فهرست

فصل اول: ماتریس و کاربردها ۷

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون فصل اول ۴۶

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی ۴۹

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون فصل دوم ۱۰۰

فصل سوم: بردارها ۱۰۴

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون فصل سوم ۱۴۲

آزمون‌های جامع ۱۴۵

سؤالات کنکور سراسری ۹۸ .... ۱۴۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌های جامع ۱۵۰

پاسخ‌نامهٔ کنکور سراسری ۹۸ .... ۱۶۰

پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۱۶۵

فصل اول
ماتریس و کاربردها

ماتریس و اعمال روی ماتریس

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن «درایه» می‌گوییم. هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس A، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبهٔ ماتریس A، $m\times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

a_{ij} یعنی درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس A.

ماتریس مقابل دارای ۳ سطر و ۲ ستون است، پس مرتبهٔ آن ۲×۳ است.

$$A=\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{سطراول} \\ \rightarrow \text{سطردوم} \\ \rightarrow \text{سطرسوم} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{ستون‌اول} & \text{ستون‌دوم} \end{array} & \end{array}$$

ماتریس‌های خاص

۱ ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

$$\bar{O}_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲ ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد؛ مرتبهٔ این ماتریس $1\times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}_{۱\times۴}$$

۳ ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد؛ مرتبهٔ این ماتریس $n\times 1$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{۳۱} \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

۴ ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند؛ مرتبهٔ این ماتریس $n\times n$ است. این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است. در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است. (i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون درایهٔ a_{ij} است.)

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{قطرفرعی} & \text{قطراصلی} \end{array} \end{array}$$

۵ ماتریس پایین‌مثلثی: ماتریسی است مربعی که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۶ ماتریس بالامثلثی: ماتریسی است مربعی که همهٔ درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

۷ ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند. (ماتریس قطری هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی.)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

۸ ماتریس اسکالر: ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

۹ ماتریس همانی (واحد): ماتریسی است اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گاهی ماتریس همانی را به صورت $I_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ نمایش می‌دهند.

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۱) جمع و تفریق: اگر دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، با جمع و تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i>j \\ i+j & i \leq j \end{cases}$، حاصل $I - A$ کدام است؟

حواستون‌باشه! i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون درایه است.

پاسخ I ماتریس همانی است که با آن آشنا هستیم؛ اگر تکلیف A را روشن کنیم، همه‌چیز حل است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2-1 & 2+2 & 2+3 \\ 3-1 & 3-2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

قبلاً گفته بودیم در درایه‌های بالای قطر اصلی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است! بنابراین:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

۲) ضرب عدد در ماتریس: اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

$$-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۲ \\ -۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های جمع و تفریق و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C هم‌مرتبه باشند:

۱ $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲ $A+\bar{O}=A$ (خاصیت عضو خنثی در جمع)

۳ $۰\times A=\bar{O}$

۴ $A\times I=I\times A=A$ (خاصیت عضو خنثی در ضرب)

۵ $A+(-A)=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)

۶ $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۷ $k(A\pm B)=kA\pm kB$ (k عددی حقیقی است.)

۳) ضرب دو ماتریس: اگر $A_{m\times \ell}$ و $B_{k\times n}$ باشد، در صورتی $A\times B$ تعریف می‌شود که $\ell=k$ باشد. یعنی ضرب دو ماتریس زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های ماتریس اول و تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند.

$$\underbrace{A_{m\times \ell}\times B_{k\times n}}_{\ell=k}=C_{m\times n}\quad ;\quad A_{۲\times ۳}\times B_{۳\times ۴}=C_{۲\times ۴}$$

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون به صورت نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل‌ضرب جایگزین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۰ & -۱+۲ \\ -۱+۰ & ۱+۰ \\ ۲+۰ & -۲-۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب دو ماتریس

۱ در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. $AB\neq BA$

(ضرب ماتریس همانی (I) در ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $AI=IA=A$)

۲ ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $(AB)C=A(BC)$

۳ در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.

$$\begin{cases} A\times (B\pm C)=A\times B\pm A\times C \\ (B\pm C)\times A=B\times A\pm C\times A \end{cases}$$

۴ حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی اگر $AB=AC$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

$$AB=AC \;\not\Rightarrow\; B=C$$

۵ اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است.

$$AB=\bar{O} \;\not\Rightarrow\; A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B صفر شده اما هیچ‌کدام صفر نبوده‌اند.

۶ حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و از ضرب نظیر به نظیر درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & e & ۰ \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad & ۰ & ۰ \\ ۰ & be & ۰ \\ ۰ & ۰ & cf \end{bmatrix}$$

تست۱ **اگر** $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ **و** $A\times B$ **یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی** $B\times A$ **کدام است؟** *(برگرفته از تمرین کتاب درسی)*

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۲۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»** همین اول کار باید تکلیف $A\times B$ را روشن کنیم!

$$AB=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & ۲a-۸ \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

برای این‌که $A\times B$ قطری باشد، باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، پس:

$$\begin{cases} b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \\ ۲a-۸=۰ \Rightarrow a=۴ \end{cases}$$

حالا که A و B را داریم، $B\times A$ را می‌یابیم.

$$BA=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ ۱۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ برابر است با: $۶+۱۸=۲۴$

حواستون‌باشه! اگر $A\times B$ قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که $B\times A$ هم قطری باشد.

تست۲ **اگر** $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ **و** $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ **به صورت** $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ **و** $b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$ **باشند،** $A\times B$ **کدام است؟** *(تمرین کتاب درسی)*

۱) $\begin{bmatrix} -۳ & -۵ & -۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & -۵ & -۵ \\ ۵ & ۱۸ & ۱۹ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۵ \\ ۵ & ۱۸ & ۱۹ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۳» اول باید A و B را مشخص کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{۱^۲-۱} & \boxed{۲-۱} \\ \boxed{۲-۱} & \boxed{۲^۲-۱} \\ \boxed{۳-۱} & \boxed{۳-۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{۱^۲+۱} & \boxed{۱-۲+۲} & \boxed{۱-۳+۲} \\ \boxed{۲+۱} & \boxed{۲^۲+۱} & \boxed{۲-۳+۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

تست۳ اگر A و B دو ماتریس مربعی ۲×۲ باشند که $BA=\begin{bmatrix} a-۱ & ۲ \\ b+۱ & ۲c \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۴ & -۵ \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۶-

پاسخ گزینهٔ «۳» در عبارت ماتریسی داده‌شده در صورت سؤال، از A (از راست) و از B (از چپ) فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$B(\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ -۴ & -۵ \end{bmatrix})A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}\Rightarrow B(\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix})A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B(۲I)A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}\Rightarrow ۲BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

در صورت سؤال هم BA را داریم، البته با سه‌تا مجهول!

کافی است این BA را مساوی آن BA قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} a-۱ & ۲ \\ b+۱ & ۲c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a-۱=۱ \Rightarrow a=۲ \\ b+۱=۳ \Rightarrow b=۲ \\ ۲c=۴ \Rightarrow c=۲ \end{cases}$$

بنابراین: $a+b+c=۲+۲+۲=۶$

تست۴ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر ضرب دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشد، مجموع درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس B کدام است؟

۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۱
۴) بستگی به درایه‌های ماتریس B دارد.

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول** ماتریس B را به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم. ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد یعنی باید $AB = BA$ باشد.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳a-۲c & ۳b-۲d \\ ۲a+۳c & ۲b+۳d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳a+۲b & -۲a+۳b \\ ۳c+۲d & -۲c+۳d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۳a-۲c = ۳a+۲b \\ ۳b-۲d = -۲a+۳b \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} -۲c = ۲b \Rightarrow b = -c \Rightarrow b + c = ۰ \\ -۲d = -۲a \Rightarrow a = d \end{cases}$$

$b + c$ صفر است، یعنی مجموع درایه‌های روی قطر فرعی صفر است.

روش دوم ضرب دو ماتریس به فُرم $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ (که درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های روی قطر فرعی قرینه‌اند) تعویض‌پذیرند و مجموع درایه‌های روی قطر فرعی آن‌ها صفر است.

استراتژی حل مسئله

اگر $AB = C$ باشد، آن‌گاه درایهٔ c_{ij} از ضرب سطر i اُم ماتریس A و ستون j اُم ماتریس B به دست می‌آید. مثلاً:

$$c_{۲۳} = (\text{سطر دوم ماتریس } A) \times (\text{ستون سوم ماتریس } B)$$

تست ۵ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، **درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم $BA - AB$ کدام است؟**

۱) ۲　　　۲) ۱　　　۳) صفر　　　۴) ۱-

پاسخ گزینهٔ «۴» برای یافتن درایهٔ سطر دوم ستون سوم $BA - AB$ باید درایهٔ سطر دوم ستون سوم BA را منهای درایهٔ سطر دوم ستون سوم AB کرد.

$$(\text{درایهٔ سطر دوم ستون سوم } BA - AB)$$
$$= (\text{درایهٔ سطر دوم ستون سوم } BA) - (\text{درایهٔ سطر دوم ستون سوم } AB)$$
$$= [\text{سطردوم} B][\text{ستون‌سوم} A] - [\text{سطردوم} A][\text{ستون‌سوم} B]$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = (۰ + ۲ + ۱) - (۰ + ۰ + ۴) = -۱$$

تست۶ مجموع درایه‌های حاصل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۳ & ۱ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) صفر ۴) ۴−

پاسخ **گزینهٔ «۱»** در حالت کلی حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}$ به شکل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+b & ۱ \end{bmatrix}$ است، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۸ & ۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به حاصل‌ضرب‌های بالا، درایهٔ سطر دوم ستون اول ماتریس حاصل‌ضرب از مجموع درایه‌های سطر دوم ستون اول ماتریس‌های داده‌شده به دست می‌آید.

درایهٔ سطر دوم ستون اول ماتریس حاصل $= (-۱۲ + (-۱۰) + \cdots + ۰) + (۱ + ۳ + \cdots + ۱۳)$

$= -۴۲ + ۴۹ = ۷$

پس ماتریس حاصل‌ضرب به شکل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های آن ۹ است.

ماتریس و اتحاد

در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند. مثلاً:

$$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B^۲$$

در صورتی رابطهٔ بالا شکل اتحاد به خود می‌گیرد که $AB = BA$ باشد.

استراتژی حل مسئله

اگر دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند یعنی $AB = BA$ باشد، اتحادهای زیر برقرارند و اگر اتحادها در ماتریس‌ها برقرار باشند، دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

۱ $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$

۲ $(A-B)^۲ = A^۲ - ۲AB + B^۲$

۳ $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$

۴ $A^۳ + B^۳ = (A+B)(A^۲ - AB + B^۲)$

۵ $A^۳ - B^۳ = (A-B)(A^۲ + AB + B^۲)$

دقت کنید! اتحادهای فوق در مورد A و I برقرارند. (چرا؟) چون A و I تعویض‌پذیرند.

