گاج

فرمول بیست

حسابان ۲

پایه دوازدهم

رشته ریاضی و فیزیک

مؤلّف

ندا فرهختی

فرمول بیست

۷۷	۶۶۶	۷
صفحه درسنامه	پرسش تشریحی	نمونه امتحانی

+۵

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان

9 786220 307297
تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

کتاب پیش رو از مجموعه کتاب‌های فرمول بیست می‌باشد.

هدف اصلی این مجموعه کتاب ارائه آموزش‌های کامل همراه با مثال ها و تمرینات متنوع بر پایه کتاب درسی و در جهت تسلط و آمادگی برای امتحانات می‌باشد.

در این کتاب...

هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائه مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد.

در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و با گردآوری سؤالات امتحان‌های نهایی، یک مجموعه تمرین و بانک سؤال خوب و کاملی ارائه شده است .

در نهایت با حل کاملا تشریحی تمرینات، هر آنچه که یک دانش‌پژوه برای آموزش نیاز دارد، در اختیارش قرار گرفته است.

در این کتاب برخی تمرینات تحت عنوان سوالات ستاره‌دار مشخص شده است، این گروه سؤالات همان تمرینات اولیه و حداقلی است که هر دانش‌پژوه باید با آن مواجه گردد. حجم و تنوع این دسته سؤالات به گونه‌ای طراحی شده که دانش‌پژوهانی که فرصت کمتری برای حل تمرین یا مرور فصل دارند ابتدا سراغ این دسته سؤالات بروند و سپس در مرحله بعد و در زمان مقتضی به حل بقیه تمرینات بپردازند و امکان تمرین بیشتر را داشته باشند.

گروه دیگری از تمرینات، مجموعه سؤالاتی هستند که تحت عنوان سؤالات بمب شناخته می‌شوند . سؤالات بمب شامل تمریناتی است که سطح آنها یک سر و گردن بالاتر از دیگر تمرینات است و دانش پژوهان سخت‌کوش‌تر را به چالش می‌کشد تا با حل آنها لذت حل مسأله برایشان دو چندان شود.

در انتهای کتاب، یک سری مجموعه امتحان طراحی شده تا کار را برای مرور شب امتحان راحت‌تر کند.

خلاصه این که هر آنچه که یک دانش پژوه از یک کتاب آموزشی انتظار دارد، در این کتاب گنجانده شده است.

بنابراین برای همراه شدن با این کتاب تردید نکنید و از داشتنش لذت ببرید.

در پایان از همه عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم؛ همچنین از خانواده عزیزم که مرا صبورانه همراهی کردند، سپاسگزارم.

ندا فرهختی

فهرست

بارم‌بندی درس حسابان ۲

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۷	۲/۵
دوم	۶	۲
سوم	۷	۲/۵
چهارم	-	۷
پنجم	-	۶
جمع	۲۰	۲۰

بخش ۱

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

تابع ۱

تابع یکی از اساسی‌ترین و مهم‌ترین مباحث حسابان می‌باشد و مقدمه و شروع بسیاری از مباحث مهم دیگر مثل حد و پیوستگی و مشتق است.
هرجای دنیا هم که باشید وضعیت به همین شکل است و تابع و مفاهیم آن یکی از کاربردی‌ترین مباحث ریاضیات است. مثل این است که جمع و تفریق بلد نباشید. می‌توانید درک کنید که زندگی بدون جمع و تفریق چه‌قدر بی‌معنی است؟! ریاضیات بدون تابع هم به همین شکل است.
این فصل یکی از فصل‌های مهم در حسابان می‌باشد که به‌صورت مستقیم و غیرمستقیم به کار می‌آید. یعنی هم می‌توان مستقیماً از خود فصل سوال مطرح کرد و هم از مطالب و نکاتی که در اینجا آموزش داده می‌شود در حل مسائل مباحث دیگر به‌کار می‌آیند.
پس پیشنهاد می‌کنم که به مطالب این فصل خوب توجه کنید.
در ضمن یاد گرفتن این فصل می‌تواند ۲ تا ۳ نمره در امتحان نهایی و درصد قابل توجهی در کنکور برایتان به ارمغان بیاورد.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بستهٔ ۱ | بستهٔ ۲ | بستهٔ ۳

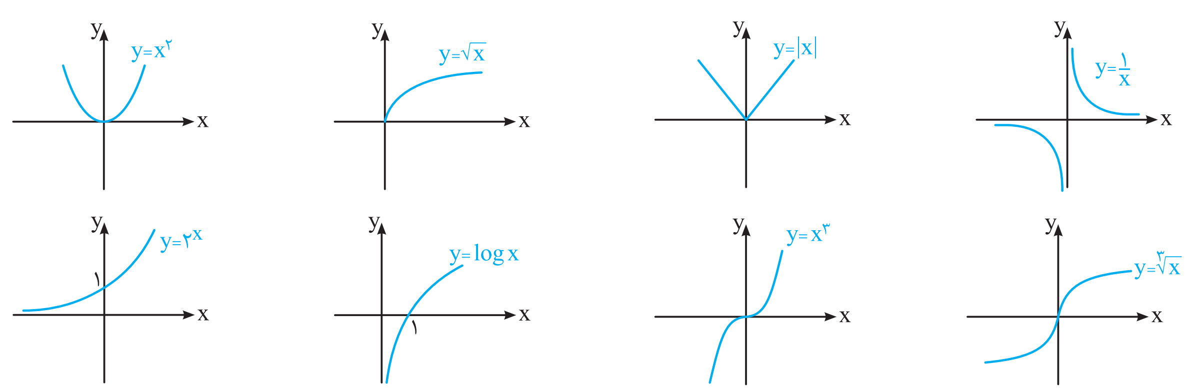
بسته اول

تبدیل نمودار توابع

صفحه ۲ تا ۱۲ کتاب درسی

نمودارها در ریاضی می تونن در یک نیم‌نگاه اطلاعات خوبی رو از ویژگی‌های تابع بهتون بدن.
مثلاً دامنه، برد، تقاطع با محورها، افزایشی یا کاهشی بودن تابع و خیلی چیزهای دیگه با یک نگاه کوچیک به نمودار تابع به دست میاد.
پس خیلی مهمّه که بتونیم رابطهٔ خوبی با رسم نمودار توابع داشته باشیم. ما در این درسنامه بهتون کمک می‌کنیم که بتونین نمودار توابع رو (البته در حد کتاب درسی تون) رسم کنید.

یادآوری تعدادی از نمودارهای مهم و پایه‌ای را با هم مرور می‌کنیم:



اکنون می‌خواهیم با تبدیل نمودارهای بالا نمودار برخی توابع دیگر را رسم کنیم.

حالا حتماً از خودتون می‌پرسین (تبدیل نمودارها) یعنی چی؟
خب باید بهتون بگم که وقتی شما نمودار یه تابع مثل f رو داشته باشین، (حالا یا خودتون f رو رسم کرده باشین یا سؤال نمودارش رو بهتون داده باشه) با انتقال یا انعکاس اون نسبت به محورها یا حتی انبساط و انقباض نمودار f، نمودار دیگه‌ای به دست میاد که تبدیل یافتهٔ نمودار f هست.

الف انتقال نمودارها

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده باشد، انتقال‌های نمودار f به یکی از صورت‌های زیر است:

۱ انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

آ) اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به **بالا** انتقال می‌دهیم. ب) اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به **پایین** انتقال می‌دهیم.

۲ انتقال افقی: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

آ) اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به **چپ** منتقل می‌کنیم. ب) اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به **راست** منتقل می‌کنیم.

به توضیحات بالا یه نگاهی بندازین:

۱ در انتقال عمودی اگه $k > 0$ (مثبت) باشه، برای رسم $f(x) + k$ ،نمودار f، k واحد به سمت بالا (y های مثبت) میره. اما در انتقال افقی اگه $k > 0$ باشه، برای رسم $f(x + k)$ نمودار f، k واحد به سمت چپ (x های منفی) میره.

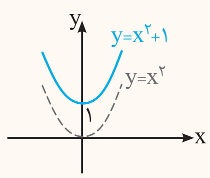
۲ در انتقال عمودی اگه $k < 0$ (منفی) باشه، برای رسم $f(x) + k$، نمودار f، $|k|$ واحد به سمت پایین (y های منفی) میره. اما در انتقال افقی اگه $k < 0$ (منفی) باشه، برای رسم $f(x) + k$، نمودار f، $|k|$ واحد به سمت راست (x های مثبت) میره.

سؤال **به کمک نمودار $y = x^2$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.** **مشابه تمرین صفحه ۱۱ کتاب درسی**

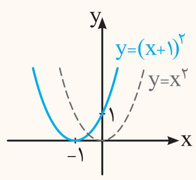
۱ $y = x^2 + 1$ ۲ $y = (x + 1)^2$ ۳ $y = x^2 - 1$

۴ $y = (x - 1)^2$ ۵ $y = (x - 1)^2 + 1$ ۶ $y = (x + 1)^2 - 1$

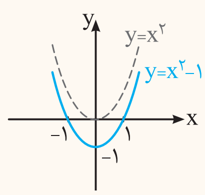
پاسخ ۱ برای رسم $y = x^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



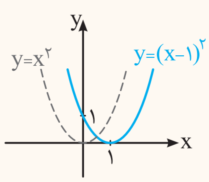
۲ برای رسم $y = (x + 1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:



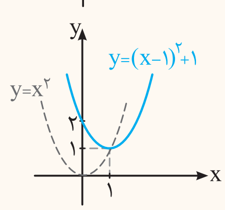
۳ برای رسم $y = x^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



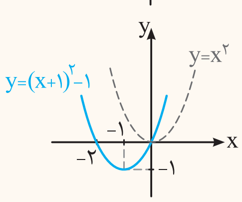
۴ برای رسم $y = (x - 1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم:



۵ برای رسم $y = (x - 1)^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۶ برای رسم $y = (x + 1)^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



حالا می‌خوایم ببینیم اگه نمودار یه تابع رو نداشته باشیم یا حال نداشته باشیم رسمش کنیم، چطوری از روی دامنه و بردش، دامنه و برد تبدیل یافته‌اش رو پیدا کنیم.

