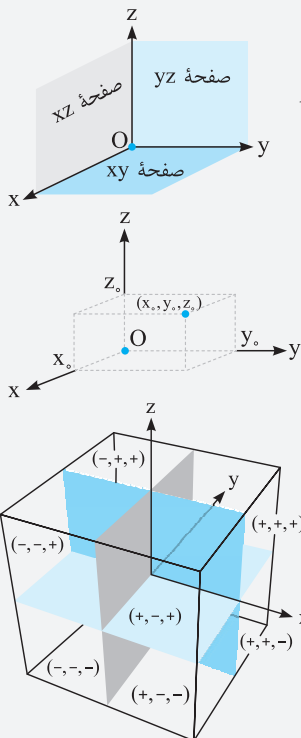
- ۲۵ (۱) ۳۵ (۳) ۳۰ (۲) ۴۰ (۴)

پاسخ: اولاً چون فقط نقاط با مختصات صحیح خواسته شده، نیازی به یافتن ناحیه $x^2 + y \leq 8$ نیست. حال طبق فرض، چون $y \geq 0$ ، نتیجه می‌گیریم

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y \leq 8 \Rightarrow y = 0, 1, \dots, 8 \rightarrow \text{نقطه } 9 \\ x = \pm 1 &\Rightarrow y \leq 7 \Rightarrow y = 0, 1, \dots, 7 \rightarrow \text{نقطه } 8 \times 2 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y \leq 4 \Rightarrow y = 0, 1, \dots, 4 \rightarrow \text{نقطه } 5 \times 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تعداد کل نقاط} = 9 + 16 + 10 = 35$$

$x^2 \leq 8$ و چون x عددی صحیح است، حالت‌های زیر را داریم:

آشنایی با فضای سه بعدی (\mathbb{R}^3)



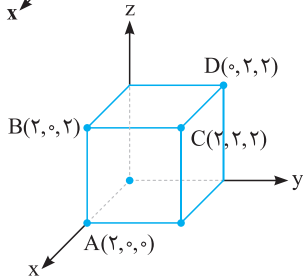
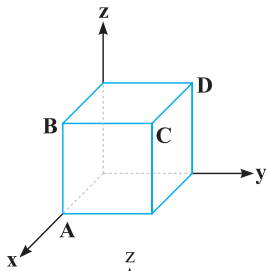
مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را فضای سه‌بعدی (\mathbb{R}^3) گوئیم. یعنی $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. برای نشان دادن مختصات نقاط در این فضا، از سه محور دوجه‌دو عمود برهم استفاده می‌کنیم (محورهای x و y و z). از برخورد هر دو محور مختصات، یک صفحه مختصات ایجاد می‌شود (صفحات xy و yz و zx).

نقطه (x_0, y_0, z_0) را در دستگاه مختصات سه‌بعدی، در نظر می‌گیریم. در این صورت:

۱. x_0 برابر است با فاصله جهت‌دار نقطه از صفحه yz .
۲. y_0 برابر است با فاصله جهت‌دار نقطه از صفحه xz .
۳. z_0 برابر است با فاصله جهت‌دار نقطه از صفحه xy .

نتیجه فاصله نقطه (x_0, y_0, z_0) از هر یک از صفحات xy ، yz و zx ، به ترتیب $|z_0|$ ، $|x_0|$ و $|y_0|$ است.

تذکر صفحات مختصات، فضای \mathbb{R}^3 را به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند که برای شماره‌گذاری آن‌ها، چهار ناحیه بالای صفحه xy را مشابه نواحی فضای \mathbb{R}^2 و چهار ناحیه پایینی را هم در ادامه آن‌ها نام‌گذاری می‌کنیم.



در شکل مقابل، طول یال مکعب ۲ واحد است. مختصات کدام نقطه، درست نیست؟

گزینه ۴» (۱) $A(2,0,0)$

(۲) $B(2,0,2)$

(۳) $C(2,2,2)$

(۴) $D(2,2,0)$

پاسخ: چون طول یال مکعب، ۲ واحد است، مختصات نقاط A، B، C و D، به صورت زیر است، پس گزینه (۴)، درست نیست.

تصویر و قرینه یک نقطه

۱ برای تصویر کردن یک نقطه روی یک محور (یا صفحه) مختصات، مولفه‌های غیر همنام با آن محور (یا صفحه) را صفر می‌کنیم. به عنوان مثال:

$A(-2, 1, 3) \xrightarrow[\text{محور } OZ]{\text{تصویر روی}} A'(0, 0, 3)$

$A(-2, 1, 3) \xrightarrow[\text{صفحه } XZ]{\text{تصویر روی}} A'(-2, 0, 3)$

۲ برای قرینه کردن یک نقطه نسبت به یک محور (یا صفحه) مختصات، مولفه‌های غیر همنام با آن را قرینه می‌کنیم. به عنوان مثال:

$A(-2, 1, 3) \xrightarrow[\text{محور } OX]{\text{قرینه نسبت به}} A'(-2, -1, -3)$

$A(-2, 1, 3) \xrightarrow[\text{صفحه } XY]{\text{قرینه نسبت به}} A'(-2, 1, -3)$

۷ نقطه $A(5, -1, -2)$ را نسبت به صفحه XZ قرینه کرده و نقطه حاصل را نسبت به محور Oz قرینه می‌کنیم. تصویر نقطه حاصل بر روی صفحه xy ، کدام است؟