تست۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & a-۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ b+۲ & ۷ \end{bmatrix}$ و $(A+B)^۲ = A^۲ + B^۲ + ۲AB$ ، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۷   ۳) -۷ ۴) -۹

پاسخ گزینهٔ «۱» چون بین دو ماتریس مربعی A و B، اتحاد برقرار است، پس ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $AB = BA$ است، بنابراین:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & a-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ b+۲ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶+۶b & ۴۵ \\ ۸+(a-۱)(b+۲) & ۷a-۱ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ b+۲ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & a-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۳a+۲۱ \\ b+۱۶ & ۶b+۷a+۵ \end{bmatrix}$$

از آن‌جا که $AB = BA$ است، پس:

$$\begin{cases} ۱۶+۶b=۱۰ \Rightarrow b=-۱ \\ ۳a+۲۱=۴۵ \Rightarrow a=۸ \end{cases} \Rightarrow a-b=۸-(-۱)=۹$$

اگر نکته دوست دارید! بدانید که ضرب ماتریس‌های ۲×۲ هنگامی خاصیت جابه‌جایی دارد که نسبت درایه‌های نظیر قطر فرعی آن‌ها برابر با نسبت تفاضل درایه‌های قطرهای اصلی آن‌ها باشد.

$$AB = BA \Rightarrow \frac{۶}{۳} = \frac{۲}{b+۲} = \frac{a-۱-۱}{۷-۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲}{b+۲} = ۲ \Rightarrow b+۲=۱ \Rightarrow b=-۱ \\ \frac{a-۲}{۳} = ۲ \Rightarrow a-۲=۶ \Rightarrow a=۸ \end{cases}$$

بنابراین: $a-b=۸-(-۱)=۹$

توان ماتریس‌ها

اگر ماتریس A مربعی باشد (چون با هر توانی از خودش تعویض‌پذیر است)، داریم:

$$A^۱ = A \ , \ A^۲ = A.A \ , \ A^۳ = A.A^۲ = A^۲.A \ , \ \dots \ , \ A^n = A.A^{n-۱} = A^{n-۱}.A$$

دقت‌کنید! اگر A ماتریس مربعی، m و n اعدادی طبیعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) $I^n = I$

۲) $(kA)^n = k^n A^n$

۳) $A^m \times A^n = A^{m+n}$

۴) $(A^m)^n = A^{mn}$

توان ماتریس‌های خاص

برای محاسبهٔ توان‌های ماتریس مربعی A (به طور خاص **در** مورد توان‌های بزرگ!)، راه کلی این است که بین A، $A^۲$، $A^۳$ و ... رابطه‌ای برقرار کنیم؛ اما در مورد برخی ماتریس‌های خاص، توان‌های بزرگ به راحتی قابل محاسبه‌اند. این ماتریس‌ها عبارت‌اند از:

۱) اگر A مثلثی باشد به طوری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر باشند، تمام توان‌های بزرگ‌تر یا مساوی مرتبهٔ آن برابر صفر است.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & a \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{n\geq ۲} = \bar{O} \ , \ B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ \\ b & c & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow B^{n \geq ۳} = \bar{O}$$

۲ ماتریس خودتوان: اگر ماتریس A مربعی و $A^{2}=A$ باشد، این ماتریس را خودتوان گوییم؛ یعنی تمام توان‌های طبیعی A با A برابر می‌شوند.

$$A^{2}=A \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} A^{n}=A$$

دقت‌کنید! ماتریس I، یک ماتریس خودتوان است، یعنی به هر توان طبیعی برسد برابر با خودش می‌شود. $(I^{n}=I)$

۳ ماتریس متناوب: اگر $A^{2}=I$ باشد، این ماتریس را متناوب گوییم زیرا توان‌های زوج این ماتریس برابر I و توان‌های فرد آن برابر با خود ماتریس می‌شوند.

$$A^{2}=I \Rightarrow \begin{cases} A^{\text{فرد}}=A \\ A^{\text{زوج}}=I \end{cases}$$

۴ ماتریس قطری: اگر A قطری باشد، برای محاسبهٔ A^{n} کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^{n}=\begin{bmatrix} a^{n} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n} \end{bmatrix}$$

استراتژی حل مسئله

برای محاسبهٔ توان‌های بزرگ ماتریس‌ها، ابتدا توان دوم را به دست می‌آوریم. اگر خودتوان یا متناوب بود، هر توانی از آن به راحتی قابل محاسبه است، در غیر این صورت سعی می‌کنیم بین توان‌های اول، دوم و سوم ماتریس رابطه‌ای برقرار کنیم. (در مورد توان‌های کوچک می‌توانیم از ضرب ماتریس در خودش استفاده کنیم تا به توان دلخواه برسیم.)

تست ۸ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{7}-A^{4}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا A^{2} را پیدا می‌کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می‌افتد …

$$A^{2}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

چون $A^{2}=I$ شده پس ماتریس A متناوب است؛ یعنی توان‌های زوج ماتریس A برابر I و توان‌های فرد ماتریس A برابر با خود ماتریس A می‌شوند.

بنابراین $A^{7}=A$ و $A^{4}=I$ است و …

بنابراین:

$$A^{7}-A^{4}=A-I=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

تست۹ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) بالامثلثی ۲) پایین‌مثلثی ۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

پاسخ گزینهٔ «۴» برای این‌که به $A^{۴}$ برسیم باید $A^{۲}$ را به دست آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$A^{۲}$ را در خودش ضرب می‌کنیم و به $A^{۴}$ می‌رسیم! به همین سادگی.

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۴}$، همانی است.

تست۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۱۴۰۱}-A^{۱۳۹۸}$ کدام است؟

۱) A ۲) $\bar{O}$ ۳) I ۴) $-A$

پاسخ گزینهٔ «۲» ماتریس A مثلثی و درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند، پس تمام توان‌های بزرگ‌تر مساوی مرتبهٔ ماتریس برابر با صفرند؛ یعنی $A^{n\geq ۳}=\bar{O}$. بنابراین:

$$A^{۱۴۰۱}-A^{۱۳۹۸}=\bar{O}-\bar{O}=\bar{O}$$

تست۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}$، ماکزیمم مقدار مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۹}+A^{۱۳۹۸}$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) به x بستگی دارد.

پاسخ گزینهٔ «۱» چون با توان‌های A سروکار داریم، پس باید اول $A^{۲}$ را پیدا کنیم.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos^{۲} x+\sin^{۲} x & \cos x\sin x-\sin x\cos x \\ \sin x\cos x-\cos x\sin x & \sin^{۲} x+\cos^{۲} x \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

چون $A^{۲} = I$ شده، پس ماتریس متناوب است؛ یعنی توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد A برابر A هستند.

$$A^{۱۳۹۹} + A^{۱۳۹۸} = A + I = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+\cos x & \sin x \\ \sin x & ۱-\cos x \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^{۱۳۹۹} + A^{۱۳۹۸}$ برابر با $۲+۲\sin x$ است؛ زمانی این مجموع ماکزیمم می‌شود که $\sin x$ حداکثر مقدار خود یعنی ۱ را داشته باشد.

ماکزیمم مجموع درایه‌های $A^{۱۳۹۹} + A^{۱۳۹۸} = ۲ + ۲(۱) = ۴$

تست ۱۲ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه بوده، $AB = -B$ و $BA = A$، حاصل $A^{۲}B^{۲}$ کدام است؟

۱) AB ۲) BA ۳) $-AB$ ۴) $-BA$

پاسخ گزینهٔ «۳» باید ابتدا به جای A و B در $A^{۲}B^{۲}$ به ترتیب BA و $-AB$ جایگزین کنیم و سپس هر جا AB و BA دیدیم به جای آن‌ها $-B$ و A قرار دهیم.

$$A^{۲}B^{۲} = AA \times BB = (BA \times BA)((-AB)(-AB)) = (B(AB)A)(A(BA)B)$$

بنابراین:

$$A^{۲}B^{۲} = (B\underbrace{(AB)}_{-B}A)(A\underbrace{(BA)}_{A}B)$$

$$= (-B\underbrace{(BA)}_{A})(A\underbrace{(AB)}_{-B}) = (-BA)(-AB) = (-A)(B) = -AB$$

تست ۱۳ اگر $A^{۲} + A - I = \bar{O}$ باشد، $A^{۶}$ کدام است؟

۱) $۸A - ۵I$ ۲) $-۸A + ۵I$ ۳) $۸A + ۵I$ ۴) $-۸A - ۵I$

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول** از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال، $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم و سعی می‌کنیم $A^{۶}$ را بسازیم.

$$A^{۲} + A - I = \bar{O} \Rightarrow A^{۲} = I - A$$

طرفین رابطهٔ بالا را به توان ۳ می‌رسانیم و هر جا $A^{۲}$ دیدیم، به جای آن $I - A$ قرار می‌دهیم.

$$A^{۲} = I - A \xrightarrow{\text{توان۳}} A^{۶} = (I-A)^{۳} = I^{۳} - ۳I^{۲}A + ۳A^{۲}I - A^{۳}$$

$$\Rightarrow A^{۶} = I - ۳A + ۳(I-A) - (I-A)A$$

بنابراین:

$$A^{۶} = I - ۳A + ۳I - ۳A - A + A^{۲} = ۴I - ۷A + (I - A) = ۵I - ۸A$$

روش دوم اتحاد چاق و لاغر $A^{۳} - I^{۳} = (A-I)(A^{۲} + A + I^{۲})$ را خوب می‌شناسیم؛ با توجه به این‌که از عبارت $A^{۲} + A + I$ می‌توان اتحاد چاق و لاغر ساخت، ابتدا از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال $A^{۲} + A + I$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{۲} + A - I = \bar{O} \xrightarrow{+۲I} A^{۲} + A + I = ۲I$$

حالا طرفین رابطهٔ بالا را در $A - I$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(A-I)(A^{۲} + A + I) = (A-I)(۲I) \Rightarrow A^{۳} - I = ۲A - ۲I \Rightarrow A^{۳} = ۲A - I$$

کافی است طرفین رابطهٔ صفحهٔ قبل را به توا ن ۲ برسانیم تا A^6 به دست آید؛ فقط هر جا A^2 دیدیم به جای آن $I-A$ جایگزین می‌کنیم.

$$A^3 = 2A - I \xrightarrow{\text{توان}\,2} A^6 = (2A-I)^2 = 4A^2 - 4A + I^2$$
$$\Rightarrow A^6 = 4(I-A) - 4A + I = 5I - 8A$$

دقت‌کنید! **۱** $AI = A$، **۲** $I^n = I \quad (n \in \mathbb{N})$

رابطهٔ کیلی ـ همیلتن

شاید اسم مرحوم همیلتُن و شادروان کِیلی به گوشتان خورده باشد!

نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر مطرح شده است.

رابطهٔ کِیلی ـ همیلتُن می‌گوید: «هر ماتریس ۲×۲ به شکل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$ صدق می‌کند.»