! نکته اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

❶ دامنهٔ تابع $y = f(x+h)+k$ با حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید، زیرا باید $(x+h)$ در دامنهٔ f باشد:

$$a \le x+h \le b \Rightarrow a-h \le x \le b-h$$

❷ برد تابع $y = f(x+h)+k$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید، زیرا $f(x+h)$ در برد f قرار می‌گیرد:

$$c \le f(x+h) \le d \xrightarrow{+k} c+k \le \underbrace{f(x+h)+k}_{y} \le d+k \Rightarrow c+k \le y \le d+k$$

سؤال اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ برابر با $[-۱, ۳]$ و $(۲, ۵]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = f(x-۲) - ۳$ را بیابید.

پاسخ

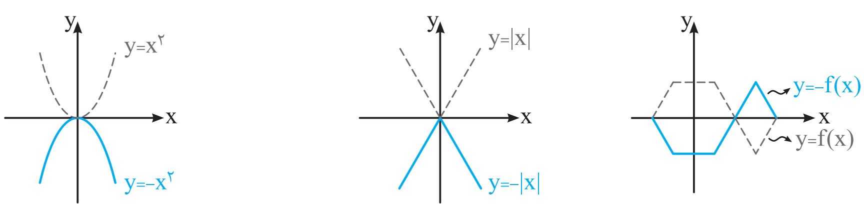
$$\text{دامنهٔ } g: -۱ \le x-۲ \le ۳ \xrightarrow{+۲} -۱+۲ \le x \le ۳+۲ \Rightarrow ۱ \le x \le ۵$$

$$\text{برد } g: ۲ < f(x-۲) \le ۵ \xrightarrow{-۳} -۱ < \underbrace{f(x-۲)-۳}_{g(x)} \le ۲ \Rightarrow -۱ < g(x) \le ۲$$

ب انعکاس نمودارها

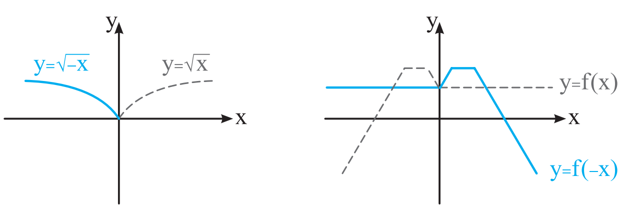
۱ برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، کافی است y ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

مثال



۲ برای رسم نمودار $y = f(-x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، کافی است x ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

مثال



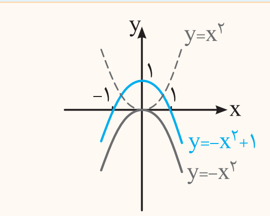
یادتون میاد وقتی بچه بودین نصفه یک شکل رو بهتون می‌دادن و می‌گفتن تقارن یافته‌اش رو نسبت به خط چین رسم کن و انگار که اون خط چین آینه بوده و انعکاس اون شکل رو تو آینه باید رسم می‌کردی.

این‌جا هم همونه باید مثل بچگی‌ها انعکاس (تقارن) نمودار رو نسبت به محورهای مختصات رسم کنید.

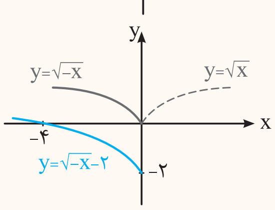
سؤال نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. **مشابه تمرین صفحه ۱۱ کتاب درسی**

❶ $y = -x^۲ + ۱$ ❷ $y = \sqrt{-x} - ۲$ ❸ $y = -\sqrt{-x+۱}$ ❹ $y = -(x-۱)^۲ + ۱$

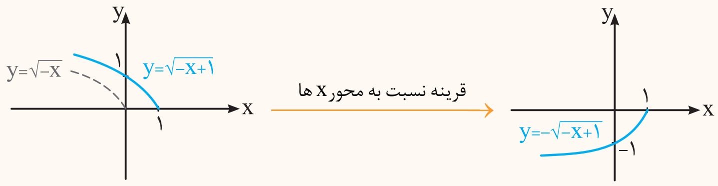
پاسخ ❶ ابتدا نمودار $y = x^۲$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^۲$ به‌دست آید، سپس نمودار $y = -x^۲$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:



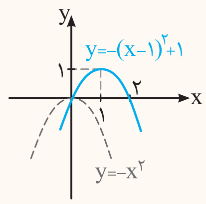
❷ ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به‌دست آید. سپس نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



۳ ابتدا نمودار $y=\sqrt{-x}$ را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم، تا نمودار $y=\sqrt{-(x-۱)}=\sqrt{-x+۱}$ به‌دست آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



۴ نمودار $y=-x^۲$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



! نکته اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب برابر با $[a,b]$ و $[c,d]$ باشد، آن‌گاه:

۱ دامنهٔ تابع $y=f(-x)$ برابر با $[-b,-a]$ است:

$$a \le -x \le b \xrightarrow{\times(-۱)} -b \le x \le -a$$

۲ برد تابع $y=-f(x)$ برابر با $[-d,-c]$ است:

$$c \le f(x) \le d \xrightarrow{\times(-۱)} -d \le -f(x) \le -c$$

بازه‌های داده‌شده در دامنه و برد، می‌تونن باز یا نیم‌باز هم باشن. برای درک بهتر یه مثال ببینین:

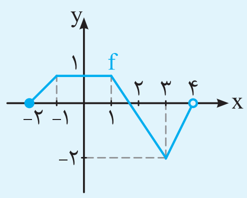
سؤال **اگر نمودار زیر مربوط به تابع f باشد، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را بیابید.**

مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰ کتاب درسی

۱ $g(x)=f(-x)+۱$

۲ $k(x)=-f(x+۱)$

۳ $h(x)=-f(-x+۱)$



پاسخ

دامنه: $D_f=[-۲,۴)$ ، برد: $R_f=[-۲,۱]$

۱
$$\begin{cases} D_g: -۲ \le -x < ۴ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲ \ge x > -۴ \Rightarrow D_g=(-۴,۲] \\ R_g: -۲ \le f(-x) \le ۱ \xrightarrow{+۱} -۱ \le f(-x)+۱ \le ۲ \Rightarrow R_g=[-۱,۲] \end{cases}$$

۲
$$\begin{cases} D_k: -۲ \le x+۱ < ۴ \xrightarrow{+(-۱)} -۳ \le x < ۳ \Rightarrow D_k=[-۳,۳) \\ R_k: -۲ \le f(x+۱) \le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲ \ge -f(x+۱) \ge -۱ \Rightarrow R_k=[-۱,۲] \end{cases}$$

۳
$$\begin{cases} D_h: -۲ \le -x+۱ < ۴ \xrightarrow{+(-۱)} -۳ \le -x < ۳ \xrightarrow{\times(-۱)} ۳ \ge x > -۳ \Rightarrow D_h=(-۳,۳] \\ R_h: -۲ \le f(-x+۱) \le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲ \ge -f(-x+۱) \ge -۱ \Rightarrow ۲ \ge h(x) \ge -۱ \Rightarrow R_h=[-۱,۲] \end{cases}$$

یاد تونه تو علوم ابتدایی یاد گرفتین که هر وقت جسم رو گرم کنیم منبسط می‌شه یعنی طولش بیش‌تر می‌شه و اگر سرد کنیم منقبض می‌شه یعنی طولش کم‌تر می‌شه. حالا این‌جا هم می‌خوایم با نمودارها همین کار رو انجام بدیم یعنی در راستای محور x ها (افقی) یا در راستای محور y ها (عمودی) منبسط یا منقبض‌شون کنیم. حالا بگین چطوری؟ اینطوری!

پ انقباض و انبساط نمودارها

۱ انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y=f(kx)$، با شرط $k>۰$ طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌کنیم. در این‌صورت:

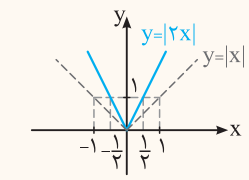
آ اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{۱}{k}$ **منقبض** می‌گردد.

ب اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{۱}{k}$ **منبسط** می‌گردد.

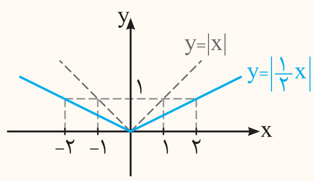
سؤال به کمک نمودار $y=|x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. **مشابه کار در کلاس صفحه ۷ کتاب درسی**

۱ $y=|2x|$ ۲ $y=|\frac{1}{2}x|$

پاسخ ۱ برای رسم $y=|2x|$ ، نمودار $y=|x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{2}=\frac{1}{k}$ منقبض می‌گردد:



۲ برای رسم $y=|\frac{1}{2}x|$ ، نمودار $y=|x|$ در راستای افقی با ضریب $2=\frac{1}{k}$ منبسط می‌گردد:



۲ انبساط و انقباض عمودی

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y=kf(x)$ ، با شرط $k>0$ عرض نقاط نمودار تابع f را در k ضرب می‌کنیم. در این‌صورت:

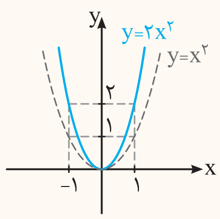
آ) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k **منبسط** می‌گردد.

ب) اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k **منقبض** می‌گردد.

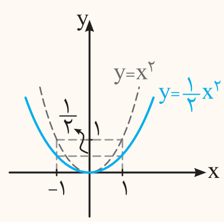
سؤال به کمک نمودار تابع $y=x^2$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱ $y=2x^2$ ۲ $y=\frac{1}{2}x^2$

پاسخ ۱ نمودار $y=x^2$ با ضریب $k=2$ در راستای قائم منبسط می‌گردد:



۲ نمودار $y=x^2$ با ضریب $k=\frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض می‌گردد:



باز هم توجه حضار رو به این نکته جلب می‌کنم که:

نکته ۱ آ) وقتی $k>1$ ، برای رسم $(k\,f(x))$ ، نمودار f را با ضریب k منبسط می‌کنیم اما برای رسم $(f(kx))$ نمودار f را با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌کنیم، یعنی برعکس هم هستند.