(۴) $(-5, 1, -2)$

(۳) $(0, 0, -2)$

(۲) $(-5, -1, 0)$

(۱) $(5, -1, 0)$

پاسخ: طبق مطالب درسنامه، داریم: $A(5, -1, -2) \xrightarrow[\text{صفحه } XY]{\text{تصویر روی}} A'''(-5, -1, 0) \xrightarrow[\text{محور } OZ]{\text{قرینه نسبت به}} A''(-5, -1, -2) \xrightarrow[\text{صفحه } XZ]{\text{قرینه نسبت به}} A'(5, 1, -2)$

۸ دو نقطه $A(-1, 1, a)$ و $B(b, 1, -2)$ نسبت به یکی از محورهای مختصات، قرینه یکدیگرند. حاصل $a + b$ ، کدام است؟

(۴) -3

(۳) 3

(۲) -1

(۱) 1

پاسخ: می‌دانیم برای یافتن قرینه یک نقطه نسبت به یک محور مختصات، باید مؤلفه نظیر آن محور را ثابت نگه داشته و دو مؤلفه دیگر را قرینه کنیم. پس چون مؤلفه دوم این نقاط، یکسان است، این نقاط قرینه یکدیگر نسبت به محور y ها بوده و داریم:

$$\begin{cases} b = -(-1) \\ -2 = -(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

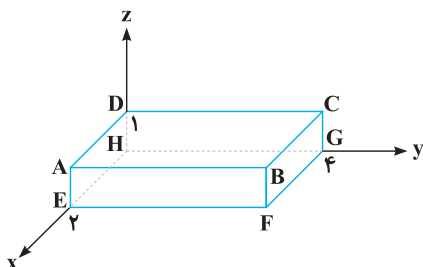
معادله خط و صفحه در حالت‌های خاص

۱ معادله صفحه موازی با صفحه XY (عمود بر محور Z ها)، به صورت $z = k$ است ($k \in \mathbb{R}$) و به همین ترتیب برای دیگر صفحات موازی با صفحات مختصات.

۲ معادله خط عمود بر صفحه XY (موازی با محور Z ها)، به صورت $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ است ($a, b \in \mathbb{R}$) و به همین ترتیب برای دیگر خطوط عمود بر صفحات مختصات.

تذکر خط $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ فصل مشترک دو صفحه $x = a$ و $y = b$ است.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



$BC: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ (۲)

$AB: \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ z = 1 \end{cases}$ (۱)

$AD: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ (۴)

$CG: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ (۳)

۹ در مکعب مستطیل زیر، معادله کدام یک از یال‌ها، درست نیست؟

« آزمون جامع (۱)
« آزمون جامع (۲)
« پاسخنامه تشریحی

آزمون‌های جامع

۱. اگر حاصل ضرب $\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \\ c & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر، قطری است؟

(۱) $\begin{bmatrix} a+b & c-a \\ c-3b & b+c \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} c & 2a+b \\ b-3c & a+b \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} a+b & b-c \\ 3a+c & 2b \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} b-a & 2a+c \\ c-3b & 3a \end{bmatrix}$

۲. اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، دترمینان ماتریس $\frac{-|A^2|A}{4}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{|A|^7}{8}$ (۲) $\frac{|A|^5}{4}$ (۳) $\frac{-|A|^7}{8}$ (۴) $\frac{-|A|^5}{4}$

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^2 X - A^3 = 2A$ ، ماتریس X کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

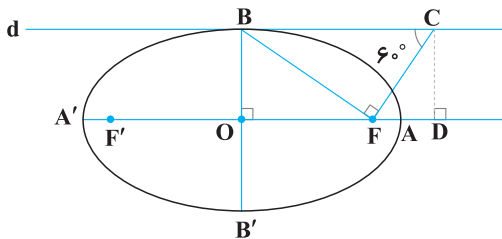
۴. شعاع دایره‌گذرنده از نقطه $A(1, 2)$ که بر خط $l_1: x - y - 1 = 0$ مماس و بر خط $l_2: x + 2y = 0$ عمود باشد، کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۵. شعاع بزرگ‌ترین دایره به مرکز $(-4, 0)$ که با دایره $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ مماس داخل باشد، کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۶. در شکل زیر، خط d در نقطه B بر بیضی به کانون‌های F و F' مماس است. حاصل $\frac{AD}{AF}$ ، کدام است؟



(۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

۷. فاصله کانون یک سهمی از خط هادی آن، $\frac{1}{p}$ واحد است. اگر سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ واحد قطع کند، عرض رأس آن با علامت منفی، کدام است؟

(۱) -1 (۲) -2 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۸. نقاط $A(2, -1, 4)$ ، $B(1, -3, 2)$ و C مفروض‌اند. اگر $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{BC}$ ، فاصله نقطه C از مبدا مختصات، کدام است؟

(۱) $4\sqrt{6}$ (۲) $5\sqrt{6}$ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $6\sqrt{5}$

۹. طول بردارهای a و b به ترتیب ۲ و ۳ واحد و زاویه بین آن‌ها، 120° است. اگر با این دو بردار یک متوازی‌الاضلاع بسازیم، کسینوس زاویه بین قطرهای آن، کدام است؟

(۱) $\frac{-7}{\sqrt{137}}$ (۲) $\frac{-5}{\sqrt{133}}$ (۳) $\frac{-3}{\sqrt{131}}$ (۴) $\frac{-1}{\sqrt{129}}$

۱۰. اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ، مساحت مثلثی که با بردارهای \vec{a} و \vec{j} ساخته می‌شود، کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{29}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{31}}{2}$