تست ۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$، دوتایی (α, β) کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۴)*

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,3)$

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول** بدون فوت وقت! A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را از قبل می‌شناسیم. (بله! I ماتریس همانی است.)

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که $\alpha = 2$ است. با قراردادن $\alpha = 2$ در معادلهٔ $\beta - 2\alpha = 9$، داریم:

$$\beta - 4 = 9 \Rightarrow \beta = 13$$

بنابراین دوتایی (α, β)، $(2,13)$ است.

روش دوم به کمک رابطهٔ کِیلی ـ همیلتُن داریم: $A^2 - (-2+4)A + (-8-5)I = \bar{O}$

$$\Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

دقت‌کنید! دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-2 \times 4) - (1 \times 5) = -13$$

تست ۱۵ اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{bmatrix}$ و $A^۲=۲A-۳I$، در این صورت $m^۲+n^۲$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۳ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول** اول $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m+۱ & mn-m\\ ۲n-۲ & n^۲+۲m\end{bmatrix}$$

با جایگزین‌کردن $A^۲$ در رابطهٔ $A^۲=۲A-۳I$ داریم:

$$\begin{bmatrix}۲m+۱ & mn-m\\ ۲n-۲ & n^۲+۲m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۲m\\ ۴ & ۲n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵ & ۲m\\ ۴ & ۲n-۳\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}۲m+۱=-۵ \Rightarrow m=-۳\\ ۲n-۲=۴ \Rightarrow n=۳\end{cases}$$

پس:

$$m^۲+n^۲=(-۳)^۲+۳^۲=۱۸$$

روش دوم ماتریس A یک ماتریس ۲×۲ است و در رابطهٔ کیلی ـ همیلتن صدق می‌کند، پس:

$$A^۲-(-۱+n)A+\begin{vmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{vmatrix}I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۲+(۱-n)A+(-n-۲m)I=\bar{O} \Rightarrow A^۲=(n-۱)A+(n+۲m)I$$

با توجه به رابطهٔ $A^۲=۲A-۳I$ که در صورت سؤال داده شده، داریم:

$$\begin{cases}n-۱=۲ \Rightarrow n=۳\\ n+۲m=-۳ \xrightarrow{n=۳} m=-۳\end{cases}$$

بنابراین: $m^۲+n^۲=(-۳)^۲+۳^۲=۱۸$

دترمینان

به هر ماتریس مربعی مانند A، عددی حقیقی نسبت داده می‌شود که به آن دترمینان ماتریس A گویند و با $|A|$ نمایش می‌دهند.

کتاب درسی فقط به محاسبهٔ دترمینان‌های ۱×۱، ۲×۲ و ۳×۳ اشاره کرده که در ادامه خواهید دید.

۱ $A=[k]_{۱\times۱} \Rightarrow |A|=k$

۲ $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$

روش محاسبهٔ دترمینان ۳×۳

برای محاسبهٔ دترمینان ۳×۳ دو روش وجود دارد:

روش اول: بسط دترمینان

در این روش یک سطر یا ستون دلخواه از دترمینان را انتخاب می‌کنیم، درایهٔ اول از سطر یا ستون انتخاب‌شده را در نظر می‌گیریم، سطر و ستون آن را حذف می‌کنیم و دترمینان درایه‌های باقی‌مانده را

حساب می‌کنیم، سپس در $(-1)^{\text{شمارهٔ سطر}+\text{شمارهٔ ستون}}$ درایهٔ انتخاب‌شده و خود درایهٔ انتخاب‌شده ضرب می‌کنیم. برای دو درایهٔ بعدی هم همین کار را انجام می‌دهیم و سه عدد به‌دست‌آمده را با هم جمع می‌کنیم. ببینید:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}+b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

- بهتر است نسبت به سطر یا ستونی دترمینان بگیریم که تعداد صفر بیشتری دارد.
- علامت درایه‌ها در ماتریس 3×3 (برای محاسبهٔ دترمینان نسبت به سطرها یا ستون‌های مختلف) به این صورت است:

$$(-1)^{i+j}:\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

روش دوم: دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان 3×3

دو ستون اول ماتریس را کنار دترمینان می‌نویسیم، از قطر اصلی ماتریس سه خط می‌کشیم، اعداد روی هر یک از این خط‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و حاصل‌ضرب اعداد روی سه خط را با هم جمع می‌کنیم و m می‌نامیم.

حالا از قطر فرعی ماتریس سه خط می‌کشیم، اعداد روی هر یک از خط‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و حاصل‌ضرب اعداد روی سه خط را با هم جمع می‌کنیم و n می‌نامیم.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

دترمینان ماتریس برابر با $m-n$ است.

دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ به روش ساروس برابر است با:

$$|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

تست ۱۶ اگر $A=\begin{bmatrix} 4|A| & 3 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، $|A|$ کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) $-\frac{3}{4}$ و -1 ۲) $\frac{3}{4}$ و 1 ۳) $-\frac{3}{4}$ و 1 ۴) $\frac{3}{4}$ و -1

پاسخ **گزینهٔ «۳»** یک دترمینان ساده! کار ما را راه می‌اندازد...

$$|A|=4|A|^2-3 \Rightarrow 4|A|^2-|A|-3=0 \Rightarrow (4|A|+3)(|A|-1)=0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} |A|=-\frac{3}{4} \\ |A|=1 \end{cases}$$

تست ۱۷ حاصل دترمینان $A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۵   ۲) ۷   ۳) ۹   ۴) ۱۹

پاسخ گزینهٔ «۴» بلدیم حاصل دترمینان ۲×۲ را حساب کنیم.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۱۳ - (-۶) = ۱۹$$

تست ۱۸ اگر $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & -۴ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = a + ۴\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}$ ، مقدار a کدام است؟

۱) ۳۶−   ۲) ۲۰−   ۳) ۱۶   ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ «۱» صورت سؤال رسماً به ما اعلام می‌کند که باید نسبت به سطر دوم یا ستون دوم دترمینان بگیریم. (از کجا فهمیدیم؟ از $\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}$ ۴)

البته می‌توانید نسبت به هر سطر یا ستونی که دوست دارید دترمینان بگیرید!

چون یکی از درایه‌های ستون دوم صفر است، نسبت به ستون دوم دترمینان می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & -۴ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۲\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} - ۴\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} = -۲(-۱۰) - ۴(۱+۶) = -۸$$

بنابراین:

$$-۸ = a + ۴\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow -۸ = a + ۴(۱+۶) \Rightarrow -۸ = a + ۲۸ \Rightarrow a = -۳۶$$

تست ۱۹ اگر در ماتریس اسکالر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ ، $a_{۱۱} = ۴$ باشد، $|A|$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) صفر   ۲) ۱۶−   ۳) ۱۶   ۴) ۶۴

پاسخ گزینهٔ «۴» ماتریس اسکالر ۳×۳ به شکل $\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$ است، چون درایهٔ $a_{۱۱} = ۴$ است،

بنابراین ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ است که دترمینان آن برابر با $۴^۳=۶۴$ است.

دقت‌کنید! دترمینان ماتریس قطری برابر با ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است.

تست ۲۰ معادلهٔ $\begin{vmatrix}۱ & x & x^۲\\ ۱ & x^۲ & x\\ ۱ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینهٔ «۳» نسبت به سطر سوم که تعداد صفر بیشتری دارد، دترمینان می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ها مشخص شوند.

$$\begin{vmatrix}۱ & x & x^۲\\ ۱ & x^۲ & x\\ ۱ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}x & x^۲\\ x^۲ & x\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow x^۲-x^۴=۰ \Rightarrow x^۲(۱-x^۲)=۰$$

$$+ \quad - \quad +$$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده سه ریشهٔ ۱، ۰ و ۱− دارد.

تست ۲۱ مقدار x از رابطهٔ $\begin{vmatrix}۰ & x-۳ & x-۲\\ x+۳ & ۰ & -۴\\ x+۲ & ۶ & ۰\end{vmatrix}=۰$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۷)

۱) ۶− و ۱− ۲) ۶ و ۱− ۳) ۶− و ۱ ۴) ۶ و ۱

پاسخ گزینهٔ «۳» می‌توانیم نسبت به هر یک از سطرها یا ستون‌ها دترمینان بگیریم (هر یک از سطرها یا ستون‌ها یک درایهٔ صفر دارند).

ما از دستور ساروس، حاصل دترمینان را محاسبه می‌کنیم و برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$\left|\begin{array}{ccc}۰ & x-۳ & x-۲\\ x+۳ & ۰ & -۴\\ x+۲ & ۶ & ۰\end{array}\right|\begin{array}{cc}۰ & x-۳\\ x+۳ & ۰\\ x+۲ & ۶\end{array}$$

بنابراین حاصل دترمینان برابر است با:

$$-۴(x-۳)(x+۲)+۶(x+۳)(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow -۴x^۲+۴x+۲۴+۶x^۲+۶x-۳۶=۰$$

بنابراین:

$$۲x^۲+۱۰x-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲+۵x-۶=۰ \Rightarrow (x+۶)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=-۶\\ x=۱\end{cases}$$

ویژگی‌های دترمینان

۱ اگر همهٔ درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس (مربعی) برابر صفر باشند، حاصل دترمینان صفر است.

۲ اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند: $|AB| = |BA| = |A||B|$

۳ $|A^n| = |A|^n \qquad (n \in \mathbb{N})$

۴ اگر دو سطر (یا دو ستون) ماتریسی، ضریب هم باشند (در حالت خاص: با هم برابر باشند)، حاصل دترمینان صفر است.

۵ دترمینان ماتریس‌های قطری و مثلثی از ضرب درایه‌های روی قطر اصلی به دست می‌آید.

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc \ , \ \begin{vmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc$$

۶ $|I| = |I^n| = ۱ \qquad (n \in \mathbb{N})$

۷ اگر درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) دترمینان در عددی ضرب شود، حاصل دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = m \Rightarrow \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = km$$

۸ اگر عدد از دترمینان بیرون بیاید، به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

$A_{n\times n}, k \in \mathbb{R} : |kA| = k^n |A|$

مثلاً اگر $A_{۳\times۳}$ باشد، $|-۲A| = (-۲)^۳ |A| = -۸|A|$

۹ اگر $A_{m\times n}$، $B_{n\times m}$ و $m > n$ باشد، آن‌گاه $|AB| = ۰$ است.

۱۰ اگر k واحد به درایهٔ a_{ij} اضافه شود، به دترمینان مقدار زیر اضافه می‌شود:

$k \times (-۱)^{i+j} \times$ (دترمینان حذف سطر i اُم و ستون j اُم)

۱۱ دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{n\times n}$ به ازای $n \geq ۳$، همواره صفر است. (i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون درایهٔ a_{ij} است.)