ب) وقتی $0<k<1$ ، برای رسم $(kf(x))$ ، نمودار f را با ضریب k منقبض می‌کنیم اما برای رسم $(f(kx))$ نمودار f را با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌کنیم.

و باز هم برعکس هم هستن. یعنی در $y=kf(x)$ ، yها واقعاً k برابر می‌شه اما در $y=f(kx)$ ، xها $\frac{1}{k}$ برابر می‌شه.

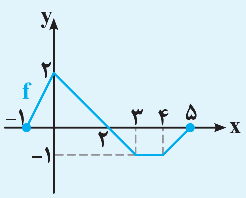
مثلاً در $y=2f(x)$ ، yها ۲ برابر می‌شه (انبساط عمودی با ضریب ۲) اما در $y=f(2x)$ ، xها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شه (انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$).

۲ برای رسم نمودار توابع $y=f(ax+b)$ ابتدا باید از ضریب x داخل پرانتز فاکتور بگیریم تا در ترتیب تبدیلات اشتباه نکنیم (و ابتدا با ضریب $\frac{1}{a}$ ، انبساط یا انقباض افقی و سپس انتقال را انجام دهیم). $y=f(ax+b)=f(a(x+\frac{b}{a}))$

یه مثال برای نکتهٔ بالا ببینین تا بهتر درکش کنین.

سؤال اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

مشابه مثال صفحه ۱۰ و تمرین ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی

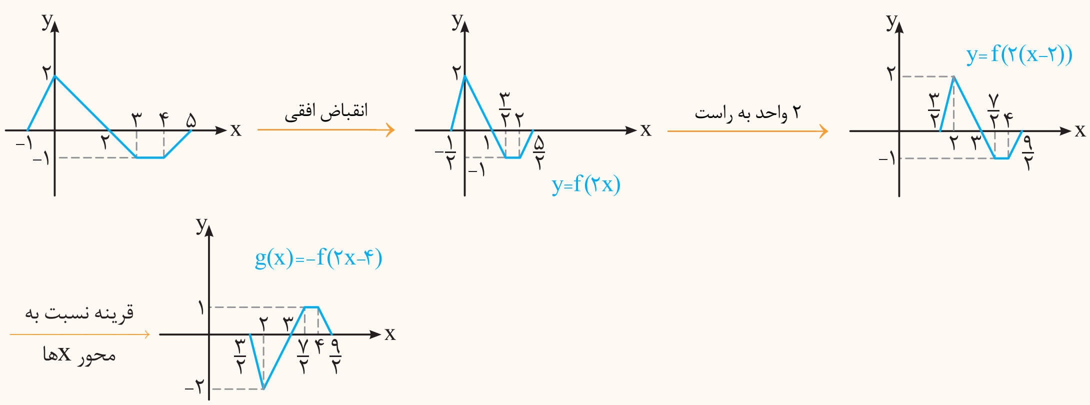


۱) $g(x) = -f(۲x - ۴)$

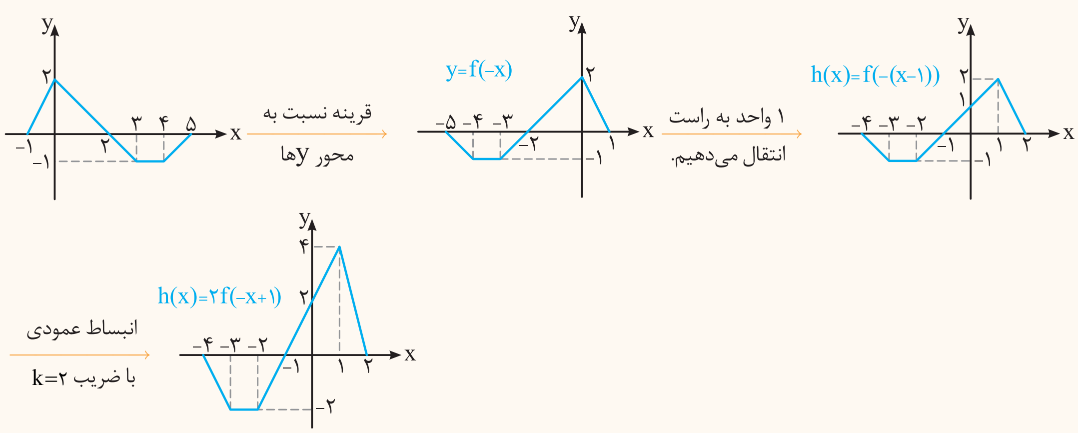
۲) $h(x) = ۲f(-x + ۱)$

پاسخ ۱) ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:
$g(x) = -f(۲(x-۲))$

بنابراین نمودار تابع f را ابتدا با ضریب $\frac{۱}{k} = \frac{۱}{۲}$ منقبض و سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y = f(۲(x-۲))$ به‌دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار g به‌دست آید:



۲) ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:
$h(x) = ۲f(-(x-۱))$



نتیجه اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[m,n]$ و $[c,d]$ باشد، آن‌گاه،

۱) برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y = kf(ax+b)+h$ کافی است نامعادلهٔ مقابل را حل کنیم:
$m \le ax+b \le n$

۲) برای محاسبهٔ برد تابع $y = kf(ax+b)+h$ ، طرفین نامعادلهٔ زیر را (با توجه به علامت k) k برابر کرده، سپس طرفین نامعادلهٔ حاصل را با h جمع می‌کنیم تا برد تابع y به‌دست آید. به طور مثال:

$$c \le f(ax+b) \le d \xrightarrow{\times k>۰} kc \le kf(ax+b) \le kd \xrightarrow{+h} kc+h \le \underbrace{kf(ax+b)+h}_{y} \le kd+h$$

در واقع برای محاسبهٔ برد باید تابع جدید رو بسازیم و ببینیم بین کدام دو عدد قرار می‌گیره!

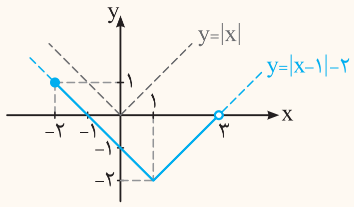
و باز هم می‌گم که، بازه‌های داده‌شده برای دامنه و برد می‌تونن باز یا نیم‌باز هم باشن.

سؤال تابع $f(x)=|x-۱|-۲$ را در بازهٔ $[-۲,۳)$ در نظر بگیرید و دامنه و برد هریک از توابع زیر را پیدا کنید. **مشابه تمرین صفحه ۱۲ کتاب درسی**

① $g(x)=-f(۲x-۱)+۳$ ② $k(x)=۳f(۲-x)-۱$

پاسخ ① ابتدا با رسم نمودار f، برد تابع f را می‌یابیم. برای رسم نمودار f نیز کافی است نمودار $y=|x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم:

$\Rightarrow f_{\text{برد}}=R_f=[-۲,۱]$



$$R_g:-۲\le f(۲x-۱)\le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲\ge -f(۲x-۱)\ge -۱ \xrightarrow{+۳} ۵\ge \underbrace{-f(۲x-۱)+۳}_{g(x)}\ge ۲ \Rightarrow R_g=[۲,۵]$$

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۲,۳)$ است، بنابراین:

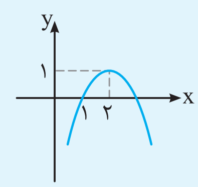
$$D_g:-۲\le (۲x-۱)<۳ \xrightarrow{+۱} -۱\le ۲x<۴ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲}\le x<۲ \Rightarrow D_g=[-\frac{۱}{۲},۲)$$

②
$$D_k:-۲\le ۲-x<۳ \xrightarrow{+(-۲)} -۴\le -x<۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۴\ge x>-۱ \Rightarrow D_k=(-۱,۴]$$

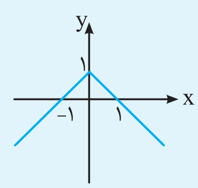
$$R_k:-۲\le f(۲-x)\le ۱ \xrightarrow{\times ۳} -۶\le ۳f(۲-x)\le ۳ \xrightarrow{+(-۱)} -۷\le ۳f(۲-x)-۱\le ۲ \Rightarrow R_k=[-۷,۲]$$

حالا چند تا مثال متفاوت‌تر و امتحانی‌تر ببینین تا تجربه‌ای بشه که پرقدرت‌تر نمودار هر تابعی که بهتون بدن رو رسم کنین.

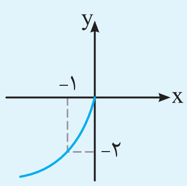
سؤال ضابطهٔ هریک از توابع زیر را به کمک توابع $y=|x|$، $y=x^۲$، $y=\sqrt{x}$ و $y=\frac{۱}{x}$ بنویسید. **مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۲ کتاب درسی**



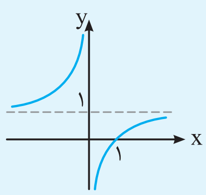
①



②



③



④

پاسخ ① با مقایسهٔ نمودار داده‌شده و نمودار $y=x^۲$، درمی‌یابیم که نمودار $y=x^۲$ نسبت به محور xها قرینه و سپس ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$$y=x^۲ \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-x^۲ \xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-۲)^۲+۱$$

② با مقایسهٔ نمودار داده شده و نمودار $y=|x|$، درمی‌یابیم که نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

$$y=|x| \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-|x| \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{۱ واحد به بالا}} y=-|x|+۱$$

③ نمودار $y=\sqrt{x}$ هم نسبت به محور xها و هم محور yها قرینه و سپس با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط شده است:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} y=-۲\sqrt{-x}$$

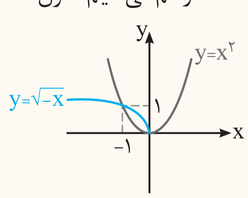
④ نمودار $y=\frac{۱}{x}$ نسبت به محور yها (یا محور xها) قرینه شده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$$y=\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{۱ واحد به بالا}} y=-\frac{۱}{x}+۱$$

سؤال به کمک رسم نمودار، معادلهٔ $x^۲-\sqrt{-x}=۰$ را حل کنید. **مشابه خرداد ۹۱**

پاسخ برای حل معادله، نمودار توابع $y=x^۲$ و $y=\sqrt{-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تقاطع، جواب‌های معادله‌اند:

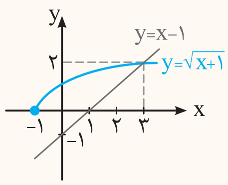
$$x^۲-\sqrt{-x}=۰ \Rightarrow x^۲=\sqrt{-x}$$



$\Rightarrow$ جواب‌های معادله $=\{۰,-۱\}$

سؤال به روش هندسی، نامعادلهٔ $\sqrt{x+۱} \geq x-۱$ را حل کنید. **مشابه شهریور ۹۴ و خرداد و دی ۹۶**

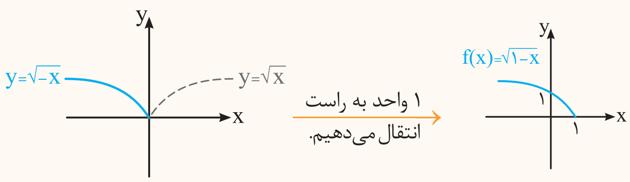
پاسخ باید نقاطی را بیابیم که در آن نقاط، نمودار $y=\sqrt{x+۱}$ بالا یا روی نمودار $y=x-۱$ قرار دارند:



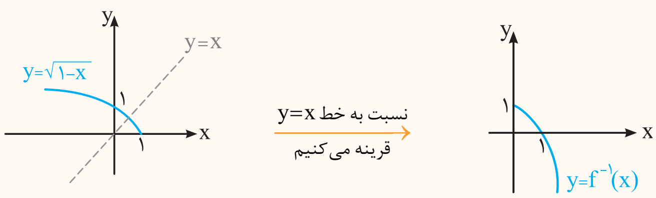
$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{-۱ \leq x \leq ۳\}$

سؤال با رسم نمودار $f(x)=\sqrt{۱-x}$ وارون‌پذیری تابع f را بررسی کنید. در صورت وارون‌پذیری، نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.
مشابه شهریور ۹۵ و ۹۲

پاسخ نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=\sqrt{-x}$ به‌دست آید. سپس نمودار حاصل را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x)=\sqrt{-(x-۱)}=\sqrt{۱-x}$ به‌دست آید.



با توجه به نمودار بالا، تابع f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است و برای رسم نمودار $f^{-۱}$ کافی است نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.



بسته ۱ پرسش‌های تشریحی — تبدیل نمودار توابع

درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

۱. برای رسم نمودار تابع $g(x)=-f(x)$ از روی نمودار تابع f، کافی است نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرد. (خرداد ۹۷)

۲. نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=f(-x)$، نسبت به محور y ها قرینه‌اند. (مشابه دی ۹۹ خارج از کشور)

۳. برای رسم تابع $g(x)=|x+۱|-۲$ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار f را یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند. (دی ۹۶ و مشابه دی ۱۴۰۱)

۴. نقطهٔ $(-۱,۴)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی نمودار $y=۲f(x)$ متناظر است. (مشابه دی ۱۴۰۱)

۵. اگر دامنهٔ تابع f برابر $[-۱,۳]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=-۳f(۲x)$ بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ است. (دی ۹۵)

۶. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور x ها به‌دست می‌آید. (خرداد ۹۸)

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۷. اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ باشد، برد این تابع مجموعهٔ .... است. (شهریور ۹۵ و مشابه شهریور ۱۴۰۲)

۱) $[۱,\sqrt{۲}]$ ۲) $[۰,+\infty)$

۸. در رسم نمودار $y=f(ax)$ از روی نمودار $y=f(x)$، اگر $۰<a<۱$ باشد، نمودار $y=f(x)$ در امتداد x ها .... می‌شود. (شهریور ۹۵)

۱) منبسط ۲) منقبض

۹. تابع $y=f(x)$ را با دامنهٔ $[-۲,۱]$ در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $g(x)=-f(۲x)+۱$ بازهٔ .... است. (خرداد ۹۴)

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۱,\frac{۱}{۲}]$

۱۰. در رسم نمودار $y=af(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، اگر $۰<a<۱$ باشد، نمودار f در امتداد محور .... ، .... می‌گردد.

۱) y ها، منبسط ۲) x ها، منبسط ۳) y ها، منقبض ۴) x ها، منقبض

۱۱ . اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از .... نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به‌دست می‌آید. (شهریور۱۴۰۰ و شهریور۹۸ خارج از کشور)

۱۲ . اگر بازهٔ $[-2,1]$ دامنهٔ تابع $f(x)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(3x+1)$ برابر .... است. (شهریور۹۹)

۱۳ . نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور .... است. (شهریور۹۸ و شهریور۹۸ خارج از کشور)

۱۴ . اگر بازهٔ $[-4,2]$ دامنهٔ تابع $f(2x+1)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر .... است. (دی ۹۸ خارج از کشور و مشابه دی ۹۹ خارج از کشور)

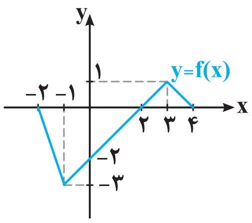
☆ ۱۵ . نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در بازهٔ $[-1,2]$ رسم کنید، سپس به کمک نمودار f ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و با نمودار f مقایسه کنید.

(برگرفته از تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

آ $y = f(-x)$ ب $y = -f(x)$ پ $y = -f(-x)$ ت $y = 2f(x)$

ث $y = \frac{1}{2}f(x)$ ج $y = f(2x)$ چ $y = -2f(\frac{x}{2})$ ح $y = \frac{1}{2}f(-2x)$

☆ ۱۶ . نمودار تابع f داده شده است، به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

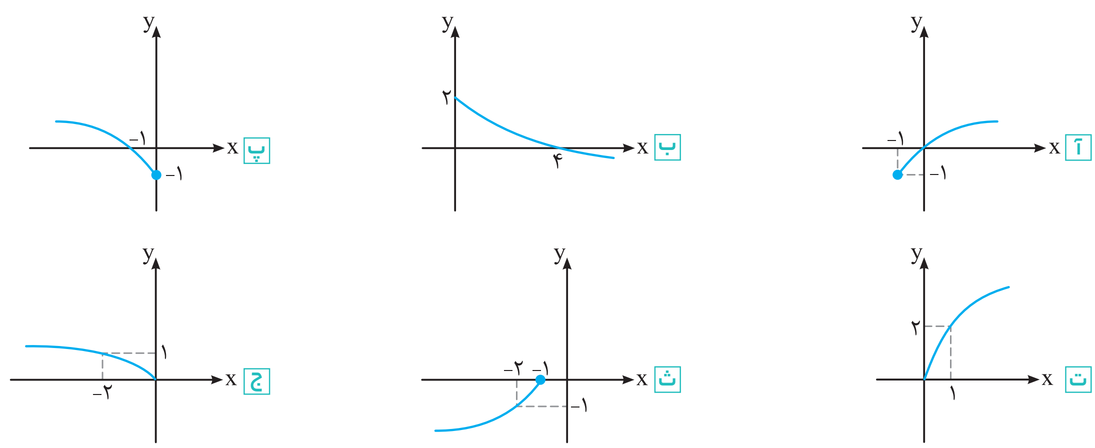


آ $y = f(-x)$ ب $y = -2f(x)$

پ $y = -f(x-1)+1$ ت $y = f(2x-4)$

ث $y = f(2-x)$ ج $y = 1-\frac{1}{3}f(x)$

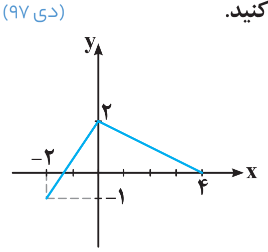
☆ ۱۷ . نمودار هر یک از توابع زیر، تبدیل‌یافتهٔ نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ است. ضابطهٔ هر یک را بنویسید. (برگرفته از تمرین ۱ صفحه ۱۱ کتاب درسی)



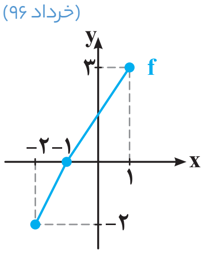
☆ ۱۸ . نقطهٔ $(-3,1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = -f(2x)$ این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌گردد؟

(شهریور ۹۶ و مشابه خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۱۹ . نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. (دی ۹۷)



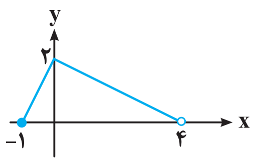
۲۰ . نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است: (خرداد ۹۶)



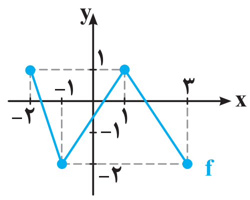
آ دامنهٔ تابع $g(x) = f(\frac{x}{2})$ را تعیین کنید.

ب نمودار $h(x) = f(-x)+1$ را رسم کنید.

۲۱ . نمودار تابع $y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1$ به‌صورت مقابل است. با رسم نمودار $y = f(x)$ دامنه و برد آن را بیابید.

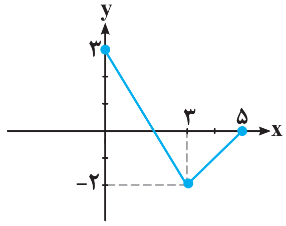


۲۲ . نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل است. با استفاده از تبدیل نمودار، نمودار تابع $y = f(\frac{1}{2}x) + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۴)



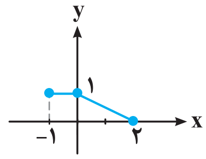
۲۳ . نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3 - x)$ را رسم کرده و دامنهٔ آن را تعیین کنید.