تست ۱۲ اگر $C - A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، حاصل $|BC - BA|$ کدام است؟

۱) ۸− ۲) ۴− ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ «۱» با فاکتورگیری از B داریم: $|BC - BA| = |B(C - A)|$

چون B و C − A مربعی و هم‌مرتبه‌اند، به جای دترمینان ضرب می‌توانیم ضرب دترمینان‌ها را جایگزین کنیم.

$$|B(C-A)| = |B||C-A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۴(۴-۶) = -۸$$

تست۲۳ اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ باشند، با فرض $|A|=-۲$ و $|B|=\frac{۱}{۴}$، حاصل $|-۲A^۳B^۲|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ گزینهٔ «۲» با دانستن دو نکته، سؤال به راحتی حل می‌شود.

اولاً، عدد از دترمینان بیرون بیاید، به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

ثانیاً، اگر A و B مربعی و هم‌مرتبه باشند، $|AB|=|A||B|$ است.

بنابراین:

$$|-۲A^۳B^۲|=(-۲)^۳|A^۳B^۲|=-۸|A|^۳|B|^۲=-۸(-۲)^۳(\frac{۱}{۴})^۲$$

پس:

$$|-۲A^۳B^۲|=(-۸)(-۸)(\frac{۱}{۱۶})=۴$$

تست۲۴ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$، حاصل $|A^۳-A^۲|$ کدام است؟

۱) -۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۵۶ ۴) ۱۴۴

پاسخ گزینهٔ «۲» همین ابتدای کار، دترمینان A را نسبت به سطر دوم به دست می‌آوریم تا خیالمان از بابت دترمینان A راحت باشد.

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=-۲\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}=-۲(۱-۲)+۰=۲$$

در داخل دترمینان از $A^۲$ فاکتور می‌گیریم و سپس دترمینان را به ضرب دو دترمینان تفکیک می‌کنیم.

$$|A^۳-A^۲|=|A^۲(A-I)|=|A^۲||A-I|$$

اگر $A-I$ را به دست بیاوریم و دترمینان آن را حساب کنیم، کار تمام است.

$$A-I=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۳ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix}۰ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۳ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & -۱\end{vmatrix}=-۲-(-۶)=۴$$

بنابراین:

$$|A^۳-A^۲|=|A|^۲|A-I|=۲^۲\times۴=۱۶$$

تست ۲۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & -۱\\ ۱ & -۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$، حاصل $|AB|-|BA|$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۱۴ ۳) صفر ۴) -۲۸

پاسخ **گزینهٔ «۴»** می‌دانیم اگر $A_{m\times n}$، $B_{n\times m}$ و $m>n$ باشد، حاصل دترمینان AB برابر صفر است؛ چون $A_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳}$ است، پس دترمینان AB برابر صفر است.

اما باید BA را به دست بیاوریم و دترمینان آن را حساب کنیم.

$$BA=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & -۱\\ ۱ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۴ & -۱۰\end{bmatrix}\Rightarrow |BA|=-۲۰-۸=-۲۸$$

بنابراین:

$$|BA|-|AB|=-۲۸-۰=-۲۸$$

تست ۲۶ اگر A وارون‌پذیر و $۲A=\begin{bmatrix}۲|A| & -۴\\ -۵|A| & ۳|A|^۲\end{bmatrix}$، حاصل $\left|\frac{||A|A|}{A^۲}\right|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ **گزینهٔ «۴»** A وارون‌پذیر است یعنی $|A|\neq ۰$ است.

از طرفین $۲A=\begin{bmatrix}۲|A| & -۴\\ -۵|A| & ۳|A|^۲\end{bmatrix}$ دترمینان می‌گیریم، داریم:

$$|۲A|=\begin{vmatrix}۲|A| & -۴\\ -۵|A| & ۳|A|^۲\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲^۲|A|=۶|A|^۳-۲۰|A| \Rightarrow ۶|A|^۳-۲۴|A|=۰$$

$$\Rightarrow ۶|A|(|A|^۲-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}|A|=۰ & \text{غ.ق.}\\ |A|=\pm۲\end{cases}$$

حواستون باشه! وقتی عدد از دترمینان بیرون می‌آید، به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

$$\left|\frac{||A|A|}{A^۲}\right|=||A|A|^۲\left|\frac{۱}{A^۲}\right|=(|A|^۲|A|)^۲\frac{۱}{|A|^۲}$$

$$=\frac{|A|^۶}{|A|^۲}=|A|^۴=(\pm۲)^۴=۱۶$$

تست ۲۷ اگر $A_{3\times 3}$ در رابطهٔ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4I$ صدق کند، $|A|$ کدام است؟

۱) $\frac{-4}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{-1}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ گزینهٔ «۱» باید از طرفین رابطهٔ داده‌شده دترمینان بگیریم.

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = |4I|$$

اگر حواسمان به دو نکته باشد به راحتی به جواب می‌رسیم.

۱ عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

۲ اگر A و B مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه: $|AB| = |A||B|$

بنابراین می‌توانیم دترمینان ضرب سه ماتریس را تفکیک کنیم.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4^3 \underbrace{|I|}_{1}$$

$$\Rightarrow -4|A| \times (3\times 4) = 64 \Rightarrow -48|A| = 64 \Rightarrow |A| = \frac{64}{-48} = \frac{4}{-3}$$

تست ۲۸ اگر $A_{3\times 3}$ و $A^2 = \bar{O}$ بوده و $|A - I| = 3$ باشد، $|A+I|$ کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 3

پاسخ گزینهٔ «۲» برای این‌که $A+I$ و $A-I$ ساخته شود، کافی است طرفین $A^2 = \bar{O}$ را با $-I$ جمع کنیم و سپس از طرفین رابطهٔ به‌دست‌آمده دترمینان بگیریم. (**حواستون باشه!** که عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.)

$$A^2 - I = -I \xrightarrow{\text{دترمینان}} |A^2 - I| = |-I|$$

$$\Rightarrow |(A-I)(A+I)| = (-1)^3 \underbrace{|I|}_{1} \Rightarrow |A-I||A+I| = -1$$

$$\Rightarrow 3|A+I| = -1 \Rightarrow |A+I| = \frac{-1}{3}$$

تست ۲۹ اگر به درایهٔ سطر دوم و ستون سوم دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ دو واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان چه‌قدر اضافه می‌شود؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 6

پاسخ گزینهٔ «۴» **روش اول** حاصل دترمینان داده‌شده را نسبت به سطر سوم (یا ستون دوم) که تعداد صفر بیشتری دارد پیدا می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ \boxed{۳ \quad ۰ \quad ۱} \end{vmatrix} = ۳\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۳ + ۳ = ۶$$

حالا به درایهٔ سطر دوم و ستون سوم دو واحد اضافه می‌کنیم تا مشخص کنیم چه‌قدر به دترمینان اضافه می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ \boxed{۳ \quad ۰ \quad ۱} \end{vmatrix} = ۳\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۹ + ۳ = ۱۲$$

با اضافه‌شدن دو واحد به درایهٔ سطر دوم و ستون سوم دترمینان، ۶ واحد به دترمینان اضافه می‌شود.

روش دوم اگر k واحد به درایهٔ a_{ij} اضافه شود، به دترمینان، مقدار زیر اضافه می‌شود.

$k \times (-۱)^{i+j} \times$ (دترمینان حذف سطر iاُم و ستون jاُم)

بنابراین به دترمینان $۶ = (-۳) \times -۲ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{vmatrix} ^{۲+۳}(-۱) \times ۲$ واحد اضافه می‌شود.

تست ۳۰ اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شمارهٔ سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{۳\times۳}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۹)*

۱) صفر ۲) $a+b$ ۳) ab ۴) $ab(a+b)$

پاسخ گزینهٔ «۱» می‌توانید ماتریس A را بنویسید و دترمینان بگیرید!!!

پاسخ به این سؤال با یک نکته به راحتی امکان‌پذیر است.

«دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{n\times n}$ به ازای $n \geq ۳$، همواره صفر است.»

تکنیک عددگذاری برای محاسبهٔ برخی از دترمینان‌ها

در مواردی که با تعدادی مجهول در دترمینان روبه‌رو هستیم، به شرط این که شرایط داده‌شده در سؤال را رعایت کنیم، می‌توانیم به جای مجهولات عدد قرار دهیم و حاصل دترمینان را به دست آوریم. سپس به جای مجهولات گزینه‌ها نیز همان اعداد را قرار می‌دهیم، هر گزینه‌ای که برابر با حاصل دترمینان شد همان گزینه را به عنوان جواب انتخاب می‌کنیم.

تست ۳۱ اگر ۲، a و b سه عدد متمایز باشند، حاصل $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴(a+b) \\ ۱ & a+۱ & a^۲(b+۲) \\ ۱ & b+۱ & b^۲(a+۲) \end{vmatrix}$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۸۹)*

۱) صفر ۲) $۴ab$

۳) $(a-۲)(b-۲)$ ۴) $۲(a-۲)(b-۲)$

پاسخ گزینهٔ «۱» حاصل دترمینان را با عددگذاری به دست می‌آوریم.

به جای a و b به ترتیب ۲− و ۱− قرار می‌دهیم. (a و b را طوری در نظر گرفتیم که دو درایهٔ سطر سوم صفر شوند و سه عدد گفته‌شده در صورت سؤال متمایز باشند.)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & -۱۲ \\ ۱ & -۱ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & -۱۲ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$$

باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که به ازای $a=-۲$ و $b=-۱$، صفر شود؛ فقط ۱ می‌تواند جواب باشد.

تست ۳۲ اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} ۲x & ۳x & ۶ \\ ۶ & ۲x & ۳x \\ ۳x & ۶ & ۲x \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} ۶ & x^۲ & x^۲ \\ ۹ & ۲x & ۹ \\ ۴ & ۴ & ۳x \end{vmatrix}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $-۲D$ ۲) $-D$ ۳) $\frac{۱}{۲}D$ ۴) D

پاسخ گزینهٔ «۲» به نظر سؤال سختی است اما با تکنیک عددگذاری بسیار راحت به جواب می‌رسیم!

به جای x، صفر بگذارید و هر دو دترمینان را پیدا کنید و بین جواب‌های دو دترمینان رابطه‌ای پیدا کنید.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۶ \\ ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \end{vmatrix} = ۶\begin{vmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ۶(-۶^۲) = -۶^۳ = D$$

حالا به جای x در دترمینان خواسته‌شده صفر قرار می‌دهیم ببینیم چه چیزی عایدمان می‌شود ...

$$\begin{vmatrix} ۶ & ۰ & ۰ \\ ۹ & ۰ & ۹ \\ ۴ & ۴ & ۰ \end{vmatrix} = ۶\begin{vmatrix} ۰ & ۹ \\ ۴ & ۰ \end{vmatrix} = ۶(۹\times۴) = ۶(۶^۲) = ۶^۳$$

خیلی تابلوئه دیگه! حاصل دترمینان خواسته‌شده، قرینهٔ دترمینان داده شده است.

وارون ماتریس

ماتریس مربعی B را وارون ماتریس مربعی A گوییم هرگاه حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B برابر I (ماتریس همانی) شود؛ یعنی $B = A^{-۱}$ و $AB = BA = I$ است.

- به یاد داشته باشید! وارون هر ماتریس مربعی، در صورت وجود، منحصربه‌فرد است؛ یعنی اگر A وارون‌پذیر باشد، فقط یک ماتریس وارون مانند B برای A پیدا می‌شود.