(شهریور ۹۸ و دی ۹۹ خارج از کشور و مشابه دی ۹۸ خارج از کشور و شهریور ۱۴۰۲)

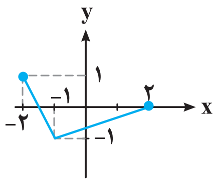


۲۴ . نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(x - 1) + 2$ را رسم کرده و دامنهٔ تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

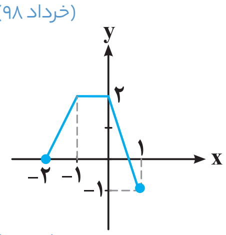
(دی ۱۴۰۰ و مشابه شهریور ۹۸ خارج از کشور و خرداد ۹۹ خارج از کشور)



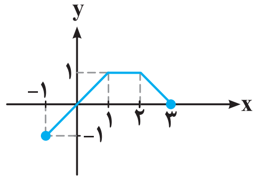
۲۵ . نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)



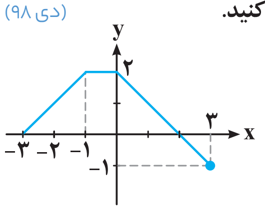
۲۶ . نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (خرداد ۹۸)



۲۷ . نمودار تابع f به‌صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۹)

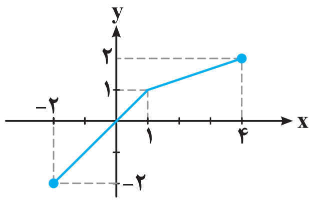


۲۸ . نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۸)



۲۹. با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

(خرداد ۹۹ و خرداد ۹۸ خارج از کشور)



۳۰. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-1|$ را با دامنهٔ $[0,2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۳)

۳۱. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-3|$ را در بازهٔ $[2,4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید. (دی ۹۱)

۳۲. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (خرداد ۹۲ و مشابه شهریور ۱۴۰۱)

● **نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.** (برگرفته از کار در کلاس صفحه‌های ۴ و ۵ کتاب درسی)

۳۳. $y = 3x^2 + 1$ ۳۴. $y = \frac{-1}{2}x^2 - 1$ ۳۵. $y = 2 - \sqrt{x-2}$ ۳۶. $y = -2\sqrt{x+1}$

۳۷. $y = -\sqrt{\frac{x}{2}}$ ۳۸. $y = 2\sqrt{-2x}$ ۳۹. $y = 1 + \sqrt{-x+1}$ ۴۰. $y = 1 - 2\cos x$

۴۱. $y = 1 - \cos(2x)$ ۴۲. $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$ ۴۳. $y = -2^{x-2} + 1$ ۴۴. $y = -\log(x+1)$

۴۵. به کمک رسم نمودار، تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x-3| = \sqrt{5-x}$ را بیابید. (خرداد ۹۷)

۴۶. با رسم نمودار، معادلهٔ $\sqrt{x+1} = x - 1$ را حل کنید. (شهریور ۹۶ و شهریور ۹۲)

۴۷. معادلهٔ $|x| = \sqrt{2+x}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (دی ۹۴)

۴۸. معادلهٔ $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

۴۹. معادلهٔ $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۱)

۵۰. نامعادلهٔ $x^2 \leq |x|$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۱ و مشابه دی ۸۹)

۵۱. نامعادلهٔ $\sqrt{x} \leq \frac{1}{x}$ را با روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۰)

۵۲. نامعادلهٔ $|x| < x + 1$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۴)

۵۳. با رسم نمودار، نامعادلهٔ $|x+1| < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به‌صورت بازه نمایش دهید. (دی ۹۶ و مشابه خرداد ۹۶)

۵۴. نامعادلهٔ $|x-1| \leq 2^x$ را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید.

۵۵. نامعادلهٔ $|x-1| \leq \log_{0/5} x$ را به روش هندسی حل کنید.

۵۶. نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ وارون‌پذیر است، سپس نمودار و ضابطهٔ وارون آن را بنویسید. (مشابه خرداد ۹۷)

۵۷. با رسم نمودار، وارون‌پذیری $y = \sqrt{x+2} - 3$ را بررسی کنید و ضابطهٔ تابع وارون را بیابید. (شهریور ۹۵)

۵۸. با رسم نمودار، وارون‌پذیری تابع $y = \sqrt{x+3} + 5$ را بررسی کنید و نمودار و ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید. (مشابه شهریور ۹۲)

۵۹. وارون‌پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4$ را روی دامنهٔ $\{x > 0\}$ بررسی کنید و ضابطه و نمودار تابع وارون را به‌دست آورید. (دی ۹۶)

۶۰. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون‌پذیر است. سپس ضابطهٔ وارون آن را بیابید. (خرداد ۹۱)

۶۱. وارون‌پذیری تابع $g(x) = \frac{2}{x+3}$ را با رسم شکل بررسی کنید. (شهریور ۹۶)

۶۲. به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری تابع زیر را بررسی کنید. (خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۶۳. نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن وارون‌پذیری تابع را بررسی کنید. در صورت وارون‌پذیری، نمودار و ضابطهٔ وارون f را تعیین کنید. (خرداد ۸۹)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۲ بخش

پاسخ‌نامه

فصل ۱
تابع

۱ | درست است. برای رسم $g(x)=-f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار f را قرینه کنیم. بنابراین نمودار f را نسبت به محور x ها (طول‌ها) قرینه می‌کنیم.

۲ | درست است. چون x ها قرینه می‌شوند.

۳ | نادرست است. برای رسم نمودار g، نمودار f را ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

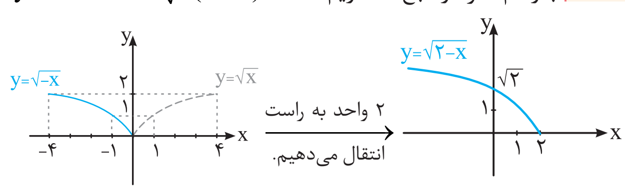
۴ | نادرست است. زیرا باید عرض‌ها دو برابر شود و در نتیجه نقطهٔ $(-۱,۴)$ با نقطهٔ $(-۱,۸)$ متناظر است.

۵ | درست است. زیرا ورودی f یعنی $۲x$ باید در بازه $[-۱,۳]$ باشند، حالا ببینیم با این شرایط x ها در کدام بازه قرار می‌گیرند:

$$-۱\le ۲x\le ۳ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲}\le x\le \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_g=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$$

۶ | نادرست است، اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض نمودار f با ضریب $\frac{۱}{k}$ در راستای محور x ها به‌دست می‌آید.

۷ | با رسم نمودار تابع f داریم: $y=\sqrt{۲-x}=\sqrt{-(x-۲)}$



بنابراین برد تابع برابر با $[۰,+\infty)$ است.

۸ | اگر $۰<a<۱$، برای رسم $y=f(ax)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{a}>۱$ در راستای محور x ها **منبسط** کنیم.

۹ | باید $(۲x)$ در دامنهٔ تابع f قرار گیرد: $g(x)=-f(۲x)+۱$

$$D_g: -۲\le ۲x\le ۱ \xrightarrow{\div ۲} -۱\le x\le \frac{۱}{۲} \Rightarrow \mathbf{D_g=[-۱,\frac{۱}{۲}]}$$

۱۰ | برای رسم $y=af(x)$ وقتی $۰<a<۱$، نمودار f را در راستای محور **y ها منقبض** می‌کنیم.

۱۱ | وقتی $k>۱$، نمودار $f(kx)$ از انقباض نمودار f با ضریب $\frac{۱}{k}$ در راستای افقی به‌دست می‌آید.

۱۲ | دامنه برابر با $[۰,۱]$ است، زیرا:

$$-۲\le ۳x+۱\le ۱ \xrightarrow{+(-۱)} -۳\le ۳x\le ۰ \xrightarrow{\div ۳} -۱\le x\le ۰$$

۱۳ | y ها قرینه شده، پس نمودار $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به محور **x ها** است.

۱۴ | **روش اول** x در بازهٔ $[-۴,۲]$ است، باید ببینیم $(۲x+۱)$ در چه بازه‌ای قرار دارد.

$$-۴\le x\le ۲ \xrightarrow{\times ۲} -۸\le ۲x\le ۴ \xrightarrow{+۱} -۷\le ۲x+۱\le ۵$$
$$\Rightarrow D_f=[-۷,۵]$$

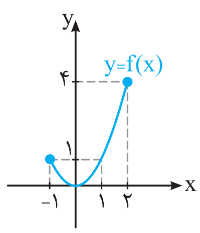
روش دوم از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$۲x+۱=t \Rightarrow ۲x=t-۱ \Rightarrow x=\frac{t-۱}{۲}$$

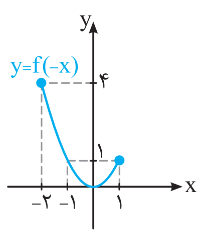
$$\begin{cases} y=f(۲x+۱)\Rightarrow y=f(t) \\ -۴\le x\le ۲ \Rightarrow -۴\le \frac{t-۱}{۲}\le ۲ \Rightarrow -۸+۱\le t\le ۴+۱ \Rightarrow -۷\le t\le ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=[-۷,۵]$$

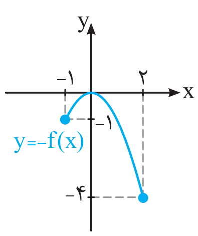
۱۵ | ابتدا نمودار $y=x^۲$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم می‌کنیم:



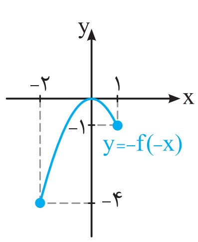
آ) برای رسم نمودار $y=f(-x)$، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



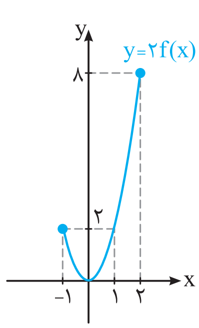
ب) برای رسم نمودار $y=-f(x)$، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



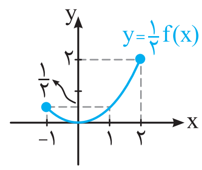
پ) برای رسم نمودار $y=-f(-x)$، نمودار f را نسبت به محور x ها و y ها قرینه می‌کنیم:



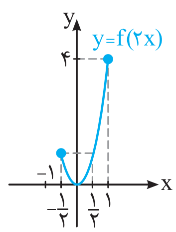
ت) برای رسم نمودار $y=۲f(x)$، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