استراتژی حل مسئله

۱ شرط وارون‌پذیری ماتریس A این است که دترمینان ماتریس A مخالف صفر باشد $(|A| \neq 0)$.
یعنی اگر به ما گفته شد ماتریس A وارون‌پذیر است اولین نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که $|A| \neq 0$ است.

۲ اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد آن‌گاه: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
یعنی هر جا که لازم شد (به شرط این‌که از وارون‌پذیری A مطمئن بودیم!) به جای I می‌توانیم $A^{-1}A$ یا AA^{-1} قرار دهیم.

تست ۳۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، **a چه‌قدر باشد تا ماتریس B با شرط $AB = BA = I$ یافت شود؟**

۱) $a \neq -3$ ۲) $a = -3$ ۳) $a \neq 3$ ۴) $a = 3$

پاسخ گزینهٔ «۱» از این که سؤال گفته $AB = BA = I$، نتیجه می‌گیریم ماتریس B وارونِ ماتریس A است؛ پس A باید وارون‌پذیر و $|A| \neq 0$ باشد.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - a$$

اگر $-3 - a = 0$ یعنی $a = -3$ باشد، $|A| = 0$ می‌شود و ماتریس A وارون‌پذیر نیست؛ پس به ازای مقادیر $a \neq -3$ ماتریسی مانند B یافت می‌شود که $AB = BA = I$ برقرار است.

تست ۳۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، **به ازای کدام مقدار a ماتریس AB وارون‌پذیر است؟**

(مشابه سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۲ ۲) -6 ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

پاسخ گزینهٔ «۳» اول باید AB را به دست بیاوریم.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & -2+3a \\ -2+3a & 14 \end{bmatrix}$$

اگر $|AB| = 0$ باشد، AB وارون‌پذیر نیست؛ پس مقادیری از a که دترمینان ماتریس AB را صفر می‌کنند، قابل قبول نیست.

$$|AB| = 14(1+a^2) - (3a-2)^2 = 5a^2 + 12a + 10$$

دلتای معادلهٔ بالا منفی است $(\Delta = 12^2 - 4(5)(10) = -56 < 0)$، پس به ازای هیچ مقداری از a دترمینان ماتریس AB صفر نمی‌شود. بنابراین به ازای تمام مقادیر a، BA وارون‌پذیر است.

روش به دست آوردن وارون ماتریس ۲×۲

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد (با شرط $|A|\neq ۰$)، وارون ماتریس A از دستور زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}$$

- A^{*} (ماتریس الحاقی) یک ماتریس ۲×۲، از تعویض جای درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه‌کردن درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس A به دست می‌آید.

تست ۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس معکوس $A^{۲}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۱» راهی نداریم جز این‌که $A^{۲}$ را حساب کنیم …

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۷ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

باز هم راهی جز معکوس‌کردن $A^{۲}$ نداریم.

$$(A^{۲})^{-۱}=\frac{۱}{-۱۴-(-۱۸)}\begin{bmatrix} -۲ & -۶ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۲ & -۶ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس معکوس $A^{۲}$ برابر است با: $\frac{۱}{۴}(-۲+(-۶))=-۲$

تست ۳۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۰ \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-۱}(I+A)$، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & -\sin ۲\alpha \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \sin ۲\alpha & \cos ۲\alpha \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -\sin ۲\alpha & \cos ۲\alpha \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۱» باید $I-A$ و $I+A$ را به دست بیاوریم و بعد بر اساس اوامر سؤال پیش برویم

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & ۱ \end{bmatrix}$$

$$I+A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۱ \end{bmatrix}$$

حالا باید وارون $I-A$ را پیدا کنیم و در $I+A$ ضرب کنیم.

$$(I-A)^{-۱}=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & ۱ \end{bmatrix}$$

سؤال سطر اول $(I-A)^{-1}(I+A)$ را خواسته، ما هم چون حرف‌گوش‌کن! هستیم فقط سطر اول را پیدا می‌کنیم.

$$(I-A)^{-1}(I+A)=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \frac{-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\alpha & -\sin2\alpha\\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

تست ۳۷ **اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{bmatrix}$، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی باشند، به طوری که $\alpha A+\beta I=A^{-1}$، مقدار β کدام است؟** *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ گزینهٔ «۳» **روش اول** A را داریم پس A^{-1} را می‌توانیم حساب کنیم.

$$A^{-1}=\frac{1}{-8-(-3)}\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

می‌رویم سراغ رابطهٔ $\alpha A+\beta B=A^{-1}$، که β را پیدا کنیم.

$$\alpha\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2\alpha+\beta & -a\\ 3\alpha & -4\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha=-\frac{1}{5}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{5}\\ 2\alpha+\beta=\frac{4}{5}\xrightarrow{\alpha=\frac{1}{5}}\beta=\frac{2}{5}\end{cases}$$

روش دوم رابطهٔ کیلی ـ همیلتن به ما می‌گفت: «ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در معادلهٔ $A^2-(a+d)A+|A|I=\bar{O}$ صدق می‌کند.»

کافی است رابطهٔ $\alpha A+\beta I=A^{-1}$ را در A ضرب کنیم تا A^2 ایجاد شود.

$$\alpha A+\beta I=A^{-1}\xrightarrow{A\times}\alpha A^2+\beta A=I\Rightarrow\alpha A^2+\beta A-I=\bar{O}$$

طرفین رابطهٔ بالا را بر α تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases}A^2+\frac{\beta}{\alpha}A-\frac{1}{\alpha}I=\bar{O}\\ A^2-(a+d)A+|A|I=\bar{O}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{\alpha}=|A|\Rightarrow-\frac{1}{\alpha}=-8+3\Rightarrow\alpha=\frac{1}{5}\\ \frac{\beta}{\alpha}=-(a+d)\Rightarrow\frac{\beta}{\alpha}=-(2-4)\\ \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{5}}\beta=\frac{2}{5}\end{cases}$$

ویژگی‌های وارون

اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر و هم‌مرتبه باشند:

۱ $(A^{-1})^{-1} = A$

۲ $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

۳ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (وارون، روی ضرب از تَه تأثیر می‌گذارد)

۴ $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} \quad ; k \in \mathbb{R} - \{0\}$

۵ $I^{-1} = I^n = I \quad ; n \in \mathbb{N}$

۶ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad ; n \in \mathbb{N}$

۷ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

۸ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

در وارون ماتریس قطری، فقط درایه‌های روی قطر اصلی معکوس می‌شوند.

۹ $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$

در وارون ماتریس شبه‌قطری (درایه‌های بالا و پایین قطر فرعی صفرند)، درایه‌های روی قطر فرعی معکوس می‌شوند و ترتیب قرارگرفتن آن‌ها از تَه به سر می‌شود.

تست ۳۸ اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{bmatrix}$ برابر باشد، m کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳− و ۲ ۴) ۳ و ۲−

پاسخ گزینهٔ «۲» اول باید دترمینان هر دو ماتریس را به دست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & m \end{vmatrix} = 6 - (m+2) = 4 - m$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2$$

از آن‌جا که $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$ است، پس: $|B^{-1}| = \dfrac{1}{m-2}$

سؤال گفته دترمینان ماتریس A با دترمینان وارون ماتریس B برابر است، یعنی $|A| = |B^{-۱}|$،

بنابراین:

$$\frac{۱}{m-۲} = ۴ - m \Rightarrow (m-۲)(۴-m) = ۱$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۶m + ۹ = ۰ \Rightarrow (m-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

دقت‌کنید! به جای حل معادله، می‌توانستید گزینه‌ها را در رابطهٔ $\frac{۱}{m-۲} = ۴ - m$ امتحان کنید.

تست ۳۹ اگر $A = \begin{bmatrix} ۵+a & b & c \\ a & ۵+b & c \\ a & b & ۵+c \end{bmatrix}$ با شرط $a+b+c=۷$، دترمینان ماتریس $(۵A^{-۱})$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۷}$

پاسخ گزینهٔ «۱» اگر فکر می‌کنید دترمینان A را به صورت عادی حساب می‌کنیم کاملاً در اشتباهید!

به جای a، b و c عددهایی قرار می‌دهیم که در شرط $a+b+c=۷$ صدق کنند. از آن‌جا که a و b زیر قطر اصلی هستند، بهتر است به جای a و b، صفر قرار دهیم تا پایین قطر اصلی صفر باشد (ماتریس، بالامثلثی شود) و دترمینان آن را از ضرب درایه‌های روی قطر اصلی به راحتی به دست آوریم.

$$a=۰, b=۰, c=۷ \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} ۵ & ۰ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ \end{vmatrix} = ۵ \times ۵ \times ۱۲$$

می‌دانیم اگر عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد، پس:

$$|۵A^{-۱}| = ۵^۳\,|A^{-۱}| = ۵^۳ \times \frac{۱}{۵\times۵\times۱۲} = \frac{۵}{۱۲}$$

دقت‌کنید! ۱ $|A^{-۱}| = |A|^{-۱} = \frac{۱}{|A|}$ ۲ اگر $A_{n\times n}$ باشد: $|kA| = k^n\,|A|$

تست ۴۰ اگر $BA = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$، حاصل $(B+A^{-۱})(B^{-۱}-A)$ کدام است؟

۱) $-I$ ۲) $\bar{O}$ ۳) I ۴) $I - BA$

پاسخ گزینهٔ «۱» عبارت داده‌شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم تا ببینیم به چه چیزی می‌رسیم:

$$(B+A^{-۱})(B^{-۱}-A) = \underbrace{BB^{-۱}}_{I} - BA + A^{-۱}B^{-۱} - \underbrace{A^{-۱}A}_{I} = A^{-۱}B^{-۱} - BA$$

با توجه به این‌که $A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$ است، پس:

$$A^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-6+5}\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(B+A^{-1})(B^{-1}-A)=A^{-1}B^{-1}-BA$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$$

تست ۴۱ اگر $\begin{bmatrix}-3 & -5\\ -1 & -2\end{bmatrix}=(I+A)^{-1}$، **در این صورت $|2A^2|$ کدام است؟**

۱) ۷۲   ۲) ۹۸   ۳) ۱۴۴   ۴) ۱۹۶

پاسخ گزینهٔ «۴» اول باید A را از فرض صورت سؤال پیدا کنیم.

می‌دانیم وارونِ وارونِ هر ماتریس برابر با خود ماتریس است، بنابراین:

$$((I+A)^{-1})^{-1}=I+A$$

$$I+A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ -1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6-5}\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم A را به دست بیاوریم.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}-I\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & -4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=12-5=7$$

حواستون‌باشه! که «عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد»، پس $|2A^2|$ برابر با $2^2|A|^2$ می‌شود؛ یعنی:

$$|2A^2|=2^2|A|^2=4\times(7)^2=196$$

روش به دست آوردن وارونِ یک عبارت ماتریسی

گاهی اوقات به جای این‌که وارونِ یک ماتریس با درایه‌های مشخص را از ما بخواهند، وارونِ یک عبارت ماتریسی از ما خواسته می‌شود؛ در این‌گونه سؤالات سعی می‌کنیم به کمک تعریف وارون $(AA^{-1}=I)$ و اتحادها، وارونِ عبارت ماتریسی را پیدا کنیم.