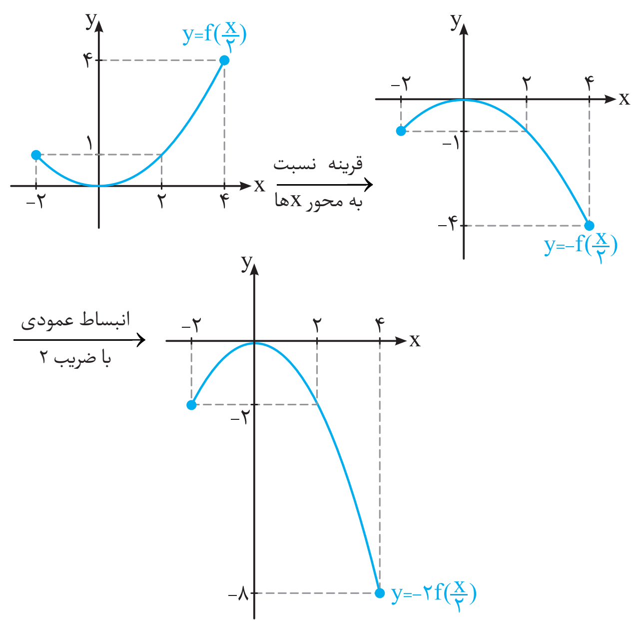
ث) برای رسم نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(x)$ ، نمودار f را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



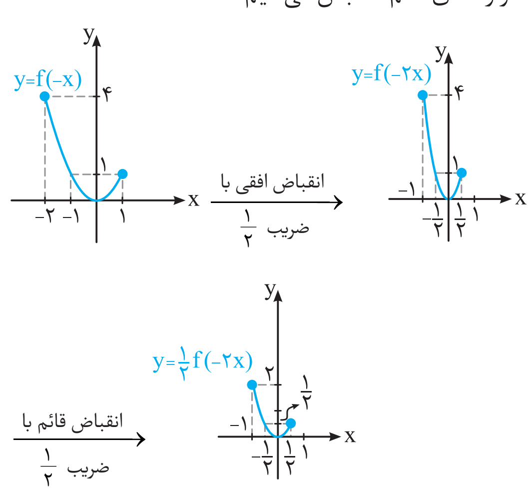
ج) برای رسم نمودار $y = f(۲x)$ ، نمودار f را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم:



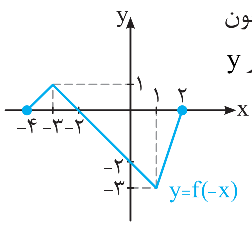
چ) برای رسم نمودار $y = -۲f(\frac{x}{۲})$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط می‌کنیم، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه و در نهایت با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



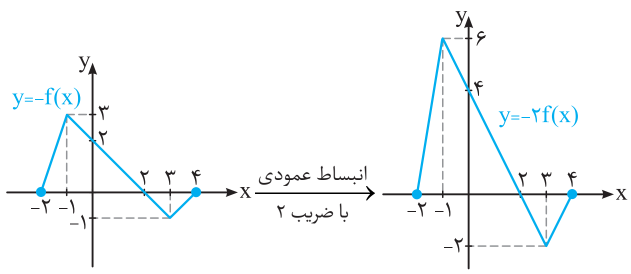
ح) برای رسم نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(-۲x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم و با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم و در نهایت با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



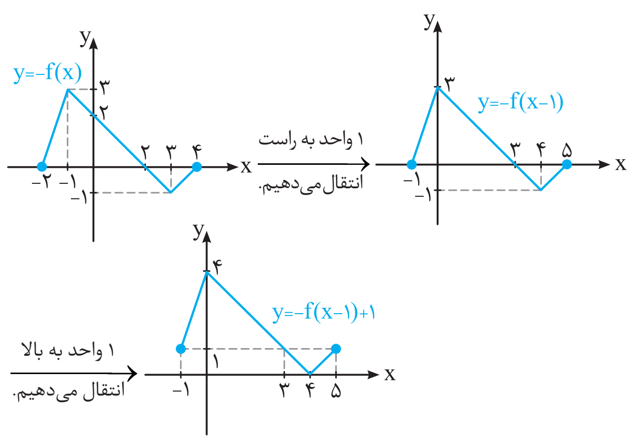
۱۶ | آ) برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، چون x ها قرینه شده، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



ب) برای رسم نمودار $y = -۲f(x)$ ، ابتدا نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس با ضریب ۲ در راستای محور y ها منبسط می‌کنیم:

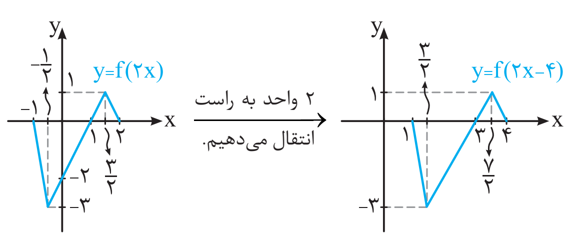


پ) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرده تا نمودار $y = -f(x)$ به‌دست آید و سپس ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -f(x-۱)$ به‌دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



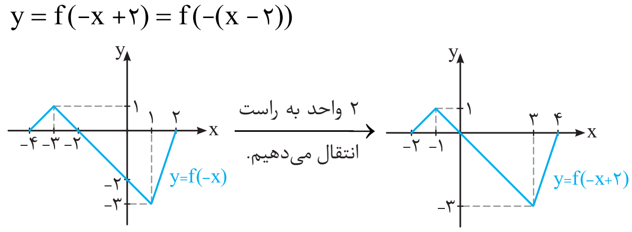
ت) $y = f(۲x-۴) = f(۲(x-۲))$

نمودار f را در راستای افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض می‌کنیم تا نمودار $y = f(۲x)$ به دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:

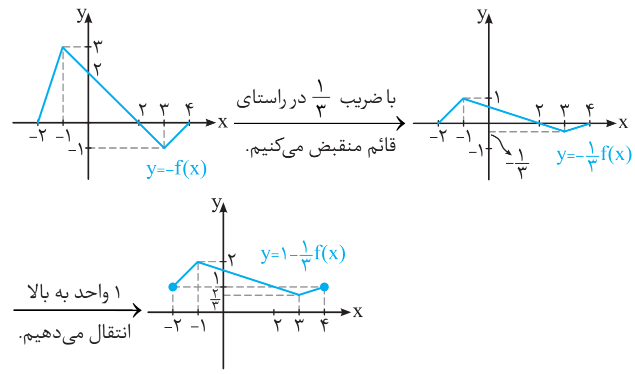


ث) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-x)$ به‌دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم.

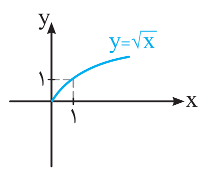
$y = f(-x+۲) = f(-(x-۲))$



ج) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)$ به‌دست آید، سپس با ضریب $\frac{۱}{۳}$ در راستای قائم (عمودی) منقبض می‌کنیم تا نمودار $y=-\frac{۱}{۳}f(x)$ به‌دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۱۷ | نمودار $y=\sqrt{x}$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار $y=\sqrt{x}$، داریم:

آ) نمودار $y=\sqrt{x}$، ۱ واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال یافته است:

$y=\sqrt{x+۱}-۱$

ب) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور x ها قرینه شده و سپس دو واحد به بالا انتقال یافته است:

$y=-\sqrt{x}+۲$

پ) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس یک واحد به پایین انتقال یافته است:

$y=\sqrt{-x}-۱$

ت) نمودار $y=\sqrt{x}$، در راستای قائم با ضریب ۲ منبسط شده است:

$y=۲\sqrt{x}$

ث) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور x ها و y ها قرینه شده و سپس ۱ واحد به چپ انتقال یافته است:

$$y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{\text{۱ واحد به چپ}}y=-\sqrt{-(x+۱)}\Rightarrow y=-\sqrt{-x-۱}$$

ج) نمودار $y=\sqrt{x}$، نسبت به محور y ها قرینه شده و با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط شده است:

$$y=\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{ضریب ۲}]{\text{انبساط افقی با}}y=\sqrt{-\frac{۱}{۲}x}$$

۱۸ | اگر نمودار f را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض کنیم و در نهایت نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار g به‌دست می‌آید:

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{ضریب }\frac{۱}{۲}]{\text{انقباض افقی با}}h(x)=f(۲x)$$

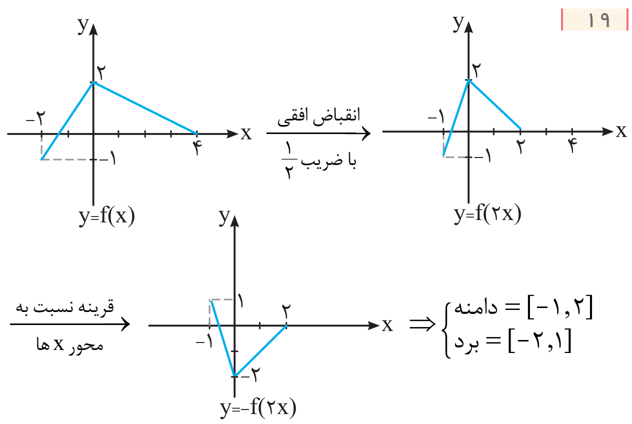
$$\xrightarrow[\text{به محور x ها}]{\text{قرینه نسبت}}g(x)=-f(۲x)$$

حالا همین کار را با نقطهٔ $(-۳,۱)$ می‌کنیم:

$$f(-۳)=۱\xrightarrow{\text{انقباض افقی}}h(-\frac{۳}{۲})=۱\xrightarrow[\text{به محور x ها}]{\text{قرینه نسبت}}g(-\frac{۳}{۲})=-۱$$

بنابراین این نقطه به نقطهٔ $(-\frac{۳}{۲},-۱)$ تبدیل می‌گردد.