استراتژی حل مسئله

اگر عبارتی برحسب A (و احتمالاً I) به ما داده شد و از ما وارون عبارت ماتریسی خواسته شد، باید یک طرف تساوی I تنها باشد و در طرف دیگر عبارت ماتریسی داده‌شده را ببینیم. هر چیزی که در عبارت ماتریسی ضرب شده باشد، وارونِ عبارت ماتریسی است.

دقت‌کنید! معمولاً در پاسخگویی به این‌گونه سؤالات اتحادهای درجه دوم (مثل اتحاد مزدوج) و اتحاد چاق و لاغر به دادِ ما می‌رسند ...

تست ۴۲ اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2 \neq \bar{O}$ و $A^3 = \bar{O}$، آن‌گاه معکوس $A - I$ به کدام صورت است؟ *(سراسری ریاضی ۸۹)*

۱) $A^2 - A$ ۲) $A^2 + A$ ۳) $A^2 - A + I$ ۴) $A^2 + A + I$

پاسخ گزینهٔ «۴» می‌دانیم اگر $AB = I$ باشد، B وارون ماتریس A است؛ یعنی $B = A^{-1}$.
باید یک طرف تساوی I داشته باشیم (که نداریم!)، ضمناً باید بتوانیم در طرف دیگر تساوی $I - A$ ایجاد کنیم. چون A^3 داریم بهتر است از اتحاد $I^3 - A^3$ استفاده کنیم.

$$A^3 = \bar{O} \xrightarrow{\times(-1)} -A^3 = \bar{O} \xrightarrow{+I} I - A^3 = I \xrightarrow{I^3 = I} I^3 - A^3 = I$$

بنابراین: $(I - A)(I^2 + AI + A^2) = I$

حالا که حاصل‌ضرب $I - A$ در یک چیزی برابر I شده، پس آن چیز، معکوس (وارون) $I - A$ است. $(I - A)^{-1} = I^2 + AI + A^2 = I + A + A^2$

تست ۴۳ اگر $A^3 - A^2 + 2A = 3I$ باشد، وارون $A^2 + 2I$ کدام است؟

۱) $A + I$ ۲) $I - A$ ۳) $-A - I$ ۴) $A - I$

پاسخ گزینهٔ «۴» باید یک طرف تساوی I و طرف دیگر تساوی $A^2 + 2I$ داشته باشیم؛ هر چیزی که در $A^2 + 2I$ ضرب شد، وارون $A^2 + 2I$ است.

$$A^3 - A^2 + 2A = 2I + I \Rightarrow A^3 - A^2 + 2A - 2I = I$$

$$\Rightarrow A^2(A - I) + 2(A - I) = I \Rightarrow (A - I)(A^2 + 2I) = I$$

$A^2 + 2I$ در $A - I$ ضرب شده و برابر با I شده، پس وارون ماتریس $A^2 + 2I$، ماتریس $A - I$ است.

تست ۴۴ اگر A مربعی و $A^2 = A$ باشد، وارون $I - 5A$ کدام است؟

۱) $I + \frac{5}{4}A$ ۲) $I - \frac{5}{4}A$ ۳) $I + \frac{4}{5}A$ ۴) $I - \frac{4}{5}A$

پاسخ گزینهٔ «۲» یک راه این است که $I - 5A$ را در گزینه‌ها ضرب کنید و به جای A^2، A قرار دهید، هر کدام برابر با I شد، همان گزینه جواب سؤال است.

راه معمول این است که وارون $I-5A$ را به صورت $I+kA$ در نظر بگیریم (از کجا بفهمیم؟ به گزینه‌ها نگاهی بیندازید!) و ضرب $I-5A$ و $I+kA$ را برابر I قرار دهیم.

$$(I-5A)(I+kA)=I \Rightarrow I+kA-5A-5kA^2=I$$

با توجه به این‌که در صورت سؤال گفته شده $A^2=A$ است، داریم:

$$I+kA-5A-5k(A)=I \Rightarrow (k-5-5k)A=\bar{O}$$

$$\Rightarrow -4k-5=0 \Rightarrow k=-\frac{5}{4}$$

بنابراین وارون ماتریس $I-5A$، $I-\frac{5}{4}A$ است.

کسانی که نکته دوست دارند! می‌توانند به خاطر بسپارند:

اگر $A^2=A$ و $k\neq 1$ باشد: $(I-kA)^{-1}=I+\frac{k}{1-k}A$

براساس نکتهٔ بالا، اگر به جای K، ۵ قرار دهیم، وارون $I-5A$ به دست می‌آید.

$$(I-5A)^{-1}=I+\frac{5}{1-5}A=I-\frac{5}{4}A$$

چند نکتهٔ کاربردی در وارون ماتریس‌ها

۱ اگر معادله‌های ماتریسی مانند $AX=B$ به ما داده شده باشد و از ما ماتریس مجهول X را بخواهند، کافی است طرفین رابطهٔ ماتریسی را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم تا X تنها شود.

$$AX=B \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

۲ در حل برخی سؤالات، به جای I می‌توانیم ضرب یک ماتریس در وارون آن را جایگزین کنیم؛ مثلاً به جای I می‌توانیم $A^{-1}A$ یا AA^{-1} قرار دهیم.

۳ اگر B و C ماتریس‌های وارون‌پذیر و ماتریس A مجهول باشد به طوری که $BAC=D$، آن‌گاه:

$$A=B^{-1}DC^{-1}$$

(کافی است طرفین رابطهٔ $BAC=D$ را از چپ در B^{-1} ضرب کنیم و سپس رابطهٔ حاصل را از راست در C^{-1} ضرب کنیم.)

۴ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $A+B=kAB$ (به شرط آن‌که A و B وارون‌پذیر باشند) آن‌گاه:

$$A^{-1}+B^{-1}=kI$$

(کافی است رابطهٔ $A+B=kAB$ را از چپ در A^{-1} و سپس از راست در B^{-1} ضرب کنیم.)

۵ اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند و B وارون‌پذیر باشد، داریم:

الف) $(BAB^{-1})^n=BA^nB^{-1}$ ب) $|BA^nB^{-1}|=|A|^n$

تست ۴۵ اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$، از رابطهٔ $AX=2I$ ماتریس X کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

۱) $\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ ۳) $2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ۴) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۱» برای این‌که X را تنها کنیم، باید طرفین رابطه را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم.

$$AX = 2I \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}AX = 2A^{-1}I \Rightarrow X = 2A^{-1}$$

$$\Rightarrow X = 2\left(\frac{1}{-6+4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

بنابراین:

$$X = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

تست ۴۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ و $\frac{1}{2}A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه:

۱) $B = -A$ ۲) $B = A$ ۳) $B = \frac{1}{2}A$ ۴) $B = \frac{-1}{2}A$

پاسخ گزینهٔ «۴» می‌دانیم $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، پس: $\frac{1}{2}AB = -I$

چون B را می‌خواهیم، کافی است طرفین تساوی را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم تا A خنثی و B تنها شود.

$$\frac{1}{2}AB = -I \xrightarrow{A^{-1}\times} \frac{1}{2}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B = -A^{-1}I \Rightarrow \frac{1}{2}B = -A^{-1}$$

بنابراین:

$$B = -2A^{-1} \Rightarrow B = -2\left(\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}A$$

تست ۴۷ اگر A و B وارون‌پذیر و هم‌مرتبه، $A^2 = A$ و $B^2 = -2B$ باشند، حاصل $4B^{-1} - BA + 2A^{-1}$ کدام است؟

۱) $-8I$ ۲) $-4I$ ۳) $2I$ ۴) $4I$

پاسخ گزینهٔ «۳» باید سعی کنیم از رابطه‌های داده‌شده به A^{-1} و B^{-1} برسیم.

رابطهٔ $A^2 = A$ را از چپ در A^{-1} و رابطهٔ $B^2 = -2B$ را از چپ در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$A^2 = A \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow A = I$$

$$B^2 = -2B \xrightarrow{B^{-1}\times} B^{-1}B^2 = -2B^{-1}B \Rightarrow B = -2I$$

خیلی واضح است که:

$$\begin{cases} A^{-1} = I^{-1} = I \\ B^{-1} = (-2I)^{-1} = \frac{-1}{2}I^{-1} = \frac{-1}{2}I \end{cases}$$

بنابراین: $4B^{-1} - BA + 2A^{-1} = 4(\frac{-1}{2}I) - (-2I)(I) + 2(I) = -2I + 2I + 2I = 2I$

تست۴۸ **اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند، حاصل دترمینان $AB-3I$ کدام است؟**

۱) $|BA-3I|$ ۲) $|BA+3I|$ ۳) $|BA|-3|I|$ ۴) $|AB|-|3I|$

پاسخ گزینهٔ «۱» از این‌که سؤال گفته A و B وارون‌پذیرند، نتیجه می‌گیریم هر دو ماتریس مربعی‌اند!

می‌دانیم اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند: $|AB|=|BA|=|A||B|$

حالا اگر به جای I، AA^{-1} قرار دهیم، به خواسته‌مان می‌رسیم.

$$|AB-3I|=|AB-3AA^{-1}|=|A(B-3A^{-1})|=|A||B-3A^{-1}|$$

جای ضرب دو دترمینان را عوض می‌کنیم و دوباره دترمینان‌ها را در هم ادغام می‌کنیم.

$$|AB-3I|=|B-3A^{-1}||A|=|(B-3A^{-1})A|=|BA-3A^{-1}A|=|BA-3I|$$

تست۴۹ از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}5&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس A کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $\begin{bmatrix}12&-17\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-21&30\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-17&30\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}12&-21\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۴» اگر B و C ماتریس‌های وارون‌پذیر و ماتریس A مجهول باشد به طوری که $BAC=D$، آن‌گاه: $A=B^{-1}DC^{-1}$

(برای این‌که A را به دست آوریم B و C مزاحم‌اند! از سمت چپ رابطه را در B^{-1} ضرب می‌کنیم سپس از سمت راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم ...)

وارون ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}5&2\\3&1\end{bmatrix}$ را ببینید!

$$B^{-1}=\frac{1}{4-6}\begin{bmatrix}1&-3\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\3&-5\end{bmatrix}$$

بالاتر یاد گرفتیم که: $A=B^{-1}DC^{-1}$

پس:

$$A=\frac{1}{-2}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-3\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\end{bmatrix}}_{\text{ضرب می‌کنیم}}\begin{bmatrix}-1&2\\3&-5\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&-6\\-10&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\3&-5\end{bmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}-24&42\\34&-60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-21\\-17&30\end{bmatrix}$$

چون از ما سطر اول A را خواسته بود، کافی بود فقط درایه‌های سطر اول یعنی $\begin{bmatrix}12&-21\end{bmatrix}$ را به دست آوریم.

تست ۵۰ اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ و وارون‌پذیر باشند که بین آن‌ها رابطهٔ $A+B=۳AB$ برقرار باشد، $|A^{-۱}+B^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

پاسخ گزینهٔ «۴» **روش اول** باید یه‌جوری به کمک رابطهٔ داده‌شده در سؤال $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ بسازیم. از ضرب طرفین رابطهٔ $A+B=۳AB$ در $A^{-۱}$ (البته از چپ ☺) داریم:

$$A+B=۳AB \xrightarrow{A^{-۱}\times} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}+A^{-۱}B=۳\underbrace{A^{-۱}A}_{I}B \Rightarrow I+A^{-۱}B=۳B$$

حالا اگر رابطهٔ بالا را از راست در $B^{-۱}$ ضرب کنیم، هم $A^{-۱}$ داریم و هم $B^{-۱}$!

$$I+A^{-۱}B=۳B \xrightarrow{\times B^{-۱}} IB^{-۱}+A^{-۱}\underbrace{BB^{-۱}}_{I}=۳\underbrace{BB^{-۱}}_{I} \Rightarrow B^{-۱}+A^{-۱}=۳I$$

یک دترمینان ناقابل، ما را به جواب می‌رساند؛ فقط باید حواسمان باشد! عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد. $|A^{-۱}+B^{-۱}|=|۳I|=۳^۳|I|=۲۷$

روش دوم می‌دانیم اگر $A+B=kAB$ باشد، $A^{-۱}+B^{-۱}=kI$ است، پس:

$$A+B=۳AB \Rightarrow A^{-۱}+B^{-۱}=۳I \Rightarrow |A^{-۱}+B^{-۱}|=|۳I|=۳^۳|I|=۲۷$$

تست ۵۱ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و B ماتریس هم‌مرتبهٔ A باشد، به طوری که $A+B=AB$، سطر اول ماتریس B کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۳ با اندکی تغییر)*

۱) $\begin{bmatrix}۱ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & -۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۱ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۱» از این‌که $A+B=AB$ شده، نتیجه می‌گیریم $A^{-۱}+B^{-۱}=I$ است؛ پس:

$$B^{-۱}=I-A^{-۱} \Rightarrow B^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\left(\frac{۱}{۲+۳}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵} & -\frac{۱}{۵}\\ \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۵}\end{bmatrix}$$

سؤال از ما B را خواسته نه $B^{-۱}$!

از آن‌جا که $(B^{-۱})^{-۱}=B$ است، پس:

$$B=(B^{-۱})^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵} & -\frac{۱}{۵}\\ \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۵}\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۲۵}}\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵}\\ -\frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\frac{۵}{۳}\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵}\\ -\frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & \frac{۱}{۳}\\ -۱ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ سطر اول ماتریس }=\begin{bmatrix}۱ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$$

تست ۵۲ اگر $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ (ماتریس دوران به زاویهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ) ماتریس دوران به زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ و $P=۲\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(P^{-۱}AP)^۶$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۱)*

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۱» اولاً، دترمینان ماتریس دوران همواره برابر یک است.

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$$

ثانیاً، از نکتهٔ ۵ وارون ماتریس‌های خاص به یاد داریم:

$$(P^{-۱}AP)^۶=P^{-۱}A^۶P$$

بنابراین:

$$|(P^{-۱}AP)^۶|=|P^{-۱}A^۶P|=|P^{-۱}||A^۶||P|=\frac{۱}{|P|}\times|A|^۶\times|P|=|A|^۶=۱$$

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ که از دو خط تشکیل شده به شکل ماتریسی زیر نمایش داده می‌شود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب (A)}}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات (X)}}=\underbrace{\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مقادیر معلوم (B)}}$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از وارون ماتریس

اگر شکل ماتریسی دستگاه دومعادله دومجهول به صورت $AX=B$ باشد، به شرط این‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد (یعنی $|A|\neq ۰$ باشد)، ماتریس X را از رابطهٔ $X=A^{-۱}B$ به دست می‌آوریم.

تست ۵۳ در دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=f\\ cx+dy=۱\end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهول، به صورت $\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ است. اگر $x=۱$، مقدار y کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۶)*

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۱» دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت $AX=B$ است (A ماتریس ضرایب، B ماتریس مقادیر معلوم و X ماتریس مجهولات هستند)، باید از این رابطه X را پیدا کنیم؛ یعنی A مزاحم است!

با ضرب طرفین رابطه در $A^{-۱}$ از شر A خلاص می‌شویم ...

$$AX=B\xrightarrow{A^{-۱}\times}X=A^{-۱}B$$

سؤال، کار ما را راحت کرده، معکوس ماتریس ضرایب یعنی A^{-1} را داده! با جای‌گذاری در رابطهٔ $X = A^{-1}B$ داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ ۲f - ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = -f \xrightarrow{x=۱} f = -۱ \\ y = ۲f - ۱ \xrightarrow{f=-۱} y = -۳ \end{cases}$$

تست ۵۴ در دستگاه $\begin{cases} ax - ۲y = ۵ \\ bx + ۳y = ۱۲ \end{cases}$، اگر دترمینان ضرایب مجهولات برابر ۲۶ باشد، مقدار x کدام است؟

(تجربی خارج ۸۵)

۱) $-\frac{۷}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۳» دترمینان ماتریس ضرایب برابر با ۲۶ شده، پس:

$$A = \begin{bmatrix} a & -۲ \\ b & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲۶ \Rightarrow ۳a + ۲b = ۲۶$$

کافی است معادلهٔ اول دستگاه را در ۳ و معادلهٔ دوم را در ۲ ضرب کنیم و با هم جمع کنیم تا x به دست آید.

$$\begin{cases} ax - ۲y = ۵ \xrightarrow{\times ۳} \\ bx + ۳y = ۱۲ \xrightarrow{\times ۲} \end{cases} \begin{cases} ۳ax - ۶y = ۱۵ \\ ۲bx + ۶y = ۲۴ \end{cases} \xrightarrow{+}$$

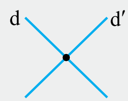
$$(۳a + ۲b)x = ۳۹ \Rightarrow ۲۶x = ۳۹ \Rightarrow x = \frac{۳۹}{۲۶} = \frac{۳}{۲}$$

تعداد جواب‌های دستگاه دومعادله دومجهول

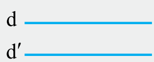
در دستگاه دومعادله دومجهول به بررسی وضعیت دو خط در صفحه می‌پردازیم که این دو خط یکی از سه حالت ۱ متقاطع، ۲ موازی (غیرمنطبق)، ۳ منطبق را دارند.

استراتژی حل مسئله

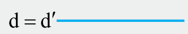
اگر دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ داده شده باشد، تعداد جواب‌های این دستگاه یکی از حالات زیر است:



۱ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$: دو خط متقاطع‌اند ← دستگاه یک جواب دارد



۲ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$: دو خط موازی‌اند ← دستگاه جواب ندارد



۳ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$: دو خط منطبق‌اند ← دستگاه بی‌شمار جواب دارد

دقت کنید!

اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ۰$ باشد، دستگاه یا بی‌شمار جواب دارد یا اصلاً جواب ندارد.

اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq ۰$ باشد، دستگاه یک جواب (جواب منحصربه‌فرد) دارد.

تست ۵۵ به ازای کدام مقدار m، معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۳ & m+۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب ندارد؟

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲ (تجربی فارج ۸۸)

پاسخ گزینهٔ «۳» دستگاه متناظر با معادلهٔ ماتریسی داده‌شده به شکل $\begin{cases} mx+۲y=m+۲ \\ ۳x+(m+۵)y=۲ \end{cases}$ است.

زمانی دستگاه جواب ندارد که دو خط، موازی (غیرمنطبق) باشند. یعنی:

$$\underbrace{\frac{m}{۳} = \frac{۲}{m+۵}}_{\downarrow} \neq \frac{m+۲}{۲} \quad (*)$$

$$m^۲ + ۵m = ۶ \Rightarrow (m+۶)(m-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۶ \\ m=۱ \end{cases}$$

اگر در رابطهٔ (*)، $m=-۶$ قرار دهیم، سه کسر با هم برابر و دو خط منطبق می‌شوند.

$$\frac{-۶}{۳} = \frac{۲}{-۶+۵} = \frac{-۶+۲}{۲}$$

اما اگر $m=۱$ قرار دهیم، دو کسر اول با هم برابرند و با کسر سوم برابر نیستند!

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۱+۵} \neq \frac{۱+۲}{۲}$$

تست ۵۶ معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ بیانگر کدام گزینه است؟

۱) دو خط موازی و غیرمنطبق ۲) دو خط منطبق

۳) دو خط متقاطع غیرعمود ۴) دو خط عمود بر هم

پاسخ گزینهٔ «۴» معادلهٔ ماتریسی داده‌شده در واقع نمایش ماتریسی دستگاه $\begin{cases} ۲x-۳y=-۲ \\ ۳x+۲y=-۳ \end{cases}$ است.

چون $\frac{-۳}{۲} \neq \frac{۲}{۳}$ است، پس دو خط تشکیل‌دهندهٔ دستگاه متقاطع‌اند. باید عمود یا غیرعمود بودن دو خط را بررسی کنیم.

اگر شیب دو خط عکس و قرینهٔ یکدیگر باشند، دو خط بر هم عمودند.

$$2x - 3y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \text{شیب} = m = \frac{2}{3}$$

$$3x + 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب} = m' = -\frac{3}{2}$$

m و m' عکس و قرینهٔ یکدیگرند (به عبارت دیگر $mm' = -1$ است)، پس دو خط بر هم عمودند.

تست ۵۷ **کدام‌یک از دستگاه‌های زیر نمایش دو خط موازی و غیرمنطبق است؟**

۱) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4y + 2x = 2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ *(برگرفته از تمرین کتاب درسی)*

۳) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** با توجه به نکاتی که در استراتژی حل مسئله گفتیم، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$، چون $\frac{2}{2} \neq \frac{-1}{-4}$، دستگاه دو خط متقاطع را نمایش می‌دهد.

۲ چون $\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1}$ است، دستگاه معرف دو خط متقاطع است.

۳ چون $\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$ است، دستگاه دو خط منطبق را نمایش می‌دهد.

۴ چون $\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{1}$ است، دستگاه نمایشگر دو خط موازی غیرمنطبق است.

تست ۵۸ **اگر دستگاه $\begin{cases} (a-1)x + 4y = 6 \\ (a+3)y + 3x = 9 \end{cases}$ نمایش دو خط موازی در صفحه باشد، دستگاه $\begin{cases} ax - y = 3 \\ (2a+1)x + (a-1)y = 1 \end{cases}$ معرف کدام گزینه است؟**

۱) دو خط موازی

۲) دو خط متقاطع عمود

۳) دو خط متقاطع غیرعمود

۴) دو خط منطبق

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول باید مراقب باشید! مرتب نبودن معادلهٔ دوم دستگاه داده‌شده شما را گول نزند! برای این‌که دستگاه، نمایش دو خط موازی باشد باید:

$$\frac{a-1}{3} = \frac{4}{a+3} \neq \frac{6}{9}$$

بنابراین:

$$\frac{a-1}{3} = \frac{4}{a+3} \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 12$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Rightarrow (a+5)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = 3 \end{cases}$$

به ازای $a = ۳$، دستگاه نمایش دو خط منطبق است زیرا:

$$\frac{۶}{۹} = \frac{۴}{۳+۳} = \frac{۳-۱}{۳}$$

پس فقط به ازای $a = -۵$ دستگاه نمایش دو خط موازی است.

با قراردادن $a = -۵$ در دستگاه $\begin{cases} ax - y = ۳ \\ (۲a+۱)x + (a-۱)y = ۱ \end{cases}$، دستگاه به شکل $\begin{cases} -۵x - y = ۳ \\ -۹x - ۶y = ۱ \end{cases}$ درمی‌آید. چون $\frac{-۱}{-۶} \neq \frac{-۵}{-۹}$ است، دستگاه نمایش دو خط متقاطع است و چون شیب خط‌ها عکس و قرینهٔ هم نیستند (شیب خط اول -۵ و شیب خط دوم $\frac{-۹}{۶}$)، دو خط بر هم عمود نیستند.

آزمون

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم $A^{۵}$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۶۲ ۴) ۲۴۳

۲- اگر $A^{۲}=\begin{bmatrix}-۲ & -۵\\ ۱۵ & ۱۳\end{bmatrix}$ ، $B^{۲}=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۱۲ & ۷\end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}$ باشند، $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۴ & ۱\\ -۲۷ & -۱۶\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۶ & ۱\\ -۲۷ & -۱۶\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۴ & -۱\\ -۲۷ & -۱۶\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۶ & -۱\\ -۲۷ & -۱۶\end{bmatrix}$

۳- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases}۰ & i=j\\ i^{۲}-j & i<j\\ i-j^{۲} & i>j\end{cases}$ باشد، $|A|$ کدام است؟ *(برگرفته از تمرین کتاب درسی)*

۱) -۴ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۴

۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$ ، دترمینان $A^{۱۳۹۸}-A^{۱۳۹۹}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۲

۵- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ وارون‌پذیر و $|-A|=|A|A|+۲A|$ ، در این صورت $||A|A|$ کدام است؟

۱) -۹ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۶- اگر دو ماتریس A و $I-A$ وارون هم باشند، ماتریس $A^{۴}$ برابر کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۵)*

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $-I$

۷- اگر $I+A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، $|-A|$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) ۱

۸- اگر دستگاه $\begin{cases}۳x+۲y=۱۴\\ ۷y-۲x=۱۳\end{cases}$ را به صورت $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴\\ ۱۳\end{bmatrix}$ بنویسیم، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۷ ۳) ۸ ۴) -۲۰

پاسخ‌نامهٔ آزمون

۱- گزینهٔ «۴» **روش اول** چون با توان ماتریس A روبه‌رو هستیم، اول $A^۲$ را به دست می‌آوریم.

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۶\\ ۳ & ۳\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=۳A$$

بنابراین:

$$A^۵=(A^۲)^۲\times A=(۳A)^۲\times A=۹A^۲\times A=۹(۳A)\times A=۲۷A^۲$$

$$\Rightarrow A^۵=۲۷(۳A)=۸۱A$$

پس:

$$A^۵=۸۱\begin{bmatrix}۲ & \boxed{۲}\\ ۱ & \boxed{۱}\end{bmatrix}\Rightarrow A^۵ \text{ مجموع درایه‌های ستون دوم } =۸۱(۲+۱)=۲۴۳$$

روش دوم هر ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^۲-(a+d)A+|A|I=\bar{O}$ که به رابطهٔ کِیلی ـ همیلتن معروف است، صدق می‌کند، بنابراین:

$$A^۲-(۲+۱)A+۰\times I=\bar{O}\Rightarrow A^۲-۳A=\bar{O}\Rightarrow A^۲=۳A$$

اگر $A^۲=kA$ باشد، $A^n=k^{n-۱}A$ است.

پس:

$$A^۲=۳A\Rightarrow A^۵=۳^۴A=۸۱A=۸۱\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

حالا که $A^۵$ را به دست آوردیم، خیلی راحت می‌گوییم مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $۸۱(۲+۱)=۲۴۳$ است.

۲- گزینهٔ «۳» $A^۲$، $B^۲$ و $A-B$ ما را یاد اتحاد می‌اندازد؛ اما یادتان باشد اگر A و B تعویض‌پذیر نباشند، اتحاد بی‌اتحاد! یعنی:

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix}-۲ & -۵\\ ۱۵ & ۱۳\end{bmatrix}-AB-BA+\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۱۲ & ۷\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ ۵۴ & ۳۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۲۷ & ۲۰\end{bmatrix}-(AB+BA)$$

پس:

$$AB+BA=\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۲۷ & ۲۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ ۵۴ & ۳۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & -۱\\ -۲۷ & -۱۶\end{bmatrix}$$

۳- گزینهٔ «۲» **روش اول** در ماتریس ۳×۳، $i=j$ یعنی درایه‌های روی قطر اصلی، $i>j$ یعنی درایه‌های پایین قطر اصلی و $i<j$ یعنی درایه‌های بالای قطر اصلی.

براساس اطلاعات داده‌شده، اول A را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱^۲-۲ & ۱^۲-۳ \\ ۲-۱^۲ & ۰ & ۲^۲-۳ \\ ۳-۱^۲ & ۳-۲^۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نسبت به سطر اول ماتریس A، دترمینان می‌گیریم، بنابراین:

$$|A|=۰-(-۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}-۲\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=-۲+۲=۰$$

روش دوم یک نکتهٔ خوب!

نکته به ماتریسی که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر باشند و درایه‌های طرفین قطر اصلی قرینه باشند، ماتریس پادمتقارن می‌گویند. دترمینان ماتریس **پادمتقارن** از مرتبهٔ **فرد**، **صفر** است.

در سؤال داده‌شده، ماتریس A یک ماتریس پادمتقارن از مرتبهٔ فرد است، پس دترمینان A برابر صفر است.

۴- گزینهٔ «۴» همین اول کار دترمینان A را نسبت به سطر اول به دست می‌آوریم تا خیالمان از بابت دترمینان راحت باشد.

$$|A|=\begin{vmatrix} \boxed{۳ \quad ۰ \quad ۲} \\ ۱ \quad ۲ \quad ۱ \\ ۱ \quad ۳ \quad ۱ \end{vmatrix}=۳\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=-۳+۲=-۱$$

حالا سعی می‌کنیم $|A^{۱۳۹۹}-A^{۱۳۹۸}|$ را ساده‌تر کنیم.

$$|A^{۱۳۹۹}-A^{۱۳۹۸}|=|A^{۱۳۹۸}(A-I)|=|A^{۱۳۹۸}||A-I|=\underbrace{|A|^{۱۳۹۸}}_{۱}|A-I|$$

$$\Rightarrow |A^{۱۳۹۹}-A^{۱۳۹۸}|=|A-I|$$

کافی است $A-I$ را محاسبه کنیم و دترمینان آن را به دست آوریم.

$$A-I=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix} \boxed{۲ \quad ۰ \quad ۲} \\ ۱ \quad ۱ \quad ۱ \\ ۱ \quad ۳ \quad ۰ \end{vmatrix}=۲\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=-۶+۴=-۲$$

بنابراین:

$$|A^{۱۳۹۹}-A^{۱۳۹۸}|=|A-I|=-۲$$

۵- گزینهٔ «۴» اول باید عبارت داده‌شده در صورت سؤال را ساده کنیم تا بعد به کمک قوانین و ... بتوانیم پاسخ سؤال را پیدا کنیم. فقط باید حواسمان باشد وقتی عدد از دترمینان بیرون می‌آید، به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

$$|A(|A|+۲)| = (-۱)^{۳}\,|A| \;\Rightarrow\; (|A|+۲)^{۳}\,\cancel{|A|} = -\cancel{|A|}$$

$$\Rightarrow\; (|A|+۲)^{۳} = -۱ \;\Rightarrow\; |A|+۲ = -۱ \;\Rightarrow\; |A| = -۳$$

بنابراین:
$$\big||A|A\big| = |A|^{۳}|A| = |A|^{۴} = (-۳)^{۴} = ۸۱$$

۶- گزینهٔ «۲» **روش اول** وقتی دو ماتریس A و $I-A$ وارون یکدیگرند، پس ضرب آن‌ها I می‌شود.

$$(I-A)A = I \;\Rightarrow\; IA - A^{۲} = I \;\Rightarrow\; A - A^{۲} = I \;\Rightarrow\; A^{۲} = A - I$$

طرفین رابطهٔ بالا را به توان ۲ می‌رسانیم تا $A^{۴}$ ساخته شود؛ هر جا $A^{۲}$ دیدیم به جای آن $A-I$ می‌گذاریم.

$$A^{۴} = (A-I)^{۲} = A^{۲} - ۲A + I = (A-I) - ۲A + I = -A$$

روش دوم پس از این‌که در روش اول به $A - A^{۲} = I$ می‌رسیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم $A^{۲} - A + I = \bar{O}$ است و با ضرب طرفین رابطه در $A+I$، اتحاد چاق و لاغر بسازیم.

$$(A+I)(A^{۲} - A + I) = (A+I)\bar{O} \;\Rightarrow\; A^{۳} + I = \bar{O} \;\Rightarrow\; A^{۳} = -I$$

کافی است طرفین رابطه را در A ضرب کنیم تا $A^{۴}$ به دست بیاید.

$$A^{۳} = -I \xrightarrow{A\times} A^{۴} = -A$$

۷- گزینهٔ «۱» اول باید $A^{-۱}$ را آزاد کنیم.

$$I + A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

نسبت به سطر اول $A^{-۱}$ دترمینان می‌گیریم، داریم:

$$|A^{-۱}| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow |A^{-۱}| = -۳ + ۵ - ۱ = ۱$$

حالا که $|A^{-۱}|$ مشخص شد، $|A|$ را هم داریم.

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} \;\Rightarrow\; ۱ = \frac{۱}{|A|} \;\Rightarrow\; |A| = ۱$$

می‌دانیم اگر عدد از دترمینان بیرون بیاید، به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد، پس:

$$|-A| = (-۱)^{۳}\,|A| = -۱\times ۱ = -۱$$

۸- گزینهٔ «۱» می‌دانیم شکل ماتریسی هر دستگاه $n\times n$ به صورت $AX = B$ است که A ماتریس ضرایب دستگاه است.

مراقب‌باشید مرتب‌نبودن معادلهٔ دوم دستگاه داده‌شده شما را گول نزند!

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۱۴ \\ -۲x + ۷y = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

بنابراین:
$$|A| = ۲۱ - (-۴) = ۲۵$$