۱۹ |

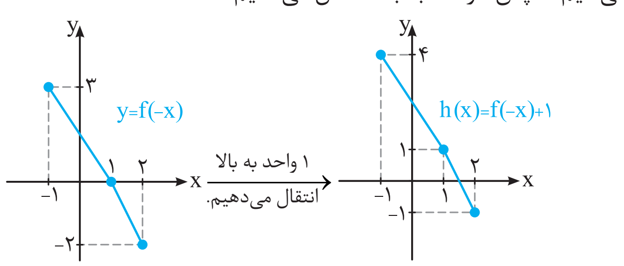


$$\Rightarrow\begin{cases}\text{دامنه}=[-۱,۲]\\ \text{برد}=[-۲,۱]\end{cases}$$

۲۰ | آ) همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، $D_f=[-۲,۱]$. پس باید ورودی f در این بازه قرار گیرد:

$$-۲\le\frac{x}{۲}\le۱\xrightarrow{\times۲}-۴\le x\le۲\Rightarrow D_g=[-۴,-۲]$$

ب) برای رسم $h(x)=f(-x)+۱$، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



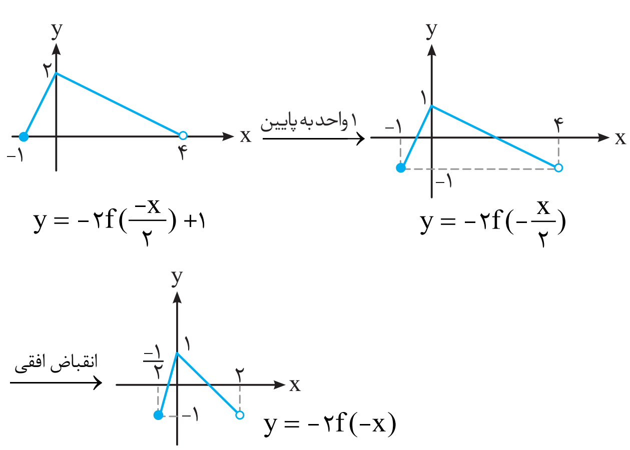
۲۱ | برای رسیدن به f از روی $y=-۲f(-\frac{x}{۲})+۱$ برعکس حرکت می‌کنیم. یعنی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

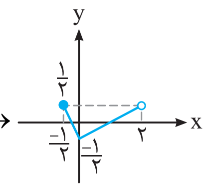
$$y=-۲f(-\frac{x}{۲})+۱\xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}}y=-۲f(-\frac{x}{۲})$$

$$\xrightarrow[x\to۲x]{\text{انقباض افقی با ضریب }\frac{۱}{۲}}y=-۲f(-x)\xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب }\frac{۱}{۲}}$$

$$y=-f(-x)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=f(-x)$$

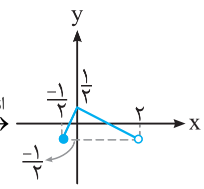
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}y=f(x)$$





y = f(-x)

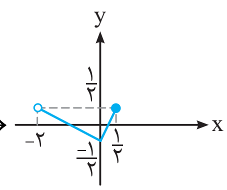
قرینه نسبت به محورxها ←



y = -f(-x)

انقباض عمودی ←

قرینه نسبت به محورyها ←

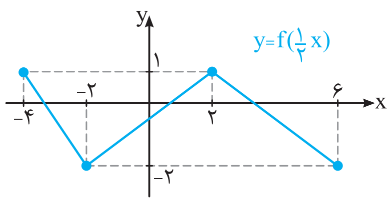


y = f(x)

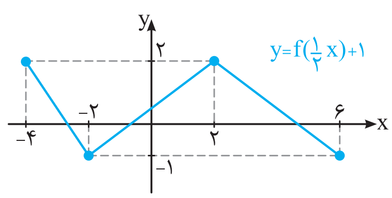
با توجه به نمودار به‌دست آمده برای f داریم:

دامنه : $D_f=(-۲,\frac{۱}{۲}]$، برد: $R_f=[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$

۲۲ برای رسم $y=f(\frac{۱}{۲}x)+۱$، نمودار f را در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم (x ها دو برابر شده)، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم



۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. ←

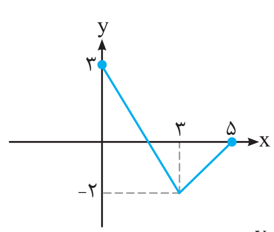


$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}=[-۴,۶] \\ \text{برد}=[-۱,۲] \end{cases}$

۲۳ ابتدا ببینیم چه بلایی سر نمودار f آمده است:

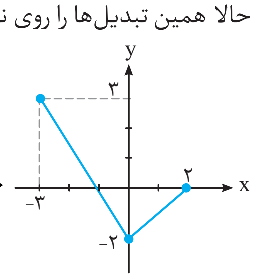
$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y=f(x+۳)\xrightarrow[\text{محورyها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=f(-x+۳)$$

حالا همین تبدیل‌ها را روی نمودار f اعمال می‌کنیم.



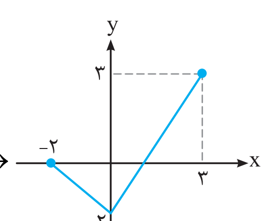
y = f(x)

۳ واحد به چپ ←



y = f(x +۳)

قرینه نسبت به محورyها ←



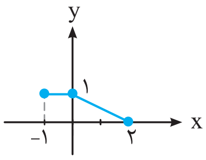
$\Rightarrow D_g=[-۲,۳]$

g(x) = f(-x +۳)

۲۴

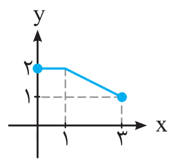
$$y=f(x)\xrightarrow[\text{۲ واحد به بالا}]{\text{۱ واحد به راست}} g(x)=f(x-۱)+۲$$

همین تبدیل‌ها را روی نمودار f اعمال می‌کنیم:



f(x)

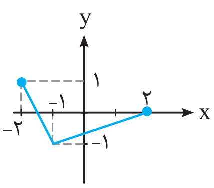
۱ واحد به راست / ۲ واحد به بالا ←



g(x) = f(x -۱) +۲

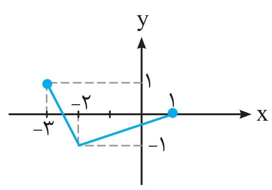
$\Rightarrow D_g=[۰,۳]$

۲۵ برای رسم $g(x)=۲f(x+۱)$ ابتدا نمودار f را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $f(x+۱)$ به‌دست آید، سپس y ها را دو برابر می‌کنیم یعنی در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم:



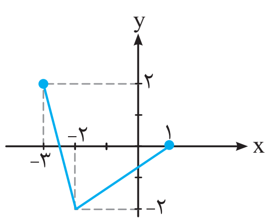
y = f(x)

۱ واحد به چپ ←



y = f(x +۱)

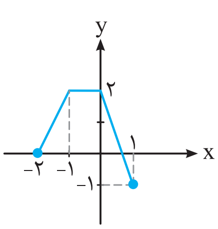
انبساط عمودی با ضریب ۲ ←



$\Rightarrow \begin{cases} D_g=[-۳,۱] \\ R_g=[-۲,۲] \end{cases}$

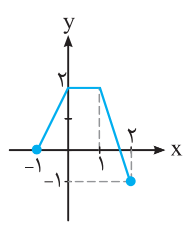
g(x) = ۲f(x +۱)

۲۶ برای رسم $g(x)=۲f(x-۱)$ ابتدا نمودار f را ۱ واحد به راست می‌بریم سپس y ها را دو برابر می‌کنیم یعنی در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم.



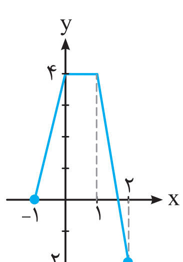
y = f(x)

۱ واحد به راست ←



y = f(x -۱)

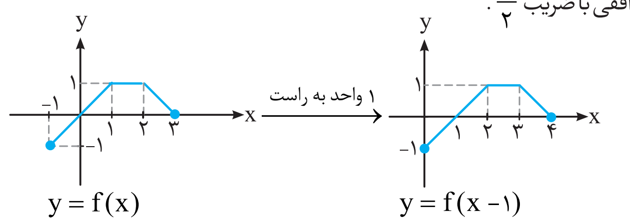
انبساط عمودی با ضریب ۲ ←

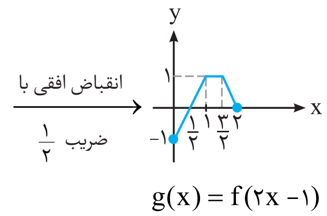


$\Rightarrow \begin{cases} D_g=[-۱,۲] \\ R_g=[-۲,۴] \end{cases}$

g(x) = ۲f(x -۱)

۲۷ | برای رسم $g(x)=f(2x-1)$ ابتدا نمودار را ۱ واحد به راست می‌بریم تا $f(x-1)$ به دست آید سپس x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم. یعنی انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$.

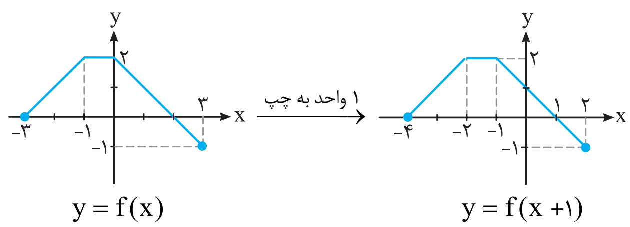


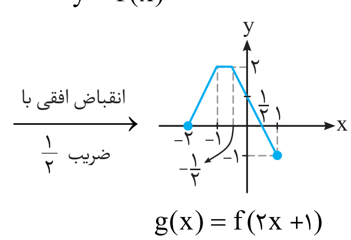


$\Rightarrow \begin{cases} D_g=[0,2] \\ R_g=[-1,1] \end{cases}$

---

۲۸ | ابتدا نمودار f را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $f(x+1)$ به‌دست آید سپس x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم تا $f(2x+1)$ به‌دست آید یعنی انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$:

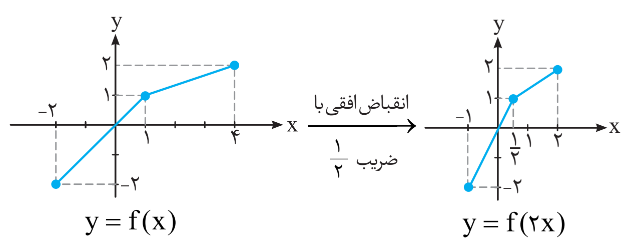


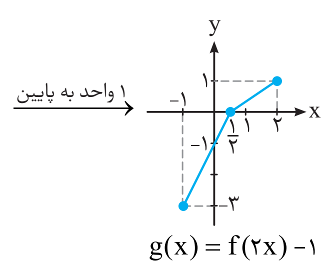


$\Rightarrow \begin{cases} D_g=[-2,1] \\ R_g=[-1,2] \end{cases}$

---

۲۹ | برای رسم $g(x)=f(2x)-1$ ابتدا x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم (انقباض افقی) و سپس نمودار را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

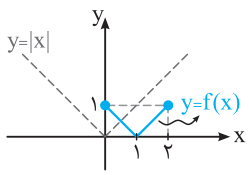




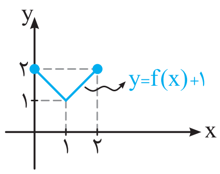
$\Rightarrow \begin{cases} D_g=[-1,2] \\ R_g=[-3,1] \end{cases}$

---

۳۰ | برای رسم $f(x)=|x-1|$ نمودار $y=|x|$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم و دامنه را به $[0,2]$ محدود می‌کنیم:



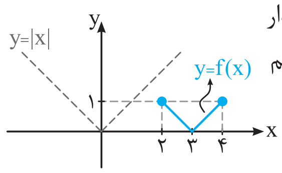
حال برای رسم $y=f(x)+1$ کافی است نمودار f را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم.



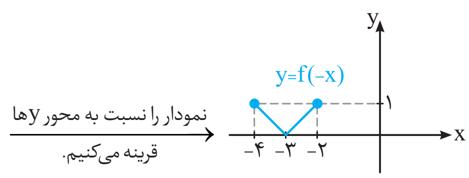
$\Rightarrow$ برد $=[1,2]$

---

۳۱ | برای رسم $f(x)=|x-3|$ نمودار $y=|x|$ را ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم و دامنه را به $[2,4]$ محدود می‌کنیم:

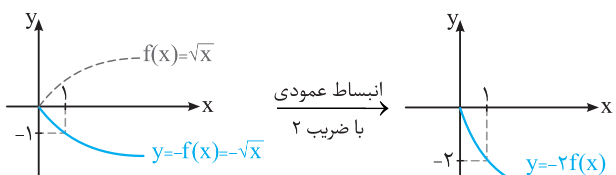


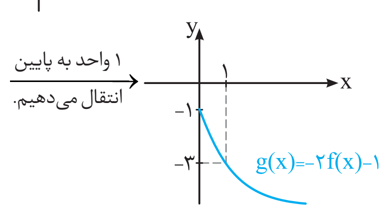
و در نهایت برای رسم $y=f(-x)$ نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



---

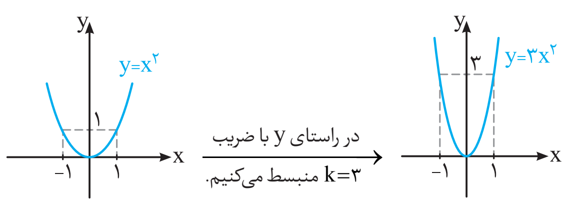
۳۲ | کافی است نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $y=-\sqrt{x}$ به‌دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

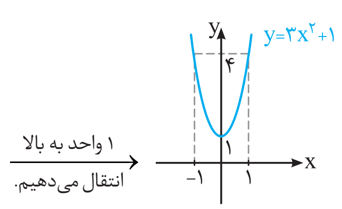




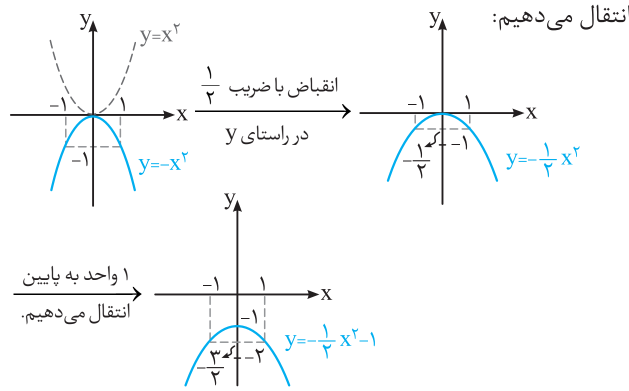
---

۳۳ | با استفاده از نمودار $y=x^2$ ابتدا y ها را ۳ برابر می‌کنیم (انبساط عمودی) و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

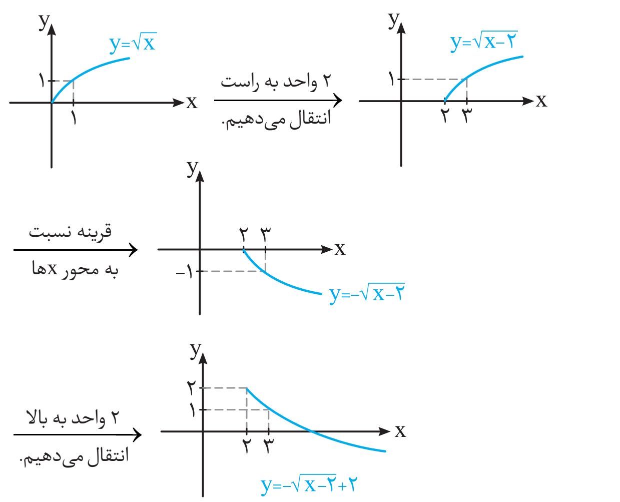




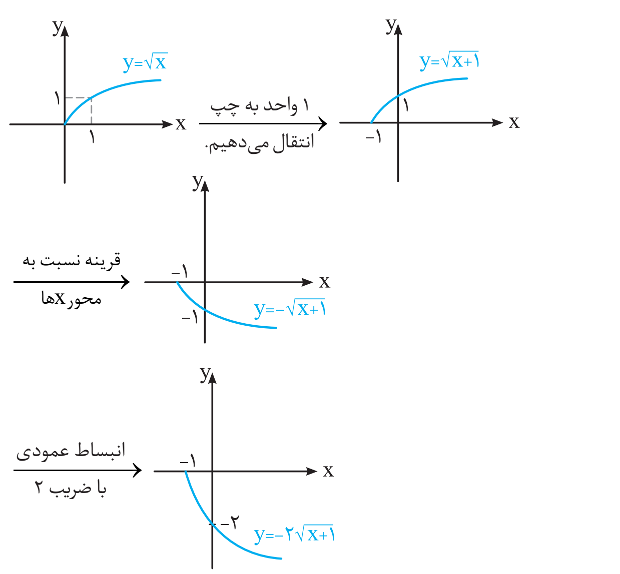
۳۴ | با استفاده از نمودار $y = x^{۲}$ ، ابتدا y ها را منفی می‌کنیم، سپس y ها را $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌کنیم (انقباض عمودی) و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



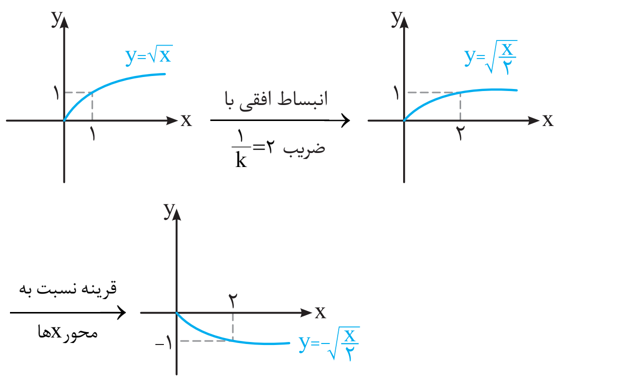
۳۵ | ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا $y = \sqrt{x - ۲}$ به‌دست آید سپس y ها را قرینه می‌کنیم $(y = -\sqrt{x - ۲})$ و در نهایت ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



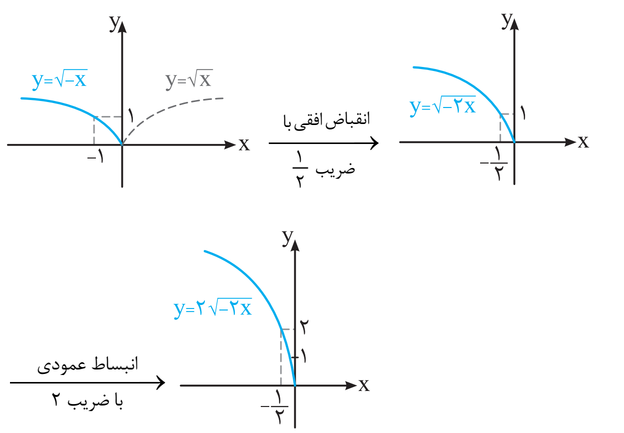
۳۶ | ابتدا $y = \sqrt{x}$ را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $y = \sqrt{x + ۱}$ به‌دست آید. سپس y ها را قرینه و در نهایت y ها را ۲ برابر می‌کنیم:



۳۷ | ابتدا در نمودار $y = \sqrt{x}$ ، x ها را ۲ برابر می‌کنیم (انبساط افقی) تا $y = \sqrt{\frac{x}{۲}}$ به‌دست آید، سپس y ها را قرینه می‌کنیم یعنی تقارن نسبت به محور x ها:

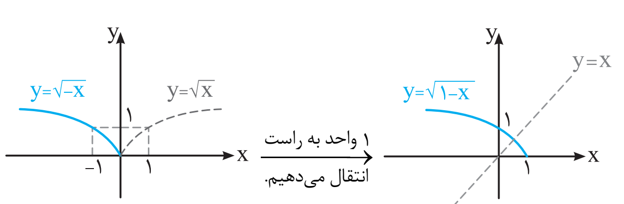


۳۸ | اول در نمودار $y = \sqrt{x}$ ، x ها را قرینه می‌کنیم (تقارن نسبت به محور y ها) بعد x ها را $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌کنیم تا $y = \sqrt{-۲x}$ به‌دست آید و در نهایت y ها را ۲ برابر می‌کنیم یعنی انبساط عمودی:



۳۹ | کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم تا x ها منفی شوند یعنی $y = \sqrt{-x}$ و سپس ۱ واحد به راست انتقال دهیم:

$$y = \sqrt{-x + ۱} \Rightarrow y = \sqrt{-(x - ۱)}$$



در نهایت $y = \sqrt{-(x - ۱)}$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم: